Sulla estensione delle funzioni additive in un «Lattice».

Memoria di Jaurès Cecconi (a Messina)

A Giovanni Sansone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Si danno due teoremi che riguardano la possibilità di estendere una funzione $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ finitamente additiva su di un reticolato Booleano $\mathfrak{R}$ ad una funzione completamente additiva su di un anello Booleano che si genera a partire da $\mathfrak{R}$.*

1. Sia X un insieme. Sia $\mathfrak{R}$ una classe di sotto-insiemi di X che contiene l'elemento vuoto $\emptyset$ di X ed è chiusa rispetto alla formazione di unioni $A \cup B$ e di intersezioni $A \cap B$ di coppie di elementi A, B di $\mathfrak{R}$. Una tal classe $\mathfrak{R}$, che è un anello secondo F. Hausdorff [7], sarà detta: sistema reticolato o «lattice» di sotto-insiemi di X.

Sia $\mathfrak{A}$ una classe di sotto-insiemi di X che è chiusa rispetto alla formazione di unioni $A \cup B$ e di differenze $A - B$ di coppie di elementi A, B di $\mathfrak{A}$. Una tal classe $\mathfrak{A}$, che è un corpo di sotto-insiemi di X secondo F. Hausdorff [7], sarà detta, d'accordo con P. R. Halmos [6], anello di sotto-insiemi di X.

Da parte di vari autori, citiamo fra questi S. Bochner & R. S. Philips [2], K, Yosida & E. Hewitt [8] ed altri, è stato fatto uno studio assai approfondito delle funzioni reali $f(A)$, $A \in \mathfrak{A}$, che sono finitamente additive sopra una classe $\mathfrak{A}$; tali cioè che

$$f(\emptyset) = 0, \qquad f(A \cup B) = f(A) + f(B) \qquad \text{se } A,\ B \in \mathfrak{A},\ A \cap B = \emptyset.$$

Sulle funzioni $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$, finitamente additive sopra un sistema reticolato $\mathfrak{R}$, tali cioè che

$$f(\emptyset) = 0, \qquad f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B) \qquad \text{se } A,\ B \in \mathfrak{R},$$

sono apparsi recentemente due importanti lavori di F. Cafiero [4] [5] nei quali viene studiato il problema della estensione di una tal funzione $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$, ad una funzione completamente additiva sul minimo σ-anello $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ (secondo la nomenclatura di P. R· Halmos [6]) di sotto-insiemi di X generato da $\mathfrak{R}$.

Mi sembra pertanto intereressante osservare, in questa nota, come lo studio di funzioni additive sopra un sistema $\mathfrak{R}$ possa essere ricondotto allo studio di funzioni additive sopra un sistema $\mathfrak{A}$.

Otterrò in tal modo una nuova dimostrazione del teorema di estensione di F. CAFIERO sopra citato (vedi Teor. 8) ed un generale teorema di prolungamento (vedi Teor. 9) dal quale si deduce una estensione, al caso di misure relative, di un teorema di prolungamento di «regular content» dato da P. R. HALMOS [6] (ved. 9).

2. Valgono le seguenti proposizioni.

TEOREMA 1. - Se $\mathfrak{R}$ è un reticolato di sotto-insiemi di X e se $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ é il minimo anello che contiene $\mathfrak{R}$ allora è possibile esprimere ogni elemento C di $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ nella forma

$$C = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 \dots \pm A_n$$

essendo $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_n$ element di $\mathfrak{R}$.

TEOREMA 2. - Se $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ è una una funzione reale finitamente additiva su $\mathfrak{R}$ allora esiste una ed una sola estensione finitamente additiva $\bar{f}(A)$, $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ di $f(A)$ ad $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$; cioè una sola funzione reale finitamente additiva $\bar{f}(A)$, $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ tale che $\bar{f}(A) = f(A)$ se $A \in \mathfrak{R}$.

TEOREMA 3. - Se $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ è una funzione reale finitamente additiva sopra un reticolato $\mathfrak{R}$ di sotto-insiemi di X, se $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ è a variazione limitata in $\mathfrak{R}$; cioè se esiste $M > 0$ tale che $\sup \sum_{i=0}^{n} | f(A_{i+1}) - f(A_i) | < M$ essendo $A = A_0 \subset A_1 \subset A_n \subset A_{n+1} = B$, $A_i \in \mathfrak{R}$, n intero > 0; allora esistono

$$f^+(A) = \sup \left[\sum_{i=0}^{n} \max \{ f(C_{i+1}) - f(C_i), 0 \} : n \text{ intero} > 0, \quad \emptyset = C_0 \subset C_1 \dots \subset C_{n+1} = A \right]$$

$$f^-(A) = \inf \left[\sum_{i=0}^{n} \min \{ f(_{i+1}) - f(C_i), 0 \} : n \text{ intero} > 0, \quad \emptyset = C_0 \subset C_1, \dots \subset C_{n+1} = A \right]$$

additive in $\mathfrak{R}$ e tali che:

$$f^+(A) \geq 0, \qquad f^-(A) \leq 0, \qquad A \in \mathfrak{R} \tag{3.1}$$

$$f^+(A) \leq f^+(B), \quad f^-(A) \geq f^-(B) \quad \text{se } A,\ B \in \mathfrak{R}, \quad A \subset B, \tag{3.2}$$

$$f(A) = f^+(A) + f^-(A) \qquad \text{se } A \in \mathfrak{R}. \tag{3.3}$$

TEOREMA 4. - Se $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$, è una funzione reale finitamente additiva e a variazione limitata sopra un reticolato $\mathfrak{R}$ di sotto-insiemi di X e se $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$, è completamente additiva sopra $\mathfrak{R}$; cioè se $f(A) = \lim_{n \to \infty} f(A_n)$ qualunque siano $\{A_n : n \in N\}$ tali che $A_n \in \mathfrak{R}$, $A \in \mathfrak{R}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $\lim_{n \to \infty} A_n = A$; allora le funzioni $f^+(A)$, $f^-(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ definite mediante il teorema precedente sono completamente additive in $\mathfrak{R}$.

TEOREMA 5. - Se $f(A)$, $A \in \mathfrak{A}$ è una funzione reale, ≥ 0, finitamente additiva sopra un anello di sotto-insiemi di X e se $f(A)$, $A \in \mathfrak{A}$ è completamente additiva in $\mathfrak{A}$; cioè se qualunque siano $\{A_n : n \in N\}$ e A tali che $A \in \mathfrak{A}$, $A_n \in \mathfrak{A}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $A = \lim_{n \to \infty} A_n$, risulta $f(A) = \lim_{n \to \infty} f(A_n)$; allora esiste una ed una sola estensione completamente additiva $\mathring{f}(A)$, $A \in \mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ di $f(A)$, $A \in \mathfrak{A}$ al minimo σ-anello $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ di sotto-insiemi di X generato da $\mathfrak{A}$; cioè una unica funzione $\mathring{f}(A)$ con valori reali ≥ 0 (eventualmente $+\infty$) che è completamente additiva sopra $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ e tale che $\mathring{f}(A) = f(A)$ se $A \in \mathfrak{A}$.

TEOREMA 6. - Condizione necessaria e sufficiente affinchè $f(A)$, $A \in \mathfrak{A}$, reale, ≥ 0, finitamente additiva in $\mathfrak{A}$ sia completamente additiva in $\mathfrak{A}$ è che qualunque sia $\{A_n : n \in N\}$ tale che $A_n \in \mathfrak{A}$, $A_n \supset A_{n+1}$, $\lim_{n \to \infty} A_n = \emptyset$ risulti $\lim_{n \to \infty} f(A_n) = 0$.

I teoremi 1, 2 sono noti; si trovano per esempio in F. HAUSDORFF [7]. Il teorema 3 è anche essenzialmente noto; si trova per esempio in G. BIRKHOFF [1]. Così pure sono noti i teoremi 5, 6. Si trovano per esempio in P. R. HALMOS [6].

Il teorema 4 può essere provato nel modo seguente.

Siano A, $\{A_n : n \in N\}$ tali che $A \in \mathfrak{R}$, $A_n \in \mathfrak{R}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $\lim_{n \leftarrow \infty} A_n = A$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $C_0 \subset C_1 \dots C_{p+1}$, $C_i \in \mathfrak{R}$ tali che

$$f^+(A) - \varepsilon < \sum_{n=0}^{p} \max\{f(C_{p+1}) - f(C_i),\ 0\},$$

essendo

$$C_0 = \emptyset, \qquad C_{p+1} = A.$$

D'altra parte, essendo

$$\lim_{n \to \infty} C_i \cap A_n = C_i \cap A = C_i$$

$$C_i \cap A, \qquad C_i \cap A_n \in \mathfrak{R}, \qquad C_i \cap A_n \subset C_i \cap A_{n+1}, \qquad i = 0,\ 1 \dots p+1$$

esiste un intero $n_0 > 0$ tale che

$$|f(A_{n_0} \cap C_i) - f(A \cap C_i)| < \varepsilon / p + 1 \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, p+1,$$

di modo che risulta

$$f^+(A) - \varepsilon < \sum_{i=0} \max\{f(A_n \cap C_{i+1}) - f(A_n \cap C_i),\ 0\} + 2\varepsilon \leq f^+(A_{n_0}) + 2\varepsilon.$$

Da questa, per il fatto che $f^+(A_{n_0}) \leq f^+(A_n) \leq f^+(A)$ se $n > n_0$, segue l'affermazione contenuta nel teorema 4.

3. Possiamo pertanto enunciare il seguente

TEOREMA 7. - Se $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ è una funzione reale, a variazione limitata, completamente additiva sul reticolato $\mathfrak{R}$ di sotto-insiemi di X e se la estensione $f(A)$, $A \in \mathcal{A}(\mathfrak{R})$ di $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$, definita nel n° 2, nel minimo anello $\mathcal{A}(\mathfrak{R})$ generato da $\mathfrak{R}$ è completamente additiva sopra $\mathcal{A}(\mathfrak{R})$, allora esiste una unica estensione $\mathring{\bar{f}}(A)$, $A \in \mathcal{S}(\mathfrak{R})$ al minimo σ-anello $\mathcal{S}(\mathfrak{R})$ generato da $\mathfrak{R}$.

Questo teorema discende dai teoremi 2 e 5 e dal fatto che $\mathcal{S}(\mathfrak{R})$ è il minimo σ-anello generato da $\mathcal{A}(\mathfrak{R})$ (1).

4. Una condizione sufficiente affinchè l'estensione $\bar{f}(A)$, $A \in \mathcal{A}(\mathfrak{R})$ di $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ definita nell'enunciato del teorema 2 sia completamente additiva è fornita, un caso particolare, dal seguente

TEOREMA 8. - Se la funzione reale $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$, è la variazione positiva di una funzione reale, additiva e a variazione limitata su $\mathfrak{R}$, se $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ è completamente additiva su $\mathfrak{R}$ e se $\mathfrak{R}$ gode della seguente proprietà:

($\mathfrak{A}$) per qualsiasi $A \in \mathfrak{R}$ e per qualsiasi $B \in \mathfrak{R}$, $B \supset A$ esistono due successioni $\{A_n : n \in N\}$, $\{B_n : n \in N\}$ tali che A_n, $B_n \in \mathfrak{R}$ e $A_n \subset A_{n+1}$, $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = A$; $B_n \subset B$, $B_n \supset B_{n+1}$, $B - B_n \subset A_n \subset B - B_{n+1}$;

(1) Il seguente esempio mostra che esistono funzioni $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ additive, completamente, sopra un sistema reticolato $\mathfrak{R}$ per le quali l'estensione $\bar{f}(A)$, $A \in \mathcal{A}(\mathfrak{R})$ al minimo anello $\mathcal{A}(\mathfrak{R})$ che contiene $\mathfrak{R}$ è additiva, non completamente.

Sia $X = (0, 1]$ e sia $\mathfrak{R}$ il sistema reticolato avente per elementi i sotto insiemi $\emptyset$, $A = (0, \alpha]$; α reale, $0 < \alpha \leq 1$; di X.

Sia $f(\emptyset) = 0$ e $f(A) = 1$ per ogni $A \neq \emptyset$, $A \in \mathfrak{R}$.

La funzione $f(A)$, $A \in \mathcal{A}(\mathfrak{R})$ è completamente additiva in $\mathfrak{R}$. La funzione $\bar{f}(A)$, $A \in \mathcal{A}(\mathfrak{R})$ non è completamente additiva in $\mathcal{A}(\mathfrak{R})$. Infatti posto $A_n = [0, 1/n] \in \mathfrak{R}$ risulta $A_n \supset A_{n+1}$, $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = \emptyset$ ed anche $\lim\limits_{n \to \infty} \bar{f}(A) = \lim\limits_{n \to \infty} f(A_n) = 1$.

allora l'estensione $\bar{f}(A)$, $A \in \mathcal{C}(\mathfrak{R})$ di $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$, definita nell'enunciato del teorema 2, è completamente additiva in $\mathcal{C}(\mathfrak{R})$ (²).

In forza del teorema 6 basta provare che per ogni successione $\{A_n : : n \in N\}$ di insiemi $A_n \in \mathcal{C}(\mathfrak{R})$ tali che $A_n \subset A_{n+1}$, $\lim_{n \to \infty} A_n = A$, $A \in \mathcal{C}(\mathfrak{R})$, si ha: $\lim_{n \to \infty} \bar{f}(A_n) = \bar{f}(A)$.

Possiamo intanto supporre che $A \in \mathfrak{R}$ e che pertanto $\bar{f}(A) = f(A)$.

Per il teorema 1 si ha

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{P_n} (A_{n,i} - A_{n,i+1}), \qquad A_{ni} \in \mathfrak{R} \;\; i = 1, 2, \ldots P_n, \qquad A_{n,i} \supset A_{n,i+1}$$

per la condizione $(\mathfrak{U})$ esiste perciò per ogni $\varepsilon > 0$ e per intero ogni $n > 0$ un $C_n \in \mathfrak{R}$ tale che

$$C_n \supset A_n, \qquad f(C_n) = \bar{f}(C_n) < \bar{f}(A_n) + \varepsilon.$$

Risulta così

$$C_n \cap A \in \mathfrak{R}, \qquad C_n \cap A \subset C_{n+1} \cap A, \qquad \lim_{n \to \infty} C_n \cap A = A,$$

e, in forza della ipotesi di completa additività in $\mathfrak{R}$,

$$\lim_{n \to \infty} f(C_n \cap A) = f(A).$$

Esiste pertanto, in corrispondenza del fissato ε, un intero $n_0 > 0$ tale che

$$f(C_n \cap A) > f(A) - \varepsilon, \qquad \text{se } n > n_0.$$

In forza della condizione (3.2) e dei teoremi 1, 2 si ha quindi

$$f(C_n) \geq f(A) - \varepsilon, \qquad \text{se } n > n_0$$

ed anche

$$\bar{f}(A_n) + \varepsilon > f(A) - \varepsilon, \qquad \text{se } n > n_0.$$

Per l'arbitrarietà di ε il teorema 8 è così dimostrato.

(²) Analogo teorema si ottiene sostituendo la condizione $(\mathfrak{U})$ con la sua duale.

5. Dai precedenti teoremi discende così il seguente teorema dato da F. Cafiero in [5];

Teorema 9. – Se $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$, è una funzione reale, additiva, a variazione limitata, completamente additiva sopra un reticolato $\mathfrak{R}$ di sotto-insiemi di X che verifica la condizione $(\mathfrak{A}\ell)$ allora esiste una ed una unica estensione completamente additiva $\overset{\circ}{f}(A)$, $A \in \mathcal{S}(\mathfrak{R})$ di $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$, al minimo σ-anello $\mathcal{S}(\mathfrak{R})$ generato da $\mathfrak{R}$.

6. Tutte le considerazioni precedenti si conservano valide se $\mathfrak{R}$ è un reticolato astratto, distribuivo che, secondo il caso, è sub-reticolato di un reticolato distributivo relativamente completato $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ o sub-reticolato di un reticolato σ-distributivo relativamente completato σ-completo $\mathcal{S}(\mathfrak{R})$ e eventualmente gode della proprietà $(\mathfrak{A}\ell)$.

7. In tutte le precedenti considerazioni è entrata essenzialmente la nozione di successione monotona $\{A_n : n \in N\}$, di sotto-insiemi di X, convergente verso $A \subset X$.

Seguendo E. J. MacShane [9] e N. Bourbaki [3] considero ora la seguente più generale nozione di sistema $\{\Phi\}$, di sotto-insiemi di X, diretto, secondo la relazione $\supset$ verso $A \subset X$:

$\{\Phi\}$ sarà detto diretto, secondo la relazione $\supset$, verso A se per ogni coppia di elementi B', B'' di $\{\Phi\}$ esiste $B \in \{\Phi\}$ tale che $B' \subset B$, $B'' \subset B$ e se inoltre $A = \lim\limits_{B \in \{\Phi\} \supset} B$; ove $\lim\limits_{B \in \{\Phi\} \supset} B$ è il limite secondo Moore-Smith dell'insieme variabile B nell'ordine parziale $\supset$; o, ciò che è lo stesso, se $A = \bigcup\limits_{B \in \{\Phi\}} B$.

Ciò posto, data una funzione $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ $[A \in \mathfrak{A}]$, additiva finitamente sopra $\mathfrak{R}[\mathfrak{A}]$, diremo che $f(A)$ è additiva $(*)$-completamente sopra $\mathfrak{R}[\mathfrak{A}]$ se, per ogni sistema $\{\Phi\}$ diretto, secondo la relazione $\supset$ verso A, risulta $\lim\limits_{B \in \{\Phi\} \supset} f(B) = f(A)$. Se $f(A) \geq 0$ ciò è lo stesso che dire $f(A) = \sup [f(B) : : B \in \{\Phi\}]$.

Vale a questo proposito il seguente teorema di estensione (dovuto essenzialmente a E. J. MacShane [9] e N. Bourbaki [3]);

Teorema. – Se $f(A)$, $A \in \mathfrak{A}$ è additiva $(*)$-completamente in un sistema booleano $\mathfrak{A}$ di sotto-insiemi di X, se $f(A) \geq 0$, allora esiste una estensione completamente additiva $f(A)$, $A \in \mathcal{S}[\mathcal{C}(\mathfrak{A})]$, $f(A) \geq 0$ (event. $+\infty$), di $f(A)$, $A \in \mathfrak{A}$ al minimo σ-anello $\mathcal{S}[\mathcal{C}(\mathfrak{A})]$ generato a partire dalla classe $\mathcal{C}[\mathfrak{A}]$

costituita dai sotto-insiemi A di X per i quali esiste un sistema $\{\Phi\}$ tale che $A = \lim_{B \in \{\Phi\}|\supset} B$ e $\lim_{B \in \{\Phi\}|\supset} f(B) < \infty$.

8. Modificando in modo conveniente le dimostrazioni dai teoremi 4 e 8 posso pertanto provare il seguente:

TEOREMA 10. - Se $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$, è una funzione reale, finitamente e $(*)$-completamente additiva ed a variazione limitata sopra il sistema reticolato $\mathfrak{R}$ di sotto-insiemi di X e se $\mathfrak{R}$ verifica la seguente condizione:

$(\mathfrak{U}')$ per ogni coppia A, $B \in \mathfrak{R}$, $A \subset B$ esistono due sistemi diretti per la relazione $\supset$, $\{\Phi\}$, $\{\Psi\}$, $\{\Phi\} \subset \mathfrak{R}$ $\{\Psi\} \subset \mathfrak{R}$, tali che $\{\Phi\}$ è diretto verso A e per ogni $C \in \{\Phi\}$ esistono $D \in \{\Psi\}$ e $C' \in \{\Phi\}$ tali che $C \subset B - D \subset C'$; allora esiste una estensione additiva $\tilde{\tilde{f}}(A)$, $A \in \mathcal{S}[\mathcal{C}(\mathfrak{R})]\}$ di $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$.

9. Osservo che esistono funzioni $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ finitamente e completamente additive in $\mathfrak{R}$ che non sono $(*)$-completamente additive in $\mathfrak{R}$.

Osservo che se $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$ è finitamente e $(*)$-completamente additiva allora risulta $\mathring{\bar{f}}(A) = \tilde{\bar{f}}(A)$ se $A \in \mathcal{S}[\mathcal{C}(\mathfrak{R})]$.

Osservo che se data $f(A)$, $A \in \mathfrak{R}$, finitamente e $(*)$-completamente additiva, $\mathfrak{R}$ è il sistema reticolato costituito dagli insiemi aperti A, di aderenza $\bar{A}$ compatta, di uno spazio di HAUSDORFF localmente compatto allora $\mathfrak{R}$ verifica la condizione $(\mathfrak{U}')$ e $\mathcal{S}\{\mathcal{C}[\mathcal{C}(\mathfrak{R})]\}$ contiene la classe dei boreliani di X (3).

Pertanto, in questo caso particolare, il teorema 10 costituisce una estensione (4) al caso di misure relative al Teorema A § 54 di P. R. HALMOS [6].

Osservo infine che nel caso di sistemi diretti sussistono considerazioni interamente analoghe a quelle contenute nel n° 6.

---

(3) Basta infatti prendere, per ogni fissata coppia $A \subset B$, come sistema $\{\Phi\}$, diretto per la relazione $\supset$, la famiglia dei sotto insiemi aperti C di A la cui frontiera relativa a B non incontra la frontiera di A relativa a B.

(4) Si tenga infatti presente che se $f(A) \geq 0$ e se $f(A) = \sup\{f(B): \bar{B} \subset B \subset A;\ A, B$ aperti di aderenza compatta$\}$, allora per ogni sistema diretto $\{\Phi\}$ in $\mathfrak{R}$ convergente verso A si ha $\sup\{f(B) : B \in \Phi\} = \lim_{B \in \{\Phi\}|\supset} f(B) = f(A)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, «Rev. Ed. Am. Math. Soc, Colloq. Publ.», Vol. XXV, New York, 1948.

[2] S. BOCHNER & R. S. PHILIPS, *Additive set-functions and vector lattices*, «Ann. of Math.», 42, (1941), 316-324.

[3] N. BOURBAKI, *Integration*, Chap. III, IV (Act. Sc. Ind. 1175) Paris, 1952.

[4] F. CAFIERO, *Sulla teoria della misura in un insieme astratto*, «Annali Mat. pura ed ap.», 40, (1955), 269-283.

[5] F. CAFIERO, *Problemi di prolungamento per le misure relative in particolari reticolati di insiemi*, «Ricerche di Matem.», 5, (1956), 273-312.

[6] P. R. HALMOS, *Measure theory*, New York, Van Nostrand, 1950.

[7] F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, «Chelsea Publ.», 1949.

[8] K. YOSIDA & E. HEWITT, *Finitely additive measure*, «Trans. Am. Math. Soc.», 72, (1952), 46-66.

[9] E. J. MAC SHANE, *Remark concerning integration*, «Proc. Nat. Acad. Sci U. S. A.», 35, (1949), 46-49.