Successioni di punti distribuite secondo una misura.

Nota di U. BARBUTI (a Trieste) (*)

Sunto. - *Si delinea una nozione che indica, per una successione di punti di uno spazio misurabile* $(X, \mathfrak{B})$, *la proprietà di essere distribuita secondo una misura normalizzata* μ; *e si mostra come tale nozione consenta di caratterizzare l'ergodicità, rispetto a* μ, *di una classe di trasformazioni misurabili di* X *in sè.*

Lo studio delle successioni di punti di uno spazio euclideo uniformemente distribuite è argomento ben conosciuto che interessa, da vicino, quel settore della teoria dei numeri, noto col nome di approssimazione diofantea (1) ed ha utilizzazioni pratiche nel problema della generazione di successioni casuali che si impiegano nei metodi MONTE CARLO

Tale studio è stato recentemente esteso (2) al campo p-adico (3), nel quale è possibile istituirvi la misura di HAAR, risultando esso, rispetto ad opportuna norma, un gruppo topologico localmente compatto.

Nella teoria della uniforme distribuzione di successioni si presuppone inizialmente fissata una misura μ (invariante per traslazioni) che è quella di LEBESGUE negli spazi euclidei, quella di HAAR nel campo p-adico, e chiamando X lo spazio ambiente, l'interesse è orientato nella generazione di successioni di punti $\{x_n\}_N$, $(N = \{1, 2, \ldots\})$ per le quali risulta:

$$\mu(A) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_k \chi_A(x_k), \tag{1}$$

ove A è uno qualunque degli insiemi appartenenti ad una assegnata famiglia di sottoinsiemi di X e χ_A è la funzione caratteristica di A.

Questo presupposto suggerisce l'idea di allargare il punto di vista, istituendo (in astratto) una nozione che indichi, per una successione di punti di X, la proprietà di essere distribuita secondo una misura. Una tale nozione, che è delineata in questa Nota, prescindendo da eventuali strutture algebriche esistenti su X, ha riflessi nella teoria ergodica: essa conduce (n. 3) ad una caratterizzazione, che non mi risulta conosciuta, della ergodicità di

---

(*) Nell'ambito del programma dei Gruppi di Ricerca Matematica del C. N. R., (gruppo n° 24) Ann. Acc. 1964-65.

(1) Cfr. ad es., J. W. S. CASSEL in [1], cap. IV. Si veda la bibliografia alla fine.

(2) da M. CUGIANI in [2].

(3) Cioè al campo ottenuto completando il campo razionale con la valutazione p-adica.

una classe di trasformazioni [4], assegnate sopra uno spazio di misura finita.

1. - Per il seguito denoteremo con X un prefissato sostegno (o ambiente) i cui elementi indicheremo genericamente con x e chiameremo punti; supporremo assegnato su X un reticolo di sottoinsiemi (o figure) $\mathfrak{R}$ con elemento massimo X; considereremo anche la σ-algebra $\mathfrak{B}$ di figure su X, generata da $\mathfrak{R}$ e supporremo assegnata su $\mathfrak{B}$ una misura μ, finita che riterremo normalizzata ($\mu(X) = 1$).

È opportuno ricordare due teoremi di prolungamento per misure su su $\mathfrak{B}$ [5], ottenute da primitive funzioni di figura date su $\mathfrak{R}$ e chiamate usualmente «content» [6].

I - *Se* ν *è un content su* $\mathfrak{R}$ *che soddisfa le condizioni: è regolare esterno (interno)* [7], *è continuo su* $\mathfrak{R}$ *verso l'alto (verso il basso)* [8]; *allora* ν *è univocamente prolungabile in una misura* μ *su* $\mathfrak{B}$ [9].

Sia $\{x_n\}_{n \in N}$ un'assegnata successione di punti su X; allargando il contenuto della identità (1), ci possiamo chiedere se esistono content ν su $\mathfrak{R}$ tali da rispettare la condizione:

$$\lim_n{}' \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_k \chi_A(x_k) \leq \nu(A) \leq \lim_n{}'' \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_k \chi_A(x_k) \tag{2}$$

per ogni $A \in \mathfrak{R}$. Si può a questo riguardo notare la proprietà seguente:

---

(4) Il problema di assegnare condizioni atte ad assicurare l'ergodicità di una trasformazione è di notevole interesse fisico; Cfr. P. R. HALMOS in [3], a pag. 96, ove trovasi un elenco di problemi insoluti.

(5) Cfr. [4].

(6) Un content (Cfr., ad es., P. R. HALMOS in [5], a pag. 231) è una funzione non negativa, isotona e finitamente additiva e subadditiva su $\mathfrak{R}$ e rappresenta l'algoritmo iniziale atto a generare una misura su $\mathfrak{B}$.

(7) Risulta cioè:

$$\inf. \{\mu(A) : A \supseteq A_1 - A_2,\ A, A_1, A_2 \in \mathfrak{R},\ A_1 \supseteq A_2\} = \mu(A_1) - \mu(A_2)$$

$$(\sup \{\mu(A) : A \subseteq A_1 - A_2,\ A, A_1, A_2 \in \mathfrak{R},\ A_1 \supseteq A_2\} = \mu(A_1) - \mu(A_2)).$$

(8) Vale a dire se $A_n \in \mathfrak{R}$, per $n \in N$, $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\lim_n A_n = A \in \mathfrak{R}$ (scriveremo nel seguito $A_n \uparrow A$) ciò implica $\nu(A_n) \uparrow \nu(A)$; La continuità verso il basso è la proprietà duale della precedente.

(9) La condizione di regolarità (esterna ed interna) è ovviamente verificata nel caso che $\mathfrak{R}$ sia un'algebra e conseguentemente il teorema I contiene un classico teorema di prolungamento (Cfr. P. R. HALMOS in [5], a pag. 51).

II. - *Ad ogni successione* $\{x_n\}_{n\in N}$ *si può associare almeno un content che soddisfa la* (2) *e che è invariante per uno scorrimento di* $\{x_n\}_{n\in N}$ (10).

A prova della II, utilizzeremo la nozione di limite generalizzato di una successione, secondo MAZUR-BANACH (11). Considerato lo spazio lineare delle successioni limitate di numeri reali $\xi=\{\xi_n\}_{n\in N}$ e utilizzando il noto teorema di BANACH sul prolungamento dei funzionali lineari, è possibile costruire un funzionale lineare $L(\xi)$ (12) che rispetta le condizioni seguenti:

α) $$L(\xi)\geq 0 \quad \text{se} \quad \xi\geq 0 \quad (^{13}),$$

β) $$\lim_n{}' \frac{1}{n}\sum_1^n{}_k\xi_k \leq L(\xi) \leq \lim_n{}'' \frac{1}{n}\sum_1^n{}_k\xi_k,$$

γ) $$\text{posto} \quad \xi'=\{\xi_{n+1}\}_{n\in N}, \quad \text{risulta} \quad L(\xi)=L(\xi').$$

Si consideri per ogni $A\in\mathfrak{R}$ la successione $\xi=\{\xi_n\}_{n\in N}$, ove $\xi_n=\chi_A(x_n)$ e si ponga: $\nu(A)=L(\xi)$.

Risulta subito che ν è un content. Infatti è ovvio dalla α) che $\nu(A)\geq 0$; se poi, $A, B\in\mathfrak{R}$ e $A\subseteq B$, riuscendo $\chi_A\leq\chi_B$, si ha $\chi_A(x_n)\leq\chi_B(x_n)$ per ogni $n\in N$ e inoltre $\chi_{B-A}(x_n)=\chi_B(x_n)-\chi_A(x_n)$; segue allora dalla linearità di L e per la α) $0\leq L(\chi_{B-A}(x_n))=\nu(B)-\nu(A)$ e quindi la isotonia di ν; segue anche subito dalla identità $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$ e dalla linearità di L che $\nu(A\cup B)=\nu(A)+\nu(B)-\nu(A\cap B)$ e da ciò la finita additività e subadditività di ν. L'invarianza di ν per uno scorrimento di $\{x_n\}_{n\in N}$ risulta subito da γ).

Il content ora costruito che verifica la (2) può non essere prolungabile in una misura; la proposizione I fornisce il seguente criterio:

III. - *Affinchè un content verificante la* (2) *sia prolungabile in una misura, in modo univoco, è sufficiente che esso risulti regolare esterno* (*interno*) *e continuo verso l'alto* (*basso*) (14).

---

(10) Diremo scorrimento di $\{x_n\}_{n,n\in N}$ l'applicazione $\{x_n\}\to\{x_{n+r}\}$, $r>0$.

(11) Cfr. [6], a pag. 27.

(12) Cfr. [7], a pa. 561.

(13) $\xi\geq 0$ significa $\xi_n\geq 0$, $n\in N$.

(14) Esistono content verificanti la (2), ma non continui. Supponiamo $X=[0,1]$ sulla retta reale; $\{x_n\}$ la successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n\in N$; $\mathfrak{R}$ il reticolo dei plurintervalli chiusi su X e su $\mathfrak{R}$ il content definito con la posizione (3). Si noti che su $A_m=[0,1/m]$, m intero, risulta $\nu(A_m)=1$ e $\lim_m A_m=\bigcap_{m\in N} A_m=\{0\}$ e $\nu(\{0\})=0$; non esiste, dunque, alcuna misura sui borelliani di X che si restringa alla ν.

2. - Sia $\{x_n\}_{n\in N}$ una successione di punti assegnata su X; diremo che essa è *distribuita secondo la misura* μ ([15]), o semplicemente, μ-*distribuita* se, per ogni $A \in \mathcal{R}$, esiste finito il

$$\lim_n \frac{1}{n} \overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_k \chi_A(x_k) = \nu(A) \tag{3}$$

e inoltre la funzione di figura $\nu(A)$, che questo limite definisce su $\mathcal{R}$ ([16]), coincide con la restrizione ad $\mathcal{R}$ della misura μ. Questa definizione abbisogna di qualche commento. Va innanzitutto osservato che, se $\{x_n\}_{n\in N}$ è μ-distribuita, l'insieme delle figure di $\mathcal{B}$ su ciascuna delle quali vale la (3), cioè su ciascuna delle quali la μ si restringe al primo membro della (3) (che diremo soggiorno della successione $\{x_n\}_{n\in N}$ su A), include in generale $\mathcal{R}$. Vale invero la proprietà seguente:

IV. - *Se* $\{x_n\}_{n\in N}$ *è* μ-*distribuita, allora per ogni* C *appartenente alla algebra* $\mathcal{A}$ *generata da* $\mathcal{R}$, *risulta:*

$$\mu(C) = \lim_n \frac{1}{n} \overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_k \chi_c(x_k).$$

Si verifica facilmente che la classe $\mathcal{G}$ delle figure $Z = A - B$, con A, $B \in \mathcal{R}$, $A \supseteq B$, è famiglia generatrice per $\mathcal{A}$ ([17]), vale a dire ogni insieme $C \in \mathcal{A}$ è unione finita d'insiemi disgiunti $Z \in \mathcal{G}$. Ponendo allora

$$C = \overset{m}{\underset{1}{\cup}}_j (A_j - B_j), \quad A_j \supseteq B_j, \quad A_j, \quad B_j \in \mathcal{R}$$

e

$$\tilde{\mu}(C) = \overset{m}{\underset{1}{\Sigma}}_j [\nu(A_j) - \nu(B_j)], \tag{4}$$

$\tilde{\mu}$ è l'unica misura finitamente additiva su $\mathcal{A}$ che si restringe alla ν su $\mathcal{R}$ ([18]) e quindi $\tilde{\mu}$ coincide con la traccia di μ ad $\mathcal{A}$.

([15]) Si dovrebbe aggiungere: e secondo l'algoritmo (3), locuzione, questa, che sottintendiamo. Va notato che l'algoritmo (3) non può in generale rappresentare la μ su tutto $\mathcal{B}$. Se, ad esempio, i punti della successione $\{x_n\}$, $n \in N$, sono tutti distinti e i punti di X sono figure di $\mathcal{B}$, risulterebbe dalla (3) $\mu(\{x_n\}) = 0$ $n \in N$, e $\mu(\bigcup_N \{x_n\}) = 1$. contro il supposto che μ sia una misura.

([16]) Che è un content per la prop. II.

([17]) Cfr. F. CAFIERO in [8], a pag. 86.

([18]) In loc. citato in [8], a pg. 89.

Va ora osservato che, se $A \supseteq B$, si ha $\chi_{A-B} = \chi_A - \chi_B$ e quindi

$$\nu(A_j) - \nu(B_j) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_k^n \chi_{A_j - B_j}(x_k) \tag{5}$$

e poichè gli insiemi $Z_j = A_j - B_j$ $(j \leq m)$ sono disgiunti, risulta pure $\chi_c = \chi_{\bigcup_j (A_j - B_j)} = \sum_{1}^{m}{}_j \chi_{A_j - B_j}$, dalle (4) e (5) segue l'asserto.

La proposizione IV ci avverte che nella definizione su data si può sempre sostituire al reticolo $\mathfrak{R}$ un'algebra.

Il teorema di prolungamento (prop. II) ci assicura, poi, la coerenza della definizione medesima nel senso che una successione $\{x_n\}_{n \in N}$ non può essere μ-distribuita secondo due distinte misure.

3. - Particolari successioni di punti di X sono quelle determinate da una trasformazione di X in sè. Se T è una tale trasformazione, considerato un punto x^0, hanuo interesse nella teoria ergodica le successioni $T^0x^0 = x^0$, Tx^0, T^2x^0, ..., che sono denominate traiettorie. Sia T una trasformazione misurabile [19], si ha la seguente proprietà:

V. - *Suppongasi che la trasformazione misurabile T soddisfi la condizione $T^{-1}A \in \mathfrak{R}$ se $A \in \mathfrak{R}$; se allora, per un x_0, la traiettoria $\{T^{n-1}x^0\}$, $n \in N$, è μ-distribuita, μ è invariante rispetto a T* [20].

Per semplicità di dimostrazione supponiamo $\mathfrak{R}$ un'algebra. La μ si restringe alla ν definita dalla (3) quando si faccia $x_n = T^{n-1}x^0$; precisamente si ha:

$$\nu(A) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k \chi_A(T^k x^0)$$

e poichè ν è invariante per uno scorrimento (prop. II) di $\{T^{n-1}x^0\}_{n \in N}$ risulta:

$$\nu(A) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k \chi_A(T^{k+1}x^0) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k \chi_{T^{-1}A}(T^k x_0) = \nu(T^{-1}A). \tag{6}$$

Sia ora $\mathfrak{R}_1$ il σ-reticolo di figure su X generato da $\mathfrak{R}$; se $B \in \mathfrak{R}_1$, esiste

---

(19) Cioè $T^{-1}M \in \mathfrak{B}$ se $M \in \mathfrak{B}$.

(20) La tecnica usata nella dimostrazione della V, come della II, è, con alcune varianti di forma, sostanzialmente quella di J. C. OXTOBY e S. ULAM (Cfr. [7], pgg. 560-566); essa consente di generare misure invarianti rispetto ad una assegnata trasformazione.

una successione $\{A_n\}_{n\in N}$, $A_n \in \mathfrak{R}$, tale che $A_n \uparrow B$ [21] e per ragioni di continuità avremo $\nu(A_n) \uparrow \mu(B)$.

Risulterà anche $T^{-1}A_n \uparrow T^{-1}B$ e conseguentemente $\nu(T^{-1}A_n) \uparrow \mu(T^{-1}B)$ e e per la ipotesi fatta e dalla (6) segue $\mu(B) = \mu(T^{-1}B)$.

Sia $\mathfrak{R}_2$, il δ-reticolo generato da $\mathfrak{R}$ [22], ripetendo il ragionamento ora fatto, si trova che se $C \in \mathfrak{R}_2$, risulta $\mu(C) = \mu(T^{-1}C)$.

Sia ora $M \in \mathfrak{B}$, risulterà M μ-misurabile rispetto a $\mathfrak{R}_1$ e a $\mathfrak{R}_2$ [23], vale a dire, fissato $\varepsilon > 0$, esistono $B \in \mathfrak{R}_1$, $C \in \mathfrak{R}_2$ tali che per essi è:

$$C \subseteq M \subseteq B \quad \text{e} \quad \mu(B) - \mu(C) < \varepsilon. \tag{7}$$

Segue allora $T^{-1}C \subseteq T^{-1}M \subseteq T^{-1}B$ e, per quanto sopra visto, si ha:

$$|\, \mu(T^{-1}M) - \mu(M) \,| < \varepsilon;$$

per l'arbitrarietà di ε segue la tesi.

Un caso particolarmente interessante si presenta in relazione alla eventualità che T sia ergodica rispetto ad una misura [24].

In queste circostanze vale il seguente teorema.

VI. – *Suppongasi $\mathfrak{R}$ numerabile e T una trasformazione misurabile tale che $T^{-1}A \in \mathfrak{R}$ se $A \in \mathfrak{R}$. In queste ipotesi le proprietà seguenti sono equivalenti:*

i) *T è ergodica rispetto a μ;*

i^0) *quasi tutte le traiettorie sono μ-distribuite.*

Valga la i); si consideri l'insieme E definito con

$$x \in E \Longleftrightarrow \exists \lim_n \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k \chi_A(T^k x), \ \forall A \in \mathfrak{R}. \tag{8}$$

Un tale insieme è misurabile per la ipotesi fatta su $\mathfrak{R}$ e si può constatare che è invariante, cioè $T^{-1}E = E$. Invero sia $x' \in T^{-1}E$, posto $x = Tx'$,

---

[21] Cfr. la nota (8).

[22] Cioè stabile rispetto alle intersezioni numerabili.

[23] Nel senso di LEBESGUE.

[24] Ricordiamo che un insieme $E \subseteq X$ è detto invariante, rispetto a T, se $T^{-1}E = E$; una trasformazione che conserva una misura normalizzata è detta ergodica se per ogni insieme invariante E risulta $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = 1$. Cfr., ad es., [3].

si ha $x \in E$, inoltre:

$$\frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k \chi_A(T^k x') = \frac{1}{n} [\chi_A(x') + \sum_{1}^{n}{}_k \chi_A(T^k x') - \chi_A(T^n x')] = \tag{9}$$

$$= \frac{1}{n} [\chi_A(x') + \sum_{0}^{n-1}{}_k \chi_A(T^k x) - \chi_A(T^n x')];$$

Se $n \to \infty$, il secondo membro di (9) ha limite per ogni $A \in \mathfrak{R}$, onde $T^{-1}E \subseteq E$. Se $x' \in E$, proviamo che $x' \in T^{-1}E$, cioè $Tx' = x \in E$; il primo membro di (9) ha limite per ogni $A \in \mathfrak{R}$ e quindi ha limite per ogni A:

$$\frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_k \chi_A(T^k x') = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k \chi_A(T^{k+1} x') = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k \chi_A(T^k x).$$

Essendo T ergodica e μ misura finita, risulterà $\mu(E) = 0$ oppure $\mu(E) = 1$; ma la prima eventualità non si presenta. Infatti, per essere μ invariante, vale il teorema ergodico individuale ([25]) e in forza di esso, fissato $A \in \mathfrak{R}$, esiste $H_A \in \mathfrak{R}$, tale che $\mu(H_A) = 0$, ed esiste:

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k \chi_A(T^k x), \quad \forall x \in X - H_A. \tag{10}$$

Poichè $\mathfrak{R}$ è numerabile, posto $H = \bigcup_{A \in \mathfrak{R}} H_A$, risulterà $\mu(H) = 0$ e se $x \in X - H$ il limite (10) esiste per ogni $A \in \mathfrak{R}$, onde $X - H \subseteq E$ e quindi $\mu(E) = 1$. Tenuto ancora conto della ergodicità di T, posto:

$$\chi_A^*(x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k \chi_A(T^k x), \tag{11}$$

e supposto fissato A, χ_A^* risulta quasi ovunque costante ([26]), e, sempre per il teorema ergodico individuale:

$$\int_X \chi_A^*(x) d\mu = \int_X \chi_A(x) d\mu = \mu(A);$$

([25]) Cfr., ad es., [3], a pag. 18.

([26]) Ricordiamo che una funzione misurabile rispetto a $\mathfrak{B}$ è detta invariante se $f(Tx) = f(x)$, per quasi tutti i punti $x \in X$; ricordiamo anche che T è ergodica se, solo se, ogni funzione insariante è costante in quasi tutto X. L'affermazione del testo risulta conseguenza della invarianza di $\chi^*_A(x)$.

onde, per essere $\mu(X) = 1$; segue $\mu(A) = \chi_A^*(x)$, per ogni $x \in X - H$ ed ogni $A \in \mathfrak{R}$; da i) segue dunque i°).

Valga la i°). Sia E_1 un insieme invariante e di misura $\mu(E_1)$ positiva. Poichè μ è invariante (prop. V), per il teorema ergodico individuale risulta:

$$\mu(A \cap E_1) = \int_X \chi_{A \cap E_1}^*(x) d\mu, \qquad A \in \mathfrak{R} \tag{12}$$

dove si è posto:

$$\chi_{A \cap E_1}^*(x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{A \cap E_1}(T^k x),$$

per quasi tutti i punti $x \in X$.

Per la i°) si ha:

$$\mu(A) = \chi_A^*(x), \tag{13}$$

per quasi tutti gli $x \in X$ e per ogni $A \in \mathfrak{R}$, essendo $\chi_A^*(x)$ data dalla (11). Per essere E_1 invariante risulta pure

$$\chi_A^*(x) = \chi_{A \cap E_1}^*(x) \tag{14}$$

per ogni $A \in \mathfrak{R}$ e quasi tutti gli $x \in E_1$; mentre si ha

$$\chi_{A \cap E_1}^*(x) = 0, \tag{15}$$

per quasi tutti gli $x \in X - E_1$ e ogni $A \in \mathfrak{R}$.

Dalla (12), tenuto conto delle (15), (14) e (13), si ha

$$\mu(A \cap E_1) = \int_{E_1} \chi_{A \cap E_1}^*(x) \, d\mu = \int_{E_1} \chi_A^*(x) d\mu = \mu(A) \cdot \mu(E_1). \tag{16}$$

Poichè $E_1 \in \mathfrak{B}$, l'insieme E_1 è misurabile e conseguentemente, fissato $\varepsilon > 0$, esiste una successione $\{A_m\}$, $m \in N$, $A_m \in \mathfrak{R}$, $A_m \subseteq A_{m+1}$ e tale che posto $B = \lim_m A_m$, risulta

$$E_1 \subseteq B, \qquad \mu(B) < \mu(E_1) + \varepsilon. \tag{17}$$

La (16) dà allora

$$\mu(A_m \cap E_1) = \mu(A_m) \cdot \mu(E_1),$$

e passando al limite per $m \to \infty$, segue $\mu(E_1) = \mu(B)\cdot\mu(E_1)$, ma essendo $\mu(E_1) > 0$, risulta $\mu(B) = 1$. La (17) dà allora $\mu(E_1) + \varepsilon > 1$ e, per l'arbitrarietà di ε, $\mu(E_1) = 1$; da i^0) segue dunque i).

4. - Tornando a successioni di punti $\{x_n\}_{n\in N}$ di X, indichiamo in questo numero una formulazione astratta di un noto criterio di uniforme distribuzione, dovuto a WEYL [27], nell'ordine di idee in cui ci siamo posti.

Mantenendo le ipotesi del numero 1, supponiamo che $\mathfrak{R}$ sia un'algebra d'insiemi. Sia $f(x)$ una funzione a valori reali definita per ogni $x \in X$ e limitata. Considerata una qualsiasi partizione finita $\{X_r\}$, $r = 1, 2, \ldots, m$, di X, fatta con insiemi $X_r \in \mathfrak{R}$, si formino le somme

$$\sum_1^m{}_r\, l'_r\, \mu(X_r), \quad \sum_1^m l''_r \mu(X_r),$$

essendo l'_r, l''_r rispettivamente estremo inferiore e superiore di f su X_r. Se risulta :

$$\sup_{\{X_r\}\in\mathcal{S}} \Sigma_r l'_r \mu(X_r) = \inf_{\{X_r\}\in\mathcal{S}} \Sigma_r l''_r \mu(X_r), \tag{18}$$

ove si è indicata con $\mathcal{S}$ la famiglia delle partizioni finite di X, fatte con insiemi appartenenti ad $\mathfrak{R}$, converremo di dire che f è integrabile nel senso di RIEMANN (rispetto ad $\mathfrak{R}$), chiameremo poi integrale di f su X il valore comune dei due membri in (18), che denoteremo col simbolo usuale. Ciò premesso il sudetto criterio può enunciarsi:

VII. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè la successione $\{x_n\}_{n\in N}$ di punti di X sia μ-distribuita è che risulti:*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_1^n{}_k f(x_k) = \int_X f(x)\, d\mu \tag{19}$$

per ogni f integrabile secondo Riemann su X.

La condizione è ovviamente sufficiente dato che ogni funzione $\chi_A(x)$, $A \in \mathfrak{R}$ è integrabile nel senso su detto e si ha dalla (19):

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_1^n{}_k \chi_A) = \int_X \chi_A(x)\, d\mu = \mu(A).$$

---

[27] Una esposizione dei criteri di WEYL trovasi, ed es., in [1] a pag. 65 e seguenti.

La condizione è necessaria. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste una partizione $\{X_r\}$, $r \leq m$, di X, con $X_r \in \mathcal{R}$, tale che

$$\sum_1^m {}_r l'_r \mu(X_r) \leq \int_X f(x) d\mu \leq \sum_1^m {}_r l''_r \mu(X_r) \tag{20}$$

e

$$\sum_1^m {}_r (l''_r - l'_r) \mu(X_r) < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{21}$$

poniamo

$$L_n(f) = \frac{1}{n} \sum_1^n {}_k f(x_k); \tag{22}$$

risulta:

$$L_n(f) = \frac{1}{n} \sum_1^m {}_r \sum_{\substack{k \leq n \\ x_k \in X_r}} f(x_k) \leq \frac{1}{n} \sum_1^m {}_r l''_r \sum_{k \leq n} \chi_{X_r}(x_k) =$$

$$= \sum_r l''_r \left(\frac{1}{n} \sum_1^n {}_k \chi_{X_r}(x_k) \right) = \sum_1^m {}_r L_n(\chi_{X_r}).$$

Analogamente si trova

$$L_n(f) \geq \sum_1^m {}_r l'_r L_n(\chi_{X_r}).$$

Per modo che risultano verificate le disuguaglianze

$$\sum_1^m {}_r l'_r L_n(\chi_{X_r}) \leq L_n(f) \leq \sum_1^m {}_r l''_r L_n(\chi_{X_r}). \tag{23}$$

Essendo $\{x_n\}_{n \in N}$ μ-distribuita, sarà ancora possibile determinare un intero $n^0 > 0$, tale che se $n > n^0$

$$| L_n(\chi_{X_r}) - \mu(X_r) | < \frac{\varepsilon}{3ml}, \qquad r = 1, 2, \ldots, m,$$

essendo $l = \sup_{x \in X} | f(x) |$; sicchè, posto $\sigma_{n,r} = L_n(\chi_{X_r}) - \mu(X_r)$, avremo

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_1^m {}_r l'_r L_n(\chi_{X_r}) = \sum_1^m {}_r l'_r \mu(X_r) + \sum_1^m {}_r l'_r \sigma_{n,r} \\ &\left| \sum_1^m {}_r l'_r \sigma_{nr} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned} \right. \tag{24}$$

e analogamente

$$(25)\qquad \begin{cases} \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_r}} l''_r L_n(\chi_{X_r}) = \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_r}} l''_r \mu(X_r) + \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_r}} l''_r \sigma_{n,r} \\ \left| \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_r}} l''_r \sigma_{n,r} \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}. \end{cases}$$

Avremo dunque dalle (23), tenuto conto delle (24) e (25)

$$\overset{m}{\underset{1}{\Sigma_r}} l'_r \mu(X_r) - \frac{\varepsilon}{3} \leq L_n(f) \leq \overset{m}{\underset{1}{\Sigma}} l''_r \mu(X_r) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Dalle (20) e (21) si ricava:

$$\left| \int_X f(x)\, d\mu - L_n(f) \right| < \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_r}} (l''_r - l'_r)\, \mu(X_r) + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon, \qquad \text{se } n > n_0,$$

onde la tesi (19).

Chiudiamo osservando che la proposizione VII non è valida se enunciata nella classe delle funzioni limitate e misurabili rispetto a $\mathfrak{B}$ e utilizzando l'integrale astratto di LEBESGUE; più precisamente la condizione (19) è ancora sufficiente, ma non necessaria ([28]).

([28]) Si supponga $\{x_n\}_{n \in N}$ μ-distribuita, i punti x_n tutti distinti e supponiamo che i punti $x \in X$ (considerati come insiemi) siano figure di $\mathfrak{R}$. Si consideri l'insieme $A = \bigcup_N \{x_n\} (\in \mathfrak{B})$ e la funzione $f(x) = \chi_A(x)$; risulta (Cfr. la nota (15)) $\lim_n L_n(\chi_A) = 1$, mentre

$$\int_X \chi_A(x)\, d\mu = \sum_{n \in N} \mu(x_n)) = 0.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] J. W. S. CASSELS, *An introduction to diophantine approximation;* Cambridge «Tracts in Math. and Mathematical Physic», n. 45, (1957); Cambridge University Press.

[2] M. CUGIANI, *Successioni uniformemente distribuite nei domini p-adici*; «Rend. Ist. Lombardo di Scienze e lettere», 96, (1962), pgg. 351-372.

[3] P. R. HALMOS, *Lectures on the Ergodic Theory;* Publ. of the Math. Soc. of Japan, (1956).

[4] U. BARBUTI, *Teoremi di prolungamento per misura da reticoli d'insiemi;* «Ric. di Mat.», VIII, (1959), pgg. 118-135.

[5] P.R. HALMOS, *Measure Theory*; D. Van Nostrand Co. Inc., second printing, New York, (1951).

[6] S. BANACH, *Théory des opérations linéaire,* Warsaw (1932).

[7] J. C. OXTOBY and S. M. ULAM, *On the existence of a measure invariant under a trasformation*; «Ann. Math.», vol. 40, (1939), pgg. 560-566.

[8] F. CAFIERO, *Sul principio esteso delle probabilità totali;* «Ann. Univ. di Ferrara»; Ser. VII, vol. V, n. 8, (1956).