Teoremi di esistenza per sistemi semilineari di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti.

Memoria di MARIA CINQUINI CIBRARIO (a Pavia)

Sunto. - *Sotto ampie ipotesi sono dimostrati un teorema di esistenza in un campo limitato e un analogo teorema in un campo illimitato, relativi alla soluzione del problema di Cauchy (in senso generalizzato) del sistema semilineare*

$$\text{(I)} \qquad \sum_{k=1}^{r} A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) \left\{ \frac{\partial z_j(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x, y_1, \ldots, y_r) \frac{\partial z_j(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial y_k} \right\} = f_i(x, y_1, \ldots, y_r; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)),$$

$$(i = 1, \ldots, m).$$

La soluzione è ricercata nel campo funzionale, costituito dalle m-ple di funzioni $z_i(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(i = 1, \ldots, m)$, *le quali sono definite in un ben determinato campo, sono ivi assolutamente continue in* x *e lipschitziane nel complesso delle variabili* $(y_1, \ldots, y_r)$, *e soddisfano il sistema (I) quasi ovunque in tale campo.*

Abbiamo dedicato, alcuni anni fa, svariate ricerche [1] al sistema di equazioni quasi lineari a derivate parziali del primo ordine

$$(a) \qquad \frac{\partial z_i(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x} + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}[x, y_1, \ldots, y_r; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)] \frac{\partial z_i(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial y_k} =$$

$$= f_i[x, y_1, \ldots, y_r; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)], \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

di cui abbiamo considerato *soluzioni in senso generalizzato*, intendendo come soluzione del sistema (a) ogni *m-pla* di funzioni $z_i(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(i = 1, \ldots, m)$, le quali nel proprio campo di definizione (che viene specificato caso per caso) sono assolutamente continue in x e lipschitziane nel complesso delle

---

(1) M. CINQUINI CIBRARIO, *Sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti*, Annali di Mat., S. IV, Vol. XLIV (1957), pp. 357-418.

M. CINQUINI CIBRARIO, *Ulteriori ricerche intorno ai sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti*, Annali Scuola Normale Sup. di Pisa, S. III, Vol. XIII (1959), pp. 449-488.

variabili $(y_1, \ldots, y_r)$, e soddisfano il sistema (a) quasi ovunque; in tale campo funzionale abbiamo risolto il problema di CAUCHY relativo al sistema (a), dimostrando teoremi di esistenza, di unicità e di dipendenza continua dai valori iniziali.

A tale ordine di ricerche appartiene anche una memoria successiva [2], nella quale per il sistema (di tipo più generale del sistema (a))

$$(b) \qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}[x, y_1, \ldots, y_r; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)] \left\{ \frac{\partial z_j(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \rho_{ik}[x, y_1, \ldots, y_r; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)] \frac{\partial z_j(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial y_k} \right\} =$$

$$= f_i[x, y_1, \ldots, y_r; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)], \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

abbiamo dimostrato svariati teoremi di unicità e di dipendenza continua dai valori iniziali della soluzione del problema di CAUCHY, intesa ancora in senso generalizzato.

Nella presente memoria iniziamo lo studio dei teoremi di esistenza della soluzione del problema di CAUCHY relativo al sistema (b); in questa prima ricerca consideriamo il caso, in cui il sistema (b) è semilineare, e quindi ha la forma

$$(\mathrm{I}) \qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) \left\{ \frac{\partial z_j(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x, y_1, \ldots, y_r) \frac{\partial z_j(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial y_k} \right\} =$$

$$= f_i[x, y_1, \ldots, y_r; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)], \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Con un cambiamento di funzioni incognite il sistema (I), come è noto, può essere ricondotto ad un sistema semilineare del tipo (a), ma, per stabilire teoremi di esistenza relativi al sistema (I) seguendo tale via, occorrono

(2) M. CINQUINI CIBRARIO, *Teoremi di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti*, «Annali di Mat.», S. IV, Vol. XLVIII (1959), pp. 103-134. Per una esposizione organica dei risultati contenuti in tale memoria e nelle due citate in (1) cfr. anche

M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*, «Monografie Matematiche del C.N.R.», N. 12, Edizioni Cremonesi, Roma (1964); Cap. IV, § 2 e § 3, pp. 335-383.

Tale volume sarà citato in seguito con (*Mn*).

ipotesi restrittive circa le derivate prime delle funzioni $A_{ij}(x, y_1, ..., y_r)$, mentre nel presente lavoro i teoremi di esistenza vengono stabiliti sotto ampie ipotesi, del tipo di quelle introdotte nella nostra memoria citata in (2) per i corrispondenti teoremi di unicità, ed è studiato direttamente il sistema (I). I procedimenti di dimostrazione del presente lavoro da una parte riprendono il metodo sfruttato nelle memorie citate in (1) per stabilire teoremi di esistenza, raffinando e completando tale metodo con ulteriori artifici per adattarlo al sistema (I), e dall'altra si ricollegano ad alcune delle considerazioni sviluppate nella memoria citata in (2) a proposito dei teoremi di unicità.

Nel § 1 dimostriamo un teorema di esistenza in un campo limitato e nel § 2 un teorema di esistenza in un campo illimitato.

§ 1.

1. DEFINIZIONI. - Richiamiamo alcune definizioni (3). Siano $M_k(x)$, $(k = 1, ..., r)$ funzioni quasi continue, non negative e integrabili (4) nell'intervallo $(0, a)$, e siano b_k, $(k = 1, ..., r)$ numeri positivi, tali che per $0 \leq x < a$ sia

$$\int_0^x M_k(t)\,dt < b_k, \quad (k = 1, ..., r),$$

mentre per $x = a$ può anche valere l'uguaglianza.

Una funzione $z(x, y_1, ..., y_r)$, *definita nel campo*

$$T:\ 0 \leq x \leq a, \quad -b_k + \int_0^x M_k(t)\,dt \leq y_k \leq b_k - \int_0^x M_k(t)dt, \qquad (k = 1, ..., r),$$

è chiamata di classe G *nel campo* T, *se su ogni segmento appartenente al campo* T *e parallelo all'asse* x *è funzione assolutamente continua della sola* x *e se esiste una costante* $H > 0$, *tale che sia*

$$| z(x, y_1, ..., y_r) - z(x, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_r) | \leq H \sum_{k=1}^{r} | y_k - \bar{y}_k |$$

per tutte le coppie di punti $(x, y_1, ..., y_r)$, $(x, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_r)$ *appartenenti al campo* T.

(3) Cfr. (*Mn*), Cap. IV, § 2, *n.* 8, pp. 335-337.

(4) In tutto il lavoro l'integrabilità è intesa nel senso di LEBESGUE.

È evidente che la funzione $z(x, y_1, \ldots, y_r)$ è continua in tutto il campo T; inoltre in quasi tutti i punti di T essa è differenziabile nel complesso delle variabili $(y_1, \ldots, y_r)$ ([5]).

Una funzione $z(x, y_1, \ldots, y_r)$, *definita nel campo*

$$D_\infty: \quad 0 \leq x \leq a, \qquad -\infty < y_k < +\infty, \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

è chiamata di classe G in tale campo, quando soddisfa alle condizioni della precedente definizione, ove il campo T è sostituito dal campo D_∞.

Una funzione $g(X, x, y_1, \ldots, y_r)$, *definita per ogni X di $(0, a)$ e per ogni $(x, y_1, \ldots, y_r)$ appartenente al campo T (al campo D_∞), è chiamata di classe $G^{[1]}$ nel suo campo di definizione, se in corrispondenza a ogni $(x, y_1, \ldots, y_r)$ di T (di D_∞) è funzione assolutamente continua di X in $(0, a)$, e se, in corrispondenza ad ogni X di $(0, a)$, è di classe G in T (in D_∞).*

2. **Teorema di esistenza (campo limitato).** - *Siano* $M_k^{(0)}(x)$, $(k = 1, \ldots, r)$ *funzioni quasi continue, non negative e integrabili nell'intervallo* $(0, a_0)$; *siano* $b_k^{(0)}$, $(k = 1, \ldots, r)$ *numeri positivi tali che per* $0 \leq x < a_0$ *siano verificate le disuguaglianze*

$$\int_0^x M_k^{(0)}(t)\,dt < b_k^{(0)}, \qquad (k = 1, \ldots, r),$$

dove si intende che per $x = a_0$ può anche valere l'uguaglianza. Siano $A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(i, j = 1, \ldots, m)$ *funzioni continue nel campo*

$$T^{(0)}: \quad 0 \leq x \leq a_0, \; -b_k^{(0)} + \int_0^x M_k^{(0)}(t)\,dt \leq y_k \leq b_k^{(0)} - \int_0^x M_k^{(0)}(t)dt, \quad (k=1, \ldots, r);$$

indicato con A il determinante, i cui elementi sono le funzioni $A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(i, j = 1, \ldots, m)$, *in tutto il campo* $T^{(0)}$ *sia*

$$1) \qquad A = 1.$$

([5]) Cfr. H. RADEMACHER, *Über partielle und totale Differenzierberkeit von Funktionen mehrerer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale.* «Math. Annalen», Bd. 79 (1919), pp 340-359; in particolare Parte I, n. 3, Teorema I, p. 347.

Esistano m^2 *funzioni* $\mu_{ij}(x)$, $(i, j = 1, \ldots, m)$ *quasi continue, non negative e integrabili in* $(0, a_0)$, *e una costante positiva* Λ, *tali che sia*

$$(2) \qquad | A_{ij}(x', y_1, \ldots, y_r) - A_{ij}(x'', y_1, \ldots, y_r) | \leq \int_{x'}^{x''} \mu_{ij}(x)\, dx, \qquad (i, j = 1, \ldots, m),$$

per tutte le coppie di punti $(x', y_1, \ldots, y_r)$, $(x'', y_1, \ldots, y_r)$ *del campo* $T^{(0)}$ *con* $x' < x''$, *e*

$$(3) \qquad | A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) - A_{ij}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r) | \leq \Lambda \sum_{k=1}^{r} | y_k - \bar{y}_k | , \; (i, j = 1, \ldots, m),$$

per tutte le coppie di punti $(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$ *del campo* $T^{(0)}$.

Le funzioni $\rho_{ik}(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, r)$ *siano definite nel campo* $T^{(0)}$, *siano quasi continue in* x *su ogni segmento appartenente al campo* $T^{(0)}$ *e parallelo all'asse* x, *e, in corrispondenza ad ogni* x *di* $(0, a_0)$, *siano continue nel complesso delle variabili* $(y_1, \ldots, y_r)$ *in tutto il rettangolo*

$$R_x: \quad -b_k + \int_0^x M_k^{(0)}(t)\, dt \leq y_k \leq b_k - \int_0^x M_k^{(0)}(t)\, dt, \qquad (k = 1, \ldots, r);$$

esistano $r + 1$ *funzioni* $M_k(x)$, $(k = 1, \ldots, r)$, $L(x)$ *quasi continue, non negative e integrabili in* $(0, a_0)$ *con*

$$(4) \qquad M_k^{(0)}(x) \leq M_k(x), \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

in quasi tutto $(0, a_0)$, *tali che per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$(5) \qquad | \rho_{ik}(x, y_1, \ldots, y_r) | \leq M_k(x), \qquad (i = 1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, r),$$

in tutti i punti $(y_1, \ldots, y_r)$ *appartenenti al rettangolo* R_x *e anche*

$$(6) \qquad | \rho_{ik}(x, y_1, \ldots, y_r) - \rho_{ik}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r) | \leq L(x) \sum_{\nu=1}^{r} | y_\nu - \bar{y}_\nu | ,$$
$$(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, r),$$

per tutte le coppie di punti $(y_1, \ldots, y_r)$, $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$ *appartenenti al rettangolo* R_x.

Siano $f_i(x, y_1, \dots, y_r; z_1, \dots, z_m)$, $(i = 1, \dots, m)$ *funzioni definite nel campo*

$$C: \begin{cases} 0 \leq x \leq a_0, \ -b_k^{(0)} + \int_0^x M_k^{(0)}(t)\, dt \leq y_k \leq b_k^{(0)} - \int_0^x M_k^{(0)}(t)\, dt, & (k = 1, \dots, r), \\ -\infty < z_j < +\infty, & (j = 1, \dots, m), \end{cases}$$

le quali siano quasi continue in x *su ogni segmento appartenente al campo* C *e parallelo all'asse* x, *e in corrispondenza ad ogni* x *di* $(0, a_0)$ *siano continue nel complesso delle variabili* $(y_1, \dots, y_r; z_1, \dots, z_m)$; *esistano* $m + 1$ *funzioni* $N_i(x)$, $(i = 1, \dots, m)$, $L_1(x)$ *quasi continue, non negative e integrabili in* $(0, a_0)$, *tali che per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$(7) \qquad | f_i(x, y_1, \dots, y_r; z_1, \dots, z_m) | \leq N_i(x), \qquad (i = 1, \dots, m)$$

in tutti i punti $(y_1, \dots, y_r)$ *del rettangolo* R_x *e per ogni* m*-pla reale* $(z_1, \dots, z_m)$, *e anche*

$$(8) \qquad | f_i(x, y_1, \dots, y_r; z_1, \dots, z_m) - f_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) | \leq$$

$$\leq L_1(x) \{ \sum_{k=1}^{r} | y_k - \bar{y}_k | + \sum_{j=1}^{m} | z_j - \bar{z}_j | \}, \qquad (i = 1, \dots, m),$$

per tutte le coppie di $(r + m)$*—ple* $(y_1, \dots, y_r; z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ *con* $(y_1, \dots, y_r)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r)$ *appartenenti al rettangolo* R_x *e* $(z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ m*-ple reali qualunque.*

Siano b_k, $(k = 1, \dots, r)$ *numeri positivi con* $b_k \leq b_k^{(0)}$ *e sia* a, *con* $0 < a \leq a_0$, *il massimo numero tale che per* $0 \leq x < a$ *valgano le*

$$\int_0^x M_k(t)\, dt < b_k, \qquad (k = 1, \dots, r),$$

ove si intende che per $x = a$ *può anche valere l'uguaglianza; siano* $\varphi_i(y_1, \dots, y_r)$, $(i = 1, \dots, m)$ *funzioni definite nel rettangolo*

$$R: \qquad -b_1 \leq y_1 \leq b_1, \ \dots, \ -b_r \leq y_r \leq b_r,$$

e ivi lipschitziane nel complesso delle variabili.

Allora nel campo

$$T:\ 0 \leq x \leq a,\ -b_k + \int_0^x M_k(t)\,dt \leq y_k \leq b_k - \int_0^x M_k(t)\,dt, \qquad (k = 1, \dots, r)$$

esiste almeno una m–pla di funzioni di classe G

$$z_i = z_i(x, y_1, \dots, y_r), \qquad (i = 1, \dots, m), \tag{9}$$

le quali in quasi tutti i punti del campo T soddisfano il sistema

$$\text{(I)} \quad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y_1, \dots, y_r) \left\{ \frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_r)}{\partial x} + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x, y_1, \dots, y_r) \frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_r)}{\partial y_k} \right\} =$$

$$= f_i[x, y_1, \dots, y_r;\ z_1(\dots), \dots, z_m(\dots)], \qquad (i = 1, \dots, m),$$

e in tutti i punti del rettangolo R soddisfano le

$$z_i(0, y_1, \dots, y_r) = \varphi_i(y_1, \dots, y_r), \qquad (i = 1, \dots, m). \tag{10}$$

a) Per ogni X dell'intervallo $(0, a_0)$ e per ogni r-pla reale $(Y_1, \dots, Y_r)$ definiamo le funzioni $R_{ik}(X, Y_1, \dots, Y_r)$, $(i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, r)$ nel seguente modo: innanzi tutto sia

$$R_{ik}(X, Y_1, \dots, Y_r) = \rho_{ik}(X, Y_1, \dots, Y_r), \quad (i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, r),$$

quando il punto $(X, Y_1, \dots, Y_r)$ appartiene al campo

$$0 \leq X \leq a_0, \quad -b_k^{(0)} + \int_0^X M_k^{(0)}(t)\,dt \leq Y_k \leq b_k^{(0)} - \int_0^X M_k^{(0)}(t)\,dt, \quad (k = 1, \dots, r),$$

poi per ogni intero ν, il quale assume successivamente i valori $\nu = 1, 2, \dots, r$, per

$$0 \leq X \leq a_0$$

$$-\infty < Y_1 < +\infty$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$-\infty < Y_{\nu-1} < +\infty$$

$$-b_{\nu+1}^{(0)} + \int_0^X M_{\nu+1}^{(0)}(t)\,dt \leq Y_{\nu+1} \leq b_{\nu+1}^{(0)} - \int_0^Y M_{\nu+1}^{(0)}(t)\,dt$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-b_r^{(0)} + \int_0^X M_r^{(0)}(t)\,dt \leq Y_r \leq b_r^{(0)} - \int_0^X M_r^{(0)}(t)\,dt$$

sia

$$R_{ik}(\ldots) = R_{ik}(X,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_{\nu+1},\ -b_\nu^{(0)} + \int_0^X M_\nu^{(0)}(t)(dt,\ Y_{\nu+1},\ \ldots,\ Y_r),$$

quando è

$$-b_\nu^{(0)} + \int_0^X M_\nu^{(0)}(t)dt > Y_\nu,$$

e

$$R_{ik}(\ldots) = R_{ik}(X,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_{\nu-1},\ b_\nu^{(0)} - \int_0^X M_\nu^{(0)}(t)\,dt,\ Y_{\nu+1},\ \ldots,\ Y_r)$$

quando è

$$b_\nu^{(0)} - \int_0^X M_\nu^{(0)}(t)\,dt < Y_\nu.$$

Dalle (5) e (6) segue che per quasi tutti gli X di $(0,\ a_0)$ è

(5′) $$|\ R_{ik}(X,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_r)\ | \leq M_k(X), \qquad (i = 1,\ \ldots,\ m;\ k = 1,\ \ldots,\ r),$$

per tutte le *r-ple* reali $(Y_1,\ \ldots,\ Y_r)$, e

(6′) $$|\ R_{ik}(X,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_r) - R_{ik}(X,\ \overline{Y}_1,\ \ldots,\ Y_r)\ | \leq L(X) \sum_{v=1}^{m} |\ Y_k - \overline{Y}_k\ |,$$

$$(i = 1,\ \ldots,\ m;\ k = 1,\ \ldots,\ r),$$

per tutte le coppie di *r-ple* reali $(Y_1,\ \ldots,\ Y_r)$, $(\overline{Y}_1,\ \ldots,\ \overline{Y}_r)$.

In corrispondenza ad ogni intero i con $1 \leq i \leq m$ e ad ogni punto $(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_r)$ appartenente al campo

$$D_\infty^{(0)}:\quad 0 \leq x \leq a_0,\quad -\infty < y_1 < +\infty,\ \ldots,\quad -\infty < y_r < +\infty$$

consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie

(11) $$g_{ik}(X;\ x,\ y_1,\ \ldots,\ y_r) = y_k - \int_X^x R_{ik}(t,\ g_{i1},\ \ldots,\ g_{ir})\,dt, \qquad (k = 1,\ \ldots,\ r)$$

nelle funzioni incognite $g_{ik}(X;\ x,\ y_1,\ \dots,\ y_r)$, $(k=1,\ \dots,\ r)$, ove la variabile indipendente X varia nell'intervallo $(0,\ a_0)$, e al secondo membro si intende che sia

$$g_{i\nu} = g_{i\nu}(t;\ x,\ y_1,\ \dots,\ y_r), \qquad (\nu = 1,\ \dots,\ r). \tag{12}$$

I ben noti teoremi di esistenza e di unicità di C. CARATHÉODORY [6] assicurano che nel campo

$$0 \leq X \leq a_0,\quad 0 \leq x \leq a_0,\quad -\infty < y_1 < +\infty,\ \dots,\quad -\infty < y_r < +\infty$$

esiste un'unica *r-pla* di funzioni

$$g_{ik}(X,\ x,\ y_1,\ \dots,\ y_r), \qquad (k=1,\ \dots,\ r), \tag{13}$$

le quali, in corrispondenza ad ogni punto $(x,\ y_1,\ \dots,\ y_r)$ del campo $D_{\infty}^{(0)}$, sono assolutamente continue in X nell'intervallo $(0,\ a_0)$ e soddisfano il sistema (11); inoltre le funzioni (13) sono di classe $G^{[1]}$ nel loro campo di definizione, poichè, comunque siano X e x in $(0,\ a_0)$ per tutte le coppie di *r-ple* reali $(y_1,\ \dots,\ y_r)$, $(\bar{y}_1,\ \dots,\ \bar{y}_r)$ valgono le [7]

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{r} |\, g_{ik}(X;\ x,\ y_1,\ \dots,\ y_r) - g_{ik}(X;\ x,\ \bar{y}_1,\ \dots,\ \bar{y}_r)\,|}{\sum\limits_{\nu=1}^{r} |\, y_\nu - \bar{y}_\nu \,|} \leq \tag{14}$$

$$\leq e^{\,r\,\left|\int_X^x L(t)\,dt\right|} \leq e^{\,r\int_0^{a_0} L(t)\,dt}$$

$$\frac{|\, g_{ik}(X;\ x,\ y_1,\ \dots,\ y_r) - g_{ik}(X;\ x,\ \bar{y}_1,\ \dots,\ \bar{y}_r)\,|}{\sum\limits_{\nu=1}^{r} |\, y_\nu - \bar{y}_\nu \,|} \tag{14'}$$

$$\leq \frac{r-1}{r} + \frac{1}{r}\, e^{\,r\,\left|\int_X^x L(t)dt\right|} \leq \frac{r-1}{r} + \frac{1}{r}\, e^{\,r\int_0^{a_0} L(t)\,dt}, \qquad (k=1,\ \dots,\ r),$$

---

(6) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Teubner, Leipzig 1918; cfr. Kap XI, nn. 582 e 583, pp. 672-673.

(7) Per le (14), (14'), (15) cfr. la prima memoria citata in (1), § 1, n. 1, pp 360-363.

e inoltre in corrispondenza ad ogni r-*pla* reale $(y_1, \ldots, y_r)$ e ad ogni X di $(0, a_0)$ per tutte le coppie di valori x', x'' di $(0, a_0)$ con $x' < x''$ vale la

$$(15) \quad \sum_{k=1}^{r} | g_{ik}(X; x', y_1, \ldots, y_r) - g_{ik}(X; x'', y_1, \ldots, y_r) | \leq \int_{x'}^{x''} M(t)\, dt.\, e^{r \left| \int_{x'}^{X} L(t) dt \right|} \leq$$

$$\leq \int_{x'}^{x''} M(t)\, dt.\, e^{r \int_0^{a_0} L(t) dt},$$

dove si è posto

$$(16) \qquad M(x) = \sum_{k=1}^{r} M_k(x).$$

In particolare, se il punto $(x, y_1, \ldots, y_r)$ appartiene al campo T e se è $0 \leq X \leq x$, risulta, come si verifica immediatamente [8]

$$(17) \qquad -b_k + \int_0^X M_k(t)\, dt \leq g_{ik}(X;\ x, y_1, \ldots, y_r) \leq b_k - \int_0^X M_k(t)\, dt, \qquad (k = 1, \ldots, r),$$

e in particolare

$$(17') \qquad -b_k \leq g_{ik}(0;\ x, y_1, \ldots, y_r) \leq b_k, \qquad (k = 1, \ldots, r).$$

Tenuto conto del modo, nel quale sono state definite le funzioni $R_{ik}(X, Y_1, \ldots, Y_r)$ e della (4), se il punto $(x, y_1, \ldots, y_r)$ appartiene al campo T ed è $0 \leq X \leq x$, le funzioni (13) soddisfano anche il sistema differenziale (scritto in forma integrale)

$$(18) \qquad g_{ik}(X;\ x, y_1, \ldots, y_r) = y_k - \int_X^x \rho_{ik}(t, g_{i1}, \ldots, g_{ir})\, dt.$$

dove vale ancora la posizione (12).

b) Nel presente capoverso riprendiamo brevemente le considerazioni sviluppate nella dimostrazione del teorema di unicità [9] e ciò allo scopo di stabilire un sistema di equazioni integrali (e precisamente le (27)), che saranno fondamentali nella presente dimostrazione.

---

[8] Cfr. anche (*Mn*), Cap. IV, § 2, n. 9 α), pp. 344-345.

[9] Cfr. (*Mn*) Cap. IV, § 2, n. 9 γ), pp. 347-351.

Consideriamo la *i-esima* equazione del sistema (I), indicando con X, $Y_1, \ldots, Y_r$ (anzichè con $x, y_1, \ldots, y_r$) le variabili indipendenti, e supponendo che esista un sistema di funzioni $z_i(X, Y_1, \ldots, Y_r)$, $(i = 1, \ldots, m)$ soddisfacenti il teorema; sostituendo alle variabili $Y_1, \ldots, Y_r$ le funzioni (13), ove $(x, y_1, \ldots, y_r)$ è un punto del campo T ed è $0 \leq X \leq x$, si ottiene

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}) \left\{ \frac{\partial z_j(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir})}{\partial X} + \right. \tag{19}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \rho_{ik}(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}) \frac{\partial z_j(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir})}{\partial Y_k} \right\} =$$

$$= f_i[X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)],$$

dove si intende che sia

$$g_{i\nu} = g_{i\nu}(X; x, y_1, \ldots, y_r), \qquad (\nu = 1, \ldots, r), \tag{12'}$$

e al secondo membro inoltre

$$z_s(\ldots) = z_s(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}), \qquad (s = 1, \ldots, m). \tag{20}$$

In corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$, per quasi tutti i punti $(y_1, \ldots, y_r)$ del rettangolo R_x, la (19) vale per quasi tutti gli X dell'intervallo $0 \leq X \leq x$ [10]. La (19) si può anche scrivere nella forma

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}) \frac{dz_j(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir})}{dX} = \tag{21}$$

$$= f_i[X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)],$$

come si dimostra con considerazioni simili a quelle sviluppate a proposito del teorema di unicità [11]; integrando entrambi i membri della (21) rispetto

[10] Cfr. per tale affermazione l. c. in [9]; ivi è considerato più in generale il caso, in cui le funzioni A_{ij}, ρ_{ik} dipendono oltre che da $x, y_1, \ldots, y_r$, anche da $z_1, \ldots, z_m$.

[11] Cfr. (*Mn*) Cap. IV, § 2, n. 9 β), pp. 345-346, e inoltre il teorema di derivazione delle funzioni composte, stabilito nella prima memoria citata in [1] (§ 1, n. 4, pp. 369-370).

a X nell'intervallo $0 \leq X \leq x$, si ottiene la

$$\int_0^x \sum_{j=1}^m A_{ij}(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}) \frac{dz_j(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir})}{dX} dX = \tag{22}$$

$$= \int_0^x f_i[X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)] dX,$$

la quale, in corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$, vale in quasi tutti i punti $(y_1, \ldots, y_r)$ del rettangolo R_x.

In corrispondenza ad ogni punto $(x, y_1, \ldots, y_r)$ del campo T le funzioni

$$A_{ij}(X, g_{i1}(X; x, y_1, \ldots, y_r), \ldots, g_{ir}(X; x, y_1, \ldots, y_r)), \qquad (i, j = 1, \ldots, m) \tag{23}$$

sono assolutamente continue in X nell'intervallo $(0, x)$; infatti, tenuto conto delle (2), (3), (5), (18) e della posizione (16), per ogni coppia X', X'' con $0 \leq X' < X'' \leq x$ risulta

$$| A_{ij}(X', g_{i1}(X'; x, y_1, \ldots, y_r), \ldots, g_{ir}(X'; x, y_1, \ldots, y_r)) - \tag{24}$$

$$- A_{ij}(X'', g_{i1}(X''; x, y_1, \ldots, y_r), \ldots, g_{ir}(X''; x, y_1, \ldots, y_r)) | \leq$$

$$\leq \int_{X'}^{X''} (\mu_{ij}(t) + \Lambda M(t)) \, dt, \qquad (i, j = 1, \ldots, m).$$

In corrispondenza ad ogni punto $(x, y_1, \ldots, y_r)$ del campo T le funzioni (23) ammettono derivata finita rispetto a X in quasi tutto l'intervallo $0 \leq X \leq x$, e dalla (24) segue

$$\left| \frac{dA_{ij}(X, g_{i1}(X; x, y_1, \ldots, y_r), \ldots, g_{ir}(X; x, y_1, \ldots, y_r))}{dX} \right| \leq \tag{24'}$$

$$\leq \mu_{ij}(X) + \Lambda M(X), \qquad (i, j = 1, \ldots, m).$$

Allora dalla (22), integrando il primo membro per parti e tenendo conto che è

$$g_{ik}(x; x, y_1, \ldots, y_r) = y_k, \qquad (k = 1, \ldots, r), \tag{18'}$$

e che, per ipotesi, sono soddisfatte le (10), si ottiene

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) z_j(x, y_1, \ldots, y_r) = \tag{25}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(0, g_{i1}^{(0)}, \ldots, g_{ir}^{(0)}) \varphi_j(g_{i1}^{(0)}, \ldots, g_{ir}^{(0)}) +$$

$$+ \int_0^x \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{dA_{ij}(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir})}{dX} z_j(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}) + \right.$$

$$\left. + f_i(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots))] \right\} dX,$$

ove si è posto

$$g_{ik}^{(0)} = g_{ik}(0; x, y_1, \ldots, y_r), \qquad (k = 1, \ldots, r), \tag{26}$$

e si intende che al secondo membro valgano le posizioni (12′) e (20).

Per $i = 1, \ldots, m$ le (25) costituiscono un sistema di m equazioni algebriche lineari nelle incognite $z_j(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(j = 1, \ldots, m)$; tenuto conto della (1), e indicato con $\alpha_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r)$ il complemento algebrico di $A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r)$ nel determinante A, si ottengono le

$$z_j(x, y_1, \ldots, y_r) = \Psi_j(x, y_1, \ldots, y_r) + \tag{27}$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) \int_0^x \left\{ \sum_{s=1}^{m} \frac{dA_{is}(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir})}{dX} z_s(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}) + \right.$$

$$\left. + f_i[X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}; z_1(\ldots), \ldots, z_m(\ldots)] \right\} dX, \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

dove si intende che al secondo membro valgono le posizioni (12′) e (20), e inoltre, per brevità, si è posto

$$\Psi_j(x, y_1, \ldots, y_r) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) \sum_{s=1}^{m} A_{is}(0, g_{i1}^{(0)}, \ldots, g_{ir}^{(0)}) \varphi_s(g_{i1}^{(0)}, \ldots, g_{ir}^{(0)}), \tag{28}$$

$$(j = 1, \ldots, m).$$

Le funzioni $\Psi_j(x, y_1, \ldots, y_r)$ sono dunque continue nel campo T, e, in virtù delle (1), (18) e (26), soddisfano le

$$(28') \qquad \Psi_j(0, y_1, \dots, y_r) = \varphi_j(y_1, \dots, y_r).$$

Se ésiste dunque una *m-pla* di funzioni (9), soddisfacenti il teorema, in corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$ le funzioni (9) soddisfano le (27) in quasi tutti i punti $(y_1, \dots, y_r)$ del rettangolo R_x: le (27) anzi valgono in ogni punto del campo T [12], ma non stiamo a provare quest'ultima osservazione, che non viene utilizzata nel seguito [13].

c) Nel presente capoverso e nei successivi ci proponiamo di costruire nel campo T una *m-pla* di funzioni (9) di classe G, soddisfacenti il sistema di equazioni integrali (27) identicamente nel campo T; a tale scopo adatteremo a tale sistema il metodo, che è stato sviluppato nella dimostrazione del teorema di esistenza relativo al sistema (a) [14], e che si fonda su una estensione opportuna del classico metodo di L. TONELLI [15].

Per ogni intero $n \geq 2$ definiamo le funzioni $z_j^{(n)}(x, y_1, \dots, y_r)$, $(j = 1, \dots, m)$ prima nel rettangolo

$$R^*: \qquad -\frac{a}{2} \leq x \leq 0, \quad -b_1 \leq y_1 \leq b_1, \ \dots, \ -b_r \leq y_r \leq b_r$$

mediante le posizioni

$$(29) \qquad z_j^{(n)}(x, y_1, \dots, y_r) = \varphi_j(y_1, \dots, y_r), \qquad (j = 1, \dots, m),$$

e poi in tutto il campo T mediante le

$$(30) \qquad z_j^{(n)}(x, y_1, \dots, y_r) = \Psi_j(x, y_1, \dots, y_r) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}(x, y_1, \dots, y_r) \int_0^x \left\{ \sum_{s=1}^{m} \frac{dA_{is}(X, g_{i1}, \dots, g_{ir})}{dX} z_s^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir}) + \right.$$

---

[12] In virtù delle ipotesi fatte si può dimostrare infatti che il secondo membro di ognuna delle (27) è funzione continua nel complesso delle variabili in ogni punto $(x, y_1, \dots, y_r)$ del campo T.

[13] Nei capoversi successivi costruiremo una *m-pla* di funzioni $z_j(x, y_1, \dots, y_r)$, $(j = 1, \dots, m)$ soddisfacenti le (27) in tutto il campo T, dimostrando inoltre che tale *m-pla* di funzioni soddisfa il teorema.

[14] Cfr. (*Mn*), Cap. IV, § 3, n. 13, pp. 358-378.

[15] L. TONELLI, *Sulle equazioni integrali di Volterra*, «Mem. R. Acc. delle Scienze di Bologna», S. VIII, Vol. V (1927-28), pp. 17-22. *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra*, «Bull. of the Calcutta Math. Soc.», Vol. XX (1929), pp. 31-48.

$$+ f_i [X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}; z_1^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \ldots, g_{ir}), \ldots\ldots, z_m^{(n)}(\ldots)] \Big\} dX,$$

$$(j = 1, \ldots, m),$$

dove

$$\delta_n = \frac{a}{n},$$

e si intende che al secondo membro valgono ancora le posizioni (12').

In virtù delle (7), (24'), (28) si prova immediatamente che le funzioni $z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(j = 1, \ldots, m)$ sono limitate nel campo R^* e nel campo T. Inoltre dalle (28') e (30) seguono le

$$z_j^{(n)}(0, y_1, \ldots, y_r) = \varphi_j(y_1, \ldots, y_r), \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{31}$$

d) Vogliamo dimostrare, nel presente capoverso, che ognuna delle m successioni (che si ottengono per $j = 1, \ldots, m$)

$$z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r), \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{32}$$

è costituita da funzioni ugualmente limitate nel campo T.

Per ogni x di $(0, a)$ si indichi con $U^{(n)}(x)$ il limite superiore di

$$\sum_{j=1}^{m} | z_j^{(n)}(X; g_1, \ldots, y_r) |$$

nel campo

$$0 \leq X \leq x, \quad -b_k + \int_0^X M_k(t) dt \leq y_k \leq b_k - \int_0^X M_k(t)\, dt, \qquad (k = 1, \ldots, r).$$

La funzione $U^{(n)}(x)$ è evidentemente non negativa e non decrescente in $(0, a)$, ed inoltre limitata in $(0, a)$ (per quanto abbiamo rilevato alla fine del capoverso *c*)); tenuto conto della posizione (29), possiamo definire la funzione $U^{(n)}(x)$ anche in $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ mediante la $U^{(n)}(x) = U^{(n)}(0)$.

Indicate con H, $H^{(0)}$ e con K_j, $(j = 1, \ldots, m)$ costanti, non negative, tali che sia in tutto il campo $T^{(0)}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} | A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) | \leq H, & (i, j = 1, \ldots, m) \\ | \alpha_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) | \leq H^{(0)}, & (i, j = 1, \ldots, m), \end{array} \right. \tag{33}$$

e in tutto il campo T

$$(33') \qquad |\,\Psi_j(x,\, y_1,\, \ldots,\, y_r)\,| \leq K_j, \qquad (j = 1,\, \ldots,\, m),$$

dalle (30), tenuto conto delle (7) e (24') seguono le

$$(34) \qquad |\, z_j^{(n)}(x,\, y_1,\, \ldots,\, y_r)\,| \leq K_j + H^{(0)} \int_0^x \Big\{ \Big[\sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \mu_{ij}(X) + m\Lambda(X) \Big] U^{(n)}(X) + N(X) \Big\}\, dX, \qquad (j = 1,\, \ldots,\, m),$$

dove

$$(35) \qquad N(x) = \sum_{i=1}^{m} N_i(x).$$

Sommando le (34) per $j = 1, \ldots, m$ si ottiene la

$$(36) \qquad \sum_{j=1}^{m} |\, z_j^{(n)}(x,\, y_1,\, \ldots,\, y_r)\,| \leq K + mH^{(0)} \int_0^x \{ G(X) U^{(n)}(X) + N(X) \}\, dX,$$

dove, per brevità, si sono fatte le ulteriori posizioni

$$(37) \qquad K = \sum_{j=1}^{m} K_j$$

$$(38) \qquad G(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \mu_{is}(x) + m\Lambda M(x).$$

Dalla (36), tenuto conto del modo, nel quale è stata definita la funzione $U^{(n)}(x)$ segue [16]

$$(39) \qquad U^{(n)}(x) \leq K + mH^{(0)} \int_0^x \{ G(X) U^{(n)}(X) + N(X) \}\, dX,$$

---

[16] Per il passaggio dalla (36) alla (39) cfr. (*Mn*), Cap. IV, § 2, n. 9 *b*), p. 353, nota [1].

da cui, per una nota estensione del Lemma di GRONWALL ([17])

$$U^{(n)}(x) \leq K e^{mH^{(0)}\int_0^x G(t)dt} + mH^{(0)} \int_0^x e^{mH_0\int_0^x G(t)\,dt} N(X) dX; \tag{40}$$

indicato con $U(x)$ il secondo membro della (40), la funzione $U(x)$ soddisfa l'equazione differenziale (scritta in forma integrale)

$$U(x) = K + mH^{(0)} \int_0^x \{ G(X)\, U(X) + N(X) \}\, dX, \tag{40'}$$

ed inoltre in tutto il campo T è

$$\sum_{j=1}^{m} | z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) | \leq U(x) \leq U(a), \tag{41}$$

e anche, tenuto conto delle (34) e della posizione (38)

$$| z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) | \leq U_j(x) \leq U_j(a), \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{42}$$

dove risulta (cfr. anche la (40'))

$$U_j(x) = K_j + \frac{U(x) - K}{m}. \tag{43}$$

Dalle (41) e (42) segue quanto abbiamo affermato al principio del presente capoverso.

e) Le funzioni (32) sono di classe G nel campo T, ed inoltre, in corrispondenza ad ogni intiero n (con $n > 1$) esistono m funzioni $v_j^{(n)}(x)$, $(j = 1, \ldots, m)$, quasi continue, non negative e integrabili in $(0, a)$, tali che per tutte le coppie di punti $(x', y_1, \ldots. y_r)$, $(x'', y_1, \ldots, y_r)$ appartenenti al campo T, con $x' < x''$, sia

$$| z_j^{(n)}(x', y_1, \ldots, y_r) - z_j^{(n)}(x'', y_1, \ldots, y_r) | \leq \int_{x'}^{x''} v_j^{(n)}(X)\, dX, \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{44}$$

([17]) G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, «Monografie Matematiche del C.N.R.», N. 3, Edizioni Cremonesi, Roma (1956), Cap. I, § 2, n. 1, pp. 15-16. Si vede facilmente che, nel caso attuale, il Lemma di GRONWALL, può essere applicato senza preoccuparsi se la funzione $U^{(n)}(x)$, limitata, non negativa e non decrescente in $(0, a)$, sia o no continua in $(0, a)$.

Posto

$$(45)\qquad Z_i^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) = \int_0^x \Big\{ \sum_{s=1}^m \frac{dA_{is}(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir})}{dX} z_s^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \ldots, g_{ir}) +$$

$$+ f_i[X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}; z_1^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \ldots, g_{ir}), \ldots, z_m^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \ldots, g_{ir})] \Big\} dX,$$

$$(i = 1, \ldots, m),$$

le (30) si possono scrivere nella forma

$$(30')\qquad z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) = \Psi_j(x, y_1, \ldots, y_r) + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) Z_i^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r),$$

$$(j = 1, \ldots, m).$$

Fermiamo l'attenzione sulle funzioni (45), e cominciamo a considerare il campo

$$T_1^{(n)}:\ 0 \leq x \leq \delta_n,\ -b_k + \int_0^x M_k(t)\,dt \leq y_k \leq b_k - \int_0^x M_k(t)\,dt. \qquad (k = 1, \ldots, r),$$

nel quale, tenuto conto delle (29) e (45), risulta

$$(45')\qquad Z_i^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) = \int_0^x \Big\{ \sum_{s=1}^m \frac{dA_{is}(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir})}{dX} \varphi_s(g_{i1}, \ldots, g_{ir}) +$$

$$+ f_i[X, g_{i1}, \ldots, g_{ir}; \varphi_1(g_{i1}, \ldots, g_{ir}), \ldots, \varphi_m(g_{i1}, \ldots, g_{ir})] \Big\} dX, \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Poichè le funzioni $\varphi_j(y_1, \ldots, y_r)$, $(j = 1, \ldots, m)$ sono supposte lipschitziane nel rettangolo R, esistono m costanti non negative λ_j, $(j = 1, \ldots, m)$, tali che per tutte le coppie di r-*ple* $(y_1, \ldots, y_r)$, $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$ del rettangolo R è

$$(46)\qquad |\varphi_j(y_1, \ldots, y_r) - \varphi_j(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)| \leq \lambda_j \sum_{k=1}^r |y_k - \bar{y}_k|, \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

Se $(x, y_1, \ldots, y_r)$ è un punto del campo T e X', X'' sono punti dello intervallo $(0, x)$ con $X' < X''$, dalle (5), (11), (16) e (46) segue

$$|\varphi_j(g_{i1}(X'; x, y_1, \ldots, y_r), \ldots, g_{ir}(X'; x, y_1, \ldots, y_r)) -$$

$$- \varphi_j(g_{i1}(X''; y_1, \ldots, y_r), \ldots, g_{ir}(X'', x, y_1, \ldots, y_r))| \leq \lambda_j \int_{X'}^{X''} M(t)\,dt,$$

e quindi, se $(x, y_1, \dots, y_r)$ è un punto del campo T, in quasi tutti i punti X dell'intervallo $(0, x)$ è

$$\left|\frac{d\varphi_j(g_{i1}(X;\, x,\, y_1,\, \dots,\, y_r),\, \dots,\, g_{ir}(X;\, x,\, y_1,\, \dots,\, y_r))}{dX}\right| \leq \lambda_j M(X). \tag{47}$$

Se $(x, y_1, \dots, y_r)$, $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r)$ sono due punti del campo $T_1^{(n)}$, usufruendo delle posizioni (12') e inoltre delle ulteriori posizioni

$$\bar{g}_{ik} = g_{ik}(X;\, x,\, \bar{y}_1,\, \dots,\, \bar{y}_r), \qquad (i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, r), \tag{12''}$$

si ottiene, in modo evidente

$$\begin{aligned}
&| Z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_r) - Z_i^{(n)}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r) | \leq \\
&\leq \left| \int_0^x \sum_{s=1}^m \left[\frac{dA_{is}(X, g_{i1}, \dots, g_{ir})}{dX} - \frac{dA_{is}(X, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir})}{dX}\right] \varphi_s(g_{i1}, \dots, g_{ir})\, dX \right| + \\
&+ \left| \int_0^x \sum_{s=1}^m \frac{dA_{is}(X, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir})}{dX} [\varphi_s(g_{i1}, \dots, g_{ir}) - \varphi_s(\bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir})]\, dX \right| + \\
&+ \left| \int_0^x \{ f_i[X, g_{i1}, \dots, g_{ir};\, \varphi_1(g_{i1}, \dots, g_{ir}), \dots, \varphi_m(g_{i1}, \dots, g_{ir})] - \right. \\
&\left. - f_i[X, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir};\, \varphi_1(\bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir}), \dots, \varphi_m(\bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir})] \}\, dX \right|, \\
&\qquad\qquad (i = 1, \dots, m).
\end{aligned} \tag{48}$$

Con una integrazione per parti risulta

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \left[\frac{dA_{is}(X, g_{i1}, \dots, g_{ir})}{dX} - \frac{dA_{is}(X, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir})}{dX}\right] \varphi_s(g_{i1}, \dots, g_{ir})\, dX = \\
&= [A_{is}(x, y_1, \dots, y_r) - A_{is}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r)]\, \varphi_s(y_1, \dots, y_r) - \\
&- [A_{is}(0, g_{i1}^{(0)}, \dots, g_{ir}^{(0)}) - A_{is}(0, \bar{g}_{i1}^{(0)}, \dots, \bar{g}_{ir}^{(0)})]\, \varphi_s(\bar{g}_{i1}^{(0)}, \dots, g_{ir}^{(0)}) - \\
&- \int_0^x [A_{is}(X, g_{i1}, \dots, g_{ir}) - A_{is}(X, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir})]\, \frac{d\varphi_s(g_{i1}, \dots, g_{ir})}{dX}\, dX,
\end{aligned} \tag{49}$$

dove si intende che valgano le posizioni (26) e inoltre le

$$(26') \qquad \bar{g}_{ik}^{(0)} = g_{ik}(0;\ x,\ \bar{y}_1,\ \dots,\ \bar{y}_r), \qquad (i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, r).$$

Indicate con $K_i^{(0)}$, $(i = 1, \dots, m)$ costanti tali che in tutto R sia

$$(50) \qquad |\ \varphi_i(y_1,\ \dots,\ y_r)\ | \leq K_i^{(0)}, \qquad (i = 1,\ \dots,\ m),$$

e posto

$$(51) \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \lambda;\ \sum_{i=1}^{m} K_i^{(0)} = K^{(0)},$$

tenendo conto delle (3), (8), (14), (24'), (46), (47), (48), (49), (50), (51), si ottengono le

$$(52) \qquad |\ Z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_r) - Z_i^{(n)}(x,\ \bar{y}_1,\ \dots,\ \bar{y}_r)\ | \leq \Big\{ \Lambda K^{(0)}(1 + e^{r\int_0^{\delta_n} L(t)\,dt}) +$$
$$+ e^{r\int_0^{\delta_n} L(t)dt} \int_0^{\delta_n} [2\Lambda\lambda M(X) + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \mu_{is}(X) + (1+\lambda) L_1(X)]\, dX \Big\} \sum_{k=1}^{r} |\ y_k - \bar{y}_k\ | \,.$$

In modo analogo possiamo provare che le funzioni (45') sono assolutamente continue in x su ogni segmento parallelo all'asse x e appartenente al campo $T_1^{(n)}$, e anzi soddisfano una disuguaglianza del tipo della (44); infatti se $(x',\ y_1,\ \dots,\ y_r)$, $(x'',\ y_1,\ \dots,\ y_r)$ sono due punti qualsiasi del campo $T_1^{(n)}$, con $x' < x''$, si ottiene, con calcoli simili a quelli sviluppati or ora, tenendo presenti le (3), (7), (8), (15), (24'), (46), (47), (50), (51)

$$(52') \qquad |\ Z_i^{(n)}(x',\ y_1,\ \dots,\ y_r) - Z_i^{(n)}(x'',\ y_1,\ \dots,\ y_r)\ | \leq$$
$$\leq \int_{x'}^{x''} M(X) dX. \Big\{ \Lambda K^{(0)}(2 + e^{r\int_0^{\delta_n} L(t)dt}) +$$
$$+ e^{r\int_0^{\delta_n} L(t)\,dt} \int_0^{\delta_n} [2\Lambda\lambda M(X) + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \mu_{is}(X) + (1+\lambda) L_1(X)]\, dX \Big\} +$$
$$+ \int_{x'}^{x'} [\sum_{s=1}^{m} K_s^{(0)} \mu_{is}(X) + N_i(X)]\, dX.$$

Dalle (52) e (52') e dalle ipotesi fatte circa le funzioni $A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r)$, $\alpha_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r)$, $\varphi_i(y_1, \ldots, y_r)$, $(i, j = 1, \ldots, m)$, tenuto presente che le funzioni $\Psi_j(x, y_1, \ldots, y_r)$ sono definite dalle (28), e che valgono le (14) e (15), segue immediatamente che le funzioni (32), definite dalle (30'), sono di classe G nel campo $T_1^{(n)}$; in particolare, si possono determinare m costanti $\lambda_j^{(1)}$, $(j = 1, \ldots, m)$, che possiamo supporre soddisfacenti le condizioni $\lambda_j^{(1)} \geq \lambda_j$, tali che, se $(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$ sono due punti qualsiasi del campo $T_1^{(n)}$ valgano le

$$(53) \qquad | z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) - z_i^{(n)}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r) | \leq \lambda_j^{(1)} \sum_{k=1}^{r} | y_k - \bar{y}_k | ,$$

$$(j = 1, \ldots, m),$$

e inoltre per $0 \leq x \leq \delta_n$ si possono definire m funzioni $v_j^{(n)}(x)$, $(j = 1, \ldots, m)$ quasi continue, non negative e integrabili in $(0, \delta_n)$, tali che se $(x', y_1, \ldots, y_r)$, $(x'', y_1, \ldots, y_r)$ sono due punti qualsiasi del campo $T_1^{(n)}$ con $x' < x''$ valgano le (44).

Poichè valgono le (46) ed è $\lambda_j^{(1)} \geq \lambda_j$, le (53) valgono anche quando i punti $(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$ appartengono al rettangolo

$$R^*: \qquad -\frac{a}{2} \leq x \leq 0, \quad -b_1 \leq y_1 \leq b_1, \ \ldots, \ -b_r \leq y_r \leq b_r,$$

nel quale le funzioni $z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)$ sono definite dalle (29); inoltre, se si pone $v_j^{(n)}(x) = 0$ identicamente per $-\frac{a}{2} \leq x \leq 0$, le (44) valgono anche quando uno o entrambi i punti $(x', y_1, \ldots, y_r)$, $(x'', y_1, \ldots, y_r)$ appartengono al rettangolo R^*.

Considerato ora il campo

$$T_2^{(n)}: \qquad 0 \leq x \leq 2\delta_n, \quad -b_k + \int_0^x M_k(t)\,dt \leq y_k \leq b_k - \int_0^x M_k(t)\,dt,$$

$$(k = 1, \ldots, r),$$

nel quale le funzioni $Z_i^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)$ sono definite dalle (45), si possono ripetere in tale campo considerazioni analoghe, tenendo presente che, se $(x, y_1, \ldots, y_r)$ è un punto fissato del campo $T_2^{(n)}$, al variare di X nello intervallo $(0, x)$, il punto di coordinate

$$(X - \delta_n, \ g_{i1}(X;\ x, y_1, \ldots, y_r), \ \ldots, \ g_{ir}(X;\ x, y_1, \ldots, y_r))$$

appartiene o al rettagolo R^* oppure al campo $T_1^{(n)}$, che in tutti i calcoli, in luogo delle (46), devono essere utilizzate le (53), e che per $0 \leq X' < X'' \leq x$, risulta, come si vede immediatamente

$$| z_j^{(n)}(X' - \delta_n, g_{i1}(X'; x, y_1, \dots, y_r), \dots, g_{ir}(X' : x, y_1, \dots, y_r)) -$$

$$- z_j^{(n)}(X'' - \delta_n, g_{i1}(X''; x, y_1, \dots, y_r), \dots, g_{ir}(X''; x, y_1, \dots, y_r)) | \leq$$

$$\leq \lambda_j^{(1)} \int_{X'}^{X''} M(t)\, dt + \int_{X'-\delta_n}^{X''-\delta_n} v_j^{(n)}(t)\, dt, \qquad (j = 1, \dots, m),$$

e quindi, per quasi tutti gli X di $(0, x)$

$$(47') \qquad \left| \frac{dz_j^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}(X; x, y_1, \dots, y_r), \dots, g_{ir}(X; x, y_1, \dots, y_r))}{dX} \right| \leq$$

$$\leq \lambda_j^{(1)} M(X) + v_j^{(n)}(X - \delta_n).$$

Si giunge così a determinare m costanti $\lambda_j^{(2)}$, $(j = 1, \dots, m)$, che possiamo supporre soddisfacenti le condizioni $\lambda_j^{(2)} \geq \lambda_j^{(1)}$, in modo che, comunque siano i punti $(x, y_1, \dots, y_r)$, $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r)$ nel campo $T_2^{(n)}$ valgano le

$$| z_j^{(n)}(x, y_1, \dots, y_r) - z_j^{(n)}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r) | \leq \lambda_j^{(2)} \sum_{k=1}^{r} | y_k - \bar{y}_k |,$$

e a definire anche nell'intervallo $\delta_n < x \leq 2\delta_n$ le funzioni $v_j^{(n)}(x)$, quasi continue, non negative e integrabili, in modo che le (44) siano soddisfatte, comunque siano i punti $(x', y_1, \dots, y_r)$, $(x'', y_1, \dots, y_r)$ nel campo $T_2^{(n)}$.

Così proseguendo, si giunge a provare quanto è asserito al principio del presente capoverso. In particolare si possono determinare m costanti non negative λ_{jn} $(j = 1, \dots, m)$, tali che, comunque siano i punti $(x, y_1, \dots, y_r)$, $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r)$ del campo T, sia

$$(53') \qquad | z_j^{(n)}(x, y_1, \dots, y_r) - z_j^{(n)}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r) | \leq \lambda_{jn} \sum_{k=1}^{r} | y_k - \bar{y}_k |;$$

inoltre con ragionamento analogo a quello sviluppato a proposito del campo $T_2^{(n)}$, si può provare che, se $(x, y_1, \dots, y_r)$ è un punto qualsiasi del campo T, le funzioni $z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}(X; y_1, \dots, y_r), \dots, g_{ir}(\dots))$, $(j = 1, \dots, m)$, sono assolutamente continue in X nell'intervallo $(0, x)$.

f) Riprendiamo ora le (30); da esse, per via algebrica, tenendo conto delle (1) e (28), si ricavano le

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y_1, \dots, y_r) z_j^{(n)}(x, y_1, \dots, y_r) = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(0, g_{i1}^{(0)}, \dots, g_{ir}^{(0)}) \varphi_j(g_{i1}^{(0)}, \dots, y_{ir}^{(0)}) +$$

$$+ \int_0^x \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{dA_{ij}(X, g_{i1}, \dots, g_{ir})}{dX} z_j^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir}) + \right.$$

$$\left. + f_i[X, g_{ir}, \dots, g_{ir}; z_1^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir}), \dots, z_m^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir})] \right\} dX,$$

$$(i = 1, \dots, m),$$

dove valgono le posizioni (26) e (12'); mediante una integrazione per parti (lecita per quanto è stato rilevato alla fine del capoverso *e*)), tenendo conto inoltre delle (29), risulta in tutto il campo T

$$(54) \qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y_1, \dots, y_r) z_j^{(n)}(x, y_1, \dots, y_r) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y_1, \dots, y_r) z_j^{(n)}(x - \delta_n, y_1, \dots, y_r) -$$

$$- \int_0^x \left\{ \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(X, g_{i1}, \dots, g_{ir}) \frac{dz_j^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir})}{dX} \right\} dX +$$

$$+ \int_0^x f_i[X, g_{i1}, \dots, g_{ir}; z_1^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir}), \dots, z_m^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir})] dX,$$

$$(i = 1, \dots, m).$$

Fissato un intero i, con $1 \leq i \leq m$, in corrispondenza ad ogni *r-pla* reale $(\eta_1, \dots, \eta_r)$ consideriamo la soluzione del sistema (11), definita nello intervallo $0 \leq X \leq a_0$

$$(55) \qquad g_{ik}(X; 0, \eta_1, \dots, \eta_r), \qquad (k = 1, \dots, r);$$

in virtù del teorema di unicità di C. CARATHÉODORY, citato in [6], in corrispondenza ad ogni *r-pla* reale $(\eta_1, \dots, \eta_r)$ risulta, comunque siano X e x in $(0, a_0)$

$$(56) \qquad g_{ik}(X; x, g_{i1}(x; 0, \eta_1, \dots, \eta_r), \dots, g_{ir}(x; 0, \eta_1, \dots, \eta_r)) =$$

$$= g_{ik}(X; 0, \eta_1, \dots, \eta_r), \qquad (k = 1, \dots, r).$$

Nelle funzioni (55) assumiamo x come variabile indipendente, e consideriamo il cambiamento di variabili

$$y_k = g_{ik}(x;\ 0,\ \eta_1,\ \dots,\ \eta_r), \qquad (k = 1,\ \dots,\ r), \tag{57}$$

il quale ai punti del campo

$$\Delta_\infty: \qquad 0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < \eta_1 < +\infty,\ \dots,\ \ -\infty < \eta_r < +\infty$$

fa corrispondere biunivocamente i punti del campo

$$D_\infty: \qquad 0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y_1 < +\infty,\ \dots,\ \ -\infty < y_r < +\infty;$$

in tale corrispondenza biunivoca ad un insieme di misura nulla di Δ_∞ corrisponde un insieme pure di misura nulla di D_∞ [18].

In corrispondenza ad ogni *r-pla* $(\eta_1,\ \dots,\ \eta_r)$ appartenente al rettangolo R, è possibile determinare un valore $\xi(\eta_1, \dots, \eta_r)$, tale che per $0 \leq x \leq \xi(\eta_1, \dots, \eta_r)$ tutti i punti

$$(x,\ g_{i1}(x;\ 0,\ \eta_1,\ \dots,\ \eta_r),\ \dots,\ g_{ir}(x;\ 0,\ \eta_1,\ \dots,\ \eta_r))$$

appartengono al campo T; le (57) stabiliscono allora una corrispondenza biunivoca tra i punti del campo T e i punti del campo

$$\tau: \qquad 0 \leq x \leq \xi(\eta_1,\ \dots,\ \eta_r), \ -b_1 \leq \eta_1 \leq b_1,\ \dots,\ -b_r \leq \eta_r \leq b_r,$$

nella quale ad un insieme di misura nulla dell'uno corrisponde un insieme di misura nulla dell'altro. Inoltre (cfr. capoverso *a*)), quando $(x,\ \eta_1,\ \dots,\ \eta_r)$ varia nel campo τ, le funzioni (57) soddisfano il sistema di equazioni differenziali ordinarie (scritte in forma integrale)

$$g^*_{ik}(x) = \eta_k + \int_0^x \rho_{ik}(t,\ g^*_{i1}(t),\ \dots,\ g^*_{ir}(t))\, dt, \tag{58}$$

dove, per brevità, si è posto

$$g^*_{ik}(x) = g_{ik}(x;\ 0,\ \eta_1,\ \dots,\ \eta_r), \qquad (k = 1,\ \dots,\ r). \tag{59}$$

---

[18] Cfr. la memoria citata per prima in [1], § 1, n. 2, pp. 363-364 (tenendo conto che vi è qualche differenza nelle notazioni), e anche § 2, n. 2 p. 375, nota [20].

Supposto $(\eta_1, \ldots, \eta_r)$ in R, per $0 \leq x \leq \xi(\eta_1, \ldots, \eta_r)$ nella *i-esima* delle (54) poniamo

$$y_k = g_{ik}^*(x), \qquad (k = 1, \ldots, r); \tag{57'}$$

tenendo conto della identità (56), e usufruendo della posizione (59), si ottiene

$$\begin{aligned}(60)\qquad & \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, g_{i1}^*(x), \ldots, g_{ik}^*(x)) \Big\{ z_j^{(n)}(x, g_{i1}^*(x), \ldots, g_{ir}^*(x)) - \\ & \qquad - z_j^{(m)}(x - \delta_n, g_{i1}^*(x), \ldots, g_{ir}^*(x)) \Big\} + \\ & + \int_0^x \Big\{ \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(X, g_{i1}^*(X), \ldots, g_{ir}^*(X)) \frac{dz_j^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}^*(X), \ldots, g_{ir}^*(X))}{dX} \Big\} dX = \\ & = \int_0^x f_i[X, g_{i1}^*(X), \ldots, g_{ir}^*(X); z_1^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}^*(X), \ldots, g_{ir}^*(X)), \ldots, z_m^{(n)}(\ldots)]\, dX,\end{aligned}$$

la quale è soddisfatta in tutto il campo τ.

Poichè le funzioni $z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(j = 1, \ldots, m)$ sono di classe G nel campo T (cfr. capoverso *e*)), tenuto conto della corrispondenza biunivoca, che le (57) stabiliscono tra il campo T e il campo τ, in quasi tutti i punti della curva di equazioni (57') le funzioni $z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(j = 1, \ldots, m)$ ammettono derivate prime finite e sono differenziabili nel complesso delle variabili $(y_1, \ldots, y_r)$.

In corrispondenza ad ogni punto $(\eta_1, \ldots, \eta_r)$ del rettangolo R, per $0 \leq x' < x'' < \xi(\eta_1, \ldots, \eta_r)$, dalle (5), (16), (44), (53'), (58) segue che è

$$\begin{aligned}& | z_j^{(n)}(x', g_{i1}^*(x'), \ldots, g_{ir}^*(x')) - z_j^{(n)}(x'', g_{i1}^*(x''), \ldots, g_{ir}^*(x'')) | \leq \\ & \qquad \leq \int_{x'}^{x''} v_j^{(n)}(t)\, dt + \lambda_{jn} \int_{x'}^{x''} M(t)\, dt, \qquad (j = 1, \ldots, m).\end{aligned}$$

Le $z_j^{(n)}(x, g_{i1}^*(x), \ldots, g_{ir}^*(x))$, in corrispondenza ad ogni punto $(\eta_1, \ldots, \eta_r)$ di R, sono funzioni assolutamente continue di x, e quindi in quasi tutti i punti della curva (57') esiste finita la derivata

$$\frac{dz_j^{(n)}(x, g_{i1}^*(x), \ldots, g_{ir}^*(x))}{dx}.$$

Applicando un teorema di derivazione di funzione composta [19] e tenendo conto delle (58), in corrispondenza a quasi tutte le r-*ple* $(\eta_1, \dots, \eta_r)$ di R per quasi tutti gli x di $(0, \xi(\eta_1, \dots, \eta_r))$ risulta

$$\frac{dz_j^{(n)}(x,\ g_{i1}^*(x), \dots, g_{ir}^*(x))}{dx} = \tag{61}$$

$$= \frac{\partial z_j^{(n)}(\dots)}{\partial x} + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x,\ g_{i1}^*(x), \dots, g_{ir}^*(x)) \frac{\partial z_j^{(n)}(\dots)}{\partial y_k}, \qquad (j = 1, \dots, m).$$

Tenuto conto delle (2), (3) e (24) (nella quale si pongano x', x'' al posto di X', X'', e inoltre $\eta_1, \dots, \eta_r$ al posto di $y_1, \dots, y_r$, e si faccia $x = 0$), in modo del tutto analogo si trova che in corrispondenza a quasi tutte le r-*ple* $(\eta_1, \dots, \eta_r)$ di R, per quasi tutti gli x di $(0, \xi(\eta_1, \dots, \eta_r))$ è

$$\frac{dA_{ij}(x,\ g_{i1}^*(x), \dots, g_{ir}^*(x))}{dx} = \frac{\partial A_{ij}(\dots)}{\partial x} + \tag{62}$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x,\ g_{i1}^*(x), \dots, g_{ir}^*(x)) \frac{\partial A_{ij}(\dots)}{\partial y_k}, \qquad (j = 1, \dots, m).$$

Derivando rispetto a x entrambi i membri della (60) e tenendo conto delle (61) e (62) si ottiene la

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x,\ g_{i1}^*(x), \dots, g_{ir}^*(x)) \left\{ \frac{\partial z_j^{(n)}(x,\ g_{i1}^*(x), \dots, g_{ir}^*(x))}{\partial x} + \right. \tag{63}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(\dots) \frac{\partial z_j^{(n)}(\dots)}{\partial y_k} \right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{\partial A_{ij}(\dots)}{\partial x} + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(\dots) \frac{\partial A_{ij}(\dots)}{\partial y_k} \right\} \left\{ z_j^{(n)}(x,\ g_{i1}^*(x), \dots, g_{ir}^*(x)) - \right.$$

$$\left. - z_j^{(n)}(x - \delta_n,\ g_{i1}^*(x), \dots, g_{ir}^*(x)) \right\} =$$

$$= f_i[x,\ g_{i1}^*(x), \dots, g_{ir}^*(x);\ z_1^{(n)}(x - \delta_n,\ g_{i1}^*(x), \dots, g_{ir}^*(x)), \dots$$

$$\dots, z_m^{(n)}(x - \delta_n,\ g_{i1}^*(x), \dots, g_{ir}^*(x))],$$

[19] Cfr. l. c. per primo in [1], § 1, n. 4, pp. 369-370.

la quale, in corrispondenza a quasi tutte le *r-ple* $(\eta_1, \ldots, \eta_r)$ del rettangolo R vale per quasi tutti gli x di $(0, \xi(\eta_1, \ldots, \eta_r))$.

Allora, per la corrispondenza biunivoca che le (57) stabiliscono tra i punti del campo τ e i punti del campo T, segue che in quasi tutto il campo T vale la

$$(64) \qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r)\left\{\frac{\partial z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m} \rho_{ik}(x, y_1, \ldots, y_r)\frac{\partial z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial y_k}\right\}+$$

$$+\sum_{j=}^{m}\left\{\frac{\partial A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x}+\sum_{k=1}^{r}\rho_{ik}(x, y_1, \ldots, y_r)\frac{\partial A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x}\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)-z_j^{(n)}(x-\delta_n, y_1, \ldots, y_r)\right\}=$$

$$=f_i[x, y_1, \ldots, y_r; z_1^{(n)}(x-\delta_n, y_1, \ldots, y_r), \ldots, z_m^{(n)}(x-\delta_n, y_1, \ldots, y_r)].$$

Poniamo per definizione

$$A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) = A_{ij}(0, y_1, \ldots, y_r), \qquad (i, j = 1, \ldots, m)$$

$$\rho_{ik}(x, y_1, \ldots, y_r) = 0, \qquad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, r)$$

nel campo R^*, e inoltre

$$f_i(x, y_1, \ldots, y_r;\ z_1, \ldots, z_m) = 0, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

quando il punto $(x, y_1, \ldots, y_r)$ appartiene al campo R^* e per ogni *m-pla* reale $(z_1, \ldots, z_m)$; se facciamo inoltre anche le posizioni

$$(65) \qquad \begin{cases} \mu_{ij}(x) = 0,\ (i, j = 1, \ldots, m);\ M_k(x) = 0,\ (k = 1, \ldots, r);\ L(x) = 0; \\ N_i(x) = 0,\quad (i = 1, \ldots, m);\quad L_1(x) = 0 \end{cases}$$

identicamente per $-\frac{a}{2} \leq x < 0$, le disuguaglianze (1), (2), (3), (5), (6), (7), (8) valgono nel campo costituito dai due campi R^* e T.

Nel campo R^* la (64) diviene

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) \frac{\partial z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x} = 0, \tag{64'}$$

certo soddisfatta, in virtù delle (29).

g) Facendo assumere a i successivamente i valori 1, 2, ..., m le (64) costituiscono un sistema di m equazioni algebriche lineari nelle $\frac{\partial z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x}$; risolvendo rispetto a queste ultime e tenendo conto della (1), si ottengono le

$$\frac{\partial z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) \cdot \tag{66}$$

$$\Big\{ -\sum_{s=1}^{m} A_{is}(x, y_1, \ldots, y_r) \sum_{s=1}^{m} \rho_{ik}(x, y_1, \ldots, y_r) \frac{\partial z_s^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial y_k} -$$

$$-\sum_{s=1}^{m} \left[\frac{\partial A_{is}(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x} + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x, y_1, \ldots, y_r) \frac{\partial A_{is}(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial y_k} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[z_s^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) - z_s^{(n)}(x - \delta_n, y_1, \ldots, y_r) \right] +$$

$$+ f_i(x, y_1, \ldots, y_r;\ z_1^{(n)}(x - \delta_n, y_1, \ldots, y_r), \ldots, z_m^{(n)}(x - \delta_n, y_1, \ldots, y_r)) \Big\},$$

$$(j = 1, \ldots, m),$$

le quali valgono in quasi tutto il campo T.

Dalle (64'), facendo $i = 1, \ldots, m$, tenuto conto della (1), seguono le

$$\frac{\partial z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x} = 0, \qquad (j = 1, \ldots, m \tag{66'}$$

nel rettangolo R^*, come si deduce anche immediatamente dalle (29).

Per ogni x di $(0, a)$ si indichi con $V^{(n)}(x)$ il limite superiore della espressione

$$\frac{\sum_{j=1}^{m} | z_j^{(n)}(X, y_1, \ldots, y_r) - z_j^{(n)}(X, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r) }{\sum_{k=1}^{r} | y_k - \bar{y}_k |}$$

nel campo

$$0 \leq X \leq x, \quad -b_k + \int_0^X M_k(t)\,dt \leq y_k \leq b_k - \int_0^X M_k(t)\,dt, \qquad (k = 1, \dots, r)$$

$$-b_k + \int_0^X M_k(t)\,dt \leq \bar{y}_k \leq b_k - \int_0^X M_k(t)\,dt, \qquad (k = 1, \dots, r).$$

La funzione $V^{(n)}(x)$, per quanto abbiamo rilevato nel capoverso *e*), è limitata nell'intervallo $(0, a)$, e ivi non negativa e non decrescente.

Tenuto conto delle (2), (3), (5), (7), (16), (33), (35), (38), (42), (43), dalle (66) seguono le

$$\left| \frac{\partial z_j^{(n)}(x, y_1, \dots, y_r)}{\partial x} \right| \leq H^{(0)}[m^2 HM(x) V^{(n)}(x) + 2U(a)G(x) + N(x)], \tag{67}$$

$$(j = 1, \dots, m),$$

le quali valgono in quasi tutto il campo T.

Per quasi tutte le r-ple $(y_1, \dots, y_r)$ appartenenti al rettangolo R, se $(x', y_1, \dots, y_r)$, $(x'', y_1, \dots, y_r)$ sono punti del campo T con $x' < x''$, risulta

$$| z_j^{(n)}(x', y_1, \dots, y_r) - z_j^{(n)}(x'', y_1, \dots, y_r) | \leq \tag{68}$$

$$\leq H^{(0)} \int_{x'}^{x''} [m^2 HM(t) V^{(n)}(t) + 2U(a)\, G(t) + N(t)]\, dt,$$

$$(j = 1, \dots, m),$$

e poichè il primo membro della (68) è funzione continua nel complesso delle variabili $(y_1, \dots, y_r)$ e il secondo membro non dipende da tali variabili, le (68) valgono comunque siano i punti $(x', y_1, \dots, y_r)$, $(x'', y_1, \dots, y_r)$ del campo T, con $x' < x''$, e quindi le (67) valgono in quasi tutti i punti di tutte le intersezioni del campo T con una parallela all'asse x.

Tenuto conto delle (66'), le (67) valgono anche nel campo R^*, nel quale risulta, in virtù delle (16), (35), (38) e (65)

$$M(x) = N(x) = G(x) = 0, \quad \left(-\frac{a}{2} \leq x < 0 \right). \tag{69}$$

Inoltre, tenuto conto delle (29), (46) e (51), possiamo porre

$$V^{(n)}(x) = \lambda, \quad \left(-\frac{a}{2} \leq x \leq 0 \right). \tag{70}$$

h) Possiamo ora provare che le m successioni (che si ottengono per $j = 1, \ldots, m$)

$$z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r), \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{32}$$

sono costituite di funzioni ugualmente continue nel campo T nelle variabili $(x, y_1, \ldots, y_r)$.

Dimostriamo, in primo luogo, che le m successioni (32) sono costituite di funzioni equilipschitziane nel campo T nel complesso delle variabili $(y_1, \ldots, y_r)$ (con costante di Lipschitz indipendente da x). Le ipotesi del teorema, le posizioni (28) e le (14) assicurano che si possono determinare due costanti $\Lambda^{[1]}$ e $\Lambda^{[2]}$ tali che, comunque siano i punti $(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$ nel campo T, valgano le

$$| \alpha_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) - \alpha_{ij}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r) | \leq \Lambda^{[1]} \sum_{k=1}^{r} | y_k - \bar{y}_k |, \qquad (i, j = 1, \ldots, m) \tag{71}$$

$$| \Psi_j(x, y_1, \ldots, y_r) - \Psi_j(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r) | \leq \Lambda^{[2]} \sum_{k=1}^{r} | y_k - \bar{y}_k |, \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{72}$$

Dalle (30'), usufruendo delle (7), (24'), (35), (37), (38), (42), (43) e della seconda delle (33), segue che, per ogni coppia di punti $(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$ del campo T è

$$\begin{aligned} &| z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) - z_j^{(n)}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r) | \leq \\ &\leq \left\{ \Lambda^{[2]} + \Lambda^{[1]} \int_0^x [U(a)\, G(X) + N(X)]\, dX \right\} \sum_{k=1}^{r} | y_k - \bar{y}_k | + \\ &+ H^{(0)} \sum_{i=1}^{m} | Z_i^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) - Z_i^{(n)}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r) |, \qquad (j = 1, \ldots, m), \end{aligned} \tag{73}$$

dove le funzioni $Z_i^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r)$ sono date dalle (45).

Usufruendo delle posizioni (12') e (12'') (cfr. anche il capoverso *e*)) risulta, in modo evidente

$$\sum_{i=1}^{m} | Z_i^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) - Z_i^{(n)}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r) | \leq \tag{74}$$

$$\leq \left| \int_0^x \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m \left[\frac{dA_{is}(X, g_{i1}, \dots, g_{ir})}{dX} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{dA_{is}(X, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir})}{dX} \right] z_s^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir}) dX \Big| +$$

$$+ \left| \int_0^x \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{dA_{is}(X, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir})}{dX} [z_s^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir}) - \right.$$

$$\left. - z_s^{(n)}(X - \delta_n, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir})] dX \right| +$$

$$+ \left| \int_0^x \sum_{i=1}^m [f_i(X, g_{i1}, \dots, g_{ir}; z_1^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir}), \dots, z_m^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir})) - \right.$$

$$\left. - f_i(X, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir}; z_1^{(n)}(X - \delta_n, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir}), \dots, z_m^{(n)}(X - \delta_n, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir}))] dX \right| .$$

Tenuto conto delle (14), (24′) e (38) e della definizione, data nel capoverso g), della funzione $V^{(n)}(x)$ risulta

$$\left| \int_0^x \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{dA_{is}(X, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir})}{dX} [z_s^{(n)}(X - \delta_n, g_{j1}, \dots, g_{ir}) - \right. \tag{75}$$

$$\left. - z_s^{(n)}(X - \delta_n, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir})] dX \right| \leq$$

$$\leq e^{r\int_0^a L(t)dt} \int_0^x G(X) V^{(n)}(X) dX \cdot \sum_{k=1}^r | y_k - \bar{y}_k | ,$$

e anche, in virtù delle (8)

$$\left| \sum_{i=1}^m \int_0^x \left[f_i(X, g_{i1}, \dots, g_{ir}; z_1^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir}), \dots, z_m^{(n)}(\dots)) - \right.\right. \tag{76}$$

$$\left.\left. - f_i(X, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir}; z_1^{(n)}(X - \delta_n, \bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{ir}), \dots, z_m^{(n)}(\dots)) \right] dX \right| \leq$$

$$\leq m e^{r\int_0^a L(t)dt} \int_0^x L_1(X)(1 + V^{(n)}(X)) dX \cdot \sum_{k=1}^r | y_k - \bar{y}_k | .$$

Infine mediante una integrazione per parti, che è lecita per quanto abbiamo rilevato alla fine del capoverso *e)*, si ottiene in modo evidente

$$
\begin{aligned}
(77)\qquad & \left| \int_0^x \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m \left(\frac{dA_{is}(X, g_{i1}, \dots, g_{ir})}{dX} - \right.\right. \\
& \left.\left. - \frac{dA_{is}(X, \bar g_{i1}, \dots, \bar g_{ir})}{dX} \right) z_1^{(n)}(X-\delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir})\, dX \right| \leq \\
& \leq \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m | A_{is}(x, y_1, \dots, y_r) - A_{is}(x, \bar y_1, \dots, \bar y_r) | \; | z_s^{(n)}(x-\delta_n, y_1, \dots, y_r) | + \\
& + \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m | A_{is}(0, g_{i1}^{(0)}, \dots, g_{ir}^{(0)}) - A_{is}(0, \bar g_{i0}^{(0)}, \dots, \bar g_{ir}^{(0)}) | \; | \varphi_s(g_{i1}^{(0)}, \dots, g_{ir}^{(0)}) | + \\
& + \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m \int_0^x | A_{is}(X, g_{i1}, \dots, g_{ir}) - A_{is}(X, \bar g_{i1}, \dots, \bar g_{ir}) | \cdot \\
& \cdot \left| \frac{dz_s^{(n)}(X-\delta_n, g_{i1}, \dots, g_{ir})}{dX} \right| dX,
\end{aligned}
$$

dove si è tenuto conto della definizione (29) e delle posizioni (26) e (26′).

In virtù delle (5), (16) e (68) e della definizione, data nel capoverso *g)*, della funzione $V^{(n)}(x)$, in corrispondenza ad ogni punto $(x, y_1, \dots, y_r)$ del campo T, risulta per quasi tutti gli X di $(0, x)$

$$
\begin{aligned}
(78)\qquad & \left| \frac{dz_j^{(n)}(X-\delta_n, g_{i1}(X; x, y_1, \dots, y_r), \dots, g_{ir}(X; x, y_1, \dots, y_r))}{dX} \right| \leq \\
& \leq H^{(0)} [m^2 HM(X-\delta_n) V^{(n)}(X-\delta_n) + 2U(a) G(X-\delta_n) + N(X-\delta_n)] + \\
& + V^{(n)}(X) M(X), \qquad (j = 1, \dots, m),
\end{aligned}
$$

come si verifica facilmente [20].

---

[20] Infatti se i punti X, $X+h$ appartengono all'intervallo $(0, x)$ ed è *p.* es. $h > 0$, tenuto conto delle (5), (16) e (68) risulta

$$
\begin{aligned}
& | z_j^{(n)}(X-\delta_n+h;\, g_{i1}(X+h;\, x, y_1, \dots, y_r), \dots, g_{ir}(X+h;\, x, y_1, \dots, y_r)) - \\
& - z_j^{(n)}(X-\delta_n, g_{i1}(X; x; y_1, \dots, y_r), \dots, g_{ir}(X; x, y_1, \dots, y_r)) | \leq \\
& \leq H^{(0)} \int_{X-\delta_n}^{X-\delta_n+h} [m^2 H M(t) V^{(n)}(t) + 2U(a) G(t) + N(t)]\, dt + V^{(n)}(X-\delta_n) \int_X^{X+h} M(t)\, dt,
\end{aligned}
$$

da cui, tenendo presente che la funzione $V^{(n)}(x)$ è non decrescente in $(0, a)$, segue in modo noto la (78)).

Dalla (77), in virtù delle (3), (14), (41), (50), seconda delle (51) e (78), segue

$$\left| \int_0^x \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m \left(\frac{dA_{is}(X, g_{i1}, \ldots, g_{ir})}{dX} - \right. \right. \tag{79}$$

$$\left. \left. - \frac{dA_{is}(X, \bar{g}_{i1}, \ldots, \bar{g}_{ir})}{dX} \right) z_s^{(n)}(X - \delta_n, g_{i1}, \ldots, g_{ir})\, dX \right| \leq$$

$$\leq \left\{ m\Lambda U(a) + mK^{(0)} e^{r\int_0^x L(t)\,dt} + m^2 \Lambda e^{r\int_0^x L(t)\,dt} \int_0^x [V^{(n)}(X) M(X) + \right.$$

$$+ H^{(0)}(m^2 HM(X - \delta_n) V^{(n)}(X - \delta_n) + 2U(a)\, G(X - \delta_n) +$$

$$\left. + N(X - \delta_n))]\, dX \right\} \cdot \sum_{k=1}^r | y_k - \bar{y}_k |.$$

Ma

$$\int_0^x (m^2 HM(X - \delta_n) V^{(n)}(X - \delta_n) + 2U(a)\, G(X - \delta_n) + N(X - \delta_n))\, dX = \tag{80}$$

$$= \int_{-\delta_n}^{x - \delta_n} (m^2 HM(t) V^{(n)}(t) + 2U(a)\, G(t) + N(t))\, dt = \int_0^{x - \delta_n} (\ldots)\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^x (\ldots)\, dt,$$

e ciò perchè nell'intervallo $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ valgono le (69), e inoltre la funzione integranda è non negativa in $(0, a)$.

Dalle (73), (74), (75), (76), (79) e (80) segue che per ogni coppia di punti $(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$ appartenenti al campo T, risulta

$$\frac{| z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) - z_j^{(n)}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r) |}{\sum_{k=1}^r | y_k - \bar{y}_k |} \leq \tag{81}$$

$$\leq G^{[0]} + \int_0^x [G^{[1]}(X) V^{(n)}(X) + G^{[2]}(X)]\, dX, \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

dove per brevità si è posto

$$G^{[0]} = \Lambda^{[2]} + mH^{(0)}[\Lambda U(a) + K^{(0)} e^{r\int_0^a L(t)dt}],$$

$$G^{[1]}(x) = H^{(0)} e^{r\int_0^a L(t)\,dt} [G(x) + mL_1(x) + m^2(\Lambda + HH^{(0)}) M(x)],$$

$$G^{[2]}(x) = [\Lambda^{[1]} + 2\Lambda(mH^{(0)})^2 e^{r\int_0^a L(t)\,dt}]\, U(a)\, G(x) +$$

$$+ [\Lambda^{[1]} + \Lambda(mH^{(0)})^2 e^{r\int_0^a L(t)dt}] N(x) + mH^{(0)} e^{r\int_0^a L(t)dt} L_1(x).$$

Sommando le (81) per $j = 1, \dots, m$, si ottiene

$$\frac{\sum_{j=1}^{m} | z_j^{(n)}(x, y_1, \dots, y_r) - z_j^{(n)}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r) |}{\sum_{k=1}^{r} | y_k - \bar{y}_k |} \leq \tag{82}$$

$$\leq m\, G^{[0]} + m \int_0^x [G_1^{[1]}(X) V^{(n)}(X) + G^{[2]}(X)]\, dX,$$

e anche [21]

$$V^{(n)}(x) \leq mG^{[0]} + m \int_0^x [G^{[1]}(X) V^{(n)}(X) + G^{[2]}(X)]\, dX, \tag{83}$$

da cui per l'estensione del Lemma di Gronwall, citata in [17]

$$V^{(n)}(x) \leq V(x) \leq V(a), \tag{84}$$

dove

$$V(x) = mG^{[0]} e^{m\int_0^x G^{[1]}(t)dt} + m \int_0^x e^{m\int_X^x G^{[1]}(t)dt} G^{[2]}(X)\, dX, \tag{85}$$

---

[21] La (83) si deduce dalle (82), tenendo presente il modo, nel quale nel capoverso *g*) è stata definita la funzione $V^{(n)}(x)$, e ragionando in modo simile al l. c. in [16].

ed anche, per le (81), (82) e (84)

$$\frac{\sum_{j=1}^{m} | z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) - z_j^{(n)}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)|}{\sum_{k=1}^{r} | y_k - \bar{y}_k |} \leq V(x) \leq V(a) \tag{86}$$

$$\frac{| z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) - z_j^{(n)}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)|}{\sum_{k=1}^{r} | y_k - \bar{y}_k |} \leq \frac{1}{m} V(x) \leq \frac{1}{m} V(a), \tag{87}$$

$$(j = 1, \ldots, m).$$

Le m successioni (32) sono dunque costituite di funzioni equilipschitziane nel complesso delle variabili $(y_1, \ldots, y_r)$.

Se $(x', y_1, \ldots, y_r)$, $(x'', y_1, \ldots, y_r)$ sono due punti qualsiasi del campo T, con $x' < x''$, dalle (68) e (84) segue anche

$$| z_j^{(n)}(x', y_1, \ldots, y_r) - z_j^{(n)}(x'', y_1, \ldots, y_r) | \leq \tag{88}$$

$$\leq H^{(0)} \int_{x'}^{x''} [m^2 HM(X)\, V(X) + 2U(a)\, G(X) + N(X)]\, dX,$$

e in modo noto si prova che le m successioni (32) sono costituite di funzioni equiassolutamente continue in x su ogni segmento appartenente al campo T e parallelo all'asse x.

Dalle (87) e (88) si deduce immediatamente quanto abbiamo asserito all'inizio del presente capoverso.

i) Le m successioni (32) sono dunque costituite di funzioni ugualmente limitate (cfr. capoverso *d*)) e ugualmente continue (cfr. capoverso precedente) nel campo T. Dalle m successioni (32) si possono dunque estrarre m successioni [22] (ottenute per $j = 1, \ldots, m$)

$$z_j^{(n_\nu)}(x, y_1 \ldots, y_r), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

---

[22] Il teorema di GIULIO ASCOLI vale anche per funzioni di due o più variabili in campi finiti a due o più dimensioni; cfr. C. SEVERINI. Sul problema di CAUCHY. «Atti Acc. Gioenia di Scienze Naturali in Catania», Serie 5ª Vol. X (1916), Mem. XXIV, pp. 1-30 (cfr. § 1, pp. 1-9).

le quali convergono uniformemente in tutto il campo T a m funzioni

$$z_j(x, y_1, ..., y_r), \qquad (j = 1, ..., m), \tag{9}$$

le quali sono di classe G nel campo T, e precisamente soddisfano le disuguaglianze, che si ottengono dalle (42), (87), (88), sostituendo in esse le funzioni $z_j(x, y_1, ..., y_r)$, $(j = 1, ..., m)$ alle funzioni $z_j^{(n)}(x, y_1, ..., y_r)$.

Dalle (30) segue immediatamente che le funzioni (9) soddisfano le equazioni integrali (27), e dalle (31) segue che, comunque sia il punto $(y_1, ..., y_r)$ nel rettangolo R, sono soddisfatte le condizioni iniziali

$$z_j(0, y_1, ..., y_r) = \varphi_j(y_1, ..., y_r), \qquad (j = 1, ..., m). \tag{10}$$

Per via puramente algebrica dalle (27), tenendo conto delle (1) e (28), si deducono le (25) (cfr. capoverso *b*)); se $(x, y_1, ..., y_r)$ è un punto qualsiasi del campo T, le funzioni $z_j(X, g_{i1}(X; x, y_1, ..., y_r), ..., g_{ir}(X; x, y_1, ..., y_r))$, $(j = 1, ..., m)$ sono assolutamente continue in X nell'intervallo $(0, x)$; infatti per le proprietà rilevate poco sopra delle funzioni (9), tenuto conto anche delle (16), risulta per $0 \leq X' < X'' \leq x$

$$\begin{aligned} &| z_j(X'; g_{i1}(X', x, y_1, ..., y_r), ... g_{ir}(X'; x, y_1, ..., y_r)) - \\ &- z_j(X'', g_{i1}(X''; x, y_1, ..., y_r), ..., g_{ir}(X''; x, y_1, ..., y_r)) | \leq \\ &\leq \int_{X'}^{X''} \left\{ \frac{V(a)}{m} M(t) + H^{(0)}[m^2 HM(t)V(t) + 2U(a)G(t) + N(t)] \right\} dt, \\ &\qquad\qquad (j = 1, ..., m). \end{aligned} \tag{89}$$

Nelle (25) si può allora eseguire una integrazione per parti (cfr. anche capoverso *b*)), ottenendo le

$$\begin{aligned} &\int_0^x \sum_{j=1}^m A_{ij}(X, g_{i1}, ..., g_{ir}) \frac{dz_j(X, g_{i1}, ..., g_{ir})}{dX} dX = \\ &= \int_0^x f_i[X, g_{i1}, ..., g_{ir}; z_1(X, g_{i1}, ..., g_{ir}), ..., z_m(X, g_{i1}, ..., g_{ir})] dX, \\ &\qquad\qquad (i = 1, ..., m), \end{aligned} \tag{22}$$

dove si è utilizzata la posizione (12'). Sviluppando a partire dalle (22) considerazioni simili a quelle esposte nel capoverso f) a proposito delle (54), considerazioni che nel caso delle (22) riescono più semplici, si giunge a provare che in quasi tutto il campo T le funzioni (9) soddisfano il sistema (I).

3. **Complementi.** - a) Evidentemente, se le funzioni $\rho_{ik}(x, y_1, \dots, y_r)$, $(i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, r)$ sono definite in tutto il campo

$$D_\infty: \qquad 0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \quad \dots, \quad -\infty < y_r < +\infty,$$

non occorre introdurre, come nel n. 2 a), le funzioni $R_{ik}(x, y_1, \dots, y_r)$, e le (16) sono soddisfatte, comunque sia scelto il punto $(x, y_1, \dots, y_r)$ nel campo D_∞.

b) Se le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_r; z_1, \dots, z_m)$ sono definite, invece che in tutto il campo C, soltanto per $(x, y_1, \dots, y_r)$ variabile nel campo $T^{(0)}$ e per $|z_j| \leq \Omega_j$, $(j = 1, \dots, m)$, dove le Ω_j sono costanti positive, il teorema di esistenza, dimostrato nel n 2, è ancora valido, nell'ipotesi che, al variare del punto $(y_1, \dots, y_r)$ nel rettangolo R sia

$$|\varphi_j(y_1, \dots, y_r)| \leq K_j^{(0)} < \Omega_j, \qquad (j = 1, \dots, m), \tag{90}$$

e che al campo T, indicato nell'enunciato di tale teorema, si sostituisca il campo

$$T^{[1]}: \qquad 0 \leq x \leq a^{[1]}, \quad -b_k + \int_0^x M_k(t)\,dt \leq y_k \leq b_k - \int_0^x M_k(t)\,dt,$$
$$(k = 1, \dots, r),$$

dove $a^{[1]}$ è un numero positivo (con $a^{[1]} \leq a$), che verrà precisato tra poco.

Definiamo infatti le funzioni $F_i(x, y_1, \dots, y_r; z_1, \dots, z_m)$, $(i = 1, \dots, m)$ in tutto il campo C come segue:

per $(x, y_1, \dots, y_r)$ nel campo $T^{(0)}$ e $|z_j| \leq \Omega_j$, $(j = 1, \dots, m)$, poniamo

$$F_i(x, y_1, \dots, y_r; z_1, \dots, z_m) = f_i(x, y_1, \dots, y_r; z_1, \dots, z_m), \quad (i = 1, \dots, m);$$

poi per ogni intero j, che assume successivamente i valori $j = 1, 2, \dots, m$, per $(x, y_1, \dots, y_r)$ in $T^{(0)}$ e per

$$-\infty < z_1 < +\infty, \dots, -\infty < z_{j-1} < +\infty,$$
$$-\Omega_{j+1} < z_{j+1} < \Omega_{j+1}, \dots, -\Omega_m < z_m < \Omega_m,$$

poniamo

$$F_i(x, y_1, \ldots, y_r; z_1, \ldots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \ldots, z_m) =$$

$$= F_i(x, y_1, \ldots, y_r, z_{j-1}, -\Omega_j, z_{j+1}, \ldots, z_m), \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

per

$$z_j < -\Omega_j;$$

$$F_i(x, y_1, \ldots, y_r; z_1, \ldots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \ldots, z_m) =$$

$$= F_i(x, \ldots, y_r, z_{j-1}, \Omega_j, z_{j+1}, \ldots, z_m), \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

per

$$z_j > \Omega_j.$$

Le funzioni $F_i(x, y_1, \ldots, y_r; z_1, \ldots, z_m)$, $(i = 1, \ldots, m)$ nel campo C soddisfano evidentemente le condizioni (7) e (8) (nelle quali si pongano le $F_i(\ldots)$ al posto delle $f_i(\ldots)$), e per il sistema

$$(91) \qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) \left[\frac{\partial z_j(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x, y_1, \ldots, y_r) \frac{\partial z_j(x, y_1, \ldots, y_r)}{\partial y_k} \right] =$$

$$= F_i(x, y_1, \ldots, y_r; z_1(x, y_1, \ldots, y_r), \ldots z_m(x, y_1, \ldots, y_r)), \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

è valido il teorema di esistenza dimostrato nel n. 2; esiste dunque un sistema (9) di funzioni di classe G nel campo T, soddisfacente la (91) in quasi tutto il campo T, e soddisfacente la (10) identicamente nel rettangolo R.

Tenuto conto delle (10), (84) e (90), dalle (68), nelle quali si ponga $x' = 0$ e si scriva x al posto di x'' segue

$$| z_j^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_r) | \leq K_j^{(0)} + H^{(0)} \int_0^x [m^2 HM(t) V(t) + 2U(a) G(t) + N(t)] \, dt,$$
$$(j = 1, \ldots, m),$$

e basta scegliere il numero $a^{[1]}$ tale da soddisfare assieme alla disuguaglianza $0 < a^{[1]} \leq a$, anche a tutte le condizioni

$$\int_0^{a^{[1]}} [m^2 HM(t) V(t) + 2U(a) G(t) + N(t)] dt \leq \frac{\Omega_j - K_j^{(0)}}{H^{(0)}}, \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

perchè nel campo $T^{[1]}$ risulti

$$| z_j^{(n)}(x, y_1, \dots, y_r) | \leq \Omega_j, \qquad (j = 1, \dots, m),$$

e quindi anche

$$| z_j(x, y_1, \dots, y_r) | \leq \Omega_j, \qquad (j = 1, \dots, m),$$

dove le $z_j(x, y_1, \dots, y_r)$ sono le funzioni (9); allora nel campo $T^{[1]}$ è

$$F_i(x, y_1, \dots, y_r; z_1(x, y_1, \dots, y_r), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_r)) =$$
$$= f_i(x, y_1, \dots, y_r; z_1(x, y_1, \dots, y_r), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_r)), \quad (i = 1, \dots, m)$$

e le funzioni costruite $z_j(x, y_1, \dots, y_r)$, $(j = 1, \dots, m)$ in quasi tutto il campo $T^{[1]}$ soddisfano il sistema (I) (e soddisfano le (10) identicamente in R).

c) La soluzione (9) del problema di CAUCHY (inteso in senso generalizzato), definita nel campo T, della quale il teorema del n. 2 afferma la esistenza, è unica, e dipende con continuità dai valori iniziali; tali risultati sono già stati dimostrati in precedenza, più in generale, per un sistema quasi lineare ([23]).

§ 2.

4. Teorema di esistenza (campo illimitato). - *Le funzioni $A_{ij}(x, y_1, \dots, y_r)$, $(i, j = 1, \dots, m)$ siano definite nel campo*

$$D_\infty: \qquad 0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, \quad -\infty < y_r < +\infty,$$

in ogni punto del quale valga la (1); *la* (2) *sia soddisfatta, in corrispondenza ad ogni r-pla reale $(y_1, \dots, y_r)$, per ogni coppia x', x'', con $0 \leq x' < x'' \leq a_0$, e la* (3) *sia soddisfatta, in corrispondenza ad ogni x di $(0, a_0)$, per tutte le coppie di r-ple $(y_1, \dots, y_r)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r)$.*

Le funzioni $\rho_{ik}(x, y_1, \dots, y_r)$, $(i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, r)$ siano definite nel campo D_∞, su ogni segmento $0 \leq x \leq a_0$ parallelo all'asse x e appartenente al campo D_∞ siano quasi continue in x, e, in corrispondenza ad ogni x di $(0, a_0)$ siano continue nel complesso delle variabili $(y_1, \dots, y_r)$; in

([23]) Cfr. *Mn.* Cap. IV, § 2, n. 9, pp. 337-354, e n. 11, 356-358.

corrispondenza a quasi tutti gli x *di* $(0, a_0)$, *le* (5) *siano soddisfatte* ([24]) *per tutte le* r*-ple reali* $(y_1, \dots, y_r)$ *e le* (6) *per tutte le coppie di* r*-ple* $(y_1, \dots, y_r)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r)$.

Le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_r;\, z_1, \dots, z_m)$, $(i = 1, \dots, m)$ *siano definite nel campo*

$$C_\infty: \qquad 0 \leq x \leq a_0;\ -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_r < +\infty;$$

$$-\infty < z_1 < +\infty, \dots, -\infty < z_m < +\infty,$$

su ogni segmento $0 \leq x \leq a_0$ *parallelo all'asse* x *e appartenente al campo* C_∞ *siano quasi continue in* x, *e, in corrispondenza ad ogni* x *di* $(0, a_0)$, *siano continue nel complesso delle variabili* $(y_1, \dots, y_r;\, z_1, \dots, z_m)$; *in corrispondenza a quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *le* (7) *siano soddisfatte per tutte le* $(r + m)$*—ple reali* $(y_1, \dots, y_r;\, z_1, \dots, z_m)$ *e le* (8) *per tutte le coppie di* $(r + m)$*-ple reali* $(y_1, \dots, y_r;\, z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r;\, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$.

Le funzioni $\varphi_i(y_1, \dots, y_r)$, $(i = 1, \dots, m)$ *siano definite nel campo*

$$R_\infty: \qquad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_m < +\infty,$$

e siano ivi lipschitziane nel complesso delle variabili.

Allora nel campo D_∞ *esiste almeno una* m*-pla di funzioni di classe* G

$$z_i = z_i(x, y_1, \dots, y_r), \qquad (i = 1, \dots, m), \tag{9}$$

le quali in quasi tutto D_∞ *soddisfano il sistema*

$$\text{(I)} \qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y_1, \dots, y_r) \left[\frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_r)}{\partial x} + \sum_{k=1}^{m} \rho_{ik}(x, y_1, \dots, y_r) \frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_r)}{\partial y_k}\right] =$$

$$= f_i(x, \dots, y_r;\, z_1(x, y_1, \dots, y_r), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_r)), \qquad (i = 1, \dots, m),$$

e in tutto R_∞ soddisfano le

$$z_i(0, y_1, \dots, y_r) = \varphi_i(y_1, \dots, y_r), \qquad (i = 1, \dots, m). \tag{10}$$

([24]) Nel presente enunciato non occorrono le ipotesi (4).

Sia $(b_1^{(1)}, \ldots, b_r^{(1)})$ una *r-pla* di numeri reali positivi, soddisfacenti le disuguaglianze

$$\int_0^{a_0} M_k(t)\,dt < b_k^{(1)}, \qquad (k = 1, \ldots, r); \tag{92}$$

in corrispondenza ad ogni intiero k, con $1 \leq k \leq r$, consideriamo una successione crescente di numeri

$$b_k^{(\nu)}, \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

tali che sia

$$\lim_{\nu \to +\infty} b_k^{(\nu)} = +\infty.$$

Allora il teorema di esistenza dimostrato nel n. 2 (nel quale, in virtù delle condizioni (92) si può assumere $a = a_0$) e il teorema di unicità, citato nel n. 3 *c*), assicurano che, in corrispondenza ad ogni ν intiero positivo, nel campo

$$T^{(\nu)}: \qquad 0 \leq x \leq a_0, \quad -b_k^{(\nu)} + \int_0^x M_k(t)\,dt \leq y_k \leq b_k^{(\nu)} - \int_0^x M_k(t)\,dt, \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

esiste un'unica *m-pla* di funzioni $z_{i\nu}(x, y_1, \ldots, y_r)$, $(i = 1, \ldots, m)$, le quali sono di classe G nel campo $T^{(\nu)}$, soddisfano il sistema (I) in quasi tutto $T^{(\nu)}$, e in ogni punto del rettangolo

$$R^{(\nu)}: \qquad -b_1^{(\nu)} \leq y_1 \leq b^{(\nu)}, \ldots, -b_r^{(\nu)} \leq y_r \leq b_r^{(\nu)}$$

soddisfano identicamente le condizioni

$$z_{i\nu}(0, y_1, \ldots, y_r) = \varphi_i(y_1, \ldots, y_r), \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Se $(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r)$ è un qualsiasi punto del campo D_∞, sia ν_0 il minimo numero intiero positivo, tale che valgano tutte le disuguaglianze

$$|\bar{y}_k| + \int_0^{\bar{x}} M_k(t)\,dt < b_k^{(\nu_0)}, \qquad (k = 1, \ldots, r);$$

il punto $(\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{y}_r)$ appartiene [25] allora al campo $T^{(\nu_0)}$ e anche ad ogni campo $T^{(\nu)}$ con $\nu > \nu_0$; posto per definizione

$$z_i(x, y_1, \ldots, y_r) = z_{i\nu_0}(x, y_1, \ldots, y_r), \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

e tenuto conto che il teorema di unicità, citato nel n. 3 *c*), assicura che in ogni punto del campo $T^{(\nu_0)}$ è

$$z_{i\nu_0}(x, y_1, \ldots, y_r) = z_{i\nu}(x, y_1, \ldots, y_r), \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

in corrispondenza ad ogni intiero ν con $\nu > \nu_0$, ne segue che in tutto il campo D_∞ è pienamente definita una *m-pla* di funzioni (9) soddisfacente il teorema.

5. - **Un complemento.** - La soluzione del problema di CAUCHY (inteso in senso generalizzato) definita nel campo D_∞, della quale il teorema dimostrato nel n. 3 assicura l'esistenza, è unica; ciò segue da un teorema dimostrato anteriormente, sotto ipotesi anche più ampie, per un sistema quasi lineare [26]. Se inoltre esiste una costante positiva H, tale che le condizioni

$$| A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_r) | \leq H, \qquad (i, j = 1, \ldots, m)$$

valgano in tutto il campo D_∞, la soluzione del problema di CAUCHY, costruita nel n. 3 nel campo D_∞, dipende con continuità dai valori iniziali; anche questo risutato è già stato dimostrato per un sistema quasi lineare [27].

---

[25] E anzi, se $0 < \bar{x} < a_0$, è interno al campo $T^{(\nu_0)}$.

[26] Cfr. (*Mn*), Cap. IV, § 2, n. 10 *a*), pp. 354-355, e anche la memoria citata in [2], § 1, *n*. 4, TEOREMA II, pp. 119-120.

[27] Cfr. la memoria citata in [2], § 2, n. 9, TEOREMA IV, pp. 126-127.