Sulle connessioni di una varietà quasi complessa (*).

Memoria di GIOVANNI BATTISTA RIZZA (a Parma)

Sunto. - *L'esistenza di una struttura quasi complessa su di una varietà V conduce in modo naturale alla considerazione di alcune classi di connessioni su V, geometricamente caratterizzate e dotate di interessanti proprietà.*
Risultati di natura più generale riguardano invece coppie di connessioni.

1. - Introduzione.

Il presente lavoro, dedicato alle connessioni sulle varietà quasi complesse, appartiene all'indirizzo di ricerca aperto nel 1953 da B. ECKMANN ed A. FRÖLICHER (1).

Nell'intento di pervenire alla determinazione di nuove proprietà delle connessioni, dipendenti dalla struttura della varietà V, sono qui sviluppate alcune idee.

Una prima consiste nella considerazione sistematica, per ogni connessione Λ, di alcuni tensori, denotati con Dh, R, S, costruiti a partire dal tensore misto h, che, in ogni punto di V, definisce la struttura (n. 3).

Un'altra porta invece ad introdurre classi particolari di connessioni (p. es. le connessioni J-semisimmetriche (n. 4)), per le quali la struttura quasi complessa di V rivesta un ruolo essenziale.

Infine, la considerazione simultanea di due connessioni Λ^*, Λ di V consente di riconoscere per i tensori H, Σ, E, che ne derivano per differenza. (n. 5), eventuali proprietà legate alla struttura.

La parte centrale del lavoro (n. 7-10) consiste in uno studio sistematico delle proprietà formali dei tensori semplicemente contravarianti e doppiamente covarianti, in relazione alla struttura quasi complessa della varietà. Ciò appare del tutto naturale, quando si rifletta che sono di questo tipo,

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 1 del C.N.R., per l'anno 1964-65.

(1) Si vedano i lavori [2], [3], [4], della bibliografia.

oltre ai tensori Dh, R, S, H, Σ, E già nominati, la torsione T di una arbitraria connessione Λ ed il tensore di NIJENHUIS N associato alla struttura di V.

Lo studio ora accennato conduce in definitiva a fissare l'attenzione su quattro condizioni essenziali, ispirate alle note proprietà formali di N e variamente tra loro in relazione.

Esse, con riferimento ad un tensore emisimmetrico T, riguardato come torsione di una connessione Λ, si traducono in eleganti proprietà geometriche di quest'ultima, le quali fanno intervenire, da un lato, lo spostamento di CARTAN relativo a Λ, dall'altro, il gruppo G_J delle rotazioni caratteristiche, intimamente legato alla struttura quasi complessa (n. 11). In particolare, una delle condizioni precedenti esprime che la connessione Λ è priva di torsione caratteristica nel senso di E. MARTINELLI [2].

Dalle considerazioni accennate discendono nella terza parte del lavoro diversi risultati.

Si perviene anzitutto a stabilire teoremi di confronto per i tensori Dh, R, S, relativi a due connessioni (teor. $\boldsymbol{T}_4$, $\boldsymbol{T}_5$, $\boldsymbol{T}_6$, $\boldsymbol{T}_7$, $\boldsymbol{T}_8$, $\boldsymbol{T}_9$; n. 15).

Tenuto conto poi della decomposizione canonica di una connessione in connessione simmetrica associata e torsione, si ottengono i teoremi generali del n. 16. Essi mostrano come le accennate condizioni geometriche per una connessione Λ si riflettano in indicazioni sui tensori Dh, R, S, relativi a Λ, sulla torsione T di Λ e, talora, perfino sulla struttura della varietà.

In particolare, risultati noti per le connessioni simmetriche sono ora stabiliti per le connessioni semisimmetriche, J-semisimmetriche e per altre connessioni geometricamente caratterizzate (teor. $\boldsymbol{T}_{11}$, $\boldsymbol{T}_{13}$, $\boldsymbol{T}_{14}$ e corollari $\boldsymbol{C}_3$, $\boldsymbol{C}_4$, $\boldsymbol{C}_5$; n. 17).

L'ultima parte della ricerca (n. 18–20) è dedicata alle connessioni di ECKMANN–FRÖLICHER.

Questi Autori hanno provata l'esistenza di connessioni per le quali il campo dei tensori h è parallelo e la torsione equivale ad N. Si prova ora che ogni connessione avente queste proprietà può ottenersi con il procedimento considerato da ECKMANN e FRÖLICHER (teor. $\boldsymbol{T}_{15}$, n. 18).

Il teorema $\boldsymbol{T}_{18}$ caratterizza poi le connessioni di ECKMANN–FRÖLICHER tra quelle aventi una sola delle proprietà accennate; mentre i teoremi $\boldsymbol{T}_{16}$, $\boldsymbol{T}_{17}$ ne caratterizzano le connessioni simmetriche associate (n. 19).

Tutti i risultati di questo lavoro sussistono, in particolare, con riferimento alle varietà complesse.

---

(2) E. MARTINELLI, [5], [6].

I. - Struttura quasi complessa e connessioni.

2. - Varietà quasi complesse.

Sia V una varietà a struttura quasi complessa di classe C^r $(r \geq 1)$ e dimensione $2n$ $(n \geq 2)$, x un punto di V, h il tensore misto che determina in x la struttura, N il tensore di NIJENHUIS associato ad h (3).

Il campo tensoriale descritto da h al variare di x su V sia di classe C^s $(1 \leq s \leq r - 1)$,

Si denoti con J *l'isomorfismo* anti-involutorio definito dalla struttura quasi complessa nello spazio vettoriale τ tangente a V nel punto x.

Con riferimento ad un sistema di coordinate locali x^j $(j = 1, \ldots, 2n)$ descriventi un intorno U di x su V (4), si ha:

$$J: \quad u^j \longrightarrow \tilde{u}^j = h_k^{\cdot j} u^k \qquad (u \in \tau). \tag{1}$$

Il carattere anti-involutorio di J è immediata conseguenza della relazione:

$$h_k^j h_l^k = -\delta_l^j. \tag{2}$$

Si considerino poi in τ gli *isomorfismi* J_φ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ definiti da:

$$J_\varphi = I \cos \varphi + J \sin \varphi \qquad (I = \text{isomorfismo identico}). \tag{3}$$

che, per composizione, danno luogo ad un *gruppo*, denotato con G_J, isomorfo al gruppo delle rotazioni piane di centro fissato (5).

I sottospazi di τ G_J-invarianti si dicono *caratteristici*.

I vettori $J_\varphi u$ di τ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ individuano l'unico 2-spazio caratteristico contenente u. È naturale quindi dire che $J_\varphi u$ si ottiene da u per *rotazione caratteristica* di un angolo φ.

Più in generale, se α è il bivettore definito dai vettori u, v di τ, si denoterà con $J_\varphi \alpha$ il bivettore definito dai vettori $J_\varphi u$, $J_\varphi v$ di τ e si dirà che $J_\varphi \alpha$ si ottiene da α per rotazione caratteristica di un angolo φ (6). In particolare, se $\alpha = J_\varphi \alpha$ con $\varphi \neq 0$, il bivettore α si dice caratteristico (7).

---

(3) Per le nozioni essenziali sulle varietà quasi complesse, Ved. p. es. B. ECKMANN, [3], I, II, III, VI; E. MARTINELLI, [5] e [6], I-IV; K. YANO, [11], X.

(4) Ciò, nel seguito, è sottinteso.

(5) Ved. G. B. RIZZA, [8], n. 2.

(6) Si noti che i vettori $J_\varphi u$, $J_\varphi v$, al variare di φ, inviduano l'unico spazio caratteristico contenente u e v. Esso ha dimensione 4, salvo nel caso di cui alla nota (7).

(7) I vettori u e v appartengono ad un medesimo 2-spazio caratteristico.

Nell'intorno U di x il *tensore di* Nijenhuis associato alla struttura quasi complessa è dato da:

$$N_{kl}{}^{j} = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{\partial h_q^j}{\partial x^k} - \frac{\partial h_k^j}{\partial x^q}\right)h_l^q - \left(\frac{\partial h_p^j}{\partial x^l} - \frac{\partial h_l^j}{\partial x^p}\right)h_k^p\right] \qquad (4)$$ (8).

Se N è nullo in ogni punto di V, la struttura si dice integrabile; se inoltre V è di classe C^{2n+1} ed il campo h è di classe C^{2n} $(r-1=s=2n)$ la struttura di V è indotta da una struttura complessa, e viceversa (9).

3. - Connessioni su V. Tensori Dh, R, S.

Si consideri ora su V una connessione Λ e sia Γ la *connessione simmetrica associata a* Λ e T la *torsione* di Λ.

Nell'intorno U di x è quindi:

$$2\Gamma_{kl}^{j} = \Lambda_{kl}^{j} + \Lambda_{lk}^{j}, \quad 2T_{kl}^{j} = \Lambda_{kl}^{j} - \Lambda_{lk}^{j}, \qquad (5)$$

onde:

$$\Lambda_{kl}^{j} = \Gamma_{kl}^{j} + T_{kl}^{j}. \qquad (6)$$

Inversamente, data su V una connessione simmetrica Γ e, in ogni punto x, un tensore emisimmetrico T di τ_2^1 (10) si ottiene subito una connessione Λ che ha T per torsione. Precisamente, nell'intorno U di x, Λ è definita dalla (6) (11).

Ciò premesso è utile introdurre su V alcuni campi tensoriali di classe C^{s-1}, che consentono di porre in relazione la connessione Λ con la struttura quasi complessa di V.

Precisamente, si considerino i *tensori* Dh, R, S, definiti nell'intorno U

(8) Cfr. B. Eckmann, [3], (6), p. 12; A. Frölicher, [4], (8.2), p. 60; L. Yano, [11], (1.12), p. 227.

(9) Ved. p. es. A. Newlander-L. Nirenberg, [7], p. 393.

(10) τ_2^1 denota l'insieme dei tensori semplicemente contravarianti e doppiamente covarianti (Cfr. p. es. N. Bourbaki, [1], p. 39). Per i tensori di τ_2^1 i termini «simmetria» ed «emisimmetria» vanno naturalmente riferiti alla covarianza; ad esempio è emisimmetrico il tensore N considerato al n. 2.

(11) Ved. p. es. T. J. Willmore, [10], p. 209.

di x dalle uguaglianze:

$$D_k h_l^{\,j} = \frac{\partial h_l^{\,j}}{\partial x^k} + \Lambda^j_{kq} h^q_l - \Lambda^r_{kl} h^j_r, \tag{7}$$

$$R_{kl}^{\;\;\,j} = \frac{1}{8}[(D_k h^j_q - D_q h^j_k) h^q_l - (D_l h^j_p - D_p h^j_l) h^p_k], \tag{8}$$

$$S_{kl}^{\;\;\,j} = \frac{1}{8}[(D_k h_q^{\,j} - D_q h_k^{\,j}) h_l^{\,q} + (D_l h_p^{\,j} - D_p h_l^{\,j}) h^p_k] + \tag{9}$$

$$-\frac{1}{4}(D_k h_l^{\,r} + D_l h^r_k) h^j_r,$$

D_k è l'ordinario operatore di derivazione covariante rispetto alla coordinata locale x^k ($k = 1, \ldots, 2x$) e relativo alla connessione Λ.

Il tensore Dh interviene in diversi lavori. Il suo annullarsi su V assicura, in ogni spazio tangente a V, la permutabilità della differenziazione assoluta relativa a Λ con l'isomorfismo fondamentale J della struttura quasi complessa ([12]).

Al tensore R si perviene invece formalmente, sostituendo nel secondo membro della (4) le derivate ordinarie con le derivate covarianti rispetto a Λ. Se Λ è una connessione simmetrica, il tensore R si riduce al tensore N definito dalla struttura quasi complessa ([13]).

Infine, con riferimento ad una connessione simmetrica, il tensore $S + R$ ha un ruolo importante in alcuni lavori di B. ECKMANN e A. FRÖLICHER ([14]).

4. - Connessioni semisimmetriche e J-semisimmetriche.

Un altro modo di porre in relazione la struttura quasi complessa e le connessioni su V consiste nel considerare per queste ipotesi derivanti dalla struttura. È opportuno per ora limitarsi ad un esempio.

Si supponga anzitutto che la torsione T della connessione Λ dipenda, in ogni punto x di V, da un vettore covariante t. In particolare, se, nell'intorno

---

([12]) Ved. p. es. i lavori [2], [3] di B ECKMANN; [4] di FRÖLICHER; [11] di K. YANO. Nel secondo, a p. 17, trovasi la proprietà ora accennata

([13]) Ved. p. es. A. FRÖLICHER, [4], p. 60.

([14]) Ved. B. ECKMANN [2] e [3]; A. FRÖLICHER, [4], ed i n. 18, 19 di questo lavoro.

U di x, risulta:

$$T^j_{kl} = \frac{1}{2}(t_k \delta^j_l - t_l \delta^j_k), \tag{10}$$

ovvero:

$$T^j_{kl} = \frac{1}{2}(t_k h^j_l - t_l h^j_k), \tag{11}$$

la connessione Λ si dice, rispettivamente, *semisimmetrica* e *J-semisimmetrica*. Se, di più, t è identicamente nullo su V, lo stesso avviene per la torsione T e quindi Λ è addirittura simmetrica.

Si noti che, a differenza dalla (10), gia nota (15), la condizione (11), ora introdotta, dipende in modo essenziale dalla struttura quasi complessa di V. È così ottenuto l'esempio accennato.

5. - Connessioni e tensori su V.

Siano Λ^*, Λ due connessioni su V ed H il tensore ottennto per differenza nel punto x (16). Nell'intorno U di x è quindi:

$$\Lambda^{*j}_{kl} - \Lambda^j_{kl} = H^j_{kl}. \tag{12}$$

Il tensore H determina poi un tensore simmetrico Σ ed un tensore emisimmetrico E (17), dei quali è somma. Precisamente, nell'intorno U di x è:

$$2\,\Sigma^j_{kl} = H^j_{kl} + H^j_{lk}, \quad 2E^j_{kl} = H^j_{kl} - H^j_{lk}, \tag{13}$$

onde:

$$H^j_{kl} = \Sigma^j_{kl} + E^j_{kl}, \tag{14}$$

Inversamente, dati una connessione Λ su V e in ogni punto due tensori semplicemente controvarianti e doppiamente covarianti Σ ed E, simmetrico il primo, emisimmetrico il secondo, si perviene per somma ad una connessione Λ^* (18). Precisamente, nell'intorno U di x, la connessione Λ^* è definita dalla (12), essendo H dato dalla (14)

Conviene ora ricordare che, nelle ipotesi del n. 2, V ammette una metrica Riemanniana, onde su V è assicurata l'esistenza di una connessione: la connessione di LEVI-CIVITA relativa alla metrica (19).

(15) Ved. J. A. SCHOUTEN, [9], p. 126.

(16) Ved. p. es. T. J. WILLMORE, [10], p. 208.

(17) Ved. nota (10).

(18) Ved. p. es. T.J. WILLMORE, [10], p. 208

(19) È questa una conseguenza del classico theorema di WHITNEY.

Le considerazioni precedenti si riassumono nella osservazione:

O_1 - *Lo studio delle connessioni su V equivale a quello dei campi di tensori, semplicemente contravarianti e doppiamente covarianti, simmetrici ed emisimmetrici.*

Indicate ora con Γ^*, Γ le connessioni simmetriche associate a Λ^*, Λ e con T^*, T le torsioni di Λ^*, Λ rispettivamente, sono immediate le uguaglianze:

$$\Gamma^{*j}_{kl} - \Gamma^j_{kl} = \Sigma^j_{kl}, \quad T^{*j}_{kl} - T^j_{kl} = E^j_{kl}. \tag{15}$$

In particolare, se Λ^* è la connessione simmetrica associata a Λ, cioè $\Lambda^* = \Gamma^* = \Gamma$, e $T^* = 0$, risulta $\Sigma = 0$, $E = -T$ onde $H = -T$ e la (12) si riduce alla (6) del n. 3.

6. -

È importante ora determinare relazioni tra i tensori Dh, R, S, conside. rati al n. 3 con riferimento alla connessione Λ, e gli analoghi, denotati con D^*h, R^*, S^*, relativi invece alla connessione Λ^*.

Tenute presenti le (7), (12), (14) si perviene subito alla:

$$D^*_k h^j_l - D_k h^j_l = \Sigma^j_{kq} h^q_l - \Sigma^r_{kl} h^j_r + E^j_{kq} h^q_l - E^r_{kl} h^j_r. \tag{16}$$

Da questa discendono poi immediatamente le uguaglianze:

$$(D^*_k h^j_l + D^*_l h^j_k) - (D_k h^j_l + D_l h^j_k) = E^j_{kq} h^q_l + E^j_{lp} h^p_k + \tag{17}$$

$$- 2\Sigma^r_{kl} h^j_r + \Sigma^j_{kq} h^q_l + \Sigma^j_{lp} h^p_k ;$$

$$(D^*_k h^j_l - D^*_l h^j_k) - (D_k h^j_l - D_l h^j_k) = \Sigma^j_{kq} h^q_l - \Sigma^j_{lp} h^p_k \tag{18}$$

$$- 2E^r_{kl} h^j_r + E^j_{kq} h^q_l - E^j_{lp} h^p_k .$$

È ora possibile proseguire. Precisamente, considerate le (8), (9) del n. 3, tenute presenti la (2), le (17), (18) e le proprietà di simmetria ed emisimmetria dei tensori Σ, E, si perviene infine senza difficoltà alle relazioni:

$$(19)\qquad 4(R^{*j}_{kl} - R^j_{kl}) = - E^j_{kl} + E^r_{qk}h^q_l h^j_r + E^r_{lp}h^p_k h^j_r + E^j_{pq}h^p_k h^q_l,$$

$$(20)\qquad 4(S^{*j}_{kl} - S^j_{kl}) = \Sigma^j_{kl} - \Sigma^r_{qk}h^q_l h^j_r - \Sigma^r_{lp}h^p_k h^j_r - \Sigma^j_{pq}h^p_k h^q_l + \\ -2(E^r_{kq}h^q_l + E^r_{lp}h^p_k)h^j_r - 4\,\Sigma^j_{kl}.$$

II - Tensori e connessioni.

7. - Condizioni formali.

L'introduzione dei tensori N, Dh, R, S (nn. 3, 4) e l'osservazione $\boldsymbol{O}_1$ (n. 5), sottolineano l'opportunità di considerare, in generale, i tensori semplicemente contravarianti e doppiamente covarianti, sopratutto in relazione alla struttura quasi complessa di V.

Sia L un tensore del tipo ora accennato. È naturale, nell'intorno U del punto x su V, considerare le *condizioni*:

$$\boldsymbol{A}:\qquad L^m_{kl}h^j_m = L^j_{km}h^m_l, \qquad L^m_{kl}h^j_m = L^j_{ml}h^m_k,$$

$$\boldsymbol{B}:\qquad L^m_{kl}h^j_m = L^j_{mk}h^m_l, \qquad L^m_{kl}h^j_m = L^j_{lm}h^m_k.$$

Un secondo gruppo di condizioni è:

$$\boldsymbol{A}':\qquad L^j_{kl} + L^r_{kq}h^q_l h^j_r = 0, \qquad L^j_{kl} + L^r_{pl}h^p_k h^j_r = 0,$$

$$\boldsymbol{B}':\qquad L^j_{kl} + L^r_{qk}h^q_l h^j_r = 0, \qquad L^j_{kl} + L^r_{lp}h^p_k h^j_r = 0.$$

Tenuta presente la (2) del n. 2, si riconosce subito che *le condizioni* $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$, *sono rispettivamente equivalenti alle condizioni* $\boldsymbol{A}'_1, \boldsymbol{A}'_2, \boldsymbol{B}'_1, \boldsymbol{B}'_2$.

Hanno interesse anche le *condizioni*:

$$\boldsymbol{C}:\qquad L^j_{km}h^m_l = L^j_{ml}h^m_k,$$

$$\boldsymbol{D}:\qquad L^j_{km}h^m_l = L^j_{lm}h^m_k,$$

e le *condizioni*:

$$\boldsymbol{C}':\qquad L^j_{kl} + L^j_{pq}\,h^p_k h^q_l = 0$$

$$\boldsymbol{D}':\qquad L^j_{kl} + L^j_{qp}\,h^p_k h^q_l = 0$$

rispettivamente *equivalenti* alle condizioni $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, in virtù della (2).

È immediato che, *sia le condizioni* $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ *che le condizioni* $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ *implicano la condizione* $\boldsymbol{C}$. *Analogamente, sia* $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ *che* $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{B}_1$ *implicano* $\boldsymbol{D}$ ([20]).

Si considerino ancora le condizioni:

$$\boldsymbol{A}'': \qquad L^m_{kl}h^j_m = \frac{1}{2}(L^j_{km}h^m_l + L^j_{ml}h^m_k)$$

$$\boldsymbol{B}'': \qquad L^m_{kl}h^j_m = \frac{1}{2}(L^j_{mk}h^m_l + L^j_{lm}h^m_k)$$

Non è banale l'*osservazione*:

$\boldsymbol{O}_2$ - *Le condizioni* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *sono rispettivamente equivalenti alle condizioni* $\boldsymbol{A}''$, $\boldsymbol{B}''$.

È facile riconoscere che la condizione $\boldsymbol{A}$ equivale alle condizioni $\boldsymbol{A}''$, $\boldsymbol{C}$, ottenibili da $\boldsymbol{A}$ per somma e differenza. Si prova ora che $\boldsymbol{A}''$ implica $\boldsymbol{C}$.

Dopo aver sostituito nell'uguaglianza che definisce la condizione $\boldsymbol{A}''$, k e j con p ed r e, successivamente, l e j con q ed r, si moltiplichino le uguaglianze ottenute per $h^p_k h^j_r$ e per $h^q_l h^j_r$, rispettivamente. In virtù della (2), i secondi membri risultano uguali e si perviene alla condizione $\boldsymbol{C}$.

È quindi dimostrata l'equivalenza tra le condizioni $\boldsymbol{A}$ ed $\boldsymbol{A}''$. Analogamente si procede per $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{B}''$.

Conviene qui terminare segnalando la *relazione*:

$$L^m_{km} = L^m_{mk} \tag{21}$$

Essa è immediata conseguenza sia della condizione $\boldsymbol{B}'_1$, che della condizione $\boldsymbol{B}'_2$.

8. - Tensore $K(L)$ e sue proprietà.

In relazione ad ogni tensore L del tipo considerato al n. 7, è utile introdurre il tensore $K(L)$, definito nell'intorno U di x dalla uguaglianza:

$$K^j_{kl}(L) = \frac{1}{4}(L^j_{kl} - L^r_{qk}h^q_l h^j_r - L^r_{lp}h^p_k h^j_r - L^j_{pq}h^p_k h^q_l). \tag{22}$$

([20]) Nell'ultimo caso occorre fare uso della (2) del n. 2.

E opportuno sottolineare l'osservazione:

$\boldsymbol{O}_3$ - *Qualunque sià L, il tensore $K(L)$ soddisfa alla condizione* $\boldsymbol{B}$ *del n.* 7.

La dimostrazione non presenta difficoltà.
Sussiste inoltre il teorema:

$\boldsymbol{T}_1$ - *La condizione $K(L) = L$ equivale alla condizione* $\boldsymbol{B}$ *del n.* 7.

Infatti, se $K(L) = L$, L soddisfa alla $\boldsymbol{B}$ in virtù di $\boldsymbol{O}_3$. Inversamente, se si tiene conto della condizione $\boldsymbol{B}$ e della (2) del n. 2, dalla (22) segue subito $K(L) = L$.

Conviene infine aggiungere l'osservazione:

$\boldsymbol{O}_4$ - *Le condizioni* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{D}$, *per il tensore L, implicano, rispettivamente, le relazioni:*

$$K^j_{kl}(L) = \frac{1}{2}[L^j_{kl} + L^j_{lk}], \tag{23}$$

$$K^j_{kl}(L) = \frac{1}{4}[(L^j_{kl} + L^j_{lk}) - (L^r_{qk} + L^r_{kq})h^q_l h^j_r]. \tag{24}$$

La dimostrazione è immediata.

9. - Tensori simmetrici ed emisimmetrici.

Si considerino ora, per il tensore L, le ipotesi di simmetria e di emisimmetria [21]. I risultati, immediate conseguenze di quelli di nn. 7, 8 sono riassunti nelle osservazioni:

$\boldsymbol{O}_5$ - *Se L é simmetrico le condizioni* $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}_1'$, $\boldsymbol{A}_2'$, $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}_1'$, $\boldsymbol{B}_2'$, $\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{B}''$, *sono tutte equivalenti. Sono pure equivalenti le condizioni* $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D}'$.

$\boldsymbol{O}_6$ - *Se L è emisimmetrico, le condizioni* $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_1'$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_1'$ *equivalgono rispettivamente alle condizioni* $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_2'$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_2'$ *e quindi alle condizioni* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}'$.

$\boldsymbol{O}_7$ - *Se L è emisimmetrico e sussiste la condizione* $\boldsymbol{B}$, *nell'intorno U di x risulta:*

$$L^m_{km} = 0. \tag{25}$$

$\boldsymbol{O}_8$ - *Se L è emisimmetrico, sia la condizione* $\boldsymbol{A}$, *sia la condizione* $\boldsymbol{D}$, *implicano* $K(L) = 0$.

---

(21) Nel senso precisato dalla nota (10).

10. - **Proprietà di** N, Dh, R, S.

Delle relazioni elencate ai nn. 7, 8, 9 alcune sussistono, in particolare, con riferimento ai tensori N, Dh, R, S, introdotti ai nn. 2, 3.

È noto ad esempio che il tensore emisimmetrico N associato alla struttura quasi complessa della varietà V (n. 2) soddisfa alle condizioni $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_1'$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_2'$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}'$ ed alla relazione (25) ([22]).

Dalle considerazioni del n. 7 e dalle osservazioni $\boldsymbol{O}_6$, $\boldsymbol{O}_7$ del n. 9 segue immediatamente l'osservazione:

$\boldsymbol{O}_9$ - *Le proprietà formali di* $\boldsymbol{N}$ *ora accennate si possono compendiare nella condizione* $\boldsymbol{B}_1$.

Queste proprietà, come apparirà dall'osservazione $\boldsymbol{O}_{12}$, *non caratterizzano* il tensore N; tuttavia, dal teorema $\boldsymbol{T}_1$ del n. 8 discende subito l'osservazione:

$\boldsymbol{O}_{10}$ - *Se* L *ha le accennate proprietà formali di* N *ed inoltre* $K(L) = N$, *risulta* $L = N$.

Le seguenti osservazioni riguardano invece i tensori Dh, R, S, introdotti al n. 3 in relazione ad una connessione arbitraria V.

$\boldsymbol{O}_{11}$ - *Per il tensore* Dh *le ipotesi di simmetria e di emisimmetria equivalgono rispettivamente alle condizioni* $\boldsymbol{D}$ *e* $\boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{O}_{12}$ - *Il tensore emisimmetrico* R *soddisfa alla condizione* $\boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{O}_{13}$ - *Per il tensore simmetrico* S *e l'espressione* $K(S)$ *riesce nulla.*

La $\boldsymbol{O}_{11}$ discende subito dalla relazione:

$$h^j_m D_k h^m_l + h^m_l D_k h^j_m = 0, \tag{26}$$

immediata conseguenza della (2) del n. 2. Alle $\boldsymbol{O}_{12}$, $\boldsymbol{O}_{13}$ si perviene in modo diretto, tenendo presenti le (2), (26), e, nel primo caso, l'osservazione $\boldsymbol{O}_6$.

Conviene ora terminare con la seguente considerazione. La prima parte di questo numero indica in modo evidente come la introduzione delle condi-

---

([22]) Ved. p. es. K. YANO, [11], relazioni (1.18), (1.19), (1.20) di pag. 128. Ved. anche B. ECKMANN, [3], p. 22.

zioni ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** del n. 7 sia stata suggerita dalle note proprietà formali del tensore N.

L'espressione $K(L)$, definita dalla (22) del n. 8, interviene invece in una dimostrazione di K. YANO e I. MOGI [23].

11. - Condizioni geometriche e teoremi relativi.

Con riferimento ai tensori emisimmetrici è possibile ottenere interpretazioni geometriche delle condizioni ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** del n. 7.

Invero, dato un tensore emisimmetrico L di τ_2^1 lo si riguardi anzitutto come torsione T di una connessione opportuna Λ $(L=T)$ (n. 3). Si consideri poi lo *spostamento di* CARTAN Ω, relativo alla connessione Λ, corrispondente ad un arbitrario bivettore α. Se α é definito dai vettori u, v di τ, nell'intorno U di x risulta:

$$\Omega^j(\alpha) = \Omega^j(u,\ v) = -\,2T_{kl}^{j}u^k v^l \quad (^{24}). \tag{27}$$

Ciò premesso, poichè la struttura quasi complessa di V è intimamente legata al gruppo G_J delle rotazioni caratteristiche (n. 2), è del tutto naturale considerare, per la connessione Λ, le *condizioni*:

ρ_+; ρ_-: *Ad una rotazione caratteristica del bivettore α corrisponde una rotazione caratteristica concorde, discorde dello spostamento di Cartan $\Omega(\alpha)$.*

ρ_0: *Lo spostamento di Cartan $\Omega(\alpha)$ è invariante per una qualunque rotazione caratteristica del bivettore α.*

μ: *Lo spostamento di Cartan relativo ai bivettori caratteristici è nullo.*

La condizione μ è stata considerata per la prima volta da E. MARTINELLI. Una connessione Λ soddisfacente alla condizione μ si dice *priva di torsione caratteristica* [25].

Si perviene ora, finalmente, alle interpretazioni geometriche accennate all'inizio di questo numero. Precisamente, sussistono i teoremi:

T_2 - *Le condizioni ρ_+, ρ_-, ρ_0 sono rispettivamente equivalenti alle condizioni* ***A***, ***B***, ***D*** *del n. 7, per i tensori emisimmetrici.*

T_3 - *La condizione μ di Martinelli, è equivalente alla condizione* ***C*** *del n. 7 per tensori emisimmetrici.*

---

[23] Ved. K. YANO, [11], relazioni (2.5), (2.6) a pag. 229.

[24] Per il significato geometrico dello spostamento di CARTAN e la relazione (27), ved. p. ee. J. A. SCHOUTEN, [9], p. 127-129. Ved. anche E. MARTINELLI, [5], p. 11; [6], p. 321.

[25] E. MARTINELLI, [5], p. 12; [6], p. 322. Cfr. anche J. A. SCHOUTEN, [9], p. 393.

12. -

Per la dimostrazione dei teoremi T_2, T_3 è opportuno qualche premessa.

Anzitutto, dalla (27) segue subito che lo spostamento di CARTAN $\Omega(u, v)$ è $\boldsymbol{R}$-bilineare ed emisimmetrico nella coppia di vettori u, v di τ.

Conviene poi segnalare che, per i tensori $L = T$ emisimmetrici le condizioni $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ del n. 7 si traducono rispettivamente nelle uguaglianze:

$$\tilde{\Omega}(u, v) = \pm [\Omega(u, \tilde{v}) + \Omega(\tilde{u}, v)], \tag{28}$$

$$\Omega(\tilde{u}, \tilde{v}) = \mp \Omega(u, v), \tag{29}$$

per ogni u, v di τ. Infatti, le condizioni $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ equivalgono rispettivamente alle condizioni $\boldsymbol{A}''$, $\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{D}'$ (n. 7) e queste, tenuto conto della (27) del n. 11, della (1) del n. 2 e dell'accennata emisimmetria di $\Omega(u, v)$, danno luogo ordinatamente alle (28), (29).

Ciò premesso, la dimostrazione del teorema T_3 si ottiene osservando che la prima delle (29), che traduce la condizione $\boldsymbol{C}$ nel caso emisimmetrico, risulta equivalente alla:

$$\Omega(w, \tilde{w}) = 0, \tag{30}$$

per ogni w di τ. Infatti, in virtù delle proprietà di emisimmetria ed $\boldsymbol{R}$-bilinearità di $\Omega(u, v)$ e del comportamento anti-involutorio di J sui vettori (n. 2), posto nella $(29)_1$ $u = w$ e $v = -\tilde{w}$, si ha subito la (30); inversamente, posto nella (30) $w = u + \tilde{v}$, si ha subito la $(29)_1$. Si perviene poi all'asserto notando che i vettori w, $\tilde{w}$ di τ danno luogo a bivettori caratteristici ed, inversamente, ogni bivettore α caratteristico può individuarsi a partire da un suo vettore w e dal vettore $\tilde{w} = Jw$ (n. 2).

13. -

Meno breve è la dimostrazione del teorema T_2.

Si noti anzitutto che le condizioni ρ_+, ρ_-, ρ_0 del n. 11 implicano, per per ogni bivettore α, la relazione:

$$\Omega(J_\varphi \alpha) = J_\psi \Omega(\alpha), \tag{31}$$

con ψ funzione di φ, rispettivamente crescente, decrescente, identicamente nulla ([26]).

Si fissi ora, in particolare, un bivettore α per cui sia $\Omega(\alpha) \neq 0$ ([27]). I vettori $\Omega(\alpha)$, $\tilde{\Omega}(\alpha)$ risultano quindi indipendenti ([28]).

Ciò premesso, se u, v sono due vettori di τ individuanti α, tenuti presenti la definizione (3) di J_φ ed il significato di $J_\varphi \alpha$ (n. 2), in virtù della $\boldsymbol{R}$-bilinearità di Ω (n. 12), la relazione (31) diviene:

$$\begin{aligned}\Omega(u, v)\cos^2\varphi + \Omega(\tilde{u}, \tilde{v})\sin^2\varphi + [\Omega(u, \tilde{v}) + \Omega(\tilde{u}, v)]\sin\varphi\cos\varphi = \\ = \Omega(u, v)\cos\psi + \tilde{\Omega}(u, v)\sin\psi.\end{aligned} \tag{32}$$

Posto ora nella (32) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, risulta:

$$\Omega(\tilde{u}, \tilde{v}) = \lambda\,\Omega(u, v) + \mu\,\tilde{\Omega}(u, v), \tag{33}$$

con λ, μ costanti reali. Posto invece $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ e tenuto conto della (33), si può scrivere:

$$\frac{1}{2}\,[\Omega(u, \tilde{v}) + \Omega(u, \tilde{v})] = \nu\,\Omega(u, v) + \rho\,\tilde{\Omega}(u, v). \tag{34}$$

con ν, ρ costanti reali.

In virtù delle (33), (34), la (32) diviene una relazione lineare, omogenea nei vettori indipendenti $\Omega(u, v)$, $\tilde{\Omega}(u, v)$. Ciò porta immediatamente alle uguaglianze:

$$\sin\psi = 2\rho\sin\varphi\cos\varphi + \mu\sin^2\varphi,$$

$$\cos\psi = 2\nu\sin\varphi\cos\varphi + \lambda\sin^2\varphi + \cos^2\varphi,$$

e quindi alla relazione:

$$(2\rho\sin\varphi\cos\varphi + \mu\sin^2\varphi)^2 + (2\nu\sin\varphi\cos\varphi + \lambda\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^2 = 1, \tag{35}$$

che non contiene la funzione ψ.

([26]) Conviene qui intendere φ variabile in $\boldsymbol{R}$ e porre $J_{\varphi + 2m\pi} = J_\varphi$ ($m \in \boldsymbol{Z}$). Analogamente per ψ.

([27]) Ciò è possibile, altrimenti dalla (27) seguirebbe $L = T = 0$.

([28]) Se $\tilde{\Omega} = \sigma\Omega$ con σ reale, è $\tilde{\tilde{\Omega}} = \sigma^2\Omega$. Ma ciò, per $\Omega \neq 0$ è assurdo, perchè $\tilde{\tilde{\Omega}} = -\Omega$ (n. 2).

Sottraendo ora dalla (35) l'analoga relazione per l'angolo $\pi - \varphi$ si perviene subito alla uguaglianza:

$$\mu\rho \sin^2\varphi + (\lambda \sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\nu = 0, \tag{36}$$

con $\varphi \neq m\dfrac{\pi}{2}$ $(m \in \boldsymbol{Z})$.

Per somma e differenza tra la (36) e la relazione analoga per l'angolo $\dfrac{\pi}{2} - \varphi$, si ottiene:

$$\mu\rho + (\lambda + 1)\nu = 0, \qquad \mu\rho + (\lambda - 1)\nu = 0,$$

da cui subito:

$$\nu = \mu\rho = 0. \tag{37}$$

Di conseguenza, la (35) si riduce ora alla:

$$4\rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi + \mu^2 \sin^4\varphi + (\lambda \sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^2 = 1,$$

e per $\varphi = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}$ risulta:

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1, \qquad 2\rho^2 + \lambda = 1 \tag{38}$$

Se $\mu \neq 0$, dalla (37) segue $\rho = 0$, onde la $(38)_2$ dà $\lambda = 1$ e quindi per la $(38)_1$ si avrebbe un assurdo. È dunque $\mu = 0$.

In conclusione, tenute presenti le (37), (38), sono possibili soltanto tre casi:

$$\lambda = -1, \quad \mu = \nu = 0, \quad \rho = \pm 1, \tag{39}$$

$$\lambda = 1, \qquad \mu = \nu = 0, \quad \rho = 0. \tag{40}$$

14. -

È bene rilevare esplicitamente che i tre casi elencati alla fine del n. 13 discendono ordinatamente dalle ipotesi ρ_+, ρ_-, ρ_0. Infatti, tenute presenti le (33), (34), il primo membro della (32), cioè $\Omega(J_\varphi\alpha)$, in virtù delle (39), (40), diviene rispettivamente:

$$\Omega(J_\varphi\alpha) = \Omega(\alpha)\cos 2\varphi \pm \tilde{\Omega}(\alpha)\sin 2\varphi = J_{\pm 2\varphi}\,\Omega(\alpha), \tag{41}$$

$$\Omega(J_\varphi\alpha) = \Omega(\alpha) = J_0\Omega(\alpha), \tag{42}$$

e ciò prova l'asserto.

Si noti noti pure che la funzione ψ, che a priori avrebbe potuto dipendere dal bivettore α, dipende invece soltanto da φ. Precisamente risulta $\psi = \pm 2\varphi$ e $\psi = 0$ rispettivamente.

È facile ormai stabilire il teorema $\boldsymbol{T}_2$.

Infatti, tenuto conto delle (33), (34), si riconosce subito che le (39) implicano rispettivamente le (28); mentre la (40) dà luogo alla $(29)_2$. In definitiva, a partire dalle condizioni ρ_+, ρ_-, ρ_0 si ottengono ordinatamente le condizioni $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ nel caso emisimmetrico.

Inversamente, la condizione $\boldsymbol{A}$, che implica la $\boldsymbol{C}$ (n. 7), conduce, nel caso emisimmetrico, alle $(28)_1$, $(29)_1$. È allora immediato che il primo membro della (32), cioè $\Omega(J_\varphi \alpha)$, risulta espresso dalla $(41)_1$. Dunque, nel caso emisimmetrico, $\boldsymbol{A}$ implica ρ_+. Analogamente per la condizione $\boldsymbol{B}$. Infine, poichè dalla $(29)_2$, che traduce la condizione $\boldsymbol{D}$ nel caso emisimmetrico, si trae subito $\Omega(u, \tilde{v}) + \Omega(\tilde{u}, v) = 0$ [29], il primo membro della (32), cioè $\Omega(J_\varphi \alpha)$, è dato dalla (42). Sussiste quindi la condizione ρ_0.

Il teorema $\boldsymbol{T}_2$ è ora dimostrato,

III. - Teoremi sulle connessioni.

15. - Teoremi di confronto.

I risultati ottenuti nelle prime due parti del lavoro permettono ora di enunciare diversi teoremi relativi a due connessioni Λ^*, Λ. Essi danno indicazioni sui tensori $D^*h - Dh$, $R^* - R$, $S^* - S$ (n. 3) in dipendenza dai tensori Σ ed E, che esprimono la differenza tra le connessioni simmetriche associate e la differenza delle torsioni (n. 5).

Precisamente, sussistono i teoremi:

$\boldsymbol{T}_4$ - *Se E soddisfa alla condizione* $\boldsymbol{C}$, *risulta* $S^* - S = K(\Sigma) - \Sigma$; *e viceversa.*

$\boldsymbol{T}_5$ - *Se E soddisfa alla condizione* $\boldsymbol{D}$, *risulta* $R^* = R$;

$\boldsymbol{T}_6$ - *Se E soddisfa alla condizione* $\boldsymbol{A}$, *risulta* $R^* = R$;

$\boldsymbol{T}_7$ - *Se E soddisfa alla condizione* $\boldsymbol{B}$, *risulta* $R^* = R - E$; *e viceversa.*

Denotati poi con $(D^*h)_s$, $(Dh)_s$ i tensori ottenuti da D^*h, Dh per simmetrizzazione, risulta ancora:

---

[29] Si ponga nella $(29)_2$ $\tilde{v}$ in luogo di v.

$\boldsymbol{T}_8$ - *Se* Σ *ed* E *soddisfano rispettivamente alle condizioni* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{C}$, *risulta* $(D^*h)_s = (Dh)_s$ *e* $S^* = S$.

$\boldsymbol{T}_9$ - *Se* $H = \Sigma + E$ *soddisfa alla condizione* $\boldsymbol{A}$, *risulta* $D^*h = Dh$; *e viceversa.*

Infine, sono immediati i corollari:

$\boldsymbol{C}_1$ - *Se* Λ^*, Λ *hanno uguale torsione, si ha* $R^* = R$ *e* $S^* - S = K(\Sigma) - \Sigma$.

$\boldsymbol{C}_2$ - *Se* Λ^*, Λ *hanno la stessa connessione simmetrica associata e la differenza* E *delle torsioni soddisfa alla condizione* $\boldsymbol{C}$, *si ha* $(D^*h)_s = (Dh)_s$ *e* $S^* = S$; *se in particolare,* E *soddisfa alla condizione* $\boldsymbol{A}$, *risulta* $D^*h = Dh$.

I risultati precedenti si ottengono senza difficoltà.

Precisamente, dalla (20) del n. 6, tenuta presente la (22) del n. 8 e l'emisimmetria di E, segue subito il teorema $\boldsymbol{T}_4$. I teoremi $\boldsymbol{T}_5$ e $\boldsymbol{T}_6$ discendono invece dalla (19) del n. 6, in virtù dell'osservazione $\boldsymbol{O}_8$ del n. 9. Al teorema $\boldsymbol{T}_7$ si perviene partendo ancora dalla (19) e tenendo conto del teorema $\boldsymbol{T}_1$ del n. 8.

Le due affermazioni contenute in $\boldsymbol{T}_8$ si ottengono, rispettivamente, dalle (17), (20) del n. 6, utilizzando l'osservazione $\boldsymbol{O}_2$ del n. 8 nel primo caso, l'osservazione $\boldsymbol{O}_5$ del n. 9 ed il teorema $\boldsymbol{T}_1$ del n. 8 nel secondo. Il teorema $\boldsymbol{T}_9$ segue immediatamente dalla (16) del n. 6.

I corollari $\boldsymbol{C}_1$ e $\boldsymbol{C}_2$ sono immediata conseguenza dei teoremi $\boldsymbol{T}_4$, $\boldsymbol{T}_5$ e $\boldsymbol{T}_8$, $\boldsymbol{T}_9$, rispettivamente.

16. - Teoremi generali.

Si consideri ora una connessione arbitraria Λ e siano Γ la connessione simmetrica associata e T la torsione di Γ (n. 3).

Per i vettori Dh, R, S, introdotti al n. 3, sussistono i teoremi:

$\boldsymbol{T}_{10}$ - *Se* Λ *soddisfa alla condizione* μ *di Martinelli (n.* 11) *risulta* $(D_\Lambda h)_s = (D_\Gamma h)_s$ *e* $S(\Lambda) = S(\Gamma)$; *inversamente, ognuna di queste uguaglianze implica la condizione* μ.

$\boldsymbol{T}_{11}$ - *Se* Λ *soddisfa alla condizione* ρ_0 *del n.* 11, *risulta* $R(\Lambda) = N$.

$\boldsymbol{T}_{12}$ - *Se* Λ *soddisfa alla condizione* ρ_+ *del n.* 11, *risulta* $D_\Lambda h = D_\Gamma h$; *e viceversa.*

$\boldsymbol{T}_{13}$ - *Se* Λ *soddisfa alla condizione* ρ_- *del n.* 11, *risulta* $R(\Lambda) = N - T$; *e viceversa.*

Conviene ancora segnalare il teorema:

$\boldsymbol{T_{14}}$ - *Se la connessione* Λ *è semisimmetrica ovvero J-semisimmetrica* (*n.* 4), *risulta* $R(\Lambda) = N$.

Dai teoremi enunciati discendono i corollari:

$\boldsymbol{C_3}$ - *Se* Λ *soddisfa alla condizione* ρ_0 *ovvero alla condizione* ρ_+ *ed* $R(\Lambda) = 0$, *risulta* $N = 0$.

$\boldsymbol{C_4}$ - *Se* $R(\Lambda) = -T$, *risulta* $N = 0$.

$\boldsymbol{C_5}$ - *Se* Λ *è semisimmetrica ovvero J-semisimmetrica* (*n.* 4) *ed* $R(\Lambda) = 0$, *risulta* $N = 0$.

Nelle ipotesi di $\boldsymbol{C_3}$, $\boldsymbol{C_4}$, $\boldsymbol{C_5}$, rispettivamente, la struttura quasi complessa di V è *integrabile*; se poi V è di classe C^{2n+1} e il campo h è di classe C^{2n}, *essa è indotta da una struttura complessa* (n. 2). In particolare, in $\boldsymbol{C_3}$, $\boldsymbol{C_5}$ la condizione $R(\Lambda) = 0$ può sostituirsi con la più restrittiva $D_\Lambda h = 0$ (n. 3).

Infine, se si suppone che la connessione Λ sia *simmetrica* ($\Lambda = \Gamma$, $T = 0$), i teoremi $\boldsymbol{T_{11}}$, $\boldsymbol{T_{13}}$, $\boldsymbol{T_{14}}$ si riducono ad una proposizione ben nota ($R(\Gamma) = N$) (n. 2). Nella medesima ipotesi su Λ, assumendo in particolare $D_\Lambda h = 0$, i corollari $\boldsymbol{C_3}$, $\boldsymbol{C_4}$, $\boldsymbol{C_5}$ conducono ad un noto risultato ([30]).

Inversamente, *se* Λ *soddisfa alla condizione* ρ_-, *la relazione* $R(\Lambda) = N$ *implica la simmetria di* Λ.

17. -

Per stabilire i risultati del n. 16, conviene ricordare che il caso attuale può ottenersi da quello generale, considerato al n. 15, ponendo $\Lambda^* = \Gamma^* = \Gamma$, onde risulta $\Sigma = 0$ ed $E = -T$ (n. 5). Va pure tenuto presente che, essendo Γ simmetrica, è $R(\Gamma) = N$ (n. 3). Inoltre, in virtù dei teoremi $\boldsymbol{T_2}$ e $\boldsymbol{T_3}$ del n. 11, le condizioni $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ per il tensore emisimmetrico T possono sostituirsi, rispettivamente, con le condizioni μ, ρ_0, ρ_+, ρ_- sulla connessione.

Ciò premesso, la parte diretta dei teoremi $\boldsymbol{T_{10}}$ e $\boldsymbol{T_{12}}$ segue immediatamente dal corollario $\boldsymbol{C_2}$ del n. 15. La parte inversa discende subito dalle (17), (20) e dalla (16), rispettivamente.

I teoremi $\boldsymbol{T_5}$ e $\boldsymbol{T_7}$ del n. 15 danno luogo poi, ordinatamente ai teoremi $\boldsymbol{T_{11}}$ e $\boldsymbol{T_{13}}$.

Il teorema $\boldsymbol{T_{14}}$ segue direttamente dalla (19) del n. 6, in virtù della osservazione:

$\boldsymbol{O_{14}}$ - *Se* Λ *è una connessione semisimmetrica ovvero J-semisimmetrica, risulta* $K(T) = 0$.

([30]) Ved. p. es. B. ECKMANN, [3], prop. 3.3, p. 18; K. YANO, [11], th. 2.2, p. 230.

Questa si ottiene subito dalla (22) del n. 8, tenendo conto delle (10), (11) del n. 4.

Il corollario $\boldsymbol{C}_3$ discende immediatamente dai teoremi $\boldsymbol{T}_{11}$ e $\boldsymbol{T}_{12}$ notando che $D_\Lambda h = D_\Gamma h$ implica $R(\Lambda) = R(\Gamma) = N$ (n. 3). Il teorema $\boldsymbol{T}_{14}$ porta subito al corollario $\boldsymbol{C}_5$.

Si perviene invece al corollario $\boldsymbol{C}_4$, partendo dal teorema $\boldsymbol{T}_{13}$ e tenendo conto dell'osservazione $\boldsymbol{O}_{12}$ del n. 10. Si noti che, *se* Λ *soddisfa alla condizione* ρ_-, *la proposizione espressa da* $\boldsymbol{C}_4$ *si inverte.*

Infine, anche l'osservazione al termine del 16 è una conseguenza immediata del teorema $\boldsymbol{T}_{13}$.

I risultati enunciati al n. 16 sono ora dimostrati.

18. - Connessioni di Eckmann-Frölicher.

L'ultima parte di questo lavoro è dedicata alle connessioni Λ per le quali il campo dei tensori h, che definisce la struttura quasi complessa di V, risulti parallelo, e, in ogni punto x di V, il tensore N associato ad h possa riguardarsi come torsione della connessione Λ (n. 2, 3). Si tratta, in altri termini, delle connessioni Λ soddisfacenti alle *condizioni*:

I: $$Dh = 0$$

II: $$T = N$$

Il problema dell'esistenza di connessioni di questo tipo è stato risolto da B. ECKMANN e A. FRÖLICHER. Precisamente, se $\mathring{\chi}$ è una connessione simmetrica ed $S(\mathring{\chi})$ è il tensore simmetrico considerato al n. 3, *la connessione* $\mathring{\Lambda}$, *definita nell'intorno* U *del punto* x *su* V *dalla relazione:*

$$\mathring{\Lambda}^i_{kl} = \mathring{\chi}^i_{kl} + S^i_{kl}(\mathring{\chi}) + N^i_{kl}, \tag{43}$$

soddisfa alle condizioni **I** *e* **II** (31).

I risultati ottenuti nel corso di questa ricerca permettono ora di stabilire il teorema:

$\boldsymbol{T}_{15}$ - *Ogni connessione* Λ, *soddisfacente alle condizioni* **I** *e* **II** *può ottenersi col procedimento di Eckmann-Frölicher a partire da una opportuna connessione simmetrica.*

---

(31) B. ECKMANN, [3], p. 17; A. FRÖLICHER, [4], (12.3), p. 69.

È naturale, ormai, chiamare *connessioni* di Eckmann-Frölicher le connessioni aventi proprietà **I** e **II**.

Per stabilire il teorema $\boldsymbol{T}_{15}$, si confrontino la connessione Λ dell'enunciato e la connessione $\Lambda^* = \overset{\circ}{\Lambda}$ definita dalla (43) (n. 15). A causa della condizione **II** è $E = 0$. Tenuto conto poi del teorema $\boldsymbol{T}_9$ del n. 15 e della condizione **I**, il tensore simmetrico Σ soddisfa alla condizione $\boldsymbol{A}$. Quindi, dall'osservazione $\boldsymbol{O}_5$ e dal teorema $\boldsymbol{T}_1$ (n. 8, 9), segue $K(\Sigma) = \Sigma$.

Considerata ora la connessione simmetrica X, cui si perviene per somma a partire dalla connessione simmetrica $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ e dal tensore $-\Sigma$, in virtù del corollario $\boldsymbol{C}_1$ del n. 15 risulta $S(\mathrm{X}) = S(\overset{\circ}{\mathrm{X}})$.

Ciò premesso, nell'intorno U di x, essendo:

$$\Lambda^j_{kl} = \Lambda^{*j}_{kl} - H^j_{kl} = \overset{\circ}{\Lambda}{}^j_{kl} - \Sigma^j_{kl}$$

a causa della (43) risulta:

$$\begin{aligned} \Lambda^j_{kl} &= \overset{\circ}{\mathrm{X}}{}^j_{kl} + S^j_{kl}(\overset{\circ}{\mathrm{X}}) + N^j_{kl} - \Sigma^j_{kl} \\ &= \mathrm{X}^j_{kl} + S^j_{kl}(\overset{\circ}{\mathrm{X}}) + N^j_{kl} \\ &= \mathrm{X}^j_{kl} + S^j_{kl}(\mathrm{X}) + N^j_{kl}. \end{aligned}$$

È così dimostrato il teorema $\boldsymbol{T}_{15}$.

In particolare, se la struttura quasi complessa di V è integrabile ($N = 0$), il teorema $\boldsymbol{T}_{15}$ si riduce ad un risultato noto ([32]).

19. -

Sulle connessioni di Eckmann-Frölicher (n. 18) conviene segnalare qualche risultato.

Precisamente, le connessioni simmetriche associate sono caratterizzate nei teoremi:

$\boldsymbol{T}_{16}$ - *Condizione necessaria e sufficiente, affinchè Γ sia la connessione simmetrica associata ad una connessione di Eckmann-Frölicher è che il tensore $D_\Gamma h$ sia emisimmetrico.*

$\boldsymbol{T}_{17}$ - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè Γ sia la connessione simmetrica associata ad una connessione di Eckmann-Frölicher, è che il tensore $S(\Gamma)$ sia nullo.*

(32) B. Eckmann, [2], 2.2, p. 453.

Con riferimento invece alle connessioni soddisfacenti ad una sola delle condizioni **I** e **II** del n. 18, sussiste il teorema:

T$_{18}$ - *La condizione* ρ_- *del n.* 11 *caratterizza le connessioni di Eckmann-Frölicher tra quelle soddisfacenti alla condizione* **I**. *La condizione* $S(\Lambda) = 0$ *caratterizza le connessioni di Eckmann-Frölicher tra quelle soddisfacenti alla condizione* **II**.

20. -

Per stabilire i teoremi enunciati al n. 19 si procede così.

Sia Λ una connessione su V, Γ la connessione simmetrica associata e T la torsione di Λ (n. 3). La condizione **I** del n. 18 per Λ dà immediatamente $(D_\Lambda h)_s = R(\Lambda) = S(\Lambda) = 0$. La condizione **II**, in virtù delle osservazioni all'inizio del n. 10 e tenuto conto dei teoremi $\boldsymbol{T}_2$ e $\boldsymbol{T}_3$ del n. 11, implica per la connessione Λ le condizioni ρ_- e μ del n. 11, onde, per i teoremi $\boldsymbol{T}_{10}$ e $\boldsymbol{T}_{13}$, risulta $(D_\Lambda h)_s = (D_\Gamma h)_s$, $S(\Lambda) = S(\Gamma)$, $R(\Lambda) = N - T$.

Pertanto, le connessioni di ECKMANN-FRÖLICHER (condizioni **I** e **II**) soddisfano alla condizione ρ_- e alla condizione μ di MARTINELLI (sono cioè prive di torsione caratteristica); inoltre, per le connessioni simmetriche associate Γ si ha $(D_\Gamma h)_s = S(\Gamma) = 0$. Dunque le condizioni indicate nei teoremi $\boldsymbol{T}_{16}$, $\boldsymbol{T}_{17}$ sono necessarie.

Inversamente, se $D_\Gamma h$ è emisimmetrico, essendo $R(\Gamma) = N$ (n. 3), nello intorno U di x risulta $D_{\Gamma^k} h^j_l = 2N^r_{kl} h^j_r$.

Ne segue che la connessione Λ, ottenuta per somma a partire da Γ e da N, è una connessione di ECKMANN-FRÖLICHER. Infatti, la torsione di Λ è ovviamente N e, in virtù della (16) del n. 6, nell'intorno U di x, si ha:

$$D_{\Lambda^k} h^j_l = D_{\Gamma^k} h^j_l - 2N^r_{kl} h^j_r = 0,$$

È così provata la sufficienza della condizione indicata nel teorema $\boldsymbol{T}_{16}$.

Analogamente, se $S(\Gamma) = 0$, la connessione Λ, ottenuta per somma a partire da Γ e da N, può evidentemente pensarsi ottenuta a partire da Γ e da $N + S(\Gamma)$. Λ è dunque del tipo considerato nella (43), cioè Λ è una connessione di ECKMANN-FRÖLICHER (n. 18).

Ciò prova la sufficienza della condizione indicata nel teorema $\boldsymbol{T}_{17}$.

Per stabilire il teorema $\boldsymbol{T}_{18}$, si noti che, come si è accennato, la condizione ρ_- implica l'uguaglianza $R(\Lambda) = N - T$ e, poichè la condizione **I** implica $R(\Lambda) = 0$, si perviene subito alla condizione **II**. È così provata la prima affermazione.

Si ricordi ora che la condizione **II** implica l'uguaglianza tra $S(\Lambda)$ ed $S(\Gamma)$, onde, se $S(\Lambda) = 0$, si ha $S(\Gamma) = 0$. La dimostrazione della sufficienza nel teorema $\boldsymbol{T}_{17}$ assicura quindi per Λ la validità della condizione **I**. È così provata anche la seconda parte del teorema $\boldsymbol{T}_{18}$.

I teoremi $\boldsymbol{T}_{16}$, $\boldsymbol{T}_{17}$, $\boldsymbol{T}_{18}$ sono dunque dimostrati.

21. - Osservazioni.

È bene terminare qui con due osservazioni immediate.

I risultati di questo lavoro possono evidentemente essere riferiti ad un punto x di V, ad un intorno U di x su V, ad un aperto A su V, alla intera varietà V.

Essi sussistono, in particolare, per le varietà dotate di *struttura quasi complessa integrabile,* o addirittura dotate di *struttura complessa.* È sufficiente, negli enunciati, tener conto che il tensore N di NIJENHUIS è allora identicamente nullo (n. 2).

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre,* 3, Hermann, Paris, (1958).

[2] B. ECKMANN, *Sur les structures complexes et presque complexes,* Colloque Internationale de Géométrie Différentielle, C.N.R.S., Strasbourg. (1953).

[3] — —, *Cours sur les variétés complexes,* «Centro Internazionale Matematico Estivo, C. I. M. E.», Cremonese, Roma (1956).

[4] A. FRÖLICHER, *Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen,* «Math. Ann.», 129, 1, (1955).

[5] E. MARTINELLI, *Punti di vista geometrici nello studio delle varietà a struttura complessa,* «Centro Internazionale Matematico Estivo C.I.M E.», Cremonese, Roma, (1956).

[6] — —, *Sulle varietà a struttura complessa,* «Ann. di Mat.», 6, 43, (1957).

[7] A. NEWLANDER - L. NIRENBERG, *Complex analytic coordinates in almost comples manifolds,* «Ann. of Math.», 65, (1957).

[8] G. B. RIZZA, *Strutture di Finsler di tipo quasi hermitiano,* «Riv. Mat. Univ., Parma», 2, 4, (1963).

[9] J. A. SCHOUTEN, *Ricci-Calculus,* 2nd Ed., Springer, Berlin, (1954).

[10] T. J. WILLMORE, *An introduction to Differential Geometry,* Clarendon Press, Oxford, (1959).

[11] K. YANO, *The theory of Lie derivatives and its applications,* North-Holland, Amsterdam, (1955).