Il teorema di rotocontrazione per una classe di autoomeomorfismi della corona circolare.

Memoria di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (a Roma)

Sunto. - *In questa Memoria sono ripresi in esame quegli autoomeomorfismi di una corona circolare, che non ammettono punti uniti e che applicano le due circonferenze estreme ciascuna su se stessa. Per questi autoomeomorfismi viene indicata una notevole precisazione di un risultato recente; e per quelli, che non hanno punti uniti nemmeno nei rispettivi quadrati, e che soddisfanno, insieme coi loro inversi, ed in una certa metrica, a una condizione lipschitziana opportuna, sarà indicato un risultato forse definitivo. Maggiori particolari si possono trovare nella prefazione, che naturalmente costituisce il vero riassunto della Memoria.*

In questa Memoria, redatta in guisa da essere intesa anche senza una conoscenza approfondita della letteratura sull'argomento ([1]), riprendo in esame quegli autoomeomorfismi di una corona circolare, che non ammettono punti uniti e che applicano le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa.

Per questi autoomeomorfismi fornirò una notevole precisazione di un mio risultato recente ([2]) (n° 27). E per quelli, che non hanno punti uniti nemmeno nei rispettivi quadrati e che per di più soddisfanno, insieme coi loro inversi, ed in una certa metrica, ad una condizione lipschitziana opportuna, giungerò ad un risultato forse definitivo (n° 31).

Parliamo prima, nella corona, degli autoomeomorfismi che non ammettono punti uniti e che applicano le due circonferenze estreme ciascuna su se stessa.

Secondo quella precisazione, in ogni tal autoomeomorfismo della corona, è sempre presente, nella corona, almeno una curva semplice ed aperta che unisca le due circonferenze estreme della corona e che sia priva di punti in comune con la propria immagine nell'autoomeomorfismo; oppure almeno una curva semplice e chiusa, che aggiri il centro della corona e che, se non è priva essa stessa di punti in comune con la propria immagine nell'autoomeomorfismo, si possa spezzare in due archi siffatti, che uno di essi sia privo di punti in comune con la propria immagine nell'autoomeomorfismo ed abbia un diametro minore di un numero positivo prefissato, e che l'altro sia privo di punti in comune con la propria immagine nell'autoomeomorfismo e non

([1]) E condotta a termine nell'ambito dell'attività dell'Istituto nazionale di alta matematica.

([2]) Contenuto nella mia *Memoria Sugli autoomeomorfismi di una corona circolare privi di punti uniti* (Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XXXIII (1963), pagg. 1-32).

incontri nemmeno l'immagine, nell'autoomeomorfismo o nell'autoomeomorfismo inverso, di tutta la curva semplice e chiusa. Nell'ultimo sottocaso, la curva semplice e chiusa dipende eventualmente dalla scelta di quel numero positivo; e quel diametro potrà essere calcolato nella metrica euclidea.

Parliamo ora, nella corona, degli autoomeomorfismi che soddisfanno anche a quelle altre condizioni.

Secondo quel risultato definitivo, ogni tal autoomeomorfismo ammette sempre, come priva di punti in comune con la propria immagine, almeno una curva semplice e aperta, che congiunga le due circonferenze estreme della corona, oppure almeno una curva semplice e chiusa, che aggiri il centro della corona. Nel primo caso, i due campi individuati nella corona dalla curva aperta e dalla sua immagine si possono interpretare, diciamo come *campi di rotazione* per l'autoomeomorfismo indotto sulla ricovrente semplicemente connessa della corona circolare. Nel secondo caso, la curva aggira la propria immagine, o ne è aggirata; ed il campo individuato dalla curva chiusa e dall'immagine si può interpretare come un *campo di contrazione* per l'autoomeomorfismo assegnato, o per il rispettivo inverso. Ma non voglio insistere su queste considerazioni presso che ovvie. Qui desidero piuttosto osservare un'altra cosa. In quella tal condizione lipschitziana, la distanza fra due punti trasformati non potrà mai superare quella fra i rispettivi trasformandi moltiplicata per un coefficiente numerico, k, vincolato alla $k^{-2}+k^{-3}>2/\sqrt{3}$; questo tanto per l'autoomeomorfismo assegnato, quanto per il rispettivo inverso. Il vincolo rappresentato dalla $k^{-2}+k^{-3}>2/\sqrt{3}$, che è soddisfatto per $k=6/5$ e che implica per esempio la $k<5/4$, è imposto dalla costruzione. E può darsi che basti cambiare questa per attenuare quello. Ma sarebbe certamente più interessante vedere cosa significhi, per un autoomeomorfismo della corona circolare, essere topologicamente equivalente ad uno che (applichi le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa e che) soddisfaccia, insieme coll'inverso, a quella tal condizione lipschitziana.

§ 1. - Traslazioni piane generalizzate.

1. - In questo paragrafo, e nei tre successivi, ricorderò, insieme con le definizioni necessarie per intenderli, alcuni risultati *sulle traslazioni piane generalizzate*, cioè su quelle applicazioni topologiche del piano reale euclideo ambiente su se stesso, che conservano il senso delle rotazioni e che non ammettono punti uniti [3].

---

[3] Per le indicazioni bibliografiche rimando alla mia Memoria *A proposito degli autoomeomorfismi del cerchio dotati di un punto unito solo* (Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XXXIII (1963), pagg. 332-406).

2. - Lo spazio ambiente, al quale apparterranno tutti i punti, le curve, le linee, le semilinee e le superficie che avremo occasione di considerare, sia dunque il piano reale euclideo. E sia t una traslazione piana generalizzata.

Un *arco di traslazione*, relativo a t, è una curva semplice ed aperta, che ha in comune con la propria immagine, nella t, soltanto un punto, estremo sia per la curva oggettiva, sia per l'immagine. Ovvio cosa si debba intendere per *segmenti di traslazione*, relativi a t.

A proposito degli archi di traslazione relativi a t è noto che:

Una curva semplice ed aperta, la quale abbia almeno uno dei due estremi immagine dell'altro nella t, e la quale abbia in comune con la propria immagine nella t soltanto estremi, suoi o dell'immagine, è addirittura un arco di traslazione nella t.

Se α è un arco di traslazione nella t, la curva α ha in comune soltanto un punto anche con $t^{-1}(\alpha)$, il significato di $t^{-1}(\alpha)$ essendo dato dalla solita convenzione. E questo punto comune è un estremo di α, nonchè di $t^{-1}(\alpha)$. Dettolo A, l'altro estremo di α è dato da $t(A)$. Il punto A è l'*origine* di α, e $t(A)$ ne è il *termine*, sempre con riferimento a t, naturalmente.

Su α, il verso che porta dall'origine al termine sarà assunto come *positivo*; e quello che porta dal termine all'origine, come *negativo*. E quando useremo, a proposito di α, frasi implicanti un ordinamento dei suoi punti, ci riferiremo sempre all'ordinamento indotto dal suo verso positivo.

Se si scambiano gli uffici di t e t^{-1}, l'arco α è sempre un arco di traslazione; ma la sua origine diventa il suo termine; e il suo termine diventa la sua origine; ecc. In linea di massima non insisteremo più su osservazioni del genere.

Fermo il significato di α, le immagini di α nelle diverse potenze della t porgono, complessivamente, la *traiettoria*, $\pi(\alpha)$,

$$\pi(\alpha) = \ldots + t^{-1}(\alpha) + \alpha + t(\alpha) + \ldots,$$

generata da α nella t. Di guisa che $\pi(\alpha)$ appare anche come la traiettoria generata da α nella t^{-1}.

3. - A proposito degli archi di traslazione relativi a t e delle rispettive traiettorie, è noto che ogni punto del piano appartiene ad infiniti archi siffatti, e quindi ad infinite traiettorie. E di qui, e dalla circostanza che:

Le traiettorie delle traslazioni piane generalizzate sono linee semplici e aperte,

cioè immagini biunivoche e continue delle rette reali euclidee, si deduce subito che:

Insieme con t, son traslazioni piane generalizzate anche t^2 e t^{-2} e t^{-3}... e non soltanto t^{-1};

epperò, che ogni potenza di t individua il proprio esponente; ed in particolare, che t^0 è l'unica potenza di t uguale all'identità.

Ed ormai è ovvio che, su ogni traiettoria (della t), ogni punto della traiettoria individua, insieme con la propria immagine, un arco di traslazione, atto a generare la traiettoria.

Il penultimo teorema si può precisare, nel senso che:

Le traiettorie delle traslazioni piane generalizzate sono immagini biunivoche e bicontinue delle rette reali euclidee;

vale a dire, che una traiettoria non può mai riavvicinarsi indefinitamente ad una posizione per la quale sia già passata.

4. - Premesso che un insieme di punti del piano è *libero* nella t, se non ha punti in comune con la propria immagine nella t, rammentiamo come nello stesso ordine di idee del primo teorema del numero precedente rientrino tanto la circostanza che:

Una curva semplice e aperta, che sia libera nella t, è libera anche in tutte le potenze di t diverse dall'identità;

quanto quella che:

Un insieme internamente connesso D di punti del piano è libero nelle potenze di t diverse da t e dalla sua inversa, nonché dall'identità, se l'interno di D non contiene nessun punto interno a $t(D)$, vale a dire, se l'interno di D non contiene nessun punto interno a $t^{-1}(D)$.

A chiarimento di quest'ultimo enunciato ricordiamo che l'*interno* dell'insieme D è l'insieme dei punti interni a D (e questo anche se D non è internamente connesso); e che D è *internamente connesso*, se due punti di D si possono sempre congiungere, qualunque essi siano, con archi semplici che siano contenuti, a meno eventualmente degli estremi, nell'interno di D.

E cogliamo l'occasione per avvertire che l'*interno* di una curva semplice ed aperta è peraltro formato dai punti della curva diversi dagli estremi, in armonia con la circostanza, che per la curva si parla dei punti diversi dagli estremi come dei punti interni alla curva.

5. - Sia π una traiettoria della t. L'insieme dei punti che son d'accumulazione per π, e che non appartengono a π, è chiuso, in conformità dell'ultimo teorema del n° 3, anche se non è vuoto; epperò esso divide il piano in uno o più insiemi aperti connessi e non vuoti, cioè in uno o più campi. E π appartiene ad uno di questi campi. Anzi:

La traiettoria π divide il campo che la contiene in altri due campi disgiunti, i quali hanno entrambi π come linea di frontiera,

e forniscono i due *campi adiacenti* a π. Queste circostanze, e l'ultima proposizione del n° 3, ci autorizzano a parlare, in un significato ovvio, delle due *bande* di π.

La traiettoria π non esaurisce sempre la frontiera dei propri campi adiacenti. Ciò non ostante:

I punti che non appartengono alla traiettoria π e che possono esser uniti a π mediante curve semplici ed aperte aventi su π soltanto un estremo, si distribuiscono appunto nei due campi adiacenti alla traiettoria, esaurendoli.

Dopo di ciò, per comprendere che:

Ciascun punto dei due campi adiacenti a π può esser congiunto con tutti i punti di π mediante curve semplici ed aperte aventi su π soltanto un punto, e precisamente soltanto un estremo,

basta ricordare di nuovo l'ultima proposizione del n° 3. Invece la definizione istessa di traiettoria implica che:

Le traiettorie della solita traslazione piana generalizzata t son invarianti nella t,

invarianti in quanto insiemi, naturalmente. E di qui si trae subito che:

Insiemi invarianti nella t son anche i singoli campi adiacenti alle diverse traiettorie della t;

nel fatto, si rammenti che le traslazioni piane generalizzate conservano il senso delle rotazioni.

6. – Secondo il lemma fondamentale sulle traiettorie delle traslazioni piane generalizzate:

Una curva semplice ed aperta incontra, anzi taglia, la propria immagine nella traslazione piana generalizzata t, se gli estremi della curva semplice ed aperta staccano, su qualche traiettoria della t, un arco, il quale abbia in comune con la curva semplice ed aperta soltanto gli estremi e contenga nel proprio interno archi di traslazione della t,

vale a dire, se si preferisce:

Una curva semplice e aperta taglia la propria immagine nella traslazione piana generalizzata t, se esiste un tal arco α, di traslazione di t, che la curva incontri tanto $t^{-1}(\alpha)+t^{-2}(\alpha)+\ldots$, quanto $t(\alpha)+t^{2}(\alpha)+\ldots$, ma non contenga nessun punto di α, eccezion fatta, al massimo, per uno solo degli estremi di α.

E chiudiamo questo paragrafo fissando esplicitamente una convenzione discorsiva: talvolta, per esprimere che l'intersezione di certi insiemi non è vuota, invece di dire che questi insiemi si incontrano, diremo anche che essi si *intersecano*. In particolare, due curve che si tocchino in un punto, si intersecano senz'altro, anche se non si tagliano nemmeno altrove.

§ 2. – **Suddivisioni simpliciali privilegiate.**

7. – In questo e nei due paragrafi successivi riassumeremo la teoria delle suddivisioni simpliciali privilegiate rispetto ad una traslazione piana generalizzata. L'esposizione riproduce, con qualche modifica e qualche sop-

pressione, quella sviluppata nella seconda delle mie Memorie citate (§§ 3, 4 e 5); peraltro, i riferimenti particolari saranno di massima taciuti, come saranno di massima taciuti anche i riferimenti che potrebbero farsi in seguito.

Nel piano, una suddivisione simpliciale K è *privilegiata* rispetto alla traslazione generalizzata t (e quindi anche rispetto alla traslazione generalizzata t^{-1}), se la stella corrente di K è libera nella t (e quindi anche nella t^{-1}). La stella corrente di K è intesa qui come la somma di tutte le facce di K con un vertice nel centro della stella, fornito naturalmente dal vertice corrente di K; ma talvolta sarà identificata con il complesso simpliciale delle facce, dei lati e dei vertici che concorrono a formarla.

Naturalmente:

Un punto e la sua immagine nella traslazione piana generalizzata t non possono appartenere mai ad una medesima stella di una suddivisione simpliciale privilegiata rispetto a t;

e non possono appartenere mai, *a fortiori*, nemmeno ad una medesima faccia di una tal suddivisione.

8. - Nel piano, la presenza di suddivisioni simpliciali privilegiate rispetto ad una traslazione generalizzata t si dimostra abbastanza facilmente anche nel caso generale [4].

Peraltro, per gli scopi di questa Memoria è sufficiente supporre che la traslazione piana generalizzata t sia uniformemente continua, insieme con t^{-1}, ed ammetta un numero positivo come estremo inferiore delle distanze dei punti del piano dalle rispettive immagini (nella t e quindi anche nella t^{-1}). Ed in queste condizioni quella tal presenza è ovvia. Anzi in queste condizioni è ovvio che la suddivisione simpliciale K del piano è privilegiata rispetto a t, se essa è *equilatera*, cioè se essa possiede soltanto facce equilatere, e se la lunghezza comune dei lati di K è abbastanza piccola.

Le suddivisioni simpliciali di una suddivisione simpliciale privilegiata rispetto a t, sono privilegiate anch'esse rispetto a t; la cosa è evidente.

9. - Sia sempre t una traslazione piana generalizzata; e K una suddivisione simpliciale del piano, privilegiata rispetto a t.

Allora un arco (un segmento), che sia di traslazione per t e che si presenti come somma di lati di K, è un arco (un segmento) *elementare* di traslazione, con riferimento a t ed a K naturalmente.

La terminologia si può utilizzare anche per archi (e segmenti), che non siano di traslazione rispetto a t. Così parleremo di archi (e di segmenti) *elementari* rispetto a K, secondo espressioni ormai ovvie nel loro significato.

[4] Si vegga, per esempio, la Memoria citata in [3]; e precisamente se ne vegga il n° 24.

E parleremo altresì di poligonali (e di spezzate) *elementari* rispetto a K, il significato delle espressioni essendo sempre ovvio, ma con l'avvertenza che useremo la terminologia soltanto per poligonali (e spezzate) semplici.

In conformità di ciò, diremo *elementari*, rispetto a K, tutti quei poligoni (poligoni, nel senso di superficie poligonali), che siano contornati da poligonali elementari rispetto a K; cioè tutti quei poligoni che si presentino come somme di facce di K e che siano contornati da poligonali semplici e chiuse.

10. - Ferme le ipotesi e le notazioni del numero precedente, sia α_0 un arco di traslazione della t, elementare rispetto a K, con l'origine nel punto A_0, e quindi il termine nel punto $t(A_0)$. Allora è manifesto che:

Nelle ipotesi attuali, nessuno dei punti interni ad α_0 *può essere interno a qualche faccia di* K;

e basta ricordare la proposizione del n° 7 per riconoscere che:

Nelle ipotesi attuali, K *possiede almeno due vertici nell'interno di* α_0.

11. - Ferme le notazioni attuali, gli estremi di α_0 ed i vertici di K interni ad α_0 determinano una suddivisione simpliciale di α_0, quella, a_0, che sarà ricordata come la suddivisione simpliciale *subordinata* da K su α_0. I vertici ed i lati di a_0 sono vertici e lati di K. La proposizione precedente diventa:

La suddivisione simpliciale a_0 *possiede, complessivamenle, almeno tre lati; e possiede, nell'interno di* α_0, *almeno due vertici.*

Se si percorre α_0 nel verso positivo, cioè da A_0 a $t(A_0)$, i vertici ed i lati di a_0 si incontrano in un certo ordine. Al quale ci riferiamo sempre, anche se non lo avvertiremo esplicitamente, ogni volta che per questi vertici e per questi lati useremo locuzioni implicanti un concetto di ordinamento (la convenzione richiedendo peraltro che si sia fissata chiaramente t, quell'ordine mutandosi nel suo opposto, se si scambiano gli uffici di t e t^{-1}).

Il primo lato di a_0 ha un estremo in A_0; e l'ultimo ne ha uno in $t(A_0)$. Tutti gli altri lati di a_0 sono contenuti nell'interno di α_0; e formano il *sottoarco essenziale* di α_0, con riferimento a K naturalmente. L'origine di α_0 appartiene soltanto al primo lato di a_0; ed il termine soltanto all'ultimo. Ogni vertice di a_0 interno ad α_0 appartiene a due lati di a_0, e soltanto a due.

12. - Sia V_0 un vertice di a_0 interno ad α_0; e W_0 sia la stella di K col centro nel punto V_0. Allora a_0 divide W_0 in due poligoni, che saranno i poligoni di W_0 *individuati* da α_0.

A proposito di questi poligoni è ovvio che:

Nessuno di essi può contenere punti di α_0 *nel proprio interno*;

ed è noto che:

Nessuno di essi può intersecare simultaneamente $t^{-1}(\alpha_0)+t^{-2}(\alpha)+\ldots$ *e* $t(\alpha_0)+t^2(\alpha_0)+\ldots$,
come si potrebbe dedurre peraltro subito dall'ultima proposizione del n° 6.

Rispetto a K, i poligoni di W_0 individuati da α_0 sono elementari.

13. - Sia adesso π_0 la traiettoria generata da α_0 (nella t); siano Π_0 e Π_0' i due campi adiacenti a π_0; e sia s uno dei lati della suddivisione a_0.

Allora s appartiene a due facce sole di K, diciamole δ e δ^*.

Le facce δ e δ^* sono *adiacenti* ad α_0, lungo s. E parleremo di s come di un lato di *adiacenza,* tanto per α_0 e δ, quanto per α_0 e δ^*.

Non è restrittivo supporre che δ sia *rivolta* verso Π_0, lungo s; dopo di che δ^* sarà *rivolta* verso Π_0', lungo s. Il significato di queste ultime frasi è evidente; e sarebbe facile precisarlo con tutto rigore.

Se sono presenti, per δ ed α_0, due lati di adiacenza, lungo di essi δ è sempre *rivolta* verso la stessa banda di α_0; analogamente per δ^*, in circostanze analoghe.

Ogni faccia di K sarà considerata altresì come *adiacente* a ciascuno dei propri lati.

14. - Sia di nuovo V_0 un vertice di a_0 interno ad α_0; e W_0 la stella di K col centro in V_0. E fissiamo la nostra attenzione, per esempio, sul campo Π_0.

Le facce, adiacenti ad α_0 lungo i lati di a_0 uscenti da V_0, e rivolte verso Π_0 lungo questi lati di adiacenza, possono coincidere (in una sola), oppur no (nel qual caso sono soltanto due). Ebbene:

Anche in questo secondo caso, quelle facce sono contenute in uno medesimo dei poligoni di W_0 *individuati da* α_0;
e precisamente in quello *rivolto* verso Π_0 nel punto V_0; cioè in quello siffatto, che i suoi punti interni stiano in Π_0 se sono abbastanza vicini a V_0.

§ 3. - Facce e lati di prima e seconda categoria; facce e lati eccezionali.

15. - Ferme le ipotesi e le notazioni introdotte nel paragrafo precedente, consideriamo di nuovo un lato, s, di a_0. E sia di nuovo δ la faccia di K adiacente ad α_0 lungo s, rivolta verso Π_0 lungo s.

Noi diremo che s è di *prima categoria,* per α_0 e Π_0 (per a_0 e Π_0), se δ incontra $t^{-1}(\alpha_0)$; che s è di *seconda categoria,* per α_0 e Π_0 (per a_0 e Π_0), se δ incontra $t(\alpha_0)$; che s è *eccezionale,* per α_0 e Π_0 (per a_0 e Π_0), se δ non incontra nè $t^{-1}(\alpha_0)$, nè $t(\alpha_0)$. E la terminologia si trasporta subito da s a δ; di guisa che anche δ o è di *prima categoria,* o è di *seconda categoria,* o è *eccezionale,* per α_0 e Π_0 (per a_0 e Π_0), il tutto con riferimento a t ed a K, naturalmente.

Il riferimento a t essendo sempre tacito, è ovvio che:

Una faccia di K (un lato di a_0), eccezionale per α_0 e Π_0, non può essere nè di prima, nè di seconda categoria;

ma dalla seconda proposizione del n° 12 si deduce subito che:

Quelle facce di K, epperò anche quei lati di a_0, che son di prima (seconda) categoria per α_0 e Π_0, non possono esserlo di seconda (prima).

Unita alla proposizione del n° 14, la seconda proposizione del n° 12 porge altresì che:

Due lati consecutivi di a_0 non possono essere, per α_0 e Π_0, uno di prima e l'altro di seconda categoria, la categoria potendo quindi cambiare soltanto se si passa per lati eccezionali;

e dopo ciò basta osservare che:

Il primo e l'ultimo lato di a_0 son rispettivamente di prima e di seconda categoria, per α_0 e Π_0;

per dedurre che:

In a_0 (in K) vi son sempre lati (facce) eccezionali per α_0 e Π_0.

Accanto alla penultima proposizione rammentiamo che:

Il sottoarco essenziale di α_0 contiene tutti i lati di a_0 eccezionali per α_0 (e Π_0), anzi contiene tutte le intersezioni di α_0 con le facce di K eccezionali per α_0 (e Π_0);

e dopo di aver ricordato anche che:

Quei lati di a_0 che ne precedono (seguono) uno di prima (seconda) categoria, per α_0 e Π_0, non possono essere di seconda (prima) categoria, per α_0 e Π_0;

chiudiamo questo numero osservando che, se si scambiano gli uffici di t e t^{-1}, gli elementi di prima categoria si scambiano con quelli di seconda, mentre gli elementi eccezionali restano eccezionali.

16. – Ferme le solite ipotesi, e le solite notazioni, e ricordato in particolare che Π_0' è l'altro campo adiacente alla traiettoria π_0 generata dall'arco elementare α_0, sia δ_1 una faccia di K, con i vertici nei punti P_0, Q_0 ed R_0, eccezionale, nella t, per α_0 e Π_0.

Ed i nomi dei vertici di δ_1 siano stati scelti in tal guisa, che P_0 sia il primo e Q_0 l'ultimo dei punti comuni ad α_0 e δ_1. Allora P_0 e Q_0 sono contenuti nel sottoarco essenziale di α_0, mentre R_0 o è esterno ad α_0 o è contenuto anche lui nel sottoarco essenziale di α_0.

Tanto nel primo quanto nel secondo caso indichiamo con ψ_0' il sottoarco di α_0 individuato da A_0 e P_0, con ψ_0^* quello individuato da P_0 e Q_0, e con ψ_0'' quello individuato da Q_0 e $t(A_0)$. Allora ψ_0^* è, in α_0, la minima sottopoligonale che contenga l'intersezione di α_0 e δ_1.

Nel primo caso poniamo poi $\psi_1 = P_0R_0 + R_0Q_0$; e nel secondo $\psi_1 = P_0Q_0$. Allora ψ_1 è quella, delle poligonali individuate da P_0 e Q_0 sul contorno di δ_1, che ha soltanto gli estremi su α_0 (l'altra avendo su α_0 almeno tutto un lato di δ_1).

Ferme queste posizioni, rammentiamo che i punti interni a ψ_1 sono interni a Π_0; anzi, che:

I punti di δ_1 esterni al sottoarco essenziale di α_0, cioè i punti di δ_1 esterni ad α_0 (fra i quali compaiono appunto anche quelli interni a ψ_1), sono interni a Π_0;

e ricordiamo altresì che:

Tutti i lati di a_0 contenuti in ψ_0^* sono eccezionali per α_0 e Π_0,

come seguirebbe dalla circostanza che tutti i punti del poligono elementare contornato dalla poligonale semplice e chiusa $\psi_0^* + \psi_1$ esterni a ψ_0^* sono interni anch'essi a Π_0.

17. - Consideriamo adesso la curva semplice ed aperta α_1 definita dalla posizione $\alpha_1 = \psi_0' + \psi_1 + \psi_0''$; consideriamo cioè la curva semplice ed aperta α_1 ottenuta sostituendo ψ_0^* in α_0 mediante ψ_1. In queste condizioni è noto, e peraltro è ovvio, che:

Anche α_1 è un arco di traslazione della t, elementare rispetto a K;

e dopo di ciò, nella definizione istessa di α_1 è implicito che:

Gli archi α_0 ed α_1 hanno la stessa origine, A_0, e lo stesso termine, $t(A_0)$;

anzi che:

Il primo e l'ultimo lato di a_0 coincidono, rispettivamente, col primo e l'ultimo lato di a_1,

se a_1 è la suddivisione simpliciale subordinata da K su α_1. E la prima proposizione del numero precedente porge che:

I punti di α_1 esterni ad α_0 sono interni a Π_0;

mentre l'ultima di quello stesso numero dà che:

In a_1 si ritrovano tutti quei lati di a_0 che erano di prima o di seconda categoria per α_0 e Π_0.

Nella definizione di α_1 è altresì implicito che:

Quei lati di a_1, che non compaiono fra i lati di a_0, compaiono fra i lati di δ_1.

Diremo che α_1 si ottiene da α_0 mediante l'*aggiunzione* della faccia δ_1, eccezionale per α_0 e Π_0; e che ψ_0^* è la poligonale *soppressa*, nell'aggiunzione, e ψ_1 quella *aggiunta*. E rammenteremo di nuovo che la poligonale soppressa è, in α_0, la minima sottopoligonale che contenga l'intersezione di α_0 e δ_1; e che la poligonale aggiunta è formata da uno o da due lati di δ_1.

18. - Indichiamo con π_1 la traiettoria generata da α_1 nella t. Allora, dalla quarta proposizione del n° 17 si deduce facilmente che:

La traiettoria π_1 appartiene completamente a $\Pi_0 + \pi_0$;

ma è altresì noto che i punti interni a ψ_0^* sono interni ad un medesimo campo adiacente a π_1; anzi, se Π_1' è quel campo adiacente a π_1 che contiene l'interno di ψ_0^*, è noto, più generalmente, che:

I punti di δ_1 esterni al sottoarco essenziale di α_1, cioè i punti di δ_1 esterni ad α_1 (fra i quali compaiono appunto anche quelli interni a ψ_0^*), sono interni a Π_1'.

In quest'ultima proposizione è implicito che:

La traiettoria π_0 è contenuta in $\Pi_1' + \pi_1$;

inoltre è noto che:

Nelle condizioni attuali, il campo Π_0 contiene il campo Π_1, ed il campo Π_1' contiene il campo Π_0';

epperò che:

In K, le facce adiacenti ai lati comuni di a_0 ed a_1 e rivolte, lungo questi lati comuni, verso Π_0 (verso Π_0'), sono rivolte, lungo questi lati comuni, anche verso Π_1 (verso Π_1'); quelle rivolte verso Π_1 (verso Π_1'), sono rivolte anche verso Π_0 (verso Π_0').

19. – Proseguendo in questa rapida rassegna di risultati, ricordiamo adesso che:

Ogni eventuale lato di K, comune ad a_0 ed a_1 ed eccezionale per α_1 e Π_1, è eccezionale anche per α_0 e Π_0;

che:

In K, ogni eventuale lato comune ad a_0 e ad una faccia eccezionale per α_1 e Π_1 appartiene anche ad a_1;

e che, pertanto:

In K, quelle facce, che sono eccezionali per α_1 e Π_1 e che hanno dei lati su α_0, sono eccezionali anche per α_0 e Π_0.

Dopo di ciò, la penultima proposizione del n° 17 si può precisare, nel senso che:

Tutti quei lati di a_0, che non sono eccezionali per α_0 e Π_0, compaiono anche in a_1 e vi compaiono come lati non eccezionali per α_1 e Π_1;

anzi la precisazione potrebbe essere proseguita, fino a riconoscere che i lati di a_0 di prima (seconda) categoria per α_0 e Π_0 son di prima (seconda) categoria anche per α_1 e Π_1.

20. – Su a_0 consideriamo l'ultimo lato di prima categoria, per α_0 e Π_0, ed il primo di seconda, con riferimento a t naturalmente. Quel lato precede questo, a norma dell'ultima proposizione del n° 15. Quel lato e questo non possono essere consecutivi, a norma della terza proposizione dello stesso numero. Sicchè su a_0 vi son lati che seguono tutti quelli di prima categoria, per α_0 e Π_0, e precedono tutti quelli di seconda. Essi sono ovviamente eccezionali per α_0 e Π_0, rispetto a t. Li diremo *eccezionali in senso stretto*, o *strettamente eccezionali,* per α_0 e Π_0, il tutto sempre con riferimento a t (nonchè a K). Riassumendo:

Vi son sempre lati di a_0, *strettamente eccezionali per* α_0 *e* Π_0, *i lati strettamente eccezionali essendo anche eccezionali;*
inoltre:

I lati di a_0 *strettamente eccezionali per* α_0 *e* Π_0 *costituiscono una suddivisione simpliciale di un sottoarco non nullo e non degenere di* α_0;
e precisamente del sottoarco *strettamente eccezionale* di α_0, relativo (a t, a K ed) a Π_0.

§ 4. - Catene eccezionali.

21. - Ferme naturalmente restando le solite ipotesi e le solite convenzioni, sia addesso Δ_m,

$$\Delta_m = (\delta_1, \ldots, \delta_m), \tag{1}$$

una *catena* di K, cioè una m-pla ordinata di facce $\delta_1, \ldots, \delta_m$ di K, m essendo qui un numero intero e positivo.

Noi diremo che una tal m-pla ordinata è una *catena eccezionale* per α_0 e Π_0 (rispetto a t e K), e che m è la sua *lunghezza,* se δ_1 è eccezionale per l'arco elementare di traslazione α_0 e per il campo Π_0 adiacente alla traiettoria π_0, generata da α_0; se δ_2 è eccezionale per α_1 e Π_1, qualora α_1 sia l'arco elementare di traslazione ottenuto aggiungendo δ_1 ad α_0. e Π_1 sia quel campo adiacente alla traiettoria π_1, generata da α_1, che non contiene nessun punto di δ_1; se δ_3 è eccezionale per α_2 e Π_2, qualora α_2 sia...; e, finalmente, se δ_m è eccezionale per α_{m-1} e Π_{m-1}, qualora α_{m-1} sia l'arco elementare di traslazione ottenuto aggiungendo δ_{m-1} ad α_{m-2}, e Π_{m-1} sia quel campo adiacente alla traiettoria π_{m-1}, generata da α_{m-1}, che non contiene nessun punto di δ_{m-1}.

Dopo di che α_m sarà quell'arco elementare di traslazione che si ottiene aggiungendo δ_m ad α_{m-1}; e π_m sarà la traiettoria generata da α_m; e Π_m il campo adiacente a π_m privo di punti in comune con δ_m.

Naturalmente $\Pi'_0, \Pi'_1, \ldots, \Pi'_m$ saranno i campi rispettivamente adiacenti a $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m$ e rispettivamente diversi da $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_m$.

Naturalmente anche a_0 riavrà il solito significato; ed ovviamente analogo al suo sarà il significato di $a_1, \ldots, a_m$. Dopo di ciò si potrà anche dire che la catena (1) è *eccezionale* per a_0 e Π_0.

E si dirà altresì che α_m si ottiene da α_0 mediante l'*aggiunzione* di Δ_m.

Spesso lo stesso simbolo Δ_m che denota la catena (1) sarà utilizzato anche per indicare la somma di $\delta_1, \ldots, \delta_m$, in quanto insiemi di punti. Inoltre i lati ed i vertici di $\delta_1, \ldots, \delta_m$ porgeranno anche i lati ed i vertici di Δ_m, in quanto catena; e si parlerà di $\delta_1, \ldots, \delta_m$ anche come delle facce di Δ_m, in quanto catena.

22. – Se ci si limita, eventualmente, alle catene di lunghezza unitaria, la quinta proposizione del n° 15 porge subito che:

In K, la presenza di catene eccezionali per α_0 e Π_0 è certa;

e dopo di ciò, ormai, è ovvio anche che:

In K, la lunghezza per una catena eccezionale relativa ad α_0 e Π_0 si può prefissare ad arbitrio,

attesa la possibilità di iterare indefinitamente l'aggiunzione di facce eccezionali.

Formuliamo esplicitamente altre due osservazioni, introducendo qualche simbolo ovvio nel significato. Precisamente:

Se $(\delta_1, \ldots, \delta_p)$ è una catena eccezionale per α_0 e Π_0 e $(\delta_{p+1}, \ldots, \delta_{p+q})$ è una catena eccezionale per α_p e Π_p, la catena $(\delta_1, \ldots, \delta_{p+q})$ è eccezionale per α_0 e Π_0 e l'aggiunzione di $(\delta_1, \ldots, \delta_{p+q})$ ad α_0 porta agli stessi risultati finali dell'aggiunzione di $(\delta_{p+1}, \ldots, \delta_{p+q})$ ad α_p;

inoltre:

Se la catena $(\delta_1, \ldots, \delta_{p+q})$ è eccezionale per α_0 e Π_0, la catena $(\delta_1, \ldots, \delta_p)$ è eccezionale per α_0 e Π_0 e la catena $(\delta_{p+1}, \ldots, \delta_{p+q})$ lo è per α_p e Π_p;

e si tratta veramente di circostanze che non hanno bisogno di dimostrazione, per poco che si rammentino le definizioni e si intenda rettamente il significato dei simboli.

23 – Posto che la (1) sia una catena eccezionale per α_0 e Π_0, e ferme restando le altre convenzioni, rammentiamo che:

Se p è un numero intero, positivo o nullo, minore di m, la spezzata a_p e la faccia di δ_{p+1} hanno in comune almeno un lato;

che:

Nelle stesse ipotesi, l'intersezione di a_p e δ_{p+1} è formata da lati e da vertici di K contenuti nel sottoarco essenziale di α_p, epperò interni ad α_p;

che:

Nelle stesse ipotesi, quei lati di a_{p+1}, che non compaiono fra i lati di a_p, compaiono fra i lati di δ_{p+1};

che:

Nelle solite ipotesi, se il numero intero p, positivo o nullo, ed il numero naturale q non superano m, l'intersezione di a_p e δ_q o è vuota o è formata da lati e da vertici contenuti nel sottoarco essenziale di α_p;

e che:

Gli archi $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ hanno la stessa origine e lo stesso termine;

anzi che:

Le spezzate $a_0, a_1, \ldots, a_m$ *hanno lo stesso primo e lo stesso ultimo lato.*

E si può osservare anche che:

Gli archi $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *sono rispettivamente contenuti negli insiemi* $\alpha_0 + \delta_1, \ldots$
$\ldots, \alpha_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_m$,

come segue subito dall'ultima proposizione del n° 17, o dalla terza di questo numero; e che:

Tutti quei lati della spezzata a_0 *che non sono eccezionali per* α_0 *e* Π_0, *compaiono anche in* $a_1, \ldots, a_m$; *e non sono eccezionali nemmeno per* α_1 *e* $\Pi_1, \ldots,$ *per* α_m *e* Π_m;

come segue subito dall'applicazione reiterata dell'ultimo teorema del n° 19, mentre le ultime righe di quel numero ci permetterebbero addiritura di affermare che i lati di a_0 di prima (seconda) categoria per α_0 e Π_0 sono di prima (seconda) categoria anche per α_1 e $\Pi_1, \ldots,$ per α_m e Π_m.

24. - Posto di nuovo che la (1) sia una catena eccezionale per α_0 e Π_0 e ferme di nuovo le solite convenzioni, rammentiamo altresì che:

Nelle ipotesi attuali, Π_0 *contiene* Π_m *e* Π'_m *contiene* Π'_0;

epperò che i campi $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_m$ vanno decrescendo, mentre i campi Π'_0, $\Pi'_1, \ldots, \Pi'_m$ vanno crescendo; che:

Le traiettorie π_0 *e* π_m *sono rispettivamente contenute negli insiemi* $\Pi'_m + \pi_m$ *e* $\Pi_0 + \pi_0$;

anzi che:

Tutti i punti di α_m *esterni ad* α_0 *appartengono a* Π_0; *tutti i punti di* α_0 *esterni ad* α_m *appartengono a* Π'_m;

e finalmente che:

L'insieme Δ_m *è contenuto tanto nella somma di* Π_0 *e del sottoarco essenziale di* α_0, *quanto nella somma di* Π'_m *e del sottoarco essenziale di* α_m;

e che:

L'insieme Δ_m *è libero nella* t.

Nelle proposizioni precedenti è implicito che:

Se $m > 1$, *i triangoli* $\delta_1, \ldots, \delta_m$ *della catena eccezionale* (1) *sono distinti a due a due*;

epperò che la lunghezza di una catena eccezionale porge anche il numero delle facce della catena.

25. - Ferme le solite convenzioni, accanto ai risultati precedenti rammentiamo che:

Se la catena (1) *è eccezionale per* α_0 *e* Π_0, *e se* δ_m *ha un lato su* α_0, *questo lato appartiene anche ad* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, *anzi questo lato appartiene anche ai sottoarchi essenziali di* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$; *e* δ_m *è eccezionale anche per* α_0 *e* Π_0, *per* α_1 *e* $\Pi_1, \ldots,$ *per* α_{m-2} *e* Π_{m-2};

come si trova stabilito nel n° 45 della seconda delle mie Memorie citate.

26. - Ferme le solite ipotesi, fissiamo un'altra convenzione, precisamente, conveniamo nel dire che una m-pla ordinata,

$$(\delta_1, \dots, \delta_m),$$

di facce, $\delta_1, \dots, \delta_m$, di K porge una *catena semiregolare* rispetto ad α_0, se δ_p e δ_q sono distinte, per poco che i numeri naturali p e q siano diversi fra di loro (e non superino m), e se a_0 ha un lato in comune con δ_1, e δ_1 uno con $\delta_2, \dots$, e δ_{m-1} uno con δ_m (senza escludere con questo che a_0 possa avere lati in comune anche con altre facce della catena, e così per $\delta_1, \dots$, e così per δ_m). E dimostriamo che:

Se la solita catena (1) *è eccezionale per* α_0 *e* Π_0, *essa ammette sottocatene semiregolari per* δ_0 *con l'ultima faccia in una, prefissata a piacere, delle* $\delta_1, \dots, \delta_m$,

ovvia essendo l'accezione del termine *sottocatena.*

Possiamo limitarci a dimostrare il teorema per δ_m (attesa l'ultima proposizione del n° 22). E, nel vero, il triangolo δ_m ha almeno un lato su a_{m-1}, visto che esso è eccezionale per α_{m-1} e Π_{m-1}, rispetto a t. E questo lato (se $m > 1$), o è un lato di δ_{m-1}, o è un lato di a_{m-2}, vista la terza proposizione del n° 23. Nel secondo caso (se $m > 2$), quel lato, o è un lato di δ_{m-2}, o è un lato di a_{m-3}, vista la terza proposizione del n° 23. Nel secondo caso (se $m > 3$), quel lato, ecc. ecc. Insomma: o uno dei lati di δ_m appartiene ad a_0; ovvero m è maggiore di 1 e δ_m ha almeno un lato in comune con uno dei triangoli $\delta_1, \dots, \delta_{m-1}$. E si può ripetere tutto il ragionamento a partire da questo triangolo. E giungere alla conclusione, ricordando che le facce di una catena eccezionale sono distinte a due a due.

§ 5. - **Gli enunciati conclusivi.**

27. - Terminata l'esposizione delle premesse, ecco il primo dei nuovi teoremi conclusivi:

Per ogni autoomeomorfismo, $\boldsymbol{t}$, *di una corona circolare,* $\boldsymbol{C}$, *il quale non ammetta punti uniti ed applichi le due circonferenze estreme di* $\boldsymbol{C}$ *ciascuna su se stessa, è sempre presente, in* $\boldsymbol{C}$, *almeno una curva semplice ed aperta che unisce le due circonferenze estreme di* $\boldsymbol{C}$ *e che è libera in* $\boldsymbol{t}$, *oppure almeno una curva semplice e chiusa che aggira il centro di* $\boldsymbol{C}$ *e che, se non è libera in* $\boldsymbol{t}$, *si può spezzare in due archi siffatti, che uno di essi non sia soltanto libero in* $\boldsymbol{t}$, *ma abbia un diametro minore di un numero positivo prefissato, e che l'altro non sia soltanto libero in* $\boldsymbol{t}$, *ma non incontri nemmeno l'immagine, o in* $\boldsymbol{t}$ *o in* $\boldsymbol{t}^{-1}$, *di tutta la curva semplice e chiusa* (*che dipenderà eventualmente dalla scelta di quel tale numero positivo*).

Naturalmente è ovvio che le condizioni imposte a $\boldsymbol{t}$ si traducono in condizioni analoghe per $\boldsymbol{t}^{-1}$.

28. - Data $\boldsymbol{t}$, si fissi, nel piano ambiente, un sistema di coordinate polari. Come polo si assuma il centro di $\boldsymbol{C}$, l'asse polare potendo essere scelto ad arbitrio. Come unità di misura per i segmenti si assuma il raggio di $\boldsymbol{C}$, cioè un segmento cogli estremi allineati col centro di $\boldsymbol{C}$ e posti uno sull'interna e l'altro sull'esterna delle due circonferenze che delimitano $\boldsymbol{C}$. Inoltre, per quello che ha tratto il verso positivo delle rotazioni, si dica $\boldsymbol{O}$ il punto comune al semiasse polare positivo ed alla minor circonferenza del contorno di $\boldsymbol{C}$; e se $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{O}) = \boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{O})$, si fissi quel verso positivo a piacere; invece, se $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{O}) \neq \boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{O})$, si assuma come positivo quel verso in cui $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{O})$ e $\boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{O})$ si succedono nell'ordine scritto sulla minor circonferenza del contorno di $\boldsymbol{C}$.

In quest'ultimo caso, se si scambiano gli uffici di $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{t}^{-1}$, si scambiano necessariamente anche gli uffici dei due versi del piano. Pertanto ogni volta che scambieremo gli uffici di $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{t}^{-1}$, noi assumeremo come positivo il verso già scelto come negativo; ciò anche se $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{O})$ e $\boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{O})$ coincidono.

29. - Se ξ è uno degli argomenti del punto $\boldsymbol{P}$ di $\boldsymbol{C}$, in quel sistema di coordinate polari, ed η il modulo di $\boldsymbol{P}$, tutti gli altri argomenti di $\boldsymbol{P}$ si ottengono aggiungendo a ξ i numeri interi relativi; e risulta $\rho \leq \eta \leq \rho + 1$, se ρ misura il raggio della minor circonferenza del contorno di $\boldsymbol{C}$.

Se $\boldsymbol{P}'$ e $\boldsymbol{P}''$ son punti di $\boldsymbol{C}$, con i moduli rispettivi dati da η' ed η'', il loro *scarto*,

$$\| \boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}'' \|,$$

è l'estremo inferiore, anzi il minimo, dei valori assunti dalla radice quadrata

$$\sqrt{(\xi' - \xi'')^2 + (\eta' - \eta'')^2}$$

al variare di ξ' fra gli argomenti di $\boldsymbol{P}'$ e di ξ'' fra quelli di $\boldsymbol{P}''$, la radice quadrata essendo ovviamente intesa in senso aritmetico (come tutte quelle considerate in questa Memoria). Questo scarto, assunto a distanza, definirà la *metrica polare* nella corona $\boldsymbol{C}$; epperò si parlerà di esso appunto anche come della *distanza* fra $\boldsymbol{P}'$ e $\boldsymbol{P}''$ nella metrica polare.

Non è il caso di chiedersi se nella metrica polare sussista il teorema del triangolo. In questa Memoria ci basterà sapere che la distanza fra $\boldsymbol{P}'$ e $\boldsymbol{P}''$ nella metrica polare tende a zero, se, e soltanto se, tende a zero quella calcolata secondo la metrica euclidea assegnata nel piano ambiente.

30. - Rispetto alla metrica polare, la solita trasformazione topologica $\boldsymbol{t}$ della corona $\boldsymbol{C}$ è lipschitziana, secondo il coefficiente k, se risulta

$$\| \boldsymbol{t}(\boldsymbol{P}')\boldsymbol{t}(\boldsymbol{P}'') \| \leq k \| \boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}'' \| , \tag{2}$$

qualunque siano i punti $\boldsymbol{P}'$ e $\boldsymbol{P}''$ tratti dalla corona $\boldsymbol{C}$, k essendo una costante reale.

Se $\boldsymbol{t}^{-1}$ è lipschitziana anch'essa, rispetto alla stessa metrica, e secondo lo stesso coefficiente, accanto alla (2) sussiste la

$$\| \boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{P}')\boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{P}'') \| \leq k \| \boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}'' \| , \tag{3}$$

$\boldsymbol{P}'$ e $\boldsymbol{P}''$ essendo sempre qualunque nella corona circolare.

La (2) e la (3), in quanto valide per ogni coppia di punti $\boldsymbol{P}'$ e $\boldsymbol{P}''$ tratti della corona, equivalgono complessivamente all'unica condizione bilaterale

$$\frac{1}{k} \| \boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}'' \| \leq \| \boldsymbol{t}(\boldsymbol{P}')\boldsymbol{t}(\boldsymbol{P}'') \| \leq k \| \boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}'' \| , \tag{4}$$

nella quale naturalmente $\boldsymbol{P}'$ e $\boldsymbol{P}''$ sono sempre intesi come qualunque nella corona circolare.

E per esprimere che $\boldsymbol{t}$ soddisfa ad una tal condizione (4), diremo che essa è *bilateralmente lipschitziana*, secondo il coefficiente k, rispetto alla metrica polare.

Si noti che se $\boldsymbol{t}$ è bilateralmente lipschitziana, secondo il coefficiente k, rispetto alla metrica polare, le stesse circostanze si presentano anche per $\boldsymbol{t}^{-1}$.

31. - Ebbene, il secondo risultato conclusivo di questa Memoria è fornito dal seguente teorema di rotocontrazione:

Se l'autoomeomorfismo $\boldsymbol{t}$ della corona circolare $\boldsymbol{C}$ applica le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa, è privo di punti uniti, insieme col suo quadrato, ed è bilateralmente lipschitziano, rispetto alla metrica polare, secondo un coefficiente k soddisfacente alla

$$k^{-2} + k^{-3} > 2/\sqrt{3} ,$$

esso ammette come libera, nella corona, almeno una curva semplice ed aperta, che unisca le due circonferenze estreme della corona, oppure almeno una curva semplice e chiusa, che aggiri il centro della corona.

Naturalmente non è escluso che queste due circostanze si possano presentare simultaneamente. E dovrebbe essere superfluo osservare esplicitamente che il coefficiente k non può essere minore dell'unità, come segue subito dalle (4) istesse.

32. – La condizione lipschitziana non sarà mai utilizzata in guisa essenziale fino a tutto il § 12, cioè fino a tutta la dimostrazione del teorema del n° 27. Prima di quel paragrafo essa sarà invocata soltanto per dimostrare le due proposizioni del n° 43 e l'ultima del n° 79. E questa e quelle saranno utilizzate soltanto a partire dal § 13. Analogamente nei riguardi della $k^{-2}+k^{-3}>2/\sqrt{3}$; essa sarà utilizzata alla fine del n° 75 per fissare una condizione marginale, che non ricorrerà mai prima del § 13.

Anche la mancanza di punti uniti nel quadrato della $\boldsymbol{t}$ non sarà mai utilizzata in guisa essenziale fino a tutto il § 12. Prima di quel paragrafo essa sarà invocata soltanto nei n$^{\mathrm{i}}$ 36 e 40, per stabilire circostanze marginali, che saranno utilizzate soltanto a partire dal § 13.

Ed il teorema del n° 27 sarà appunto stabilito senza ricorrere alla condizione lipschitziana e senza imporre a $\boldsymbol{t}^2$ di non avere punti uniti.

§ 6. – Considerazioni preliminari.

33. – Ferme le ipotesi e le notazioni introdotte nei n$^{\mathrm{i}}$ 27, 28 e 29, conveniamo di indicare con $\varphi(\xi, \eta)$ e $\chi(\xi, \eta)$ uno degli argomenti ed il modulo di $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{P})$, se ξ ed η sono uno degli argomenti ed il modulo del punto $\boldsymbol{P}$ di $\boldsymbol{C}$.

Allora gli argomenti di $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{P})$ si ottengono da $\varphi(\xi, \eta)$ aggiungendogli i numeri interi relativi; e risulta $\rho \leq \chi(\xi, \eta) \leq \rho+1$. Inoltre riesce identicamente

$$\chi(\xi, \rho)=\rho, \quad \chi(\xi, \rho+1)=\rho+1, \tag{5}$$

atteso che $\boldsymbol{t}$ applica le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa; e le differenze

$$\varphi(\xi, \rho)-\xi, \quad \varphi(\xi, \rho+1)-\xi \tag{6}$$

non possono mai assumere valori interi, perché $\boldsymbol{t}$ applica le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa senza ammettere punti uniti.

34. – Nel piano reale euclideo ambiente si fissi ora un sistema di coordinate cartesiane ortogonali; e si interpretino ξ ed η rispettivamente come ascissa, x, e come ordinata, y, di un punto P del piano.

Al variare di ξ ed η, cioè di x ed y, il punto P descrive la striscia S individuata dalle disuguaglianze

$$-\infty<x<+\infty, \quad \rho \leq y \leq \rho+1;$$

ed al punto $\boldsymbol{P}$ di $\boldsymbol{C}$ finiscono con l'essere rispettivamente associati i punti

$$\ldots,\ (x-2,\ y),\ \ (x-1,\ y),\ \ (x,\ y),\ \ (x+1,\ y),\ \ (x+2,\ y),\ldots$$

di S, e soltanto questi; e da questi, volendo, si risale a quello, identificandoli.

35. - Poniamo di nuovo che P e $\boldsymbol{P}$ siano punti di S e di $\boldsymbol{C}$, associati secondo le convenzioni del numero precedente, e correnti, quello per S e questo per $\boldsymbol{C}$. E poniamo di nuovo che x ed y siano l'ascissa e l'ordinata di P e che ξ ed η siano uno degli argomenti ed il modulo di $\boldsymbol{P}$.

Allora la funzione $f(x,\ y)$ è univocamente determinata a meno di una costante additiva, se le si impone di esser definita in S, di esservi continua, e di esser rispettivamente uguale, nel punto corrente $(x,\ y)$, ad uno degli argomenti di $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{P})$. La costante additiva assume soltanto valori interi; e nell'ambito di questi valori può esser prefissata a piacere.

Fissiamo un valore per questa costante. Ed accanto ad $f(x,\ y)$ definiamo anche la funzione $g(x,\ y)$ imponendole di essere rispettivamente uguale al modulo di $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{P})$ nel punto corrente $(x,\ y)$ di S. Anche $g(x,\ y)$ è univoca e continua in tutta la striscia S.

Al punto corrente trasformando $(x,\ y)$ di S associamo, come rispettivo trasformato, il punto $(f(x,\ y),\ g(x,\ y))$. Otteniamo, per S, un autoomeomorfismo, t, che porge una delle cosiddette *immagini rettificate* di $\boldsymbol{t}$, e le porge tutte, in rispondenza ai diversi valori che si possono attribuire a quella tal costante additiva, mentre $\boldsymbol{t}$ porge la cosiddetta *immagine circolare* delle sue immagini rettificate. Ovvio come si ritorni da t a $\boldsymbol{t}$, cioè da un'immagine rettificata all'immagine circolare. Ed è ovvio che:

L'autoomeomorfismo t di S è privo di punti uniti;

atteso che questa circostanza si presenta per l'autoomeomorfismo $\boldsymbol{t}$ di $\boldsymbol{C}$.

36. - Ferme le notazioni fissate nel numero precedente, il valore $f(f(x,\ y),\ g(x,\ y))$ coincide con uno degli argomenti del punto $\boldsymbol{t}^2(\boldsymbol{P})$, mentre il valore $g(f(x,\ y),\ g(x,\ y))$ coincide col modulo dello stesso punto. Ne segue subito che:

Il quadrato di t porge un'immagine rettificata del quadrato di $\boldsymbol{t}$,

epperò è privo anch'esso di punti uniti, se $\boldsymbol{t}^2$ è privo di punti uniti.

Analogamente:

L'inversa di t porge un'immagine rettificata dell'inversa di $\boldsymbol{t}$;

nel vero, le coordinate x ed y del punto P porgono uno degli argomenti ed il modulo del punto $\boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{P}))$.

37. - Per l'autoomeomorfismo t le (5) si traducono naturalmente nelle due identità

$$g(x,\ \rho)=\rho,\quad g(x,\ \rho+1)=\rho+1,$$

cioè nella circostanza che t applica le due orizzontali [5] estreme di S ciascuna su se stessa. Inoltre è chiaro che risulta identicamente

$$f(x+1,\ y) = f(x,\ y) + 1, \quad g(x+1,\ y) = g(x,\ y),$$

cioè che t è *periodico* nella x, con *periodo* unitario, o, se si preferisce, che t è permutabile con quell'autoomeomorfismo, ϑ, di S, che muta il punto corrente $(x,\ y)$ di S rispettivamente nel punto $(x+1,\ y)$. E di qui si trae subito che:

Ogni potenza di t è permutabile con ogni potenza di ϑ.

La circostanza che le differenze (6) non possono mai assumere valori interi relativi, si traduce nella circostanza analoga per le differenze

$$f(x,\ \rho) - x, \quad f(x,\ \rho + 1) - x, \tag{7}$$

ciascuna delle quali sarà quindi sempre compresa, in senso stretto, fra due numeri interi relativi consecutivi fissi.

Nel seguito indicheremo con τ_0 e τ_1 le due orizzontali estreme di S; precisamente, τ_0 sarà quella dei qunti con l'ordinata uguale a ρ, e τ_1 quella dei punti con l'ordinata uguale a $\rho + 1$. Ed indicheremo con τ il sostegno dell'asse delle ascisse.

38. - Le circostanze poste in luce nel n° 37 sussistono tali e quali anche per t^{-1}, purchè naturalmente si sostituiscano f e g con le funzioni che porgono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto $t^{-1}(P)$ espresse mediante le coordinate del punto corrente P di S.

Si tratta di una situazione particolarmente favorevole all'eventuale scambio degli uffici di t e t^{-1}, cioè di $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{t}^{-1}$.

E per trovarci in una tal situazione favorevole anche rispetto a circostanze future, noi accompagneremo ogni eventuale scambio di uffici fra t e t^{-1} con lo scambio degli uffici di ϑ e ϑ^{-1}. E quest'ultimo scambio noi lo effettueremo, una volta costruita t, cambiando il verso positivo dell'asse delle ascisse (in armonia con la considerazione finale del n° 28) e conservando formalmente inalterata la definizione di ϑ.

Si noti che anche con questa nuova definizione di ϑ, le circostanze poste in rilievo nel numero precedente sono ancora valide, e sono ancora valide sia per t, sia per t^{-1}.

39. - Per ottenere quell'immagine rettificata, t, di $\boldsymbol{t}$, su cui fissare la nostra attenzione, noi sceglieremo quella tal costante additiva in guisa, che

(5) Orizzontali, cioè rette con la direzione dell'asse delle ascisse.

$f(0, \rho)$ sia maggior di 0 e minor di 1; cioè in guisa che t muti il punto O di S, con l'ascissa nulla e l'ordinata uguale a ρ, in un punto con l'ascissa positiva e minor dell'unità (e con l'ordinata uguale a ρ).

In queste condizioni, la prima delle differenze (7) è sempre maggiore di 0 e minor di 1. Indi:

La trasformazione t sposta tutti i punti di τ_0, aumentandone l'ascissa di una quantità positiva, variabile eventualmente da punto a punto, ma sempre minore dell'unità, e lasciandone invariata l'ordinata;

sicché:

Se P è un punto di τ_0, la sua ascissa è maggiore di quelle di $t^{-1}(P)$ e $\vartheta^{-1}(t(P))$ ed è minore di quelle di $t(P)$ e $\vartheta(t^{-1}(P))$.

Pertanto, come conseguenza della circostanza che:

L'ascissa di $t(O)$ è positiva e minore di 1;

noi abbiamo, in particolare, che:

L'ascissa di $t^{-1}(O)$ è maggiore di -1 e negativa.

Per la nostra $\boldsymbol{t}$, poi, la convenzione seguita nella scelta del verso positivo delle rotazioni nel sistema coordinato polare porge che:

Su τ_0, il punto $t(O)$ è contenuto nel segmento cogli estremi in O e $\vartheta(t^{-1}(O))$.

Dopo di ciò, per concludere che:

Il punto $t^{-1}(O)$ è contenuto nel segmento cogli estremi in $\vartheta^{-1}(t(O))$ ed O,

basta applicare ϑ^{-1} ai punti $t(O)$ e $\vartheta(t^{-1}(O))$ e rammentare che l'ascissa di $t^{-1}(O)$ è negativa.

40. – Fissata t, tutte le altre immagini rettificate di $\boldsymbol{t}$ sono date dai prodotti

$$t\vartheta, \quad t\vartheta^{-1}, \quad t\vartheta^2, \quad t\vartheta^{-2}, \ \dots, \tag{8}$$

i quali pertanto sono privi di punti uniti. Di qui, e dalla circostanza che t^2 porge un'immagine rettificata di $\boldsymbol{t}^2$, segue che le altre immagini rettificate di $\boldsymbol{t}^2$ sono date dai prodotti

$$t^2\vartheta, \quad t^2\vartheta^{-1}, \quad t^2\vartheta^2, \quad t^2\vartheta^{-2}, \ \dots,$$

che saranno privi di punti uniti, quando $\boldsymbol{t}^2$ sarà privo di punti uniti.

Fra i prodotti (8), il secondo ed il suo inverso avranno particolare interesse per le nostre considerazioni, tanto che ci converrà porre:

$$w = \vartheta t^{-1} \, (= t^{-1}\vartheta),$$

di guisa che risulterà

$$w^{-1} = t\vartheta^{-1} \, (= \vartheta^{-1} t),$$

mentre w si potrà interpretare come una delle immagini rettificate di $\boldsymbol{t}^{-1}$.

41. - Se si scambiano gli uffici di t e t^{-1}, e quindi anche quelli di $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{t}^{-1}$, e si rispettano le convenzioni fissate nel n° 38, le circostanze poste in rilievo nei n^i 39 e 40 si mantengono inalterate, a patto di sostituirvi materialmente t con t^{-1} e t^{-1} con t (gli altri cambiamenti verificandosi piuttosto nei concetti, che nei simboli; al posto di w, cioè di ϑt^{-1}, trovandosi, in particolare, ϑt, ma con una tal ϑ, che a conti fatti l'ufficio di w è assunto da w^{-1}). E ci si ritrova nella situazione favorevole già riscontrata appunto in quel n° 38.

42. - Per legittimare più facilmente l'applicazione della teoria esposta nei paragrafi precedenti, non sarà poi male prolungare t, w e ϑ in guisa da convertirle in altrettante traslazioni piane generalizzate.

Allo scopo basta supporre che tanto nel semipiano dei punti con l'ordinata minore di ρ od uguale a ρ, quanto in quello dei punti con l'ordinata maggiore di $\rho+1$ od uguale a $\rho+1$, le trasformazioni prolungate, che saranno rispettivamente indicate anch'esse con t, w e ϑ, non alterino le ordinate dei punti trasformandi e portino le semirette verticali (6) in semirette verticali.

Dopo i prolungamenti ϑ è addirittura una traslazione piana ordinaria; dopo i prolungamenti risulta sempre

$$w = \vartheta t^{-1};$$

e anche dopo i prolungamenti t è sempre permutabile con ϑ; epperò:

Anche dopo i prolungamenti, le potenze di t son permutabili con le potenze di ϑ;

le traslazioni piane generalizzate t e w son per di più uniformemente continue e t ammette, al pari di w, un numero positivo come estremo inferiore delle distanze dei punti del piano dai rispettivi trasformati.

Si noti finalmente che:

Dopo i prolungamenti la seconda proposizione del n° 39 sussiste anche se l'ordinata di P è minore di ρ.

D'ora in poi t, w e ϑ indicheranno sempre i prolungamenti delle trasformazioni t, w e ϑ originarie.

E se t^* rappresenta l'autoomeomorfismo subordinato da t sul semipiano dei punti con l'ordinata positiva o nulla, $\boldsymbol{t}^*$ indicherà quel prolungamento di $\boldsymbol{t}$ fornito dall'*immagine circolare* di t^*, l'accezione attuale delle parole immagine circolare essendo ormai palese.

L'autoomeomorfismo $\boldsymbol{t}^*$ del piano ammette un punto unito solo, il centro della corona $\boldsymbol{C}$.

---

(6) Semirette verticali, cioè dirette come l'asse delle ordinate.

43. - Se i punti P' e P'' di S, rispettivamente provenienti dai punti $\boldsymbol{P}'$ e $\boldsymbol{P}''$ di $\boldsymbol{C}$, sono abbastanza vicini, la loro distanza,

$$|P'P''|,$$

nella metrica euclidea del piano coincide con la distanza di $\boldsymbol{P}'$ e $\boldsymbol{P}''$ nella metrica polare della corona. Ma se P' e P'' sono abbastanza vicini, lo stesso accade per $t(P')$ e $t(P'')$, nonché per $t^{-1}(P)$ e $t^{-1}(P'')$. Sicché, se $\boldsymbol{t}$ è bilateralmente lipschitziana nella metrica polare secondo il coefficiente k e se i punti P' e P'' di S sono abbastanza vicini, sussistono tanto la

$$|t(P')\,t(P'')| \leq k\,|P'P''|, \tag{9}$$

quanto la

$$|t^{-1}(P')\,t^{-1}(P'')| \leq k\,|P'P''|; \tag{10}$$

che equivalgono rispettivamente alla

$$|w^{-1}(P)\,w^{-1}(P'')| \leq k\,|P'P''|, \tag{11}$$

ed alla

$$|w(P')\,w(P'')| \leq k\,|P'P''|, \tag{12}$$

come si riconosce subito tenendo conto del significato di w (e della circostanza che ϑ è una traslazione ordinaria del piano). Ma si riconosce subito anche che, una volta soddisfatte per le coppie P' e P'' di punti abbastanza vicini di S:

La (9), *la* (10), *la* (11) *e la* (12) *sono soddisfatte per ogni coppia, P' e P'', di punti di S;*

nel fatto, dati P' e P'' comunque in S, basta suddividere il segmento $P'P''$ in segmenti abbastanza piccoli; applicare la (9), la (10), la (11) e la (12) ai segmenti parziali; ecc. ecc. E questo ragionamento ci permette anzi di riconoscere che:

Nelle ipotesi attuali, t e w, nonchè t^{-1} e w^{-1}, mutano le curve rettificabili di S in curve rettificabili di S; e le lunghezze delle curve trasformate non possono mai superare quelle delle rispettive trasformande moltiplicate per il coefficiente numerico k;

e basterebbe di nuovo limitarsi al caso di t e t^{-1}, per avere subito anche il caso di w e w^{-1}.

44. - Passiamo ora a fissare qualche altra convenzione, che dovrà aver valore per tutto il seguito.

Precisamente, indichiamo con h un numero reale positivo, che si deve intendere fissato una volta per tutte, anche se non indicheremo subito tutte le condizioni a cui esso deve soddisfare. E per ora imponiamo ad h soltanto di essere il reciproco di un numero naturale; e di essere tanto piccolo, che ogni sottoinsieme del piano sia libero nella t, nella w e nella ϑ, nonché in tutti i prodotti di t e w per potenze di ϑ, per poco che tutte le reciproche distanze dei suoi punti siano minori di $2h$ [7].

Le condizioni imposte ad h sono certamente compatibili, atteso il significato di t, di w e di ϑ, ed attesa la positività dell'estremo inferiore delle distanze $\| \boldsymbol{P}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{P}) \|$, cioè dell'estremo inferiore delle distanze $\| \boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{P})\boldsymbol{P} \|$, le distanze essendo calcolate secondo la metrica polare e $\boldsymbol{P}$ variando in $\boldsymbol{C}$. Le condizioni imposte ad h implicano la

$$h < 1/2, \tag{13}$$

come segue non appena si ricordi, accanto al significato di h, quello di ϑ. E conveniamo finalmente di indicare con $\boldsymbol{S}$ il semipiano dei punti con l'ordinata positiva o nulla; con $\boldsymbol{S}_\rho$ quello dei punti con l'ordinata maggiore di ρ od uguale a ρ; con $\boldsymbol{S}'_\rho$ quello dei punti con l'ordinata minore di ρ od uguale a ρ.

§ 7. - Incominciano le dimostrazioni.

45. - Ferme naturalmente le ipotesi e le convenzioni poste, l'orizzontale τ_0 dei punti con l'ordinata uguale a ρ è una traiettoria sia nella t, sia nella w, sia nella ϑ.

E su questa orizzontale scegliamo il segmento α_0,

$$\alpha_0 = A_0 t(A_0),$$

ed il segmento β_0,

$$\beta_0 = B_0 w(B_0),$$

di traslazione rispettivamente nella t e nella w. E scegliamoli anzi in tal guisa, che:

Il segmento α_0 sia contenuto nel segmento β_0, la lunghezza di quest'ultimo riuscendo poi minore dell'unità.

[7] Ogni volta che imporremo ad h qualche nuova condizione, la circostanza sarà posta in evidenza mediante una nota a piè di pagina.

La legittimità di queste ipotesi è sicura; basta tenere conto dei risultati del n° 39 e identificare A_0 e B_0 col punto O di quel numero, cioè col punto $(0, \rho)$, i risultati di quel numero assicurando anzi che ogni segmento quale α_0 e quale β_0 ha una lunghezza minore dell'unità.

L'orizzontale τ_0 sarà indicata con π_0, in quanto traiettoria generata da α_0 nella t; e con σ_0, in quanto traiettoria generata da β_0 nella w.

Uno, Π_0, dei campi adiacenti a π_0 è costituito dai punti con l'ordinata maggiore di ρ; l'altro, Π'_0, da quelli con l'ordinata minore di ρ.

Naturalmente Π_0 e Π'_0 saranno rispettivamente indicati con Σ_0 e Σ'_0, in quanto campi adiacenti a σ_0.

Accanto alla $\Pi_0 + \pi_0 = \Sigma_0 + \sigma_0$ ed alla $\Pi'_0 + \pi_0 = \Sigma'_0 + \sigma_0$, sussistono ovviamente anche la $\Pi_0 + \pi_0 = \boldsymbol{S}_\rho$ e la $\Pi'_0 + \pi_0 = \boldsymbol{S}_\rho$.

46. – Passiamo a costruire un'opportuna suddivisione simpliciale del piano, diciamola K, privilegiata sia rispetto a t, sia rispetto a w, sia rispetto a ϑ; applicata su se stessa da ϑ (nel senso che ogni vertice, ogni lato ed ogni faccia della suddivisione va rispettivamente a finire, per effetto di ϑ, in un tal vertice, in un tal lato, in una tal faccia, e rispettivamente proviene, nella ϑ, da un tal vertice, da un tal lato, da una tal faccia); e siffatta, che α_0 e β_0 siano elementari, rispetto ad essa.

Allo scopo, consideriamo nel piano la suddivisione simpliciale equilatera K^* individuata dall'avere due vertici nei punti $(0, \rho)$ e (h, ρ) e dall'avere h come lunghezza dei suoi lati, il significato di h essendo naturalmente quello stabilito nel n° 44.

Attese le condizioni ivi imposte ad h, la suddivisione K è privilegiata tanto rispetto a t, quanto rispetto a w ed a ϑ, ed è applicata su se stessa da ϑ. Le stelle di K^* sono per di più libere anche rispetto a tutti i prodotti $t\vartheta^p$ e $w\vartheta^p$ di t e w per potenze di ϑ.

Dopo di ciò, per passsare da K^* a quella tal K, basterà imporre a K di avere, come vertici, i vertici di K^*, nonché i punti

$$A_0, \quad t(A_0), \quad B_0, \quad w(B_0)$$

e le loro immagini nelle diverse potenze di ϑ. Allora infatti K gode appunto di tutte le proprietà desiderate, vale a dire:

Essa è privilegiata rispetto a t, w e ϑ; è applicata su se stessa da ϑ; ed ammette α_0 e β_0 come segmenti elementari.

Atteso l'ultimo teorema del n° 4:

Le stelle di K sono libere in tutte le potenze non identiche di t, di w e di ϑ;

mentre dalle proprietà di K^* segue per di più che:

Le stelle di K sono libere anche rispetto a tutti i prodotti $t\vartheta^p$ e $w\vartheta^p$ di t e di w per potenze di ϑ.

E farà comodo avere osservato esplicitamente che:

Le lunghezze dei lati di K non possono mai superare il numero h;
e che, attesa la $w\vartheta^p = t^{-1}\vartheta^{p+1}$, i prodotti di w per le diverse potenze di ϑ altri non sono che quelli di t^{-1} per le diverse potenze di ϑ.

47. - In K, la equilaterità può mancare soltanto per le facce delle stelle coi centri nei punti A_0, $t(A_0)$, B_0, $w(B_0)$ e nei loro rispettivi trasformati mediante le diverse potenze di ϑ. Anzi dalla costruzione precedente è facile dedurre che:

Tutte le facce di K prive di punti in comune con $\tau_0(=\pi_0=\sigma_0)$ sono equilatere, ed hanno h come lunghezza comune dei loro lati;
epperò, in particolare, che:

Queste circostanze si presentano per tutte le facce di K contenute nell'interno della striscia S;
mentre per riconoscere che:

Quelle circostanze si presentano anche per tutte quelle facce di K, che intersecano α_0 senza contenerne nè l'origine nè il termine,
basta ricordare la costruzione, e ricordare che α_0 è contenuto in β_0 e che la lunghezza di β_0 è minore dell'unità, giusta le posizioni e le risultanze del n° 45.

48. - Facce di K le quali si possano mutare le une nelle altre mediante potenze di ϑ, saranno dette *equivalenti* rispetto a ϑ.

E distribuiamo le facce di K contenute nella striscia S in classi di equivalenza rispetto a ϑ, ponendo facce siffatte in una stessa classe ogni volta che esse siano equivalenti rispetto a ϑ e soltanto se esse sono equivalenti rispetto a ϑ. La totalità di queste classi di equivalenza è finita. Diciamo l il numero di queste classi; e dimostriamo che:

Se un sottoinsieme internamente connesso del piano è formato da facce di K contenute in S e contiene più di l facce di K, esso e la sua immagine nella ϑ hanno in comune almeno una faccia di K.

Infatti, nel caso contrario, il sottoinsieme e la sua immagine nella ϑ non avrebbero in comune punti interni e all'uno e all'altra; una circostanza analoga si presenterebbe per il sottoinsieme e la sua immagine nella ϑ^{-1}; ed il sottoinsieme sarebbe addirittura libero nelle altre potenze di ϑ diverse dall'identità (n° 4, seconda proposizione). E tutto questo sarebbe incompatibile col significato di l e con l'ipotesi che il sottoinsieme contenga $l+1$ facce di K contenute nella striscia S.

È superfluo osservare che le facce di K contenute in S non esauriscono S.

49. – Come abbiamo visto, i segmenti di traslazione α_0 e β_0 sono elementari rispetto alla suddivisione simpliciale K.

Indichiamo con a_0 la suddivisione simpliciale subordinata da K su α_0; e con b_0 quella subordinata su β_0. Allora:

Nelle condizioni attuali, ogni lato di a_0 *compare fra i lati di* b_0;

nel fatto β_0 contiene α_0, giusta le ipotesi poste nel n° 45.

50. – Il complesso K ammette facce eccezionali per α_0 e Π_0, rispetto a t. E le facce di K, eccezionali, rispetto a t, per α_0 e Π_0, sono eccezionali anche per β_0 e Σ_0, rispetto a w; nel fatto, β_0 contiene α_0, e genera, nella w, la traiettoria σ_0, che coincide con π_0, mentre Σ_0 coincide con Π_0.

Ammettendo facce che sono eccezionali tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w, il complesso K ammette catene che sono eccezionali tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w: nel fatto una di quelle facce si può sempre interpretare, qualunque essa sia, come una di queste catene.

A proposito di siffatte catene, eccezionali tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w, i casi possibili sono due:

Alcune di esse intersecano l'orizzontale τ_1;

ovvero:

Nessuna di esse interseca l'orizzontale τ_1.

Vedremo come nel primo caso sia certamente presente nella solita corona circolare, almeno una curva semplice ed aperta, che unisca le due circonferenze estreme della corona e che sia libera rispetto a t. E vedremo come nel secondo si presentino le altre circostanze contemplate nel teorema del n° 27, quanto t soddisfa soltanto alle condizioni ivi imposte; e come si presentino le altre circostanze contemplate nel teorema del n° 31, quando t soddisfa anche alle ulteriori condizioni imposte ivi.

§ 8. – Le conclusioni nel primo caso. Preliminari per il secondo caso.

51. – Ferme le ipotesi del n° 27 e ferme le solite convenzioni, consideriamo dunque il caso che fra le catene di K eccezionali tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w, ve ne sia almeno una, Δ_m,

$$\Delta_m = (\delta_1, \ldots, \delta_m),$$

che intersechi τ_1. E giusta il teorema del n° 26 estragghiamo da Δ_m una sottocatena,

$$(\delta_{m_1}, \ldots . \delta_{m_p}),$$

semiregolare rispetto ad α_0 (e β_0), siffatta che δ_{m_p} intersechi τ_1.

Allora il numero naturale p è certamente maggiore di 2, perché h è minore di $1/2$, giusta la (13). Ed è lecito supporre che $\delta_{m_1}, \ldots, \delta_{m_{p-1}}$ non intersechino τ_1.

Uniamo, mediante segmenti, il baricentro del lato comune ad α_0 e δ_{m_1} con quello del lato comune a δ_{m_1} e δ_{m_2}; e così via, fino ad unire il baricentro del lato comune a $\delta_{m_{p-1}}$ e δ_{m_p} con uno dei punti di δ_{m_p} situati su τ_1.

Otteniamo una poligonale semplice ed aperta, diciamola u, che unisce le due orizzontali estreme τ_0 e τ_1 di S, che è contenuta (nell'insieme $\delta_{m_1} + \ldots + \delta_{m_p}$ epperò anche) nell'insieme $\delta_1 + \ldots + \delta_m$, e che ha il proprio interno nell'interno di S.

Atteso il penultimo teorema del n° 24, la poligonale u intanto è libera sia nella t (e nella t^{-1}), sia nella w (e nella w^{-1}), perché essa è contenuta nell'insieme Δ_m e perché la catena Δ_m è eccezionale sia per α_0 e Π_0, rispetto a t, sia per β_0 e Σ_0, rispetto a w.

Indichiamo adesso con C il punto di u situato sulla retta τ_0.

Attesa la seconda proposizione del n° 39, l'ascissa di C è maggiore di quelle di $t^{-1}(C)$ e di $\vartheta^{-1}(t(C))$ ed è minore di quelle di $t(C)$ e di $\vartheta(t^{-1}(C))$.

Pertanto u separa, nella striscia S, le curve $t^{-1}(u)$ e $\vartheta^{-1}(t(u))$ dalle curve $t(u)$ e $\vartheta(t^{-1}(u))$, lasciando quelle prime, diciamo, a sinistra e queste ultime a destra. Indi $\vartheta^{-1}(u)$ separa, nella striscia S, le curve $\vartheta^{-1}(t^{-1}(u))$ e $\vartheta^{-2}(t(u))$ dalle curve $\vartheta^{-1}(t(u))$ e $t^{-1}(u)$, lasciando quelle prime a sinistra e queste ultime a destra. E $\vartheta(u)$ separa, nella solita striscia, le curve $\vartheta(t^{-1}(u))$ e $t(u)$ dalle curve $\vartheta(t(u))$ e $\vartheta^2(t^{-1}(u))$, lasciando ecc. ecc.

In conclusione, u è libera in tutte le potenze non identiche di ϑ ed in tutti i prodotti di t (e di t^{-1}) per potenze identiche e non identiche di ϑ.

Ma allora basta risalire dalla striscia alla corona, perché u dia luogo ad una curva semplice ed aperta, che sia contenuta nella corona, che unisca le due circonferenze estreme della corona e che sia libera nell'autoomeomorfismo assegnato per la corona. Donde appunto la conclusione, nel primo caso.

52. - Inizieremo l'esame del secondo caso dimostrando preliminarmente, circostanza peraltro fondamentale, che:

Nel secondo caso, le lunghezze delle catene di K eccezionali tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w, descrivono un insieme numerico superiormente limitato;

e quindi dotato di massimo, atteso che si tratta di un insieme di numeri naturali.

Allo scopo ricorderemo un lemma, presentandolo nella forma più adatta per le applicazioni attuali.

53. - Osserviamo intanto che l'asse delle ascisse, o, meglio, il suo sostegno τ, è una traiettoria tanto per t, quanto per w e ϑ; e che l'interno di **S**, cioè l'insieme dei punti con l'ordinata positiva, fornisce uno dei due campi adiacenti ad una tal traiettoria. E dimostriamo quindi che:

Se la curva semplice ed aperta v^* ha un estremo sull'asse delle ascisse, mentre tutti gli altri suoi punti sono interni ad **S**, *essa può intersecare $\vartheta(v^*)$ soltanto a patto di intersecare $t(v^*)$, oppure $w(v^*)$.*

Supponiamo, per assurda ipotesi, che la curva v^* incontri $\vartheta(v^*)$, ma sia libera tanto nella t, quanto nella w [8].

Indichiamo con L^* l'estremo di v^* situato su τ. E scegliamo su v^* il punto M^* in tal guisa, che il sottoarco γ^* di v^* con gli estremi nei punti L^* ed M^* intersechi $\vartheta(\gamma^*)$; e che ogni sottoarco proprio di γ^*, con un estremo nel punto L^* (e l'altro nell'interno di γ^*) sia libero nella ϑ.

La curva γ^* non contiene nè $\vartheta^{-1}(L^*)$, nè $\vartheta(L^*)$, perché nelle condizioni attuali la curva v^* non contiene nè $\vartheta^{-1}(L^*)$, nè $\vartheta(L^*)$, che appartengono a τ, al pari di L^*, e che sono diversi da L^*.

Pertanto il punto M^* è diverso dal punto L^*.

Le curve γ^* e $\vartheta(\gamma^*)$ non hanno in comune punti diversi da M^* e da $\vartheta(M^*)$; ed hanno in comune almeno uno dei punti M^* e $\vartheta(M^*)$.

Supponiamo che il punto M^* appartenga a $\vartheta(\gamma^*)$; ed indichiamo con γ' il sottoarco (proprio) di γ^* con gli estremi nei punti L^* e $\vartheta^{-1}(M^*)$, e con γ'' quello con gli estremi nei punti $\vartheta^{-1}(M^*)$ ed M^*.

Allora γ' è libero nella ϑ; indi esso è libero anche nella ϑ^2 (come è ovvio, atteso che ϑ è una traslazione piana ordinaria, e come si potrebbe dedurre anche dalla prima proposizione del n° 4); epperò esso non contiene il punto $\vartheta(M^*)$, che appartiene a $\vartheta^2(\gamma')$. Inoltre γ'' è un arco di traslazione di ϑ (come segue dalla proposizione del n° 2); pertanto nemmeno lui contiene il punto $\vartheta(M^*)$. Sicché, nelle condizioni attuali γ^* e $\vartheta(\gamma^*)$ hanno in comune soltanto il punto M^* [9].

Indichiamo adesso con γ la curva semplice e chiusa $L^*\vartheta(L^*)+\vartheta(\gamma')+\gamma^*$,

$$\gamma = L^*\vartheta(L^*) + \vartheta(\gamma') + \gamma^*,$$

cioè la somma del segmento $L^*\vartheta(L^*)$ e delle curve $\vartheta(\gamma')$ e γ^*; e con Γ la

[8] Per lemmi e dimostrazioni quali quelli del testo, si veggano i ni 16 e 17 della Memoria citata in [2] ed i ni 71 e 72 della Memoria citata in [3].

[9] Questo fatto rientra in una nota circostanza di carattere generale ricordata anche nella Memoria citata in [3]. Se ne vegga il secondo teorema del n° 8.

regione delimitata (o, se si preferisce, contornata) da γ, cioè l'insieme dei punti di γ e dei punti aggirati da γ.

Le curve γ e $\vartheta(\gamma)$ hanno in comune soltanto l'arco $\vartheta(\gamma')$, atteso che il punto $\vartheta(M^*)$ non appartiene a γ'.

I punti di Γ esterni ad $L^*\vartheta(L^*]$ sono interni ad $\boldsymbol{S}$, com'è ovvio. Pertanto la stessa circostanza si presenta anche per i punti di $\vartheta(\Gamma)$ esterni al segmento $\vartheta(L^*)\vartheta^2(L^*)$.

Ed il punto $\vartheta^2(L^*)$ è esterno a Γ, in quanto punto della frontiera di $\boldsymbol{S}$ esterno ad $L^*\vartheta(L^*)$.

Di qui, e dalla circostanza che γ e $\vartheta(\gamma)$ hanno in comune soltanto $\vartheta(\gamma')$, segue che anche Γ e $\vartheta(\Gamma)$ hanno in comune soltanto $\vartheta(\gamma')$; epperò che gli interni di Γ e $\vartheta(\Gamma)$ sono disgiunti.

Consideriamo adesso la curva $t(\gamma^*)$.

Essa parte dal punto $t(L^*)$, che è interno al segmento $L^*\vartheta(L^*)$, giusta la prima proposizione del n° 39. Essa è contenuta nell'interno di $\boldsymbol{S}$, a meno del punto $t(L^*)$, perché v^* è contenuta nell'interno di $\boldsymbol{S}$, a meno del punto L^*, e perché τ è una traiettoria anche per t. Essa non interseca γ^*, perché v^* è libera nella t. Ed essa non interseca nemmeno $\vartheta(\gamma^*)$, perché v^* è libera anche nella w. Dunque essa è contenuta nell'interno di Γ, se si esclude il punto L^*.

E la curva $\vartheta(t(\gamma^*))$ è contenuta nell'interno di $\vartheta(\Gamma^*)$, se si eccettua il punto $\vartheta(L^*)$.

E tutto questo è assurdo, perché le curve $t(\gamma^*)$ e $\vartheta(t(\gamma^*))$ hanno in comune il punto $t(M^*)$, interno ad $\boldsymbol{S}$, mentre gli interni di Γ e $\vartheta(\Gamma)$ sono disgiunti.

Con ciò, il caso che il punto M^* appartenga a $\vartheta(\gamma^*)$ è esaurito. Quello che il punto $\vartheta(M^*)$ appartenga a γ^*, cioè che il punto M^* appartenga a $\vartheta^{-1}(\gamma^*)$, sarà esaminato nel numero successivo.

54. – Il caso che il punto M^* appartenga a $\vartheta^{-1}(\gamma^*)$ si può ricondurre a quello che il punto M^* appartenga a $\vartheta(\gamma^*)$, scambiando gli uffici di t e t^{-1}.

E tanto basta perché la dimostrazione del lemma sia completa. Peraltro noi daremo un cenno della deduzione esplicita, a titolo di esempio. E svilupperemo questo cenno senza cambiare il verso positivo dell'asse delle ascisse. Ne verrà che ϑ rimarrà quello che era; epperò che per scambiare gli uffici di ϑ e ϑ^{-1} noi dovremo scambiare materialmente i simboli ϑ e ϑ^{-1}.

E nel fatto, si indichi con γ' il sottoarco di γ^* con gli estremi nei punti L^* e $\vartheta(M^*)$, e con γ'' quello con gli estremi nei punti $\vartheta(M^*)$ ed M^*; con γ la curva semplice e chiusa $L^*\vartheta^{-1}(L^*)+\vartheta^{-1}(\gamma')+\gamma^*$ e con Γ la regione delimitata da γ.

Allora ragionamenti analoghi a quelli svolti nel caso precedente porgono che γ^* e $\vartheta^{-1}(\gamma^*)$ hanno in comune soltanto il punto M^*, cioè che $\vartheta(\gamma^*)$ non contiene il punto M^* [10]; che γ e $\vartheta^{-1}(\gamma)$ hanno in comune soltanto la curva $\vartheta^{-1}(\gamma')$, al pari di Γ e $\vartheta^{-1}(\Gamma)$; e che gli interni di Γ e $\vartheta^{-1}(\Gamma)$ sono disgiunti.

Dopo di che basterà considerare la curva $t^{-1}(\gamma^*)$, che parte dal punto $t^{-1}(L^*)$, interno al segmento $\vartheta^{-1}(L^*)L^*$, e ragionare sempre in guisa analoga a quella seguita nel numero precedente per giungere appunto al risultato analogo.

55. – Dal lemma dimostrato nei numeri precedenti si deduce in poche battute che:

Se la curva semplice ed aperta v è contenuta nella striscia S ed ha un estremo su τ_0, cioè su $\pi_0(=\sigma_0)$, essa può intersecare $\vartheta(v)$ soltanto a patto di intersecare $t(v)$, oppure $w(v)$.

Nel vero, l'estremo L di v appartenga a τ_0. E su τ si consideri il punto L^* che ha la stessa ascissa di L.

La curva semplice ed aperta v^* formata dal segmento L^*L e da v è interna ad S, se si eccettua il punto L^*; ed è libera nella t, nella w e nella ϑ, se, e soltanto se, v è rispettivamente libera nella t, nella w e nella ϑ.

Pertanto basta applicare a v^* il lemma precedente, per concludere.

56. – Passiamo finalmente alla dimostrazione del teorema del n° 52. E ragioniamo ancora una volta per assurdo.

Supponiamo che le lunghezze delle catene di K eccezionali tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w, descrivano un insieme numerico superiormente illimitato (cioè, attesa l'ultima proposizione del n° 22, che la lunghezza di una tal catena si possa prefissare a piacere); e facciamo vedere che allora si presenta il primo caso.

Allo scopo, denotiamo di nuovo con Δ_m,

$$\Delta_m = (\delta_1, \ldots, \delta_m),$$

una catena di K eccezionale tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w; ed incominciamo col dimostrare, che se m è abbastanza grande, Δ_m ammette sottocatene semiregolari per α_0 (e β_0) provviste di $l+1$ facce almeno, l essendo sempre il numero di quelle tali classi di equivalenza.

Nel fatto, ogni faccia di Δ_m compare in almeno una tal sottocatena semiregolare, giusta il teorema del n° 26. Pertanto, se ciascuna di quelle catene semiregolari contenesse al massimo l facce, le facce di Δ_m apparterrebbero tutte ad un opportuno poligono, che si potrebbe fissare indipenden-

(10) Naturalmente anche questo fatto rientra nella circostanza a cui allude la precedente nota a piè di pagina.

temente da Δ_m, una volta dato α_0 e data K. Ed un tal poligono intersecando finite facce di K, il numero m ammetterebbe un confine superiore al finito.

Supponiamo dunque che il numero m sia abbastanza grande. E dalla catena Δ_m estragghiamo una sottocatena,

(14) $$(\delta_{m_1}, \ldots, \delta_{m_p}),$$

che sia semiregolare per α_0 (e β_0) e che possegga almeno $l+1$ facce. E mostriamo, per concludere, che una tal catena (14) interseca necessariamente τ_1.

Allo scopo, ammettiamo, per assurda ipotesi, che la catena (14) non intersechi τ_1.

In queste condizioni, le facce della catena (14) appartengono alla striscia S. Nel vero, esse appartengono al semipiano $\Pi_0 + \pi_0 (= \Sigma_0 + \sigma_0 = \boldsymbol{S}_\rho)$, atteso il quarto teorema del n° 24; mentre δ_{m_1} ha un lato su α_0 e l'insieme $\delta_{m_1} + \ldots + \delta_{m_p}$ è connesso, anzi internamente connesso. Indi, la catena (14) e la sua immagine nella ϑ hanno in comune almeno una faccia, giusta il teorema del n° 48.

Uniamo, mediante segmenti, il baricentro del lato comune ad a_0 e δ_{m_1} con quello di δ_{m_1}; il baricentro di δ_{m_1} con quello del lato comune a δ_{m_1} e δ_{m_2}; il baricentro del lato comune a δ_{m_1} e δ_{m_2} con quello di δ_{m_2}; e così via, fino ad unire il baricentro del lato comune e $\delta_{m_{p-1}}$ e δ_{m_p} con quello di δ_{m_p}.

Otteniamo una poligonale semplice ed aperta u. La poligonale u ha un estremo su α_0, cioè su τ_0, ed appartiene ad S. Inoltre essa interseca $\vartheta(u)$, contenendo tutti i baricentri delle facce della catena (14).

D'altra parte u è libera tanto nella t, quanto nella w, atteso che essa appartiene alla catena Δ_m, eccezionale tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w, ed atteso il penultimo teorema del n° 24.

E la contraddizione col lemma del numero precedente ormai è ovvia. Donde la conclusione desiderata.

§ 9. - **Continua l'esame del secondo caso.**

57. - Supponiamo che si presenti il secondo caso. E fissiamo qualche convenzione, che sarà mantenuta fino alla fine della Memoria.

Nel secondo caso ormai sappiamo che le catene di K eccezionali tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w, ammettono un massimo per le loro lunghezze. Ebbene, ora e nel seguito la n-pla ordinata Δ_n di facce $\delta_1, \ldots, \delta_n$ del solito complesso K,

(15) $$\Delta_n = (\delta_1, \ldots, \delta_n),$$

porgerà sempre una catena eccezionale tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w, massima nella sua lunghezza, n.

E data una tal catena eccezionale (15), α_1 indicherà quell'arco di traslazione di t, che si ottiene aggiungendo δ_1 ad α_0; π_1 sarà la traiettoria generata da α_1, nella t; Π_1 indicherà quel campo adiacente a π_1, che a norma della seconda proposizione del n° 18 non contiene nessun punto di δ_1 e Π'_1 l'altro campo adiacente a π_1. Indi α_2 sarà quell'arco di traslazione di t, che si ottiene aggiungendo δ_2 ad α_1; π_2 indicherà la traiettoria generata da α_2 nella t; Π_2 sarà quel campo adiacento a π_2, che a norma della stessa seconda proposizione del n° 18 non contiene nessun punto di δ_2, e Π'_2 l'altro campo adiacente a π_2. E così via, fino ad α_n, che indicherà quell'arco di traslazione di t, che si ottiene aggiungendo δ_n ad α_{n-1}; fino a π_n, che sará la traiettoria generata da α_n nella t; e fino a Π_n, che indicherà il campo adiacente a π_n privo di punti in comune con δ_n, ed a Π'_n, che sarà l'altro campo adiacente a π_n.

Allo stesso modo, β_1 indicherà quell'arco di traslazione di w, che si ottiene aggiungendo δ_1 a β_0; σ_1 sarà la traiettoria generata da β_1 nella w; Σ_1 indicherà quel campo adiacente a σ_1, che non contiene nessun punto di δ_1, e Σ'_1 l'altro campo adiacente a σ_1. E β_2 sarà quell'arco di traslazione di w, che si ottiene aggiungendo δ_2 a β_1; σ_2 indicherà la traiettoria generata da β_2 nella w; Σ_2 sarà quel campo adiacente a σ_2, che non contiene nessun punto di δ_2, e Σ'_2 l'altro campo adiacente a σ_2. E così via, naturalmente, fino a β_n, σ_n, Σ_n e Σ'_n, il cui significato ormai è ovvio.

E ancora: $a_1, a_2, \dots, a_n$ rappresenteranno le suddivisioni simpliciali rispettivamente subordinate da K su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, così come a_0 rappresentava, e rappresenterà, quella subordinata su α_0; e $b_1, b_2, \dots, b_n$ rappresenteranno le suddivisioni simpliciali rispettivamente subordinate da K su $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, così come b_0 rappresentava, e rappresenterà, quella subordinata su β_0.

58. - Nel corso della dimostrazione svolta nel n° 56 abbiamo implicitamente riconosciuto che tutte le facce di Δ_n sono contenute nella striscia S. Ma nel caso attuale Δ_n non può intersecare τ_1. Pertanto:

Tutte le facce di Δ_n sono contenute nell'insieme S-τ_1.

Il risultato si può affinare ulteriormente. Nel fatto, il quarto teorema del n° 24 ci consente di affermare che:

Tutti i punti di Δ_n situati su $\tau_0 (= \pi_0 = \sigma_0)$ sono interni ad α_0.

Dopo di ciò, per riconoscere che:

Tutte le facce di Δ_n sono equilatere ed hanno h come comune lunghezza dei loro lati,
basta ricordare i risultati raggiunti nel n° 47.

59. - Dalla terza proposiziono del n° 23 e dalle prime due del numero precedente è agevole dedurre che:

Tutte le poligonali $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *(e* $b_0, b_1, \ldots, b_n$*) sono contenute nell'insieme* S-τ_1;
e che:

Tutti i punti di $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *(di* $b_0, b_1, \ldots, b_n$*) situati su* $\tau_0 (= \pi_0 = \sigma_0)$ *appartengono ad* a_0 *(a* b_0*).*

Nel fatto, le circostanze sono ovvie per a_0 (e b_0). Pertanto basta ragionare per induzione, tenendo presenti le proposizioni ricordate.

60. - E passiamo a stabilire qualche altro lemma, di importanza fondamentale per gli sviluppi ulteriori. Precisamente passiamo a dimostrare che:

Ferme le convenzioni fissate, l'arco α_p $(p = 0, 1, \ldots, n)$ *ha in comune col segmento* $B_0 A_0$ *soltanto l'origine,* A_0, *e col segmento* $t(A_0) w(B_0)$ *soltanto il termine,* $t(A_0)$;
a dimostrare che:

Nelle stesse ipotesi, i lati della spezzata a_p $(p = 0, 1, \ldots, n)$ *son lati anche per la spezzata* b_p,
cioè che α_p appartiene a β_p; e, finalmente, a dimostrare che:

Nelle solite ipotesi, quegli eventuali lati di b_p $(p = 0, 1, \ldots, n)$, *che non compaiono fra i lati di* a_p, *appartengono ai segmenti* $B_0 A_0$ *e* $t(A_0) w(B_0)$;
di guisa che β_p si ottiene aggregando questi segmenti ad α_p, coincide con α_p se, e soltanto se, questi segmenti sono entrambi degeneri, ed appartiene ad $\alpha_p + \beta_0$ [11].

Se $p = 0$, i nostri lemmi sono soddisfatti per costruzione (n° 45); sicché possiamo dimostrarli induttivamente.

Ammettiamo dunque che le circostanze indicate nei tre lemmi si presentino per α_p, β_p, a_p e b_p, p essendo qui un numero intero, positivo o nullo, minore di n; e facciamo vedere che allora esse si presentano anche per α_{p+1}, β_{p+1}, a_{p+1} e b_{p+1}.

Nel fatto, δ_{p+1} appartiene alla somma di Π_0 e del sottoarco essenziale di α_0 (n° 24, quarto teorema); quest'ultimo è contenuto nell'interno di α_0 ed i segmenti $B_0 A_0$ e $t(A_0) w(B_0)$ non hanno punti interni ad α_0; indi δ_{p+1} non ha punti in comune con $B_0 A_0$ e $t(A_0) w(B_0)$. Di qui e dall'ipotesi induttiva segue intanto il primo lemma (se si ricorda la terza proposizione del n° 23). E segue altresì che l'intersezione di δ_{p+1} e a_p coincide con quella di δ_{p+1} e b_p. Questo fatto, l'ipotesi induttiva e le circostanze indicate nelle ultime righe del n° 17 assicurano che la poligonale soppressa nell'aggiunzione di δ_{p+1} ad α_p coincide con quella soppressa nell'aggiunzione di δ_{p+1} a β_p, e che una circostanza analoga si presenta anche per le poligonali aggiunte. E di

(11) Per i lemmi del testo, e le dimostrazioni, si vegga anche il n° 21 della Memoria citata in (2), oppure il n° 80 di quella citata in (3).

qui, attesa l'ipotesi induttiva, è facile concludere nel modo voluto anche riguardo agli ultimi due lemmi.

61. - Sia ora s un lato di a_n, e quindi anche un lato di b_n. E siano δ e δ^* le due facce di K adiacenti ad α_n lungo s. Esse sono adiacenti anche a β_n, lungo s. Ebbene, ora noi proveremo che:

Quella rivolta verso Π_n, *lungo* s, *è rivolta anche verso* Σ_n, *lungo* s.

Si ponga, com'è lecito, che δ sia quella rivolta verso Π_n, lungo s ([12]).

In quanto rivolta verso Π_n, lungo s, la faccia δ contiene, nell'interno, punti di Π_n, epperò di Π_0, che contiene Π_n (n° 24, primo teorema).

Se s appartiene per di più ad a_0, la circostanza posta in luce implica che l'interno di δ appartiene a Π_0. Indi δ^* ha l'interno in Π'_0; epperò in $\Sigma'_0(=\Pi'_0)$; e quindi in Σ'_n, che contiene Σ'_0 (n° 24, prima proposizione). Pertanto δ^* è rivolta verso Σ'_n lungo ogni lato in comune con b_n. Quindi δ è rivolta verso Σ_n, lungo s.

Se s non appartiene ad a_0, scegliamo il numero intero p positivo o nullo, e minore di n, in guisa, che s non appartenga ad a_p, ma appartenga ad a_{p+1}. Allora s è un lato di δ_{p+1} (n° 23, terzo teorema). Inoltre δ è diversa da δ_{p+1}, atteso che l'interno di δ_{p+1} è contenuto in Π'_{p+1} (n° 24, quarto teorema), epperò in Π'_n (n° 24, primo teorema), e che δ è rivolta verso Π_n lungo s. Ma l'interno di δ_{p+1} è contenuto anche in Σ'_{p+1} (n° 24, quarto teorema), epperò in Σ'_n (n° 24, primo teorema). E la conclusione ormai è facile.

62. - Le dimostrazioni dei numeri precedenti non sfruttavano mai l'ipotesi che Δ_n fosse massima nella sua lunghezza. Pertanto le loro conclusioni valgono per ogni catena, Δ_m,

$$\Delta_m = (\delta_1, \ldots, \delta_m),$$

di facce di K, eccezionale tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w.

E questa circostanza ci permette di porre la nozione di *criticità* anche per una tal catena.

Precisamente, data una tal catena Δ_m, ed introdotti, nella guisa ovvia, α_m e β_m, a_m e b_m, Π_m e Σ_m, noi diremo che Δ_m è *critica*, se α_m, e quindi β_m contiene due lati consecutivi di a_m, e quindi di b_m, siffatti, che il primo, diciamolo s', sia di prima categoria per α_m, Π_m e t, ed il secondo, diciamolo

([12]) Per il lemma del testo, e la dimostrazione, si vegga anche il n° 22 della Memoria citata in ([2]), oppure il n° 81 di quella citata in ([3]).

s'', sia di seconda categoria per β_m, Σ_m e w; oppure, siffatti che s' sia di prima categoria per β_m, Σ_m e w ed s'' di seconda per α_m, Π_m e t. E, volendo, la definizione si potrebbe atteggiare consentendo la eventuale coincidenza di s' ed s''; ma noi qui imporremo appunto a s' ed s'' di essere distinti.

Posta una tal definizione, nei prossimi numeri vedremo che:

Quella catena (15), *eccezionale tanto per* α_0 *e* Π_0, *rispetto a* t, *quanto per* β_0 *e* Σ_0, *rispetto a* w, *è certamente critica, perché massima nella sua lunghezza,*

e permetteremo allo scopo qualche lemma, in guisa da ottenere una maggiore chiarezza.

63. - Ferme naturalmente le solite convenzioni, incominciamo intanto col far vedere che:

Nelle ipotesi attuali, nessun lato di a_n, *eccezionale per* α_n *e* Π_n *rispetto a* t, *può essere eccezionale per* β_n *e* Σ_n, *rispetto a* w.

Sia infatti s un tal lato eccezionale di a_n. E sia δ la faccia di K adiacente ad s e rivolta verso Π_n, lungo s. Allora δ è eccezionale per α_n e Π_n, rispetto a t. Inoltre essa è rivolta anche verso Σ_n, lungo s, giusta la proposizione del n° 61. Sicché, se essa fosse eccezionale anche per β_n e Σ_n, rispetto a w, la catena $(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n, \delta)$ sarebbe eccezionale tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w, ed avrebbe come lunghezza $n+1$. Cosa assurda, atteso il significato attuale del numero n.

Dopo di ciò, per avere che:

I lati di a_n *strettamente eccezionali per* α_n *e* Π_n, *rispetto a* t, *o risultano tutti di prima categoria, per* β_n *e* Σ_n, *rispetto a* w, *in quanto lati di* b_n, *o risultano tutti di seconda categoria,*

basta ricordare che essi costituiscono un sottoarco di α_n (n° 20, seconda proposizione), e che la categoria può cambiare soltanto passando per lati eccezionali.

64. - Se in a_n tutti i lati strettamente eccezionali per α_n e Π_n, rispetto a t, sono di seconda categoria, in quanto lati di b_n, per β_n e Σ_n, rispetto a w, indichiamo con s'' il primo di essi; ed indichiamo con s' l'ultimo lato di a_n di prima categoria per α_n e Π_n, rispetto a t. Se tutti quei lati strettamente eccezionali sono di prima categoria, in quanto lati di b_n, per β_n e Σ_n, rispetto a w, indichiamo con s' l'ultimo di essi; ed indichiamo con s'' il primo lato di a_n di seconda categoria per α_n e Π_n, rispetto a t.

Dopo di ciò, è ovvio che Δ_n è critica tanto nell'un sottocaso, quanto nell'altro.

65. - E volendo si può anche dire che Δ_n è *critica in senso stretto,* per esprimere esplicitamente che nel primo sottocaso s'' è eccezionale per α_n e Π_n, rispetto a t, e che nel secondo questa circostanza si presenta per s'.

66 – I due sottocasi non sono poi essenzialmente distinti: il primo si muta nel secondo, se si scambiano gli uffici di t e t^{-1} (e quindi anche quelli di w e w^{-1}).

Sicché, per esaurire l'esame del secondo caso basterà condurre a termine quello del primo sottocaso.

§ 10. – Prosegue l'esame del secondo caso.

67. – Ferme le solite notazioni e le solite convenzioni, noi siamo dunque autorizzati a supporre che s' sia di prima categoria per α_n e Π_n, rispetto a t; ed a supporre che s'' sia eccezionale per α_n e Π_n, rispetto a t, e di seconda categoria per β_n e Σ_n, rispetto a w.

68. – Ciò premesso, indichiamo con V l'estremo comune ad s' ed s'', di guisa che V è certamente interno ad α_n (epperò a β_n). Ed indichiamo con δ' la faccia di K adiacente ad s' e rivolta, lungo s', verso Π_n (e Σ_n); e con δ'' quella adiacente ad s'' e rivolta, lungo s'', verso Π_n (e Σ_n).

Le facce δ' e δ'' hanno in comune il vertice V. E $t^{-1}(\alpha_n)$ interseca δ' e non interseca δ''. Pertanto:

Le facce δ' e δ'' appartengono ad una medesima stella di K, quella col centro nel punto V, e sono diverse fra di loro.

Sia W la stella K col centro nel punto V. E dei due poligoni elementari individuati da α_n su W, sia W^* quello che contiene δ' e δ'' (nº 14). Allora la prima proposizione del nº 12 porge intanto che:

I punti interni a W^* non appartengono mai ad α_n;

ma noi ora mostreremo altresì che:

I punti interni a W^* ed abbastanza vicini a V sono interni anche alla striscia S.

Infatti, le circostanze ricordate alla fine del nº 14 assicurano che i punti interni a W^* ed abbastanza vicini a V sono interni a Π_n, epperò a Π_0, che contiene Π_n (nº 24, primo teorema). D'altra parte V appartiene ad $S - \tau_1$, giusta la prima proposizione del nº 59. E dopo di ciò la conclusione è facile.

69. – La faccia δ'' non incontra $t^{-1}(\alpha_n)$, come abbiamo ricordato, e non incontra nemmeno $t(\alpha_n)$, in quanto eccezionale per α_n e Π_n, rispetto a t; essa incontra invece $w(\beta_n)$, in quanto di seconda categoria per β_n e Σ_n, rispetto a w. E noi ora dimostreremo che:

L'intersezione di δ'' e $w(\beta_n)$ è contenuta tanto nell'interno di $w(\alpha_n)$, quanto nell'interno di S.

Per ottenere una maggiore chiarezza, ricordiamo a parte, che a norma della seconda proposizione del n° 18 la faccia δ'' è contenuta nella somma di Π_n e del sottoarco essenziale di α_n in quanto essa è eccezionale per α_n e Π_n, rispetto a t; e che a norma della quarta proposizione del n° 24 essa è contenuta anche nella somma di Π_0 e del sottoarco essenziale di α_0, perchè la catena $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \delta'')$ è eccezionale per α_0 e Π_0, rispetto a t.

Ciò premesso, facciamo intervenire i risultati del n° 60. Secondo i quali, α_n ha in comune soltanto l'origine, A_0, col segmento, eventualmente degenere, B_0A_0 e soltanto il termine, $t(A_0)$, col segmento, eventualmente degenere, $t(A_0)t(B_0)$; mentre β_n è dato da $B_0A_0 + \alpha_n + t(A_0)w(B_0)$.

Allora $w(\beta_n)$ è dato a sua volta da $w(B_0)w(A_0) + w(\alpha_n) + w(t(A_0))w^2(B_0)$, perché i segmenti B_0A_0 e $t(A_0)w(B_0)$ stanno sulla retta $\sigma_0(=\pi_0)$, che è una traiettoria nella w. Ed i segmenti $w(B_0)w(A_0)$ e $w(t(A_0))w^2(B_0)$ contengono gli estremi di $w(\alpha_n)$, appartengono a π_0 e non intersecano il sottoarco essenziale di α_0.

Indi i punti comuni a δ'' e $w(\beta_n)$ sono intanto interni a $w(\alpha_n)$. Nel fatto essi sono contenuti nella somma di Π_0 e del sottoarco essenziale di α_0, in quanto punti di δ''. Pertanto essi non possono appartenere nè a $w(B_0)w(A_0)$ nè a $w(t(A_0))w^2(B_0)$. Da cui la conclusione, visto che essi sono punti di $w(\beta_n)$ e viste le circostanze ricordate nell'alinea precedente.

E dopo di ciò è facile dedurre che essi sono per di più interni alla striscia S. Nel fatto, in quanto interni a $w(\alpha_n)$, epperò a $w(\beta_n)$, essi non possono essere interni a β_n, che è un arco di traslazione nella w. Pertanto essi non appartengono al sottoarco essenziale di α_n. Ma essi appartengono a δ''. Quindi essi appartengono a Π_n. Pertanto essi appartengono anche a Π_0, che contiene Π_n (n° 24, primo teorema). Epperò essi sono esterni a $\tau_0(=\pi_0=\sigma_0)$. D'altra parte, in quanto interni a $w(\alpha_n)$ essi appartengono ad $S-\tau_1$, vista la prima proposizione del n° 59 ed attesa l'invarianza di S e di τ_1 nella w. E la seconda affermazione del lemma è stabilita anch'essa.

70. – Sia adesso Q^* un tal punto di β_n, che il punto $w(Q^*)$, diciamolo Q',

$$Q' = w(Q^*), \tag{16}$$

appartenga a δ''; ed R^* un tal punto di α_n, che il punto $t^{-1}(R^*)$, diciamolo R',

$$R' = t^{-1}(R^*), \tag{17}$$

appartenga a δ'. La presenza di Q^* ed R^* è certa, dato il significato di δ' e δ''; epperò è certa anche quella di Q' ed R'.

Attesa la proposizione del numero precedente, il punto Q' è interno a $w(\alpha_n)$ e ad S; pertanto:

Il punto Q^* è interno ad α_n e ad S;
inoltre è ovvio che:

I punti Q' ed R' sono diversi fra di loro,
perché Q' appartiene a δ'' ed R' a $t^{-1}(\alpha_n)$, mentre δ'' non interseca $t^{-1}(\alpha_n)$, in quanto eccezionale per α_n e Π_n rispetto a t.

71. – Ricordato che i punti comuni ad α_n e $\pi_0(=\tau_0)$ sono i punti comuni ad α_n e α_0, consideriamo su α_n il sottoarco c^* individuato dalle condizioni: di contenere Q^* ed R^*; di avere gli estremi su α_0; e di essere minimale di fronte a queste proprietà.

La presenza di c^* è sicura; e naturalmente c^* è un sottoarco anche per β_n. Inoltre è certo che:

Almeno uno degli estremi di c^* è interno ad α_0, epperò a β_0;
e che:

Gli estremi di c^* interni ad α_0 (a β_0) sono interni anche ad α_n (a β_n);
tutto questo perché Q^* è interno ad S e perché il primo e l'ultimo lato di a_n (di b_n) coincidono, rispettivamente, col primo e con l'ultimo lato di a_0 (di b_0).

72. – Dalle due proposizioni del numero precedente si deduce immediatamente che:

Almeno uno degli estremi di c^* è interno ad α_n ed a β_n;
e di qui e dal significato traslazionale di α_n e di β_n si trae subito che:

La curva semplice ed aperta c^* è libera tanto nella t, quanto nella w.

Dopo di ciò basta ricordare il lemma del n° 55 per riconoscere senz'altro che:

Essa è libera anche nella ϑ;
e da qui segue che:

La curva semplice ed aperta c^* è libera in tutte le potenze non identiche di t, di w e di ϑ,
atteso il primo teorema del n° 4.

73. – Il punto V è interno ad α_n (epperò a β_n), mentre Q' appartiene a $w(\beta_n)$ ed R' a $t^{-1}(\alpha_n)$. Di qui e dal significato traslazionale di α_n e β_n si deduce che:

I segmenti $Q'V$ ed $R'V$ non sono degeneri;
ma noi ora mostreremo che:

Le loro lunghezze non possono mai superare il numero h;
e che:

Essi hanno in comune soltanto il punto V;
la prima circostanza essendo anzi immediata: nel fatto, i segmenti $Q'V$ ed $R'V$ appartengono, nell'ordine, a δ'' e δ'; e le lunghezze dei lati di δ' e δ'' non superano mai h (n° 46).

Ma δ' e δ'' sono anche diverse fra di loro (n° 68, prima proposizione). Pertanto: o quei segmenti hanno in comune soltanto il punto V; ovvero essi appartengono ad un lato comune a δ' e δ'', nel qual caso δ'' conterrebbe R', cosa assurda (per un motivo addotto proprio nella dimostrazione del primo lemma del n° 68). Donde anche la seconda circostanza.

74. - Consideriamo di nuovo, in K, la stella W, col centro nel punto V, nonché il poligono W^*, individuato da α_n su W e rivolto verso Π_n nel punto V.

Allora dalla seconda proposizione del numero precedente segue subito che:

La lunghezza della poligonale semplice ed aperta $Q'V + VR'$ non può superare il numero $2h$;

ma nelle altre considerazioni dello stesso numero è implicito che:

La poligonale semplice ed aperta $Q'V + VR'$ è contenuta nel poligono W^*, di guisa che essa è libera nella ϑ (ed in tutte le potenze non identiche di ϑ), atteso che W è libera nella ϑ (ed in tutte le potenze non identiche di ϑ).

75. - Nell'interno di W^* consideriamo adesso un tal punto U, che siano uguali gli angoli UVQ' ed UVR', di guisa che:

I segmenti $Q'U$ ed $R'U$ non sono certamente degeneri ed hanno in comune soltanto il punto U;

e supponiamo U tanto vicino a V, che:

Il punto U sia interno di S,

giusta l'ultima proposizione del n° 68; che:

La poligonale semplice ed aperta $Q'U + UR'$ sia contenuta nell'interno di W^*, a prescindere, eventualmente, dai punti Q' ed R';

e finalmente che:

La lunghezza della poligonale semplice ed aperta $Q'U + UR'$ sia minore di $2h + \varepsilon$,

ε essendo un numero reale e positivo fissato una volta per tutte in guisa da soddisfare alla

$$\varepsilon < h, \tag{18}$$

e da soddisfare altresì alla

$$\varepsilon < \sqrt{3}h(k^{-2} + k^{-3} - 2/\sqrt{3}), \tag{19}$$

qualora ci si trovi nelle condizioni ulteriormente contemplate dal teorema del n° 31.

76. - Il punto U essendo interno ad S, giusta la seconda risultanza del numero precedente, è facile riconoscere che:

I punti di $Q'U + UR'$ diversi da R' sono certamente interni ad S.

Nel vero, si rammentino la (16) e la (17). Allora Q' è interno ad S, in quanto immagine, nella w, del punto Q^*, interno ad S (n° 70, prima proposizione); ed R' appartiene ad S, in quanto immagine, nella t^{-1}, di un punto dell'arco α_n, che appartiene ad S, anzi ad $S - \tau_1$, giusta la prima proposizione del n° 59.

77. - Percorriamo la poligonale $Q'U + UR'$ a partire da Q'; ed arrestiamoci appena incontriamo $t^{-1}(c^*)$, nel punto R''. Indi ritorniamo indietro, sulla medesima poligonale, a partire da R'', ed arrestiamoci appena incontriamo $w(c^*)$, nel punto Q''.

La presenza di Q'' ed R'' è certa; se non altro $Q'' = Q'$ ed $R'' = R'$. Inoltre è immediato che:

I punti Q'' ed R'' sono diversi fra di loro;
perché R'' appartiene a $t^{-1}(c^*)$ e Q'' a $w(c^*)$, cioè a $\vartheta(t^{-1}(c^*))$, e perché $t^{-1}(c^*)$ è libera nella ϑ, attesa la penultima proposizione del n° 72 e la permutabilità di ϑ e di t^{-1}.

78. - I punti Q'' ed R'' individuano su $Q'U + UR'$ una poligonale semplice ed aperta (non degenere). Indichiamola con λ'. Allora

$$\lambda' = Q''U + UR'', \tag{20}$$

se Q'' ed R'' appartengono rispettivamente ai segmenti $Q'U$ ed UR' (riuscendo per di più diversi da U, se si vuole); mentre

$$\lambda' = Q''R'', \tag{21}$$

se Q'' appartiene al segmento UR', oppure se R'' appartiene al segmento $Q'U$. Inoltre nelle definizioni precedenti è implicito che:

L'intersezione di λ' e $t^{-1}(c^*)$ si riduce all'estremo R'' di λ'; quella di λ' e $w(c^*)$ si riduce all'estremo Q'' di λ'.

Dalle condizioni fissate nel n° 75 si trae subito che:

La lunghezza di λ' è minore di $2h + \varepsilon$;
e che:

La poligonale λ' appartiene al poligono W^*, anzi il suo interno appartiene all'interno del poligono.

Di qui e dalla seconda e dalla terza proposizione del n° 46 segue subito che:

La poligonale λ' è libera in tutte le potenze non identiche di t, di w e di ϑ, nonché in tutti i prodotti $t\vartheta^p$ e $w\vartheta^p$ di t e di w per potenze di ϑ.

Dalla proposizione del n° 76 e dalla circostanza che i punti di λ' diversi da R'' sono certamente diversi anche da R' segue che:

I punti λ' diversi da R'' sono interni ad S;

ed ormai è facile dimostrare che:

L'intersezione di λ' e di α_n o è vuota o si riduce all'estremo R'' di λ'.

Nel fatto, i punti di λ' diversi da Q'' ed R'' sono interni a W^* (questo numero, terza proposizione). Pertanto i punti di λ' diversi da Q'' ed R'' non possono mai appartenere ad α_n (n° 12, prima proposizione). Sicché, per stabilire che i punti di λ' diversi da R'' non appartengono mai ad α_n, basta far vedere che il punto Q'' non appartiene ad α_n. E questo è presso che immediato. Se il punto Q'' appartenesse ad α_n, esso sarebbe un punto comune ad α_n e $w(\alpha_n)$. D'altra parte esso è interno ad S, attesa la proposizione precedente; indi esso non appartiene nè ad α_0, nè a $w(\alpha_0)$. Indi, se esso appartenesse ad α_n, esso sarebbe un punto comune a Δ_n e $w(\Delta_n)$, attesa la penultima proposizione del n° 23. E questo è assurdo, perché la catena Δ_n è libera nella w, in quanto eccezionale per β_0 e Σ_0, rispetto a w. Donde la conclusione.

Nelle (20) e (21) è poi implicito che λ' o si riduce soltanto ad un segmento, ovvero presenta soltanto un punto angoloso.

79. – Accanto alla poligonale semplice ed aperta λ' consideriamo la curva semplice ed aperta λ definita mediante la posizione

$$\lambda = t(\lambda'); \tag{22}$$

di guisa che λ ha gli estremi nei punti $t(Q'')$ e $t(R'')$. E poniamo altresì

$$Q = w^{-1}(Q'') = t(\vartheta^{-1}(Q'')), \quad R = t(R''); \tag{23}$$

di guisa che:

I punti Q ed R appartengono entrambi a c^*, epperò ad α_n;

mentre gli estremi della curva semplice ed aperta λ sono dati anche dai punti R e $\vartheta(Q)$, sicché:

I punti R e $\vartheta(Q)$ sono diversi fra di loro;

mentre è altresì immediato che:

Anche i punti Q ed R sono diversi fra di loro;

nel fatto λ' è libera nella ϑ (n° 78, quarta proposizione); epperò $\vartheta^{-1}(Q'')$, che appartiene a $\vartheta^{-1}(\lambda')$, è certamente diverso da R'', che appartiene a λ'; donde appunto la conclusione, attese le (23).

La prima proposizione del numero precedente porge che:

L'intersezione di λ e di c^* si riduce all'estremo R di λ; quella di λ e di $\vartheta(c^*)$ all'estremo $\vartheta(Q)$ di λ;

e la quarta, vista la permutabilità delle potenze di t con quelle di ϑ, porge che:

La curva λ è libera in tutte le potenze non identiche di t, di w e di ϑ, nonché in tutti i prodotti $t\vartheta^p$ e $w\vartheta^p$ di t e di w per potenze di ϑ.

Analogamente, la quinta proposizione del n° 78 diventa che:

I punti di λ diversi da R sono interni ad S;

e la sesta che:

L'intersezione di λ e $t(\alpha_n)$, epperò, a più forte ragione, quella di λ e $t(c^*)$, o è vuota o si riduce all'estremo R di λ.

Dopo di ciò basta ricordare che R appartiene a c^* (questo numero, prima proposizione) e che c^* e $t(c^*)$ sono disgiunte, per concludere che:

L'intersezione di λ e $t(c^*)$ è certamente vuota in ogni caso.

Dalla seconda e dalla sesta proposizione di questo numero segue in particolare che il punto $\vartheta(Q)$ è interno ad S; e quindi che:

Il punto Q è interno ad S, epperò è interno anche a c^*.

E se si fa intervenire anche quella tal condizione lipschitziana, si può affermare per di più che:

In queste ipotesi ulteriori, la curva λ è rettificabile e la sua lunghezza è minore di $(2h+\varepsilon)k$;

come segue dall'ultima proposizione del n° 43 unita alla seconda del precedente.

80. – In armonia con le considerazioni e le definizioni del n° 71, i punti comuni al sottoarco c^* di α_n ed alla retta $\pi_0(=\tau_0)$ sono i punti comuni a c^* ed α_0; e gli estremi di c^* appartengono ad α_0. Ricordata allora la prima proposizione del numero precedente, indichiamo con c il sottoarco non degenere di c^* (e di α_n) individuato dalle condizioni: di contenere Q ed R; di avere gli estremi su α_0; e di essere minimale di fronte a queste proprietà.

La presenza di c è certa; e naturalmente c è un sottoarco anche per β_n. Inoltre è certo che:

Almeno uno degli estremi di c è interno ad α_0; epperò a β_0;

e che:

Gli estremi di c interni ad α_0 (a β_0) sono interni anche ad α_n (a β_n);

tutto questo perché Q è interno ad S (n° 79, penultima proposizione) e perché il primo e l'ultimo lato di a_n (di b_n) coincidono, rispettivamente, col primo e con l'ultimo lato di a_0 (di b_0).

81. – L'analogia fra le proposizioni del n° 71 e quelle del numero precedente, sussiste anche nei riguardi delle altre proprietà di c^* e di c.

Così, le proposizioni del numero precedente porgono che:

Almeno uno degli estremi di c è interno ad α_n ed a β_n,

in analogia con la prima del n° 72; così, la circostanza che c è un sottoarco di c^* e le altre proposizioni del n° 72 dànno che:

La curva semplice ed aperta c è libera in tutte le potenze non identiche di t, di w e di ϑ;
e così la prima proposizione del n° 79 diventa:

I punti Q ed R appartengono a c (epperò ad α_n),
circostanza che veramente adesso è più che altro un dato implicito nella definizione istessa di c.

Poiché c è un sottoarco di c^*, la prima proposizione del n° 78, unita alla proposizione precedente porge che:

L'intersezione di λ' e $t^{-1}(c)$ si riduce all'estremo R'' di λ'; quella di λ' e $w(c)$ si riduce all'estremo Q'' di λ';
e da qui, dalla (22) e dalle (23) segue subito che:

L'intersezione di λ e di c si riduce all'estremo R di λ; quella di λ e di $\vartheta(c)$ all'estremo $\vartheta(Q)$ di λ,
in analogia con la quarta proposizione del n° 79; mentre dall'ottava proposizione del n° 79 si deduce subito che:

L'intersezione di λ e di $t(c)$ è vuota.

E per completare il quadro delle analogie osserviamo esplicitamente che:

Il punto Q è certamente interno a c,
atteso che esso è interno ad S, giusta la penultima proposizione del n° 79, ed atteso che gli estremi di c appartengono alla frontiera di S.

82. - I punti Q ed R, in quanto punti distinti di c (n° 79, terza proposizione, n° 81, terza proposizione), individuano su c un sottoarco non degenere. Diciamolo $\varkappa$. E poniamo

$$\varkappa' = t^{-1}(\varkappa)\,; \tag{24}$$

di guisa che gli estremi di $\varkappa'$ sono dati da $\vartheta^{-1}(Q'')$ ed R'', attese le (23); mentre la (24) si può scrivere

$$\varkappa = t(\varkappa')\,, \tag{25}$$

che ricorda più da vicino la (22). Allora dalla seconda proposizione del n° 81 segue subito che:

La curva semplice ed aperta $\varkappa$ è libera in tutte le potenze non identiche di t, di w e di ϑ;
epperò che:

La stessa circostanza si presenta naturalmente anche per la curva semplice ed aperta $\varkappa'$,
attesa la solita permutabilità delle potenze di t con le potenze di ϑ.

83. - Dalla quinta proposizione del n° 81 e dalla circostanza che $\varkappa$ è un sottoarco di c, si deduce subito che:

Le curve $\varkappa$ *e* λ *hanno soltanto il comune estremo* R *in comune; le curve* λ *e* $\vartheta(\varkappa)$ *hanno soltanto il comune estremo* $\vartheta(Q)$ *in comune;*
epperò, attese la (22), le (23) e la (24), equivalente alla (25), che:

Le curve $\varkappa'$ *e* λ' *hanno soltanto il comune estremo* R'' *in comune; le curve* λ' *e* $\vartheta(\varkappa')$ *hanno soltanto il comune estremo* Q'' *in comune;*
sicché:

Tanto $\varkappa+\lambda$ *e* $\lambda+\vartheta(\varkappa)$, *quanto* $\varkappa'+\lambda'$ *e* $\lambda'+\vartheta(\varkappa')$ *sono curve semplici ed aperte.*

E noi ora mostreremo che:

La curva semplice ed aperta $\varkappa+\lambda$ *è un arco di traslazione nella* ϑ;
facendo vedere, cosa più agevole, che:

Tale è, nella ϑ, *la curva semplice ed aperta* $\varkappa'+\lambda'$;
dopo di che tali saranno, ovviamente, anche le curve $\lambda+\vartheta(\varkappa)$ e $\lambda'+\vartheta(\varkappa')$.

Allo scopo distinguiamo due eventualità: quella in cui l'ordinata del punto corrente di λ' è sempre compresa, in senso lato, fra la minima e la massima delle ordinate dei punti di $\varkappa'$; e quella in cui l'ordinata del punto corrente di λ' scende anche al di sotto della minima o sale anche al di sopra della massima fra le ordinate dei punti di $\varkappa'$.

Se λ' si riduce ad un segmento solo, si presenta senz'altro la prima eventualità: ma non viceversa.

Nella seconda eventualità λ' contiene nell'interno il punto U (ed allora λ' è dato dalla somma dei segmenti $Q''U$ ed $R''U$, in armonia con la (20)); il punto U è angoloso per λ'; inoltre l'ordinata di U o è minore della minima fra le ordinate dei punti di $\varkappa'$ (ed allora l'ordinata del punto corrente di λ' non può mai superare la massima fra le ordinate dei punti di $\varkappa'$), ovvero è maggiore della massima fra le ordinate dei punti di $\varkappa'$ (ed allora l'ordinata del punto corrente di λ' non può scendere al di sotto della minima fra le ordinate dei punti di $\varkappa'$).

Prendiamo in esame la prima eventualità, quella in cui l'ordinata del punto corrente di λ' non può mai scendere al di sotto della minima fra le ordinate dei punti di $\varkappa'$ e non può mai superarne la massima.

Allo scopo, consideriamo la striscia, eventualmente degenere, S', riempita dalle orizzontali passanti per i punti di $\varkappa'$; cioè, atteso il significato di ϑ, la striscia riempita dalle orizzontali passanti per i punti di $\vartheta(\varkappa')$, nonché quella riempita dalle orizzontali passanti per i punti di $\vartheta^2(\varkappa')$.

Diciamo τ_0' e τ_1' le orizzontali estreme ed eventualmente coincidenti di S'. E consideriamo, su τ_0' (oppure su τ_1'), quello, fra i punti di $\varkappa'$, con l'ascissa minima e quello, fra i punti di $\vartheta^2(\varkappa')$, con l'ascissa massima. La semiretta orizzontale ([13]) che esce dal primo rivolgendosi nel verso negativo dell'asse delle ascisse non incontra $\vartheta(\varkappa')$, atteso il significato di ϑ ed atteso

([13]) Ormai il significato dell'espressione non ha bisogno di chiarimenti.

che $\vartheta(\varkappa')$ è libera nella ϑ; ed una circostanza analoga si presenta anche per la semiretta orizzontale che esce dal secondo rivolgendosi nel verso positivo dell'asse delle ascisse.

Sicché $\varkappa'$ e $\vartheta^2(\varkappa')$ sono separate l'una dall'altra, nella striscia S', mediante $\vartheta(\varkappa')$.

Ma ci troviamo nella prima eventualità, nella quale $\vartheta(\lambda')$ appartiene completamente alla striscia S'. E $\vartheta(\lambda')$ ha un estremo, $\vartheta(Q'')$, su $\vartheta^2(\varkappa')$; ed ha su $\vartheta(\varkappa')$ soltanto un punto, l'estremo $\vartheta(R'')$. Inoltre $\vartheta(R'')$ non appartiene a $\varkappa'$, proprio perché sta su $\vartheta(\varkappa')$. Dunque $\varkappa'$ e $\vartheta(\lambda')$ non hanno punti in comune.

E l'intersezione delle due curve $\varkappa' + \lambda'$ e $\vartheta(\varkappa' + \lambda')$ si riduce a quella delle due curve λ' e $\vartheta(\varkappa')$, cioè si riduce al punto Q''. Donde la conclusione, nella prima eventualità, atteso che gli estremi di $\varkappa' + \lambda'$ sono dati proprio da $\vartheta^{-1}(Q'')$ e Q''.

E passiamo all'esame dell'altra eventualità.

Allo scopo, indichiamo stavolta con S' la striscia non degenere riempita dalle orizzontali passanti per la curva semplice ed aperta $\varkappa' + \lambda'$, cioè dalle orizzontali passanti per i punti della curva semplice ed aperta $\lambda' + \vartheta(\varkappa')$.

Ed indichiamo di nuovo con τ_0' e τ_1' le orizzontali estreme di S', denotando con τ_1' quella che passa per U; di guisa che l'intersezione di τ_1' e $\varkappa'$ è vuota, quella di τ_1' e λ' si riduce ad U, quella di τ_0' e $\varkappa'$ non è mai vuota, e quella di τ_0' e λ' è contenuta nell'insieme formato da Q'' ed R'' anche quando non è vuota.

E distinguiamo due sottoeventualità: l'intersezione di τ_0' e λ' è vuota; l'intersezione di τ_0' e λ' contiene almeno uno dei punti Q'' ed R''.

Nella prima sottoeventualità, consideriamo, su τ_0', quello fra i punti di $\varkappa'$ con l'ascissa minima; e consideriamo, su τ_1', l'unico punto comune a τ_1' e $\vartheta(\lambda')$, cioè il punto $\vartheta(U)$. La semiretta orizzontale che esce dal primo rivolgendosi nel verso negativo dell'asse delle ascisse non incontra $\lambda' + \vartheta(\varkappa')$; ed una circostanza analoga si presenta per la semiretta orizzontale che esce dal secondo rivolgendosi nel verso positivo dell'asse delle ascisse.

Sicché nella striscia S' quel primo punto è separato da questo secondo mediante $\lambda' + \vartheta(\varkappa')$.

D'altra parte $\varkappa'$ e $\vartheta(\lambda')$ han rispettivamente soltanto R'' e $\vartheta(R'')$ su $\lambda' + \vartheta(\varkappa')$. Inoltre R'' non appartiene a $\vartheta(\lambda')$, in quanto punto di λ'; e $\vartheta(R'')$ non appartiene a $\varkappa'$, in quanto punto di $\vartheta(\varkappa')$. Dunque anche stavolta $\varkappa'$ e $\vartheta(\lambda')$ non hanno punti in comune. Ed anche stavolta l'intersezione di $\varkappa' + \lambda'$ e $\vartheta(\varkappa' + \lambda')$ si riduce a quella di λ' e $\vartheta(\varkappa')$, cioè al punto Q''. Donde la conclusione, anche stavolta, sempre perché gli estremi della curva semplice ed aperta $\varkappa' + \lambda'$ sono dati proprio da $\vartheta^{-1}(Q'')$ e Q''.

Nella seconda eventualità, λ' interseca τ_0' e τ_1'; e separa $\vartheta^{-1}(\lambda')$ da $\vartheta(\lambda')$ nella striscia S'. Inoltre $\varkappa'$ interseca $\vartheta^{-1}(\lambda')$ ed ha soltanto R'' su λ'. Dunque anche stavolta $\varkappa'$ e $\vartheta(\lambda')$ non hanno punti in comune. Donde la solita conclusione. E quindi il lemma.

84. – Passiamo a fissare qualche altra convenzione, che dovrà esser mantenuta d'ora in poi. Indichiamo intanto con F e G gli estremi di c. Essi appartengono ad α_0 per definizione (n° 80). Ed almeno uno di essi è interno ad α_0 (n° 80, prima proposizione), epperò ad α_n.

I punti Q ed R di c sono diversi l'uno dall'altro (n° 79, terza proposizione; n° 81, terza proposizione). Quindi possiamo supporre di avere scelto i nomi degli estremi di c in tal guisa, che R sia esterno al sottoarco, diciamolo μ, individuato da Q ed F su c; e quindi che Q sia esterno a quello, diciamolo ν, individuato su c da R e G.

Nelle posizioni precedenti e nella circostanza che il punto Q è interno a c (n° 81, ultima proposizione), è ovviamente implicito che:

I punti Q ed R sono rispettivamente diversi dai punti G ed F;

e che:

Il punto Q, poi, è diverso anche dal punto F, ossia la curva μ non è degenere;

mentre rimane impregiudicata l'eventuale degenerazione della curva ν, cioè l'eventuale coincidenza del punto R col punto G.

Nelle posizioni precedenti, e nella diversità del punto Q dal punto R, è poi implicito che:

I punti Q ed R sono rispettivamente esterni alle curve ν e μ; e queste curve sono disgiunte.

Inoltre è ovvio che:

Le immagini di μ e ν nelle diverse potenze identiche e non identiche di t, di w e ϑ sono disgiunte a due a due, quelle di μ fra di loro, quelle di μ da quelle di ν e quelle di ν fra di loro;

tali sono infatti quelle del comune sovrainsieme c di μ e di ν, giusta la seconda proposizione del n° 81.

85. – Dalla circostanza che il punto Q è interno alla striscia S ed alla curva c (n° 79, penultima proposizione; n° 81, ultima proposizione) e dalla condizione minimale imposta a c nel n° 80, segue che:

La curva μ ha soltanto il punto F su $\tau_0 (= \pi_0 = \sigma_0)$, e la curva ν soltanto il punto G.

Da quella condizione minimale segue altresì che:

Il punto G coincide con R, se e soltanto se R appartiene ad α_0;

anzi, attesa la seconda proposizione del n° 59, che:

Il punto G coincide con R, se e soltanto se R appartiene a $\tau_0 (= \pi_0 = \sigma_0)$;

epperò, attesa la prima proposizione di quello stesso numero, che:

Il punto R è interno ad S, se e soltanto se esso è diverso da G;

e che:

Il punto R è interno a c, se e soltanto se esso è interno ad S.

Se si tien conto della sesta proposizione del n° 23 e si ricordano di nuovo quelle del n° 59, si riconosce che:

Il punto F è un vertice di a_n interno ad α_0, cioè un vertice di K contenuto nel sottoarco essenziale di α_0; i punti di c diversi da F ed abbastanza vicini ad F sono interni ad S;

e che:

Circostanze perfettamente analoghe si presentano nei riguardi del punto G, se R è interno ad S, cioè se ν non è degenere.

Nel n° 92 vedremo che G appartiene al segmento $Ft(A_0)$, cioè che G viene dopo di F su α_0.

86. - La curva semplice ed aperta μ non ha punti in comune con λ. Ciò segue dal fatto che λ e c hanno in comune soltanto il punto R (n° 81, quinta proposizione); che R è esterno ad μ (n° 84, terza proposizione); e che μ appartiene a c. Inoltre μ e $\varkappa$ hanno in comune soltanto il punto Q, come segue dalle definizioni (e dalla circostanza che R è esterno a μ). Pertanto le curve semplici ed aperte μ e $\varkappa+\lambda$ hanno in comune soltanto il punto Q.

Le curve semplici ed aperte μ e $\vartheta^{-1}(\lambda)$ hanno in comune soltanto il punto Q. Ciò segue dal fatto che $\vartheta^{-1}(\lambda)$ e c hanno in comune soltanto il punto Q (n° 81, quinta proposizione) e dalla circostanza che μ appartiene a c. D'altra parte μ e $\vartheta^{-1}(\varkappa)$ sono disgiunte, perché μ e $\varkappa$ appartengono entrambe alla curva c, libera nella ϑ (n° 81, seconda proposizione). Pertanto μ e $\vartheta^{-1}(\varkappa+\lambda)$ hanno soltanto il punto Q in comune.

Ma $\varkappa+\lambda$ e $\vartheta^{-1}(\varkappa+\lambda)$ sono archi di traslazione per la ϑ; ed in quanto tali ammettono l'estremo Q di μ come rispettiva origine e rispettivo termine. Inoltre μ è libera nella ϑ, giusta l'ultima proposizione del n° 84. Indi, per concludere che:

L'unico punto comune alla curva semplice ed aperta μ ed alla traiettoria generata da $\varkappa+\lambda$ nella ϑ è fornito dall'estremo Q di $\vartheta^{-1}(\lambda)$, μ e $\varkappa$,

basta ricordare il lemma fondamentale sulle traiettorie di una traslazione piana generalizzata (n° 6, prima proposizione).

87. - Il risultato del numero precedente si trasporta subito alla curva eventualmente degenere ν. Se questa si riduce ad un punto, per riconoscere che:

L'unico punto comune alla curva ν ed alla traiettoria generata da $\varkappa+\lambda$ nella ϑ è fornito dall'estremo R di $\varkappa$, ν e λ,

non v'è bisogno di spendere parola. Se ν non è degenere, si osserverà che essa ha in comune soltanto l'estremo R sia con $\vartheta^{-1}(\lambda)+\varkappa$, sia con $\lambda+\vartheta(\varkappa)$; si terrà conto della circostanza che anche $\vartheta^{-1}(\lambda)+\varkappa$ e $\lambda+\vartheta(\varkappa)$ sono archi di traslazione della ϑ, con il termine rispettivo e la rispettiva origine nell'estremo

R di ν, nonché della circostanza che $\varkappa + \lambda$ e $\lambda + \vartheta(\varkappa)$, epperò $\varkappa + \lambda$ e $\vartheta^{-1}(\lambda) + \varkappa$, generano la stessa traiettoria nella ϑ; e si terrà conto di nuovo dell'ultima proposizione del n° 84, nonché del lemma fondamentale sulle traiettorie di una traslazione piana generalizzata.

88. - Nel seguito indicheremo con ω la traiettoria generata da $\varkappa + \lambda$ nella ϑ. Ed a proposito di ω, dimostriamo subito che:

Essa è contenuta nella striscia S, anzi nella striscia S privata dell'orizzontale τ_1.

Infatti $\varkappa$ appartiene ad $S - \tau_1$, in quanto sottoarco di c, e quindi di α_n, che appartiene ad $S - \tau_1$, giusta la prima proposizione del n° 59. E λ appartiene ad $S - \tau_1$, perché immagine, nella t, di una sottopoligonale, λ', della spezzata $Q'U + UR'$, che appartiene a $S - \tau_1$, giusta la proposizione del n° 76, nonché giusta quella stessa prima proposizione del n° 59 e la circostanza che R' appartiene a $t^{-1}(\alpha_n)$ e che τ_1 è una traiettoria della t. Donde appunto il risultato, atteso che le orizzontali estreme τ_0 e τ_1 di S sono due traiettorie nella ϑ.

In quanto traiettoria nella traslazione piana ordinaria ϑ, la linea semplice ed aperta ω è *periodica* nella x con *periodo* unitario, il significato delle espressioni essendo palese. E sempre in quanto traiettoria in quella solita traslazione piana ordinaria, ω è per di più una linea semplice ed aperta *propria*, nel senso che contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Uno, Ω, dei due campi adiacenti ad ω contiene tutti i punti con l'ordinata maggiore di $\rho + 1$; l'altro, Ω', contiene tutti quelli con l'ordinata minore di ρ. Naturalmente:

Il campo Ω è contenuto nel campo $\Pi_0 (= \Sigma_0)$; ed il campo Ω' contiene il campo $\Pi'_0 (= \Sigma'_0)$;

pertanto:

Il semipiano $\Pi_0 + \pi_0 (= \Sigma_0 + \sigma_0)$ contiene l'insieme $\Omega + \omega$; l'insieme $\Omega' + \omega$ contiene il semipiano $\Pi'_0 + \pi_0 (= \Sigma'_0 + \sigma_0)$;

e quindi:

L'insieme $\Omega' + \omega$ contiene l'orizzontale $\tau_0 (= \pi_0 = \sigma_0)$,

mentre nella prima proposizione di questo numero e nelle definizioni di Ω ed Ω' è implicito che Ω contiene τ_1 e che Ω' contiene τ.

§ 11. - Seguita l'esame del secondo caso.

89. - Il significato dei simboli essendo quello stabilito, la curva semplice ed aperta c ed il segmento FG possono avere in comune punti diversi dai comuni estremi F e G.

Questa circostanza potrebbe presentare qualche inconveniente per l'esposizione, se non facessimo uso di un artificio analogo a quello sfruttato nel n° 55.

Allo scopo, indichiamo con S^* la striscia racchiusa fra le orizzontali τ e τ_1; di guisa che, la prima proposizione del n° 88 diventa:

La linea ω è contenuta nell'interno della striscia S^*.

Consideriamo quindi su τ i punti F^* e G^* con le ascisse rispettivamente uguali a quelle di F e di G. E poniamo

$$\mu^* = F^*F + \mu\,, \quad \nu^* = G^*G + \nu\,;$$

di guisa che anche ν^* è una curva semplice ed aperta (non degenere), mentre dalle definizioni, dall'ultima proposizione del n° 84 e dai risultati dei nⁱ 86 ed 87 si deduce subito che:

Le immagini delle curve μ^* e ν^* nelle diverse potenze identiche e non identiche di t, di w e di ϑ sono disgiunte a due a due, quelle di μ^* fra di loro, quelle di μ^* da quelle di ν^* e quelle di ν^* fra di loro;

e che:

Le curve μ^* e ν^* hanno rispettivamente in comune con la linea ω soltanto gli estremi Q ed R; e con la retta τ soltanto gli estremi F^* e G^*, sempre rispettivamente;

ovvio essendo altresì che:

Le curve μ^* e ν^* appartengono entrambe alla striscia S^*,

anzi alla striscia S^* privata dell'orizzontale τ_1, come seguirebbe facilmente dalla prima proposizione di questo numero.

90. - Ciò premesso, introduciamo le curve semplici e chiuse e^*, i^* e j^* rispettivamente definite mediante le posizioni

$$e^* = \mu^* + \varkappa + \nu^* + G^*F^*, \quad i^* = \nu^* + \lambda + \vartheta(\mu^*) + \vartheta(F^*)G^*, \tag{26}$$

e

$$j^* = \mu^* + \varkappa + \lambda + \vartheta(\mu^*) + \vartheta(F^*)F^*, \tag{27}$$

ed indichiamo con E^*, I^* e J^* le regioni rispettivamente racchiuse da e^*, i^* e j^*.

In queste condizioni, tenuto conto della prima e della penultima proposizione del numero precedente, è ovvio che:

Le curve e^*, i^* e j^* hanno, su τ, soltanto i segmenti F^*G^*, $G^*\vartheta(F^*)$ ed $F^*\vartheta(F^*)$, rispettivamente; e su ω soltanto gli archi $\varkappa$, λ e $\varkappa + \lambda$, sempre rispettivamente.

Attesa la prima e l'ultima proposizione del n° 89 istesso, ne segue che:

La striscia S^* *contiene tanto le curve* e^* *ed* i^*, *quanto la curva* j^*;
epperò che:

La striscia S^* *contiene tanto gli insiemi* E^* *ed* I^*, *quanto l'insieme* J^*.

La prima proposizione di questo numero ed il secondo teorema del n° 5 porgono altresì che:

Gli insiemi $E^* - F^*G^*$, $I^* - G^*\vartheta(F^*)$ *e* $J^* - F^*\vartheta(F^*)$ *sono contenuti nel campo* $\mathbf{S} - \tau$,
cioè nel campo costituito dai punti con l'ordinata positiva; e che:

Gli insiemi $E^* - \varkappa$, $I^* - \lambda$, $J^* - (\varkappa + \lambda)$ *sono invece contenuti nel campo* Ω';
anzi nella deduzione non ci sarebbe nemmeno bisogno di far intervenire esplicitamente quel secondo teorema del n° 5; nel corso della deduzione basterebbe dimostrarlo implicitamente con riguardo alle sole traiettorie di ϑ; e la cosa sarebbe particolarmente semplice, attesa la struttura di queste traiettorie.

91. - Le ultime due proposizioni del numero precedente ci permettono di stabilire abbastanza facilmente che:

Il punto G^* *è diverso da* F^* *ed appartiene al segmento* $F^*\vartheta(F^*)$;
e che:

Gli insiemi E^* *ed* I^* *hanno in comune soltanto l'arco* ν^* *del loro contorno e la loro somma è uguale a* J^*.

Nel fatto, il sottoarco ν^*, comune a e^* ed i^*, giusta le (26), parte dal punto R, interno a $\varkappa + \lambda$, volgendosi, rispetto ad ω, dalla banda di E^* ed I^*, cioè di Ω'. I punti interni a ν^* ed abbastanza vicini ad R risultano pertanto interni a J^*. Ma i punti interni a ν^* non appartengono mai alla curva semplice e chiusa j^* (attesa la seconda e la terza proposizione del n° 89). Quindi i punti interni a ν^* sono interni a J^* e ν^* ha su j^* soltanto gli estremi R e G^*. E di qui è facile dedurre tutte le conclusioni desiderate, non appena si osservi per di più che F^* e G^* sono certamente diversi fra di loro, perché tali sono gli estremi F e G che la curva semplice ed aperta c ha sull'orizzontale τ_0.

Mostriamo ora che:

Il segmento $G\vartheta(F)$ *ha soltanto gli estremi su* i^*; *i suoi punti interni sono interni ad* I^*.

Nel fatto, la curva semplice ed aperta $\nu + \lambda + \vartheta(\mu)$ ha soltanto gli estremi G e $\vartheta(F)$ su τ_0; la cosa è ovvia: essa discende dalla sesta proposizione del n° 79 e dalla terza del n° 85, nonché dalla prima di quello stesso n° 85 e dalla circostanza che τ_0 è una traiettoria di ϑ. Ma anche la spezzata semplice ed aperta $GG^* + G^*\vartheta(F^*) + \vartheta(F^*)\vartheta(F)$ ha soltanto gli estremi G e $\vartheta(F)$ su τ_0. E le curve $\nu + \lambda + \vartheta(\mu)$ e $GG^* + G^*\vartheta(F^*) + \vartheta(F^*)\vartheta(F)$ sono rispettivamente contenute nei semipiani $\mathbf{S}_\rho$ ed $\mathbf{S}'_\rho$. Donde senz'altro la conclusione.

92. – Nella prima proposizione del n° 91 è implicita una circostanza preannunciata alla fine del n° 85. Precisamente è implicito che:

Il punto G appartiene al segmento $Ft(A_0)$, anzi viene dopo di F sul segmento $\alpha_0 (= A_0 t(A_0))$, qualora si percorra α_0 nel verso positivo.

Nel fatto, in quella prima proposizione è implicito che l'ascissa di G è maggiore di quella di F, mentre F e G appartengono ad α_0 per definizione (n° 84).

D'altra parte, l'ascissa di $t(A_0)$ è minore di quella di $t(F)$, perché l'ascissa di A_0 è minore di quella di F (n° 85, penultima proposizione). E l'ascissa di $t(F)$ è minore di quella di $\vartheta(F)$, giusta la prima proposizione del n° 39. Quindi, attesa anche l'ultima proposizione del numero precedente:

Il punto $t(F)$ è interno al segmento $G\vartheta(F)$, epperò all'insieme I^*;

e dopo di ciò, è ovvio che:

I punti G e G^* sono rispettivamente interni ai segmenti $F\vartheta(F)$ ed $F^*\vartheta(F^*)$,
cosa peraltro implicita anche nelle considerazioni del numero precedente.

Sicché i punti ... $\vartheta^{-1}(F^*)$, $\vartheta^{-1}(G^*)$, $\vartheta^{-1}(t(F^*))$, F^*, G^*, $t(F^*)$, $\vartheta(F^*)$, $\vartheta(G^*)$, $\vartheta(t(F^*))$, ... sono distinti a due a due e si succedono nell'ordine scritto sull'asse delle ascisse.

93. – Dalla prima proposizione del n° 90 è agevole dedurre che il punto $\vartheta^2(F^*)$ dell'insieme $\vartheta(J^*)$ è esterno all'insieme J^*. D'altra parte le curve j^* e $\vartheta(j^*)$ hanno in comune soltanto l'arco $\vartheta(\mu^*)$, come si riconosce tenendo conto della (27), delle prime tre proposizioni del n° 89 e della circostanza che ω è una linea semplice ed aperta al pari di τ. Dunque:

L'intersezione degli insiemi J^* e $\vartheta(J^*)$ si riduce a quella, $\vartheta(\mu^*)$, delle due curve semplici e chiuse j^* e $\vartheta(j^*)$;

epperò:

Gli interni degli insiemi J^* e $\vartheta(J^*)$, e quindi anche quelli degli insiemi $\vartheta^{-1}(J^*)$ e J^*, sono disgiunti ([14]).

E di qui si trae subito che:

Gli insiemi $\vartheta^p(J^*)$ e $\vartheta^q(J^*)$ sono disgiunti, se la differenza dei numeri interi p e q ha un modulo maggiore dell'unità;

anzi, nella deduzione di quest'ultimo risultato non ci sarebbe nemmeno bisogno di ricorrere al secondo teorema del n° 4, perché ϑ è una traslazione piana ordinaria. Naturalmente:

Le ultime due proposizioni sussistono anche per gli insiemi E^* ed I^*;
perché E^* ed I^* sono contenuti nell'insieme J^*, giusta la seconda proposi-

([14]) Il ragionamento ed il risultato ricordano circostanze poste in luce nelle dimostrazioni del n° 53. E deve essere così: si tratta, adesso come allora, di risultati che rientrano in proposizioni di carattere generale e già conosciute, per le quali si può vedere, per esempio, il n° 22 della seconda delle mie Memorie citate.

zione del n° 91. Ma per E^* ed I^* si può aggiungere che:

Gli insiemi $\vartheta^p(E^*)$ *e* $\vartheta^q(E^*)$, *nonché gli insiemi* $\vartheta^p(I^*)$ *e* $\vartheta^q(I^*)$ *sono disgiunti anche se la differenza dei numeri interi* p *e* q *ha il modulo uguale all'unità*;

e che:

Se la differenza dei numeri interi p *e* q *è in modulo uguale all'unità, sono disgiunti anche* $\vartheta^p(E^*)$ *e* $\vartheta^q(I^*)$, *purchè allora l'intero* p *sia minore dell'intero* q.

Allo scopo basta dimostrare che gli insiemi E^* e $\vartheta(E^*)$ sono disgiunti, al pari degli insiemi I^* e $\vartheta(I^*)$, nonchè degli insiemi E^* e $\vartheta(I^*)$.

Ora l'intersezione di E^* e $\vartheta(E^*)$ è contenuta in quella di J^* e $\vartheta(J^*)$, giusta la seconda proposizione del n° 91; cioè in quella, $\vartheta(\mu^*)$, delle due curve j^* e $\vartheta(j^*)$. D'altra parte $\vartheta(\mu^*)$ non interseca l'arco $\varkappa+\mu^*+F^*G^*$ del contorno di j^*, perché questo arco è contenuto nell'interno di $\lambda+\varkappa+\mu^*+$ $+F^*\vartheta(F^*)$, atteso che j^*, uguale a $\lambda+\varkappa+\mu+F^*\vartheta(F^*)+\vartheta(\mu^*)$, giusta la (27), è una curva semplice e chiusa e che le curve λ e $G^*\vartheta(F^*)$ non sono degeneri; e non incontra nemmeno l'arco ν^*, che, a meno degli estremi, è interno a J^*, come è implicito nella dimostrazione del secondo teorema del n° 91, e come si può dedurre, volendo, da quel secondo teorema istesso. Donde la conclusione, per quello che ha tratto ad E^* e $\vartheta(E^*)$. Un ovvio ragionamento analogo sussiste anche per I^* e $\vartheta(I^*)$, nel senso che $\vartheta(\mu^*)$ non interseca nè $\vartheta(\nu^*)$ nè $\vartheta(\lambda^*)+\vartheta^2(\mu^*)+\vartheta^2(F^*)\vartheta(G^*)$ per motivi ormai evidenti. E la prima proposizione è dimostrata.

Quanto agli eventuali punti comuni ad E^* e $\vartheta(I^*)$, essi, in quanto comuni anche a J^* e $\vartheta(J^*)$, dovrebbero appartenere a $\vartheta(\mu^*)$, epperò a $\vartheta(E^*)$. Donde la conclusione, appunto perché E^* e $\vartheta(E^*)$ sono disgiunti, come abbiamo visto da poco.

La seconda proposizione del n° 91 e la prima di questo porgono che:

L'intersezione degli insiemi I^* *e* $\vartheta(E^*)$ *è data da quella,* $\vartheta(\mu^*)$, *dei loro contorni* i^* *e* $\vartheta(e^*)$.

Nelle considerazioni svolte è implicito che gli insiemi ... $\vartheta^{-1}(J^*)$, J^*, $\vartheta(J^*)$, ... si incontrano nell'ordine scritto se si percorre l'asse delle ascisse nel verso positivo; e che ciascuno di essi separa quelli che lo precedono da quelli che lo seguono, ove ci si mantenga fra le due linee τ ed ω. Circostanze perfettamente analoghe si presentano anche per gli insiemi ... $\vartheta^{-1}(E^*)$, $\vartheta^{-1}(I^*)$, E^*, I^*, $\vartheta(E^*)$, $\vartheta(I^*)$, ...; nella deduzione, si terrà conto anche delle circostanze poste in luce alla fine del n° 92.

94. – I risultati raggiunti negli ultimi numeri si possono in gran parte riassumere dicendo che:

Gli insiemi $J^*+\vartheta^{-1}(J^*)+\vartheta^{-2}(J^*)+\dots$ *e* $\vartheta(J^*)+\vartheta^2(J^*)+\vartheta^3(J^*)+\dots$, *rispettivamente uguali ad* $I^*+E^*+\vartheta^{-1}(I^*)+\vartheta^{-1}(E^*)+\dots$ *ed a* $\vartheta(E^*)+$

$+ \vartheta(I^*) + \vartheta^2(E^*) + \vartheta^2(I^*) + \ldots$, *hanno in comune soltanto la curva* $\vartheta(\mu^*)$ *e porgono complessivamente l'intersezione di* $\boldsymbol{S}$ *e di* $\Omega' + \omega$, *cioè la totalità dei punti di* τ *ed* ω *e di quelli compresi fra* τ *e* ω;
e che:

Gli insiemi $E^* + \vartheta^{-1}(I^*) + \vartheta^{-1}(E^*) + \vartheta^{-2}(I^*) + \ldots$ *ed* $I^* + \vartheta(E^*) + \vartheta(I^*) + + \vartheta^2(E^*) + \ldots$ *hanno in comune soltanto la curva* ν^* (*e porgono complessivamente l'intersezione di* $\boldsymbol{S}$ *ed* $\Omega' + \omega$, *cioè la totalità dei punti di* τ *ed* ω *e di quelli compresi fra* τ *ed* ω);
ed osservando che:

Gli insiemi $J^* + \vartheta^{-1}(J^*) + \vartheta^{-2}(J^*) + \ldots$ *e* $\vartheta(J^*) + \vartheta^2(J^*) + \vartheta^3(J^*) + \ldots$, *rispettivamente uguali agli insiemi* $I^* + E^* + \vartheta^{-1}(I^*) + \vartheta^{-1}(E^*) + \ldots$ *e* $\vartheta(E^*) + + \vartheta(I^*) + \vartheta^2(E^*) + \vartheta^2(I^*) + \ldots$, *intersecano* ω *rispettivamente lungo le semilinee* $(\lambda + \varkappa) + \vartheta^{-1}(\lambda + \varkappa) + \vartheta^{-2}(\lambda + \varkappa) + \ldots$ *e* $\vartheta(\varkappa + \lambda) + \vartheta^2(\varkappa + \lambda) + \vartheta^3(\varkappa + \lambda) + \ldots$ *ed intersecano* τ *rispettivamente lungo le semirette* $\vartheta(F^*)F^* + \vartheta^{-1}(\vartheta(F^*)F^*) + + \vartheta^{-2}(\vartheta(F^*)F^*) + \ldots$ *e* $\vartheta(F^*\vartheta(F^*)) + \vartheta^2(F^*\vartheta(F^*)) + \vartheta^3(F^*\vartheta(F^*)) + \ldots$;
cioè intersecano ω lungo le semilinee con l'origine nel punto $\vartheta(Q)$ e τ lungo le semirette con l'origine nel punto $\vartheta(F^*)$; e che:

Gli insiemi $E^* + \vartheta^{-1}(I^*) + \vartheta^{-1}(E^*) + \vartheta^{-2}(I^*) + \ldots$ *ed* $I^* + \vartheta(E^*) + \vartheta(I^*) + + \vartheta^2(E^*) + \ldots$ *intersecano* ω *rispettivamente lungo le semilinee* $\varkappa + \vartheta^{-1}(\lambda) + + \vartheta^{-1}(\varkappa + \vartheta^{-1}(\lambda)) + \vartheta^{-2}(\varkappa + \vartheta^{-1}(\lambda)) + \ldots$ *e* $\lambda + \vartheta(\varkappa) + \vartheta(\lambda + \vartheta(\varkappa)) + \vartheta^2(\lambda + \vartheta(\varkappa)) + \ldots$ *e* τ *rispettivamemente lungo le semirette* $G^*\vartheta^{-1}(G^*) + \vartheta^{-1}(G^*\vartheta^{-1}(G^*)) + + \vartheta^{-2}(G^*\vartheta^{-1}(G^*)) + \ldots$ *e* $G^*\vartheta(G^*) + \vartheta(G^*\vartheta(G^*)) + \vartheta^2(G^*\vartheta(G^*)) + \ldots$;
cioè ω lungo le semilinee con l'origine nel punto R e τ lungo le semirette con l'origine nel punto G^*. In particolare, nelle proposizioni precedenti è implicitamente ricordato che μ^* e ν^* su ω hanno soltanto Q ed R, rispettivamente, e su τ soltanto F^* e G^*, sempre rispettivamente.

95. – Le proprietà stabilite finora sarebbero più che sufficienti per dimostrare il teorema del n° 27. Ma in vista di quello del n° 31 è meglio non abbandonare ancora l'ordine di idee attuale.

Consideriamo pertanto la spezzata a_n. Essa è semplice, al pari di a_0, ed ha, come primo ed ultimo lato, rispettivamente il primo e l'ultimo lato di a_0 (n° 23, sesta proposizione). Inoltre, quei lati di a_n, che non appartengono ad a_0, hanno i loro interni nell'interno, Π_0, del semipiano S_ρ (n° 24, terzo teorema). Pertanto, quei punti del sottoarco c di α_n, che non appartengono ad α_0, si distribuiscono in tante poligonali semplici,

$$(28) \qquad e'_1,\ e'_2,\ \ldots,\ e'_r \qquad (r \text{ numero naturale}),$$

contenute in Π_0, a meno dei loro estremi, diciamoli rispettivamente

$$(29) \qquad L_1 \text{ ed } M_1,\ L_2 \text{ ed } M_2,\ \ldots,\ L_r \text{ ed } M_r,$$

che sono interni ad a_0.

Le poligonali (28) sono elementari rispetto a K. I punti (29) appartengono anche al segmento FG (e cadono in altrettanti vertici di K).

I segmenti non degeneri L_1M_1, L_2M_2, ..., L_rM_r, diciamoli rispettivamente

$$e_1'', \; e_2'', \; \ldots, \; e_r'', \tag{30}$$

sono elementari rispetto a K. E possiamo supporre di aver scelto i simboli in tal guisa, che i segmenti L_1M_1, L_2M_2, ..., L_rM_r si succedano nell'ordine scritto, quando si percorre a_0 a partire da A_0 verso $t(A_0)$; e che i punti L_1, L_2, ..., L_r precedano rispettivamente i punti M_1, M_2, ..., M_r.

96. - Nelle condizioni fissate nel numero precedente, il punto L_1 coincide necessariamente con F,

$$F = L_1; \tag{31}$$

ed il punto M_r è certamente interno ad FG, quando non coincide con G. Posto

$$H = M_r, \tag{32}$$

e detto e' il sottoarco individuato da F ed H su c, di guisa che

$$e' = e_1', \tag{33}$$

se $r = 1$, ed

$$e' = e_1' + M_1L_2 + e_2' + \ldots + M_{r-1}L_r + e_r', \tag{34}$$

se $r > 1$, la circostanza che:

Il punto H appartiene al segmento FG ed è diverso dal punto F;

e quella che:

Il sottoarco e' di c non è degenere; l'intersezione di e' e di τ_0 è fornita da F ed H, se $r = 1$ e da $F + M_1L_2 + \ldots + M_{r-1}L_r + H$, se $r > 1$;

sono accompagnate dalla:

I punti di c esterni al segmento eventualmente degenere HG ed abbastanza vicini ad H, cioè quelli di e' diversi da H ed abbastanza vicini ad H, sono interni ad S;

epperò dalla:

Il punto H è un vertice di a_n interno ad α_0, cioè un vertice di K contenuto nel sottoarco essenziale di α_0, atteso che allora la coincidenza di H con $t(A_0)$ e dell'ultimo lato di a_n con l'ultimo di a_0 implicherebbero un assurdo evidente.

Le circostanze poste in luce in queste ultime due proposizioni sono in rispondenza con quelle espresse dalla penultima proposizione del n° 85. E da queste e da quella si deduce in particolare che:

Il segmento FH è contenuto nell'interno di α_0,

anzi è contenuto nel sottoarco essenziale di α_0, essenziale con riferimento al complesso K naturalmente.

97. – A proposito dei punti e degli archi che compaiono nelle (28), (29), (31), (32), (33) e (34) si può affermare che:

La curva μ appartiene alla curva e'_1; il suo estremo F è un estremo di e'_1; il suo estremo Q è interno ad e'_1, epperò ad e';

e tenuto conto della quarta e dell'ultima proposizione del n° 85, nonché della terza del numero precedente, che:

Se G è diverso da R (vale a dire, se R è interno ad S), G coincide con H; se G è diverso da H, G coincide con R.

E di qui è facile dedurre che:

Se G è diverso da R (vale a dire, se R è interno ad S), la curva ν appartiene ad e'_r; l'estremo G di ν è un estremo di e'_r; l'estremo R di ν è interno ad e'_r, epperò ad e';

e che:

Se G coincide con H, il punto R appartiene ad e'_r, epperò ad e'; se G è diverso da H, il punto R è esterno ad e'.

La prima proposizione del n° 92 e la prima e la quarta del n° 96 assicurano che:

Il punto H è interno al segmento $Ft(A_0)$;

mentre l'utima del n° 92 e la prima del n° 96 dànno senz'altro che:

Il punto H è interno anche al segmento $F\vartheta(F)$,

epperò che il punto $\vartheta(F)$ è esterno al segmento HF. E dopo di ciò è ovvio che:

Il sottoarco e' di c ed il segmento $H\vartheta(F)$ hanno in comune soltanto il punto H,

attesa anche la seconda proposizione del n° 96.

98. – Diciamo, nell'ordine, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ le poligonali semplici e chiuse $e'_1 + e''_1$, $e'_2 + e''_2$, ..., $e'_r + e''_r$ ottenute sommando poligonali (28) con poligonali (30).

Le poligonali semplici e chiuse $e_1, e_2, \ldots, e_r$ racchiudono altrettanti poligoni, $E_1, E_2, \ldots, E_r$, elementari rispetto a K.

I poligoni $E_1, E_2, \ldots, E_r$ sono contenuti nel semipiano S_ρ. E la curva e', libera nella ϑ, al pari di c, appartiene allo stesso semipiano, al pari di c.

Ne segue facilmente che quei poligoni non intersecano la curva $\vartheta(e')$; epperò che essi non incontrano la curva $\vartheta(\mu)$. Ed è ovvio che essi non intersecano nemmeno il segmento $\vartheta(FF^*)$.

Quelle facce poi di K, che sono contenute nel semipiano S'_ρ, e che hanno un lato sul segmento elementare FH, oppure un vertice interno al segmento FH [15], non intersecano $\vartheta(\mu)$. Ed esse non intersecano nemmeno il segmento $\vartheta(FF^*)$, atteso che H è interno al segmento $F\vartheta(F)$, giusta la penultima proposizione del n° 97. Inoltre esse sono contenute nell'insieme E^*, se al numero h si impone, come faremo, di essere minore di ρ [16].

99. - Nel piano, indichiamo con E il poligono elementare rispetto a K formato da quelle facce di K, che sono contenute nei poligoni elementari $E_1, E_2, \ldots, E_r$, e da quelle, che sono contenute nel semipiano $S'_\rho (= \Pi'_0 + \pi_0 = \Sigma'_0 + \sigma_0)$ e che hanno un lato sul segmento elementare FH oppure un vertice interno al segmento elementare FH.

Il contorno, e, di E, è formato dal solito sottoarco e' di c con gli estremi nei punti F ed H e da un arco, e'', che è contenuto nel campo $\Pi'_0(= \Sigma'_0)$, se si prescinde dai suoi estremi F ed H. E di qui e dalle posizioni fatte, oltre alla

$$e = e' + e'', \tag{35}$$

si trae facilmente che:

L'intersezione dell'insieme E e della retta $\pi_0(= \sigma_0 = \tau_0)$ è fornita dal segmento FH,

e quindi, attese la prima e l'ultima proposizione del n° 47 e l'ultima del n° 96, che:

Le facce di K contenute in E sono equilatere ed hanno h come comune lunghezza dei loro lati;

vale a dire che:

Se una faccia di K appartiene ad E, essa è anche una faccia di K^*; cioè che E è un poligono elementare anche con riferimento a K^*.

Nelle posizioni precedenti è poi implicito che:

La poligonale e'' contiene almeno due lati di K, cioè di K^*;

e che il poligono E contiene nell'interno i punti interni ai poligoni $E_1, E_2, \ldots, E_r$ e quelli interni ai segmenti $e''_1, e''_2, \ldots, e''_r$; cioè che:

---

(15) Se il segmento FH contiene almeno due lati di K, ogni faccia di K con un lato su FH ha almeno un vertice interno ad FH. Se il segmento FH contiene soltanto un lato di K, nessuna faccia di K può avere vertici interni ad FH.

(16) Questa è la prima nuova condizione imposta al numero h.

Il poligono E contiene nell'interno tutti i punti interni alla regione E^* contenuti nella striscia S.

Ferma naturalmente l'ipotesi $h < \rho$, dalle considerazioni del n° 98 segue subito che:

Il poligono E è contenuto nella regione E^* e non contiene nessun punto della curva $\vartheta(\mu^*)$.

Ne viene in particolare che:

Il poligono E è libero in tutte le potenze non identiche della ϑ, attese la quarta e la quinta proposizione del n° 93.

100. – Accanto alla poligonale semplice e chiusa e, consideriamo la curva chiusa i definita dalla posizione

$$i = \nu + \lambda + \vartheta(\mu) + \vartheta(F)G, \tag{36}$$

e mostriamo che anche i è semplice. Nel fatto, ν ha soltanto R su λ (secondo la proposizione del n° 87); λ ha soltanto $\vartheta(Q)$ su $\vartheta(\mu)$, giusta la proposizione del n° 86; $\vartheta(\mu)$ ha soltanto $\vartheta(F)$ su $\vartheta(F)G$, giusta la prima proposizione del n° 85; $\vartheta(F)G$ ha soltanto G su ν (n° 85, prima proposizione); inoltre ν e $\vartheta(\mu)$ sono disgiunte (n° 84, ultima proposizione), mentre λ e $\vartheta(F)G$ possono avere in comune al massimo il punto R (n° 79, sesta proposizione), e possono averlo in comune soltanto a patto che R coincida con G (n° 85, seconda proposizione, o terza) e che ν degeneri.

Ciò premesso, indichiamo con I la regione racchiusa da i. Allora intanto è ovvio che:

La regione I è contenuta nella striscia S,

perché i è ovviamente contenuta in S. Ma è immediato altresì che:

La regione I è contenuta anche nella regione I^*;

perché il segmento $G\vartheta(F)$ appartiene alla regione I^* (n° 91, ultima proposizione); e quindi perché la curva i appartiene alla regione I^*. E dopo di ciò è ovvio anche che:

La regione I fornisce l'intersezione di I^* e di S.

Attesa la prima proposizione del n° 85 e quelle dei n^i 86 e 87, dalla circostanza che i è semplice segue subito che:

L'intersezione di I e di ω si riduce a λ; e quella di I e di $\tau_0(= \pi_0 = \sigma_0)$ si riduce al segmento $G\vartheta(F)$;

e per la deduzione non ci sarebbe nemmeno bisogno di ricorrere al secondo teorema del n° 5, vista la particolare struttura delle traiettorie di ϑ.

101. – In questo numero condurremo a termine la determinazione dei punti comuni alle regioni E ed I. E faremo vedere che:

L'intersezione di E ed I è uguale alla curva eventualmente degenere ν, se i punti G ed H coincidono; è vuota, se i punti G ed H sono diversi.

Gli insiemi E ed I appartengono rispettivamente agli insiemi E^* ed I^* (n° 99, penultima proposizione; n° 100, seconda proposizione); indi la loro intersezione è contenuta in quella, ν^* (n° 91, seconda proposizione), di E^* ed I^*. Ma l'insieme I appartiene per di più ad S (n° 100, prima proposizione); indi l'intersezione di E ed I appartiene anche a quella, data da ν, di ν^* ed S.

Sicché, per concludere basta far vedere che quando G ed H coincidono, E ed I contengono ν; e che quando G ed H sono diversi, E non interseca ν.

Supponiamo dapprima che G ed H coincidano. E distinguiamo due eventualità: quella che R coincida con G (e quindi con H); e quella che R sia diverso da G (e quindi da H). Nella prima eventualità, la curva ν è degenere (per definizione, n° 84) ed appartiene ad e' (atteso che per definizione e' contiene H, n° 96), epperò ad E. Nella seconda eventualità, ν non è degenere ed appartiene ad e'_r (n° 97, terza proposizione), epperò ad e', e quindi ad E. Ma in entrambe le eventualità ν appartiene ad i, e quindi ad I. E di qui appunto la prima parte della proposizione.

Supponiamo adesso che G ed H siano diversi. E rammentiamo che l'intersezione di E e τ_0 si riduce al segmento FH (n° 99, prima proposizione); e che G non appartiene ad FH, perché i punti F, H, G e $\vartheta(F)$ sono distinti a due a due e si succedono nell'ordine scritto rispetto al verso positivo dell'asse delle ascisse, giusta l'ipotesi, l'ultima proposizione del n° 92, e la prima del n° 96; epperò che E non contiene G. Ma nelle presenti condizioni G coincide con R (n° 97, seconda proposizione) e ν si riduce a G. Pertanto la dimostrazione attuale è finita.

102. – La determinazione dei punti comuni agli insiemi I e $\vartheta(E)$ è altrettanto rapida. I risultati acquisiti ci permettono infatti di stabilire quasi immediatamente che:

L'intersezione di I e $\vartheta(E)$ è fornita dalla curva $\vartheta(\mu)$.

Nel fatto, I appartiene ad I^*, epperò a J^* (n° 91, seconda proposizione), e ad S, anzi fornisce l'intersezione di I^* e di S (n° 100, terza proposizione). Ed E appartiene ad E^* (n° 99, penultima proposizione), epperò a J^* (n° 91, seconda proposizione). Indi l'intersezione di I e $\vartheta(E)$ è contenuta in J^*, in $\vartheta(J^*)$ ed in S. Ma l'intersezione di J^* e $\vartheta(J^*)$ è data da $\vartheta(\mu^*)$, giusta la prima proposizione del n° 93. Pertanto l'intersezione di I e di $\vartheta(E)$ è contenuta nella curva $\vartheta(\mu)$, che appartiene sia al contorno i di I, giusta la (36), sia al contorno $\vartheta(e)$ di $\vartheta(E)$, giusta la (33), la (34), la (35) e la prima proposizione del n° 97. Donde la conclusione.

103. – In questo numero ci occuperemo delle intersezioni di I con gli insiemi $\vartheta^{-1}(E)$, $\vartheta^2(E)$, $\vartheta^{-2}(E)$, $\vartheta^3(E)$, $\vartheta^{-3}(E)$, ..., e dimostreremo che:

La regione I non interseca nessuno dei poligoni $\vartheta^{-1}(E)$, $\vartheta^{2}(E)$, $\vartheta^{-2}(E)$, $\vartheta^{3}(E)$, $\vartheta^{-3}(E)$, ecc. ecc.

Infatti, per quello che riguarda I e $\vartheta^{-1}(E)$, la regione I appartiene ad I^* ed il poligono $\vartheta^{-1}(E)$ a $\vartheta^{-1}(E^*)$, giusta proposizioni già ricordate, mentre l'intersezione di I^* e $\vartheta^{-1}(E^*)$ è vuota, giusta la sesta proposizione del n° 93; per quello che riguarda I e $\vartheta^{2}(E)$, $\vartheta^{-2}(E)$, $\vartheta^{3}(E)$, $\vartheta^{-3}(E)$, ... basta osservare che I ed E, appartenendo a I^* ed E^*, appartengono anche a J^*, sempre a norma della seconda proposizione del n° 91; e rammentare che l'insieme J^* è libero in tutte le potenze non identiche di ϑ diverse da ϑ e dalla sua inversa, giusta la terza proposizione del n° 93.

104. - Considerazioni analoghe a quelle sfruttate nelle dimostrazioni degli ultimi numeri ci permettono di riconoscere che:

La regione I è libera in tutte le potenze non identiche di ϑ.

Nel fatto, la regione I è contenuta nella regione I^*. E questa è appunto libera in tutte le potenze non identiche di ϑ, giusta la quarta proposizione del n° 93 e la quinta.

§ 12. - Il primo risultato conclusivo.

105. - Attesa la permutabilità di t e di ϑ, la trasformazione t muta traiettorie di ϑ in traiettorie di ϑ. Pertanto anche l'immagine $t(\omega)$ di ω nella t è, al pari di ω, una linea semplice aperta e propria, periodica nella x con periodo unitario.

Naturalmente $t(\omega)$ è contenuta nella striscia S, al pari di ω. E basta risalire dalla striscia S alla corona $\boldsymbol{C}$ per ottenere, da ω, una curva semplice e chiusa, $\boldsymbol{z}$, contenuta nella corona ed aggirante il centro della corona; e da $t(\omega)$ la curva semplice e chiusa $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{z})$, immagine di $\boldsymbol{z}$ nella $\boldsymbol{t}$.

E $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{z})$ sarebbero disgiunte, se tali fossero ω e $t(\omega)$. E se si verificasse una simile circostanza favorevole, si presenterebbe senz'altro la seconda delle eventualità contemplate nel teorema del n° 27, nel senso che sarebbero presenti nella corona curve semplici e chiuse, che aggirano il centro della corona e che sono libere nella $\boldsymbol{t}$.

106. - Escluso che si presenti quella circostanza favorevole, indichiamo con $\boldsymbol{k}$ ed $\boldsymbol{l}$ le sottocurve di $\boldsymbol{z}$ rispettivamente provenienti da $\varkappa$ e λ, di guisa che risulta

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{l},$$

mentre $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{l}$ hanno in comune i due estremi e soltanto i due estremi. Ed incominciamo col mostrare che:

L'intersezione di $\boldsymbol{z}$ *e di* $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{k})$ *è vuota*;

e che:

La curva $\boldsymbol{l}$ *é libera nella* $\boldsymbol{t}$;

di guisa che:

L'intersezione di $\boldsymbol{z}$ *e* $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{z})$ *coincide con quella di* $\boldsymbol{k}$ *e di* $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{l})$.

Allo scopo, consideriamo la curva $t(c)$, nella striscia S. Essa parte dal punto $t(F)$, che è interno all'insieme I^* (n° 92, seconda proposizione). Essa non interseca ν, perché ν appartiene a c e perché c è libera nella t (n° 81, seconda proposizione). Essa non interseca λ (n° 81, penultima proposizione). Essa non interseca nemmeno $\vartheta(\mu)$, perché $\vartheta(\mu)$ appartiene a $\vartheta(c)$, e perché c è libera nella w (n° 81, seconda proposizione). Inoltre:

Essa appartiene ad S;

quindi essa non può avere punti nell'interno della poligonale semplice ed aperta $GG^* + G^*\vartheta(F^*) + \vartheta(F^*F)$. Dunque:

Essa è contenuta nell'interno di I^*;

pertanto $t(c)$ non interseca ω (n° 90, ultima proposizione). Epperò anche le immagini di $t(c)$ nelle diverse potenze di ϑ non intersecano ω, attesa l'invarianza di ω nella ϑ. E di qui appunto la mancanza di punti comuni a $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{k})$ ed a $\boldsymbol{z}$.

L'arco $\boldsymbol{l}$ è poi libero nella $\boldsymbol{t}$, perché λ è libero nella t ed in tutti i prodotti di t per potenze di ϑ, giusta la quinta proposizione del n° 79.

107. - A proposito di $\boldsymbol{l}$ si può dire qualcosa di più. Precisamente:

È lecito supporre che il suo diametro, calcolato secondo la metrica euclidea del piano, sia minore di un numero positivo prefissato a piacere.

Allo scopo basterà far vedere che la condizione può essere imposta a $\boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{l})$. E per far vedere questo basterà mostrare che si può supporre minore di un numero positivo prefissato a piacere il diametro di $\boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{l})$ calcolato nella metrica polare.

Circostanza questa immediata. Infatti $\boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{l})$ si ottiene da $t^{-1}(\lambda)$, cioè, attesa la (22), da λ'. E il diametro di λ', nella metrica euclidea, è minore di $3h$, attesa la (18) e la seconda proposizione del n° 78. Da qui la conclusione, purché h sia abbastanza piccolo ([17]).

E la dimostrazione del teorema del n° 27, cioè del primo dei risultati conclusivi preannunciati nel § 5, è terminata.

108. - Prima di chiudere il paragrafo, qualche considerazione forse non inutile per una migliore intelligenza del risultato conseguito.

([17]) Ed h si può sempre supporre abbastanza piccolo!

La curva semplice e chiusa $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}$ del n° 106 non incontrava l'arco $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{k})$ perché si era nel primo sottocaso. Nel secondo sottocaso, la curva semplice e chiusa $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}$, o meglio la sua analoga, non avrebbe incontrato l'arco $\boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{k})$, o meglio il suo analogo.

E purtroppo noi non riusciremo a dire nulla di più, senza aggiungere delle ipotesi suppletive: nemmeno a dire che la curva $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}$ separa l'arco $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{k})$ da $\boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{k})$. Nel fatto, una tal separazione implicherebbe le

$$(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}) \cap \boldsymbol{t}(\boldsymbol{k}) = \emptyset, \quad (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}) \cap \boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{k}) = \emptyset;$$

cioè una tal separazione, accanto alla

$$\boldsymbol{k} \cap \boldsymbol{t}(\boldsymbol{k}) = \emptyset,$$

equivalente alla

$$\boldsymbol{k} \cap \boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{k}) = \emptyset,$$

implicherebbe le

$$\boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{t}(\boldsymbol{k}) = \emptyset, \quad \boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{k}) = \emptyset;$$

e di qui, attesa naturalmente anche la

$$\boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{t}(\boldsymbol{l}) = \emptyset,$$

seguirebbe

$$\boldsymbol{z} \cap \boldsymbol{t}(\boldsymbol{z}) = \emptyset,$$

col solito significato, per $\boldsymbol{z}$, di $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}$; mentre nel secondo caso noi riusciremo a stabilire, nella corona, la presenza di curve semplici e chiuse, che aggirino il centro della corona e siano libere rispetto a $\boldsymbol{t}$, soltanto se sono soddisfatte certe condizioni suppletive.

§ 13. - Si riprende in esame il secondo caso.

109. - Ora noi faremo appunto intervenire delle ipotesi suppletive, per istabilire, nel secondo caso, la presenza di quelle tali curve semplici e chiuse.

E naturalmente potremo sempre limitarci all'esame del primo sottocaso (n° 66).

110. - Per procedere con maggiore speditezza, fissiamo, una volta per tutte, qualche altra posizione. Precisamente, detta $\boldsymbol{Z}$ la regione contornata da $\boldsymbol{z}$, accanto alle

$$\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{l}_0 = \boldsymbol{l}$$

ed alla

$$\boldsymbol{Z}_0 = \boldsymbol{Z},$$

introduciamo anche le posizioni

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{z}_0), \quad \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{z}_1),$$

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{k}_0), \quad \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{k}_1),$$

$$\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{l}_0), \quad \boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{l}_1),$$

da cui, in particolare,

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{z}_0), \quad \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{z}_1),$$

se $\boldsymbol{t}^*$ è il prolungamento di $\boldsymbol{t}$ definito nel n° 42; e poniamo

$$\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{Z}_0), \quad \boldsymbol{Z}_2 = \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{Z}_1),$$

di guisa che $\boldsymbol{Z}_1$ e $\boldsymbol{Z}_2$ sono le regioni rispettivamente delimitate da $\boldsymbol{z}_1$ e $\boldsymbol{z}_2$.

111. - Nel primo sottocaso la curva $t(c)$ è contenuta nell'interno di I^* (n° 106, quinta proposizione); e l'interno di I^* appartiene tanto al semipiano $\boldsymbol{S}$ (n° 90, quarta proposizione), quanto al campo Ω' (n° 90, quinta proposizione). Indi:

Nelle condizioni attuali, quelle del primo sottocaso, $\boldsymbol{k}_1$ è contenuta nell'interno di $\boldsymbol{Z}_0$;

epperò $\boldsymbol{k}_2$ in quello di $\boldsymbol{Z}_1$. E giusta la terza proposizione del n° 106:

Nelle condizioni attuali, l'intersezione di $\boldsymbol{z}_0$ e $\boldsymbol{z}_1$ coincide con quella di $\boldsymbol{k}_0$ ed $\boldsymbol{l}_1$;

epperò l'intersezione di $\boldsymbol{z}_1$ e $\boldsymbol{z}_2$ coincide con quella di $\boldsymbol{k}_1$ ed $\boldsymbol{l}_2$.

112. - Ebbene, incominciamo col far vedere, a titolo di esempio chiarificatore, che:

Se alle circostanze precedenti si aggiunge quella, che $\boldsymbol{Z}_0$ contenga anche $\boldsymbol{l}_1$, cioè che $\boldsymbol{Z}_0$ contenga tutta la curva $\boldsymbol{z}_1$, allora nella corona sono presenti curve semplici e chiuse, che aggirano il centro della corona e che non incontrano le rispettive immagini nella $\boldsymbol{t}$.

In queste condizioni infatti, $\boldsymbol{Z}_0$ contiene $\boldsymbol{Z}_1$, mentre $\boldsymbol{Z}_1$ contiene $\boldsymbol{k}_2$ nel proprio interno e contiene $\boldsymbol{z}_2$. Pertanto $\boldsymbol{Z}_0$ contiene nel proprio interno $\boldsymbol{z}_2$, atteso che i punti comuni ad $\boldsymbol{l}_2$ e $\boldsymbol{z}_1$ sono quelli comuni ad $\boldsymbol{l}_2$ e $\boldsymbol{k}_1$ ed attesa la prima proposizione del numero precedente. Indi $\boldsymbol{z}_0$, cioè $\boldsymbol{z}$, è libera nel quadrato della $\boldsymbol{t}$. Donde la conclusione, atteso un teorema della SANTOLINI [18].

113. - Nel primo sottocaso $\boldsymbol{z}_1$ appartiene a $\boldsymbol{Z}_0$, cioè $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{z})$ appartiene a $\boldsymbol{Z}_0$, se, e soltanto se, $t(\omega)$ appartiene all'intersezione di $\Omega' + \omega$ ed S; cioè, se, e soltanto se, $t(\omega)$ appartiene ad $\Omega' + \omega$, atteso che ω è contenuta nella striscia S (n° 88, prima proposizione) e che S è invariante nella t.

Peraltro noi vedremo che nel secondo caso ci si può ricondurre al teorema della SANTOLINI anche se sono soddisfatte le ipotesi suppletive contemplate nel teorema del n° 31 (e se il numero h è abbastanza piccolo). Naturalmente continueremo a prendere in esame soltanto il primo sottocaso.

114. - Nelle ipotesi attuali (quelle del secondo risultato conclusivo), i prodotti di t e t^{-1} per le potenze identiche e non identiche di ϑ,

$$t\vartheta^p, \quad t^{-1}\vartheta^p \qquad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{37}$$

e quelli analoghi,

$$t^2\vartheta^p, \quad t^{-2}\vartheta^p \qquad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{38}$$

relativi a t^2 e t^{-2}, sono privi di punti uniti, in armonia con le considerazioni del n° 40.

Di qui e dal significato di t e di ϑ segue che le distanze dei punti del piano dalle rispettive immagini nei diversi prodotti (37) e (38) ammettono un estremo inferiore positivo.

Ma i prodotti (37) e (38) sono equiuniformemente continui, atteso il significato di t e di ϑ. Pertanto noi possiamo imporre al numero h [19] di essere tanto piccolo, che ogni sottoinsieme del piano abbia una distanza maggiore di h dalle sue immagini nei diversi prodotti (37) e (38), qualora il suo diametro sia minore di $3hk$. E con ciò, le condizioni per h sono terminate.

115. - Nelle ipotesi attuali, la lunghezza di λ è minore di $3hk$, giusta la (18) e l'ultima proposizione del n° 79. E le lunghezze dei lati di K non possono mai superare h (n° 46, ultima proposizione). Pertanto:

---

[18] A. SANTOLINI, *A proposito di un teorema sugli autoomeomorfismi del piano reale euclideo* (in corso di stampa nei Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei).

[19] Le condizioni da imporre ad h stanno per terminare!

Nelle condizioni attuali, quelle facce di K che intersecano λ, non intersecano nessuna delle immagini di λ nei prodotti $t\vartheta^p$, $t^{-1}\vartheta^p$, $t^2\vartheta^p$ e $t^{-2}\vartheta^p$ di t, t^{-1}, t^2 e t^{-2} per le potenze identiche e non identiche di ϑ;
e qui si trae in particolare che:

Nelle condizioni attuali, la curva λ è libera in tutti i prodotti $t\vartheta^p$, $t^{-1}\vartheta^p$, $t^2\vartheta^p$ e $t^{-2}\vartheta^p$ di t, t^{-1}, t e t^{-2} per le potenze identiche e non identiche di ϑ,
la circostanza che λ sia libera nei prodotti (37) non rappresentando peraltro una novità, giusta la quinta proposizione del n° 79 e le ultime righe del n° 46.

116. - Ed ora fissiamo qualche altra convenzione, da mantenersi anche essa per tutta la durata della Memoria.

Se G è diverso da R, nella quale eventualità esso coincide con H (n° 97, seconda proposizione) mentre R è interno ad S e ad e' (n° 85, quarta proposizione, n° 97, terza proposizione), indichiamo con μ' il sottoarco di e' individuato da F e da R e con ν' quello individuato da H e da Q, che è interno ad e' (n° 97, prima proposizione), nonché a μ' (nelle condizioni attuali). In queste condizioni risulta

$$e' = \mu + \nu', \quad e' = \mu' + \nu;$$

μ' e ν' hanno in comune soltanto $\varkappa$; μ e ν' hanno in comune soltanto il comune estremo Q; μ' e ν hanno in comune soltanto il comune estremo R; ν' contiene ν.

Se G è diverso da H, nella quale eventualità esso coincide con R, indichiamo con μ' l'arco e' istesso e con ν' il sottoarco di e' individuato da Q, che è interno ad e' (n° 97, prima proposizione), e dall'estremo H di e'. In queste condizioni risulta

$$e' = \mu', \quad e' = \mu + \nu';$$

μ' contiene ν'; μ e ν' hanno in comune soltanto l'estremo Q; μ' e ν sono disgiunti.

Se G coincide tanto con H, quanto con R, indichiamo di nuovo con μ' l'arco e' istesso e con ν' il sottoarco di e' individuato da Q e da H. In queste condizioni risulta

$$e' = \mu + \nu', \quad e' = \mu' + \nu;$$

μ' e ν' hanno in comune soltanto $\varkappa$; μ e ν' hanno in comune soltanto l'estremo Q; μ' e ν hanno in comune soltanto l'estremo R; ν' contiene ν.

Ciò premesso dimostriamo che:

Le curve semplici, aperte e rettificabili, che non intersecano facce di K provviste di punti su immagini di λ in potenze identiche e non identiche di

ϑ, *che hanno un estremo su* μ (*su* μ') *e l'altro su* ν' (*su* ν), *e che hanno l'interno nell'interno di* E, *hanno una lunghezza uguale a* $\sqrt{3}h/2$, *oppure maggiore di* $\sqrt{3}h/2$.

Nel fatto, v sia una tal curva, con un estremo in M e l'altro in N.

Allora M ed N sono diversi l'uno dall'altro. E sono diversi sia da Q, che appartiene a $\vartheta^{-1}(\lambda)$, sia da R, che appartiene a λ.

E supponiamo dapprima che M appartenga a μ' ed N a ν.

In queste condizioni E, che contiene v, contiene punti di ν, cioè di I, giusta la (36); pertanto G coincide con H (n° 101, prima proposizione). Inoltre ν non è degenere, perché contiene i punti distinti N ed R; pertanto G è diverso da R, ed R è interno ad S e ad e'.

I punti M ed N individuano due sottoarchi non degeneri nel contorno e del poligono E, elementare sia rispetto a K (per definizione, n° 99) sia rispetto a K^* (n° 99, terza proposizione). E di questi sottoarchi uno contiene la poligonale e'' e l'altro contiene nell'interno il punto R. Il primo contiene due lati di K (nonché di K^*), attesa la quarta proposizione del n° 99; l'altro contiene nell'interno almeno un lato di K (nonché di K^*), attesa l'ipotesi sulle facce di K provviste di punti in comune con λ. Pertanto su e si possono determinare i tre lati P_1P_2, P_2P_3 e P_3P_4 di K (nonché di K^*) in tal guisa, che M appartenga al segmento P_2P_3 ed N non appartenga alla poligonale semplice ed aperta $P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4$, elementare sia rispetto a K sia rispetto a K^*.

Sia ora T il poligono convesso complessivamente formato dalle due stelle di K^* (di K^*, e non di K!) coi centri nei punti P_2 e P_3. Il poligono T si presenta come formato da dieci facce di K^*, distribuite in due esagoni regolari coi rispettivi centri in P_2 e P_3; ed è suddiviso da $P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4$ in due sottopoligoni, T' e T'', elementari rispetto a K^*. Uno di questi sottopoligoni, T', è contenuto in E; l'altro, T'', è privo di punti interni ad E.

La curva v, uscendo dal punto M di P_2P_3, penetra nell'interno di E, epperò in quello di T'. E si mantiene nell'interno di E fino a che non giunge di nuovo sul contorno di E nel punto N, esterno alla poligonale $P_1P_2+P_2P_3+P_2P_4$. E tutto questo può farlo soltanto a patto di incontrare ulteriormente il contorno di T' in un punto esterno al segmento P_2P_3, anzi alla poligonale $P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4$. Pertanto v attraversa almeno un parallelogramma formato da due facce di K; attraversa, nel senso che ne interseca due lati opposti. Donde la conclusione, atteso che due lati siffatti hanno una distanza pari alla lunghezza, $\sqrt{3}h/2$, delle altezze dei triangoli di K^*.

Supponiamo adesso che M appartenga a μ ed N a ν'.

In queste condizioni, i punti M ed N individuano sempre due sottoarchi non degeneri sul contorno e del poligono E, elementare sia rispetto a K sia rispetto a K^*. E di questi due sottoarchi uno contiene sempre la poligonale e'' e l'altro contiene nell'interno il punto Q. Il primo sottoarco contiene sempre due lati di K (nonché di K^*), attesa sempre la quarta proposizione del n° 99; e l'altro contiene nell'interno almeno un lato di K (nonché di K^*), attesa l'ipotesi sulle facce di K provviste di punti in comune con $\vartheta^{-1}(\lambda)$. Pertanto anche adesso si possono determinare, su e, i tre lati P_1P_2, P_2P_3 e P_3P_4 di K (nonché di K^*) in tal guisa, che M appartenga al segmento P_2P_3 e che N non appartenga alla poligonale semplice ed aperta $P_1P_2 + P_2P_3 + + P_3P_4$, elementare sia rispetto a K sia rispetto a K^*. A questo punto la dimostrazione precedente riprende parola per parola, fino a giungere di nuovo alla conclusione. E la giustificazione è terminata.

117. - Ormai siamo in grado di stabilire un altro lemma, che ci sarà molto utile in parecchie occasioni. Precisamente siamo in grado di dimostrare che:

Hanno una lunghezza maggiore di $\sqrt{3}h/2$ tutte quelle curve semplici, aperte e rettificabili, che sono contenute nella striscia S, che hanno punti interni ad I e che intersecano ω senza incontrare le facce di K provviste di punti in comune con immagini di λ in potenze identiche e non identiche di ϑ.

Nel fatto, adesso sia v una tal curva. Il punto M di v sia interno ad I, epperò ad I^*. Il punto N di v appartenga ad ω, anzi a $\varkappa + \vartheta(\varkappa) + \vartheta^{-1}(\varkappa) + \ldots$, atteso che v non interseca immagini λ in potenze identiche e non identiche di ϑ.

Allora M ed N sono certamente distinti, perché nessuno dei punti interni ad I appartiene ad ω (n° 100, ultima proposizione). Pertanto non è restrittivo supporre che v abbia addirittura M ed N come estremi; se così non fosse, basterebbe sostituire v col sottoarco individuato da M e da N su v.

Il punto N è esterno ad I^*, perché esso non appartiene a λ, per ipotesi, e perché l'intersezione di I^* e di ω si riduce a λ, giusta la seconda delle (26) e la quinta proposizione del n° 90.

Pertanto la curva v interseca il contorno i^* di I^*. Ma essa non interseca λ, per ipotesi, e non interseca $G^*\vartheta(F^*)$, perché appartiene ad S. Dunque essa interseca $\nu^* + \vartheta(\mu^*)$. Ma essa appartiene ad S, dunque essa interseca anche $\nu + \vartheta(\mu)$. E la sua intersezione con $\nu + \vartheta(\mu)$ è uguale a quella con $\nu^* + \vartheta(\mu^*)$.

Spostiamoci su v a partire da N (verso M); e fermiamoci appena incontriamo $\nu + \vartheta(\mu)$ nel punto M' (diverso da M). Allora M' è diverso da N, in quanto esso è un punto di I (e di I^*). Inoltre M' non appartiene nè a λ, nè alle immagini di λ nelle potenze di ϑ, perché esso appartiene a v; in particolare M' è diverso da R e da $\vartheta(Q)$.

Indichiamo con v^* il sottoarco di v con gli estremi in M' ed N. I punti di v^* diversi da M' non appartengono nemmeno a $\nu^* + \vartheta(\mu^*)$ e sono esterni ad I^*.

E supponiamo adesso che M' appartenga a ν, epperò a ν^*.

Allora ν non si può ridurre al punto R, perché M' è diverso da R. Ed M' è interno a ν^*, perché non è soltanto diverso da R, ma è diverso anche da G^*.

Indi i punti di v^* diversi da M' ed abbastanza vicini ad M' sono interni ad E^*, atteso che essi sono esterni ad I^* ed attesa per esempio, la seconda proposizione del n° 91.

Su v^* spostiamoci a partire da M' (verso N), e fermiamoci appena incontriamo $\mu^* + \omega$, nel punto N'.

La presenza di N' è certa, perché l'insieme $\mu^* + \omega$ contiene tutti i propri punti di accumulazione (si rammenti che ω è una linea propria, n° 88). Inoltre N' è certamente diverso da M': nel fatto, M' non appartiene ad ω, perché esso è interno a ν^* e perché l'unico punto comune ad ω ed a ν^* è l'estremo R di ν^* (n° 89, terza proposizione); ed M' non appartiene nemmeno a μ^*, perché μ^* e ν^* sono disgiunti, atteso che tali sono μ e ν (n° 84, penultima proposizione), ed attese le definizioni di μ^* e ν^*.

Indichiamo con v' il sottoarco di v^* con gli estremi in M' ed N'.

I punti di v' diversi da M' ed N' sono necessariamente interni ad E^*: nel fatto, quelli vicini ad M' sono interni ad E^* e nessuno degli altri è situato sul contorno di E^*.

Ne viene che N' o appartiene a μ^* od a $\varkappa$.

Ma v' appartiene anche ad S, dunque N' appartiene a μ', cioè al sottarco $\mu + \varkappa$ di e'; M' appartiene a ν; e i punti di v' interni a v' sono interni anche ad E (n° 99, quinta proposizione). Ma allora, per concludere, basta applicare il lemma del numero precedente, e ricordare che M' è diverso da M.

Supponiamo adesso che M' appartenga a $\vartheta(\mu)$, epperò a $\vartheta(\mu^*)$.

Allora M' è interno a $\vartheta(\mu^*)$, perché non è diverso soltanto da $\vartheta(Q)$, ma anche da $\vartheta(F^*)$.

Indi i punti di v^* diversi da M' ed abbastanza vicini ad M' sono interni a $\vartheta(E^*)$, atteso che essi sono esterni ad I^* ed attesa, per esempio, l'ultima proposizione del n° 93.

Su v^* spostiamoci a partire da M' (verso N), e fermiamoci appena incontriamo $\vartheta(\nu^*) + \omega$, nel punto N'.

La presenza di un tal N' è certa, per motivi analoghi a motivi già addotti. E per motivi analoghi a motivi già addotti, N' è diverso da M'.

Indichiamo di nuovo con v' il sottoarco di v con gli estremi in M' ed N'.

I punti di v' diversi da M' ed N' sono necessariamente interni a $\vartheta(E^*)$, sempre per motivi analoghi a motivi già addotti.

Indi N' o appartiene a $\vartheta(\nu^*)$ o appartiene a $\vartheta(\varkappa)$.

Ma v' appartiene anche ad S, dunque M' appartiene a $\vartheta(\mu)$; N' appartiene a $\vartheta(\nu')$, se ν' è il sottoarco di e' con gli estremi nel punto Q e nel punto H; e i punti interni di v' sono interni anche a $\vartheta(E)$. Pertanto, per concludere basta applicare il lemma del numero precedente all'insieme $\vartheta(E)$

ed alla curva v' (si rammenti che ϑ è una traslazione ordinaria e che ω è una sua traiettoria!), e ricordare di nuovo che M' è diverso da M. Con ciò, la dimostrazione del lemma è completa.

118. – Chiudiamo questo paragrafo dimostrando un corollario dell'ultima proposizione, dimostrando precisamente che:

La traiettoria ω non può intersecare quelle curve semplici aperte e rettificabili che hanno una lunghezza minore di $\sqrt{3}h$ od uguale a $\sqrt{3}h$, che sono contenute nella striscia S, che hanno entrambi gli estremi interni ad immagini di I in potenze identiche e non identiche di ϑ, e che non intersecano le facce di K provviste di punti in comune con immagini di λ in potenze identiche e non identiche di ϑ.

Nel fatto, sia v una tal curva. L'estremo M di v sia interno a $\vartheta^p(I)$ e l'estremo N a $\vartheta^q(I)$, gli interi p e q potendo anche coincidere. Ed il punto P di v appartenga ad ω.

Allora P è diverso sia da M, sia da N, perché i punti interni di I sono interni ad Ω', giusta l'ultima proposizione del n° 100 e la circostanza che λ appartiene al contorno, i, di I. E P individua su v due archi, che hanno una lunghezza maggiore di $\sqrt{3}h/2$, giusta il lemma precedente, che si può applicare anche a $\vartheta^p(I)$ e $\vartheta^q(I)$, perché ϑ è una traslazione ordinaria ed ω una sua traiettoria. Donde la conclusione.

§ 14. – **Il secondo risultato conclusivo.**

119. – Nel solito primo sottocaso, la curva $t(c)$ appartiene ad S, come è ricordato anche nella penultima proposizione del n° 106, ed è interna ad I^*, come è affermato nell'ultima proposizione dello stesso numero. Ma i punti interni ad I^* e contenuti in S sono quelli forniti dall'interno di I e dall'interno del segmento $G\vartheta(F)$, come risulta dalle definizioni, dall'ultima proposizione del n° 91 e dalla terza del n° 100. Inoltre il punto Q, interno a c (n° 81, ultima proposizione), è interno ad S (n° 79, penultima proposizione), mentre il punto R appartiene a c (n° 81, terza proposizione). Pertanto $t(Q)$ è interno ad I e $t(R)$ o è interno ad I o è interno al segmento $G\vartheta(F)$. D'altra parte i punti di $t(\lambda)$ diversi da $t(R)$ sono interni ad S, come segue dalla sesta proposizione del n° 79. Epperò da quanto siamo venuti dicendo discende che:

Fra i punti interni a $t(\lambda)$, quelli abbastanza vicini a $t(R)$ sono interni ad I e quelli abbastanza vicini a $t(\vartheta(Q))$ sono interni a $\vartheta(I)$,
l'interno di $\vartheta(I)$ contenendo peraltro anche il punto $t(\vartheta(Q))$.

Nelle considerazioni precedenti è implicito che:

I punti di $t(\varkappa)$ interni ad S sono interni ad I, mentre tutti i punti di $t(\varkappa)$ sono interni ad Ω',
tutto ciò, perché $t(\varkappa)$ è il sottoarco di c individuato dai punti $t(Q)$ e $t(R)$ e perché l'interno di I^* appartiene ad Ω', secondo l'ultima proposizione del n° 90.

120. - Le considerazioni dei n[i] 112 e 113 ci assicurano poi che il secondo risultato conclusivo sarebbe raggiunto senza bisogno di ipotesi suppletive, se $t(\omega)$ appartenesse ad $\Omega' + \omega$. Supponiamo pertanto che $t(\omega)$ abbia punti in Ω.

Punti siffatti sarebbero necessariamente punti di $t(\lambda)$, o di immagini di $t(\lambda)$ in potenze della ϑ, perché i punti di $t(\varkappa)$, epperò anche quelli delle immagini di $t(\varkappa)$ nelle potenze di ϑ, sono interni ad Ω', giusta l'ultima proposizione del numero precedente.

121. - Sia dunque P un punto di $t(\lambda)$ interno ad Ω. E su $t(\lambda)$ scegliamo un tal punto P' ed un tal punto P'', che P' e P'' stiano su ω e che il sottoarco u di $t(\lambda)$ individuato da P' e P'' contenga P nell'interno e sia contenuto nell'interno di Ω, se si prescinde da P' e P''. La presenza di P' e P'' è certa, perché ω contiene tutti i propri punti di accumulazione, giusta quanto si è osservato a suo tempo nel n° 88.

I punti P' e P'' di ω sono certamente diversi da $t(R)$ e da $t(\vartheta(Q))$ perché $t(R)$ e $t(\vartheta(Q))$ sono interni ad Ω', in quanto rispettivamente punti di $t(\varkappa)$ e di $t(\vartheta(\varkappa))$.

In quanto punti di $t(\lambda)$ diversi da $t(R)$, i punti P' e P'' sono interni ad S, secondo la sesta proposizione del n° 79, già ricordata.

122. - E sia u' il sottoarco di $t(\lambda)$ con gli estremi in $t(R)$ e P'; ed u'' quello con gli estremi in P'' e $t(\vartheta(Q))$; di guisa che u' ed u'' sono disgiunti ed hanno rispettivamente punti interni ad I e punti interni a $\vartheta(I)$.

Giusta la prima proposizione del n° 115 e la permutabilità delle potenze di t e di ϑ, ed in quanto sottoarchi di $t(\lambda)$, le curve u' ed u'' non intersecano nessuna faccia di K provvista di punti in comune con immagini di λ in potenze identiche o non identiche di ϑ. Ma in quanto sottoarchi di $t(\lambda)$, le curve u' ed u'' appartengono anche ad S. Dunque esse hanno una lunghezza maggiore di $\sqrt{3}h/2$, atteso il lemma del n° 117, applicabile naturalmente anche a $\vartheta(I)$, atteso che ϑ è una traslazione ordinaria ed ω una sua traiettoria.

Ricordiamo ora che la lunghezza di λ è minore di $(2h + \varepsilon)k$, giusta l'ultima proposizione del n° 79, e che pertanto quella di $t(\lambda)$ è minore di $(2h + \varepsilon)k^2$, giusta l'ultima proposizione del n° 43.

Di qui e dalle considerazioni precedenti tragghiamo che la lunghezza di u è minore di

$$(2h + \varepsilon)k^2 - \sqrt{3}h\,;$$

e quindi (n^0 43, ultima proposizione), che quella di $t(u)$ è minore di

$$(2h+\varepsilon)k^3 - \sqrt{3}hk,$$

cioè di

$$\sqrt{3}h,$$

atteso che ε è vincolato alla (19), cioè alla $\varepsilon < \sqrt{3}h(k^{-2}+k^{-3}-2/\sqrt{3})$.

Ciò premesso, facciamo qualche altra osservazione.

In quanto punto di u', il punto P', che appartiene ad ω, e che è interno ad S, non può appartenere nè a λ, nè ad immagini di λ in potenze non identiche di ϑ, come si è già osservato. Dunque, o esso è interno a $\varkappa$, o esso è interno a qualche immagine di $\varkappa$ in potenze non identiche di ϑ. E per il punto P'' di u'' si presentano circostanze analoghe.

Ne segue che gli estremi $t(P')$ e $t(P'')$ di $t(u)$, in quanto interni ad S ed a curve del tipo $\vartheta^p(t(\varkappa))$, p essendo qui un intero relativo, sono interni anche ad insiemi del tipo $\vartheta^p(I)$, giusta la seconda proposizione del n^0 119.

Ma in quanto sottoarco di $t^2(\lambda)$ la curva $t(u)$, che ha una lunghezza minore di $\sqrt{3}h$, è contenuta nella striscia S; e non può intersecare le facce di K provviste di punti su λ o su immagini di λ in potenze non identiche di ϑ, giusta la prima proposizione del n^0 115 e la permutabilità delle potenze di t e di ϑ. Atteso il lemma del n^0 118 si conclude pertanto che:

Nelle condizioni attuali la curva $t(u)$ non interseca ω;

epperò che:

Nelle condizioni attuali essa appartiene al campo Ω', anzi all'intersezione di Ω' e di $\mathbf{S}_\rho$, epperò anche a quella di Ω' e di $\mathbf{S}$,

atteso che essa appartiene ad S e che essa contiene punti interni ad Ω', come i punti $t(P')$ e $t(P'')$, che appartengono a curve del tipo $\vartheta^p(t(\varkappa))$.

123. - Risaliamo di nuovo dalla striscia S alla corona circolare $\mathbf{C}$.

Accanto alle curve semplici ed aperte $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{l}$, alla curva semplice e chiusa $\mathbf{z}$,

$$\mathbf{z} = \mathbf{k} + \mathbf{l},$$

ed alla regione $\mathbf{Z}$ racchiusa da $\mathbf{z}$, consideriamo di nuovo le curve semplici ed aperte

$$\mathbf{k}_1,\ \mathbf{l}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{l}_2,$$

le curve semplici e chiuse

$$\mathbf{z}_1(=\mathbf{k}_1+\mathbf{l}_1),\quad \mathbf{z}_2(=\mathbf{k}_2+\mathbf{l}_2),$$

nonché le regioni

$$\mathbf{Z}_1 \text{ e } \mathbf{Z}_2,$$

definite nel n^0 110. E indichiamo di nuovo $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{z}$ e $\mathbf{Z}$ anche con $\mathbf{k}_0$, $\mathbf{l}_0$, $\mathbf{z}_0$ e $\mathbf{Z}_0$, rispettivamente.

124. - Le regioni Z_0 e Z_1 contengono entrambe il centro della corona C nell'interno. Pertanto ([20]) la componente non limitata dell'intersezione dei complementari di Z_0 e Z_1 ha come frontiera una curva semplice e chiusa, z_0^*, che è contenuta nella somma $z_0 + z_1$ (e quindi nella corona C), mentre la regione Z_0^*, racchiusa da z_0^*, contiene la somma $Z_0 + Z_1$.

Sia P_0 un punto di z_0^*, E poniamo $P_1 = t(P_0)$ e $P_2 = t^2(P_0)$; di guisa che risulta anche $P_1 = t^*(P_0)$ e $P_2 = t^*(P_1)$.

Supponiamo dapprima che P_0 appartenga a z_0, anzi che P_0 appartenga a k_0.

Allora P_1 appartiene k_1; e come tale esso è interno a Z_0 (n° 111, prima proposizione). Indi P_2 è interno a Z_1; e come tale è interno a Z_0^*.

Supponiamo adesso che P_0 appartenga sempre a z_0, ma che esso non appartenga a k_0.

Allora P_0 è interno a l_0. E P_1, non appartenendo ad l_0, che è libera nella t, epperò nella t^*, o appartiene a k_0, o è interno a Z_0, o è esterno a Z_0.

Se P_1 appartiene a k_0, P_2 appartiene a k_1; e come tale è interno a Z_0 (n° 111, prima proposizione), epperò a Z_0^*. Se P_1 è interno a Z_0, P_2 è interno a Z_1, epperò a Z_0^*. Se P_1 è esterno a Z_0, esso appartiene ad una curva u, o, se si preferisce, u_0, che proviene da una curva u quale quella indicata con la stessa lettera nel n° 122; e P_2, in quanto punto di $t(u_0)$, è interno a Z_0 (n° 122, ultima proposizione), epperò a Z_0^*.

Supponiamo finalmente che P_0 non appartenga a z_0.

Allora esso appartiene a z_1 e non può essere interno a Z_0 (atteso che i punti interni a Z_0 sono interni anche a Z_0^*).

In queste condizioni P_0 non può appartenere nemmeno a k_1, che è interno a Z_0. Pertanto esso è interno ad l_1, epperò appartiene ad archi quali u, o, se si preferisce, quali u_0. Ma allora P_1 è interno a Z_0, e P_2 a Z_1, cioè a Z_0^*.

Pertanto la curva z_0^* della corona C è libera nel quadrato di t^*, epperò anche in quello di t. Ed il teorema della SANTOLINI porge di nuovo il risultato voluto.

E così è terminata anche la dimostrazione del secondo teorema conclusivo, quello del n° 31 ([21]).

([20]) Si vegga, per esempio, G. SCORZA DRAGONI, *Qualche teorema sulle curve di Jordan* (Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, serie 6ª, vol. 23 (1936), pagg. 181-186), n. 2.

([21]) Se nel teorema del n° 31 si suppongono privi di punti uniti anche t^2, t^3, ..., t^q, si potrà sostituire la $k^{-2} + k^{-3} > 2/\sqrt{3}$ con la $k^{-2} + k^{-3} + k^{-4} + ... + k^{-q-1} > 2/\sqrt{3}$, meno restrittiva nei riguardi di k?

§ 15. - Ultime considerazioni.

125. - L'ipotesi che il quadrato di t sia privo di punti uniti impedisce di applicare il risultato del n° 31 alle rotazioni della corona circolare (attorno al proprio centro e nel proprio piano), se l'ampiezza dell'angolo della rotazione è quella degli angoli piatti! E sarebbe veramente sgradevole se anche il teorema del n° 27 non ci permettesse di ritrovare che quegli autoomeomorfismi della corona circolare, che sono privi di punti uniti, che applicano le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa, e che hanno come quadrato l'identità, sono topologicamente equivalenti a rotazioni della corona circolare, con un'ampiezza, per l'angolo della rotazione, uguale a quella degli angoli piatti ([22]). Ma fortunatamente non è così.

Suopponiamo dunque che l'autoomeomorfismo t della corona circolare C sia privo di punti uniti, applichi le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa, ed abbia come quadrato l'identità ([23]). E mostriamo intanto la presenza, nella corona, di una curva semplice ed aperta v, che unisca le due circonferenze estreme della corona e che sia libera rispetto a t.

Nel fatto, se una tal curva v mancasse, nella corona sarebbero presenti due curve semplici ed aperte, k ed l, con gli estremi, e gli estremi soltanto, in comune, libere rispetto a t e siffatte, che la curva semplice e chiusa $k+l$, diciamola di nuovo z, aggiri il centro della corona e non incontri $t(k)$, oppure $t^{-1}(k)$. E previo uno scambio eventuale di uffici fra t e t^{-1}, non sarebbe restrittivo supporre vuota l'intersezione di z e $t(k)$. Allora $t(k)$ o sarebbe contenuta nell'interno della regione Z contornata da z, o sarebbe contenuta nell'esterno di Z. E $t(l)$ non soltanto non avrebbe punti su l, ma non potrebbe averne nemmeno su k, perchè t porterebbe gli eventuali punti comuni a $t(l)$ ed a k in punti di l, cioè di z, ed in punti di $t(k)$, cioè in punti che non apparterrebbero a z. Indi z sarebbe libera nella t. E $t(z)$, aggirando anch'essa il centro della corona, separerebbe z da $t^2(z)$, che invece coincide con z. Cosa assurda.

([22]) La circostanza è praticamente nota. Si vegga in proposito: B.v. KERÉKJÁRTÓ, *Ueber die periodischen transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche* (Mathematische Annalen, vol. 80 (1919), pagg. 36-38); L.E.J. BROUWER, *Ueber die periodischen Transformationen der Kugel* (ibidem, pagg. 39-41); S. EILENBERG, *Sur les transformations périodiques de la surface de sphère* (Fundamenta mathematicae, vol. 22 (1934), pagg. 28-41); B.v. KERÉKJÁRTÓ, *Ergänzung zu meinem Aufsatz: Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen* (Acta litterarum ac scientiarum dell'Università di Szeged, vol. VII (1934-35), pagg. 58-59).

([23]) I teoremi ricordati nella precedente nota a piè di pagina permetterebbero di riconoscere, che in queste condizioni la mancanza di punti uniti è una conseguenza delle altre ipotesi (a meno che t non si riduca all'identità).

La presenza della curva semplice ed aperta v, libera rispetto a t. è dimostrata. Ed alla curva v si può imporre di avere soltanto gli estremi in comune con le due circonferenze estreme della corona, uno sulla minore e l'altro sulla maggiore.

Le due regioni in cui C è divisa da v e $t(v)$ si possono porre in corrispondenza topologica con le due regioni in cui una corona circolare C' è divisa da due raggi diametralmente opposti, una, C_1, delle prime andando in una, C'_1, delle seconde, e l'altra, C_2, nell'altra C'_2 (24). Anzi, atteso che il quadrato di t è l'identità, si può ovviamente ottenere che il punto corrente P di C_1 ed il suo trasformato $t(P)$, che descrive C_2, siano rispettivamente associati a punti di C'_1 e C'_2 diametralmente opposti. E di qui è facile trarre la conclusione desiderata.

(24) Si vegga, per esempio, B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie* (Springer, Berlino, 1923), cap. 2, § 2.