Contributi allo studio asintotico dell'equazione $x'''(t) + p(t)x(t) = 0$.

Memoria di GAETANO VILLARI (a Firenze)

A Giovanni Sansone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *È contenuto nel n. 1 della Memoria.*

1. Nonostante la semplicità dell'equazione lineare omogenea del 3° ordine binomia

$$x'''(t) + p(t)x(t) = 0, \qquad (' = d/dt) \tag{1}$$

può dirsi che i risultati di carattere generale relativi alle sue soluzioni sono alquanto scarsi e frammentari, specialmente se si confrontano con quelli che si riferiscono alla corrispondente equazione del 2° ordine

$$x''(t) + p(t)x(t) = 0.$$

La presente ricerca ha lo scopo di portare un contributo allo studio delle proprietà asintotiche della (1), nell'ipotesi che la funzione $p(t)$, *asintoticamente continua* (1), *non presenti carattere oscillatorio* (2) *e non si annulli identicamente in alcun tratto.*

Ciò equivale a supporre l'esistenza di un valore T della variabile t, tale che per $t > T$ la funzione $p(t)$ risulta continua ed assume valori sempre non negativi, ovvero sempre non positivi (senza annullarsi in alcun tratto).

Osservando allora che l'equazione

$$x'''(t) - p(t)x(t) = 0 \tag{2}$$

(1) Qui e nel seguito, dicendo che la funzione $f(t)$ gode *asintoticamente* della proprietà (P), intenderemo che esiste un valore T della variabile tale che, per $t > T$, $f(t)$ verifica sempre la (P).

(2) Diremo che una funzione $f(t)$, continua, presenta *carattere oscillatorio* (o brevemente: *é oscillante*) quando, comunque si scelga la costante reale α, è possibile trovare due valori distinti di t, t_1 e t_2, maggiori di α, per cui si abbia $f(t_1)f(t_2) < 0$.

è l'aggiunta della (1), ne segue che l'esame dei due casi ora detti si riduce allo studio parallelo della equazione (1) e della sua aggiunta (2), nelle ipotesi che la funzione $p(t)$

(3) $\begin{cases} \text{a)} & \textit{sia asintoticamente continua;} \\ \text{b)} & \textit{sia asintoticamente non negativa;} \\ \text{c)} & \textit{non si annulli in alcun tratto.} \end{cases}$

La prima parte della ricerca è dedicata all'introduzione di una conveniente classificazione delle soluzioni delle equazioni (1) e (2), ed all'esame delle loro principali proprietà.

Prendendo come modello il caso $p(t) =$ costante, accessibile con i metodi della teoria elementare, si verifica facilmente che, qualunque sia $p > 0$, l'equazione (1) e la sua aggiunta (2) ammettono sempre sia soluzioni oscillanti che soluzioni non oscillanti, sia soluzioni limitate (per $t \to +\infty$) che soluzioni non limitate.

Una tale classificazione non ha però luogo in generale, poichè, nelle ipotesi (3), è facile trovare esempi di equazioni del tipo (2) dotate di soluzioni *tutte non limitate*, o di equazioni del tipo (1) dotate di soluzioni *tutte non oscillanti.*

Tuttavia, un esame più approfondito del caso $p(t) =$ cost. permette di individuare quattro classi di soluzioni che possono caratterizzarsi nel seguente modo:

CLASSE A: *costituita dalle soluzioni $z(t)$ della* (1) *che verificano asintoticamente la relazione:*

(4) $$z'(t)z''(t) < 0\,;$$

CLASSE B: *costituita dalle soluzioni $y(t)$ della* (1) *per cui, comunque si scelga la costante reale α, esiste un valore $t_0 > \alpha$ tale che*

(5) $$y'(t_0)y''(t_0) \geq 0\,;$$

CLASSE A': *costituita dalle soluzioni $\omega(t)$ della* (2) *per cui, comunque si scelga la costante reale α, esiste un valore $t_0 > \alpha$ tale che*

(6) $$\omega'(t_0)\omega''(t_0) \leq 0\,;$$

CLASSE B': *costituita dalle soluzioni $w(t)$ della* (2) *che verificano asintoticamente la relazione*

(7) $$w'(t)w''(t) > 0.$$

Ebbene, se si assumono queste proposizioni come definizione delle quattro classi suddette, la ripartizione sussiste anche nell'ipotesi che la funzione $p(t)$ soddisfi le condizioni (3), nel senso che le classi A, B, A' e B' non risultano mai vuote.

Inoltre si riscontra che:

— *le soluzioni della classe A costituiscono in ogni caso uno spazio lineare di dimensione* 1, *sono limitate e sono asintoticamente monotone; precisamente tali che*:

$$\lim_{t\to+\infty} |z(t)| = c \geq 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} z'(t) = \lim_{t\to+\infty} z''(t) = 0. \tag{8}$$

— *le soluzioni della classe B (che nel caso $p =$ cost. sono tutte oscillanti) godono della proprietà di essere o tutte oscillanti o tutte non oscillanti; e nel caso che non siano oscillanti sono tutte non limitate.*

— *le soluzioni della classe A' (che nel caso $p =$ cost. sono tutte oscillanti) godono della proprietà di essere o tutte oscillanti o tutte non oscillanti, e costituiscono uno spazio lineare di dimensione* 2.

— *le soluzioni della classe B' risultano tutte non limitate e sono in ogni caso asintoticamente monotone.*

Si verifica poi che, tra le soluzioni dell'equazione (2), quelle appartenenti alla classe A' possono caratterizzarsi mediante la proprietà di risultare *ortogonali* a tutte le soluzioni della classe A, nel senso che: *se $\omega(t) \in A'$, e solo in tal caso, si ha*

$$\omega''(t)z(t) - \omega'(t)z'(t) + \omega(t)z''(t) = 0$$

per ogni soluzione $z(t) \in A$.

Infine, riferendosi al carattere oscillatorio delle soluzioni, si riscontra che se l'equazione (1) presenta soluzioni oscillanti (quelle della classe B), anche l'equazione (2) presenta soluzioni oscillanti (quelle della classe A'), e viceversa. Il che, con riferimento alla classificazione introdotta, può esprimersi dicendo che: *le soluzioni delle equazioni* (1) e (2), *appartenenti rispettivamente alle classi B e A', presentano tutte il medesimo carattere oscillatorio.*

La seconda parte della ricerca è dedicata allo studio delle proprietà asintotiche delle equazioni (1) e (2), nel caso che non esistano soluzioni oscillanti ed in particolare allo studio della stabilità delle rispettive soluzioni nulle.

Poichè le soluzioni delle classi A e A' costituiscono spazi lineari rispettivamente di dimensioni 1 e 2, mentre quelle delle classi B e B', nel caso non oscillante, risultano non limitate, ne segue che, nelle ipotesi (3) non si può in alcun caso parlare di stabilità vera e propria, ma al più di *stabilità condizionata* [3].

Nel caso delle equazioni del tipo (1), perchè tale stabilità condizionata sia asintotica, le (8) dovranno valere con $c = 0$; e sarà dimostrato che *ciò accade allora e solo quando*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} \tau^2 p(\tau) d\tau = +\infty. \tag{9}$$

Questa condizione caratterizza pertanto, nel caso non oscillante, le equazioni (1) con soluzione nulla *condizionatamente asintoticamente stabile.*

Per le equazioni del tipo (2), sempre in assenza di soluzioni oscillanti, sarà provato che *la condizione* (9) *è caratteristica per l'instabilità totale della soluzione nulla.*

Viceversa, se la (9) non è verificata (e pertanto il limite che ivi figura esiste finito), dalla classe A' si può estrarre una sottoclasse $\bar{A}'$ di soluzioni $\bar{\omega}(t)$, che costituiscono uno spazio lineare di dimensione 1 e verificano inoltre le condizioni

$$\lim_{t \to +\infty} |\bar{\omega}(t)| = c > 0, \quad \lim_{t \to +\infty} |\bar{\omega}'(t)| = \lim_{t \to +\infty} |\bar{\omega}''(t)| = 0,$$

essendo c una costante reale positiva; pertanto *per la soluzione nulla si ha il caso di stabilità condizionata non asintotica.*

Infine, poichè, come facilmente si prova con esempi, la (9) rappresenta una condizione *soltanto necessaria* per l'esistenza di soluzioni oscillanti della (1) e della (2), sarà dimostrato che una condizione sufficiente è data dall'esistenza di una costante $\lambda > 0$ tale che

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} \tau^{2-\lambda} p(\tau) d\tau = +\infty.$$

---

(3) Parlando di *stabilità condizionata* intenderemo, secondo la più comune definizione, che le condizioni che caratterizzano l'ordinaria stabilità siano soddisfatte da una classe di soluzioni dell'equazione in oggetto, costituenti uno spazio lineare.

PARTE PRIMA

2. - Consideriamo l'equazione

$$x'''(t) + p(t)x(t) = 0 \tag{1}$$

nell'ipotesi che la funzione $p(t)$ sia tale da soddisfare le condizioni (3) dichiarate al n. precedente.

Suddividiamo le soluzioni di (1) in due classi

CLASSE A: *costituita dalle soluzioni $z(t)$ che verificano asintoticamente la relazione*

$$z'(t)z''(t) < 0; \tag{4}$$

CLASSE B: *costituita dalle soluzioni $y(t)$ per cui, comunque si scelga la costante reale α, esiste un valore $t_0 > \alpha$ tale che*

$$y'(t_0)y''(t_0) \geq 0. \tag{5}$$

Le classi A e B così definite non sono vuote. Per la prima basta rifarsi ad un risultato di PH. HARTMAN e A. WINTNER che, nelle condizioni (3) per la funzione $p(t)$, assicura l'esistenza di una soluzione almeno dell'equazione (1) soddisfacente la (4) ([4]).

Per la classe B, consideriamo una soluzione $y(t)$ che verifichi in t_0 la (5), e dimostriamo che per $t > t_1 \geq t_0$ $y(t)$ non può in nessun caso soddisfare la relazione

$$y'(t)y''(t) < 0, \tag{10}$$

caratteristica delle soluzioni di (1) appartenenti alla classe A.

Possiamo valerci del seguente ragionamento.

In t_0 sono possibili due casi: $y(t_0)y''(t_0) \leq 0$, ovvero $y(t_0)y'')t_0) > 0$. Nel primo di questi per la funzione

$$F[y(t)] = \frac{1}{2}y'^2(t) - y(t)y''(t) \tag{11}$$ ([5])

([4]) Cfr. PH. HARTMAN - A. WINTNER, *Linear differential and difference equations with monotone solutions*, « Am. J. of Math. », 75(1953), 731-743.

([5]) La funzione $F[x(t)]$, delle cui proprietà ci serviremo anche in seguito, gioca un ruolo importante nello studio delle equazioni lineari del 3° ordine; cfr. ad es, G. SANSONE, *Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine nel campo reale*, « Rivista Mat. y Fis. teorica », (Tucuman), 6(1948), 195-253, § 2.

si ha $F(t_0) \geq 0$, e poichè, essendo $\dfrac{dF}{dt} = p(t)y^2(t) \geq 0$, $F[y(t)]$ risulta monotona crescente con t, sarà anche $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) > 0$. Ciò esclude che $y(t)$ possa, per $t > t_1 \geq t_0$, verificare la (10), poichè si avrebbe $\lim\limits_{t \to \infty} y'(t) = \lim\limits_{t \to \infty} y''(t) = 0$, $0 \leq \lim\limits_{t \to \infty} |y(t)| < +\infty$ e di conseguenza $\lim\limits_{t \to \infty} F[y(t)] = 0$.

Resta da esaminare il secondo caso: $y(t_0)y''(t_0) > 0$, e per fissare le idee supponiamo $y(t_0) > 0$, $y''(t_0) > 0$. Poichè per ipotesi $y(t)$ verifica la (5), dovrà essere $y'(t_0) \geq 0$, ed è possibile determinare $\delta > 0$ in modo che nell'intervallo $(t_0, t_0 + \delta)$ si abbia

$$y(t) > 0, \qquad y'(t) > 0, \qquad y''(t) > 0, \qquad y'''(t) \leq 0.$$

Può allora accadere che $y''(t)$ non si annulli mai per $t \geq t_0 + \delta$; il che porta che la funzione $y(t)$ non verifica in alcun punto la (10). Ovvero esisterà, ad es. per $t = t_2$ un primo zero di $y''(t)$ nell'intervallo $[t_0 + \delta, +\infty)$; ma in tale ipotesi si ha $F[y(t_2)] > 0$ e può riapplicarsi il ragionamento tenuto nel caso precedente

Osserviamo che, da quanto è stato ora dimostrato, segue in particolare che ogni soluzione $z(t)$ della classe A verifica la (4) per ogni $t > T$, essendo T quel valore della variabile a partire dal quale per le (3) la funzione $p(t)$ si suppone continua, non negativa e non identicamente nulla in alcun tratto [6].

3. Le soluzioni $y(t)$ della (1) appartenenti alla classe B godono, come è noto [7], della proprietà di essere *tutte oscillanti o tutte non oscillanti.*

Osserviamo inoltre che, se in t_0 si ha $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, ovvero $y'(t_0) = y''(t_0) = 0$, per la funzione $F[y(t)]$ introdotta al n. precedente otteniamo $F[y(t_0)] = 0$, $F[y(t)] > 0$ per $t > t_0$.

Ne segue: *ogni soluzione della classe B può presentare uno zero doppio al più, e lo stesso accade per la sua derivata prima.*

Da qui risulta in particolare che, se $y(t) \in B$ ha carattere non oscillatorio, anche la funzione $y(t) - k$ (qualunque sia la costante $k \neq 0$) ha carattere non oscillatorio. In altre parole: *se una soluzione dell'equazione* (1) *è oscillante rispetto alla retta* $y = k \neq 0$, *deve necessariamente esserlo rispetto alla retta* $y = 0$.

---

(6) Intenderemo sempre, nel corso della presente ricerca, di considerare valori di t interni all'intervallo $(T, +\infty)$.

(7) Tale proprietà può desumersi da M. ŠVEC, *Sur une propriété intégrale de l'équation* $y^{(n)} + Q(x)y = 0$, $n = 3, 4$, «Czech. Math. Journ.», 7(82), 1957, 450-462. Cfr. anche G. VILLARI, *Sul carattere oscillatorio delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine*, Boll. U. M. I., (3), 13(1958), 73-78.

Basta osservare a questo proposito che, se una tale soluzione $y(t)$ oscillasse rispetto alla retta $y = k \neq 0$ senza cambiare di segno, negli zeri di $y'(t)$ (tutti semplici, come si è visto, a partire da un conveniente valore di t) la funzione $F[y(t)]$ assumerebbe valori di segno alternativamente opposto, in contraddizione con la sua provata monotonia.

Vale infine il

Teorema 1. - *Le soluzioni dell'equazione* (1) *appartenenti alla classe* B, *se non hanno carattere oscillatorio, divergono asintoticamente, cioè* $\lim_{t\to\infty} |y(t)| = +\infty$.

Infatti, sia $y(t) \in B$ non oscillante. A partire da un conveniente valore di t, ad es. per $t > t_1$, sarà $y(t) \neq 0$, e per fissare le idee supponiamo $y(t) > 0$.

Per $t > t_1$ sarà anche $y'''(t) = -p(t)y(t) \leq 0$ da cui necessariamente $y''(t) > 0$; in caso contrario, se cioè $y''(t)$ diventasse e si mantenesse negativa, anche $y'(t)$ finirebbe per assumere valori negativi, e lo stesso dovrebbe accadere per $y(t)$, contro l'ipotesi.

Sarà dunque, per $t > t_1$, $y(t) > 0$, $y''(t) > 0$; e ne consegue che $y'(t)$ dovrà essere asintoticamente positiva, poichè diversamente $y(t)$ verrebbe a soddisfare la condizione caratteristica per le soluzioni della classe A.

Concludiamo che ogni soluzione della classe B, se non ha carattere oscillatorio, verifica asintoticamente le relazioni

$$y(t)y'(t) > 0, \qquad y'(t)y''(t) > 0,$$

e si ha da qui il *Teorema* 1.

4. Per le soluzioni $z(t)$ appartenenti alla classe A, dalla condizione caratteristica (4) segue che $|z(t)|$, $|z'(t)|$, $|z''(t)|$ sono monotone decrescenti e si ha quindi

$$\lim_{t\to\infty} |z(t)| = c \geq 0, \qquad \lim_{t\to\infty} z'(t) = \lim_{t\to\infty} z''(t) = 0; \tag{12}$$

ed inoltre, per ogni valore di t che si considera

$$z(t)z'(t) < 0, \qquad z'(t)z''(t) < 0.$$

Si ha il

Teorema 2. - *Le soluzioni appartenenti alla classe* A *costituiscono uno spazio lineare di dimensione* 1.

Perverremo alla dimostrazione provando che due soluzioni $z_1(t)$ e $z_2(t)$, appartenenti alla classe A e non coincidenti, differiscono per una costante moltiplicativa.

Ragioniamo per assurdo facendo l'ipotesi che per $t = t_0$ si abbia $z_1(t_0) = z_2(t_0)$ senza che sia $z_1(t) \equiv z_2(t)$.

La funzione $\bar{z}(t) = z_1(t) - z_2(t)$ sarà allora una soluzione (non identicamente nulla) dell'equazione (1), e, poichè $\bar{z}(t_0) = 0$, apparterrà alla classe B.

Possono darsi due casi: le soluzioni della classe B, e quindi $\bar{z}(t)$, hanno carattere oscillatorio, ovvero hanno carattere non oscillatorio.

Nel primo caso $\bar{z}(t)$ presenta infiniti zeri che, per quanto è stato provato al n. precedente, sono tutti semplici per $t > t_0$. In corrispondenza a tali punti la funzione $F[\bar{z}(t)]$ percorre una successione positiva e crescente; ne segue che, negli zeri di $\bar{z}(t)$, $|\bar{z}'(t)|$ non può assumere valori inferiori ad una conveniente costante positiva. D'altro canto per le (12) $\lim_{t\to\infty} z_1'(t) = \lim_{t\to\infty} z_2'(t) = 0$, dunque $\lim_{t\to\infty} \bar{z}'(t) = 0$, e si cade in assurdo.

Nel secondo caso, supponendo che $\bar{z}(t)$ non abbia carattere oscillatorio, per il *Teorema* 1 dovrebbe aversi $\lim |\bar{z}(t)| = \infty$. Ma anche questo è assurdo poichè, sempre per le (12), $z_1(t)$ e $z_2(t)$ ammettono limite finito e lo stesso accade per la loro differenza.

5. Consideriamo adesso l'equazione

$$x'''(t) - p(t)x(t) = 0, \tag{2}$$

aggiunta della (1).

Cominciamo con l'osservare che una soluzione $w(t)$ di (2) che per $t = t_0$ presenta uno zero doppio, o per la quale si abbia uno zero doppio di $w'(t)$, non può annullarsi per $t > t_0$, e si avrà in $(t_0, +\infty)$

$$w(t)w'(t) > 0, \qquad w'(t)w''(t) > 0.$$

Pertanto: *se esiste una soluzione* $\omega(t)$ *della* (2) *che abbia carattere oscillatorio, i suoi zeri dovranno necessariamente essere tutti semplici, e così pure quelli della sua derivata prima.*

Inoltre, poichè per la funzione

$$F[\omega(t)] = \frac{1}{2}\omega'^2(t) - \omega(t)\omega''(t)$$

si ha $F'[\omega(t)] = -p(t)\omega^2(t) \leq 0$, $\omega'(t)$ risulta limitata anzi la successione dei massimi relativi di $|\omega'(t)|$ è monotona decrescente. Si ha pure che nei punti in cui $\omega'(t) = 0$ è sempre $\omega(t)\omega''(t) < 0$ e tale prodotto risulta limitato in valore assoluto.

Infine non possono aversi zeri di $\omega''(t)$ nei punti in cui è anche $\omega(t)\omega'(t) \geq 0$.

Infatti se così fosse, se cioè $\omega''(t_0) = 0$ e nello stesso tempo $\omega(t_0)\omega'(t_0) \geq 0$, indicando con t_1 il primo zero di $\omega'(t)$ dell'intervallo $[t_0, +\infty]$ e tenendo conto della (2), si avrebbe

$$\omega(t_1)\omega''(t_1) > 0, \text{ ovvero } \omega''(t_1) = 0,$$

casi entrambi in contraddizione con quanto è stato più sopra osservato.

Concludiamo pertanto che *ogni zero di $\omega''(t)$ è contenuto in un intervallo che ha per estremi uno zero di $\omega'(t)$ ed il successivo zero di $\omega(t)$*; in ciascuno di tali intervalli esiste sempre uno zero di $\omega''(t)$ ed è unico, dato che $\omega'''(t)$ non può cambiare di segno.

6. Come facilmente si verifica, il wronskiano di due soluzioni dell'equazione (1) è una soluzione dell'equazione aggiunta (2), e viceversa.

Supponiamo allora che esistano soluzioni oscillanti dell'equazione (1) (quelle della classe B).

Indicando con $z(t)$ e $y(t)$ due soluzioni appartenenti rispettivamente alle classi A e B, la funzione

$$\bar{\omega}(t) = \begin{vmatrix} y(t) & z(t) \\ y'(t) & z'(t) \end{vmatrix} \tag{13}$$

è, come si è visto, soluzione della (2), e deve necessariamente essere oscillante; diversamente $y(t)$ e $z(t)$ avrebbero il medesimo carattere [8], e ciò contro l'ipotesi.

Ne segue che, se la (1) possiede soluzioni oscillanti, lo stesso accade per la sua aggiunta (2).

Facciamo ora l'ipotesi che nessuna delle soluzioni di (1) presenti carattere oscillatorio.

Per le proprietà delle soluzioni della classe A e per quanto è stato osservato alla fine del n. 3, è sempre possibile in tal caso supporre che per $t > t_0$ si abbia

$$\begin{aligned} &y(t) < 0, \qquad y'(t) < 0, \qquad y''(t) < 0 \\ &z(t) > 0, \qquad z'(t) < 0, \qquad z''(t) > 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Esisterà dunque, per la (13), una soluzione $\bar{\omega}(t)$ dell'equazione (2) tale che per $t > t_0$: $\bar{\omega}(t) > 0$, $\bar{\omega}''(t) < 0$; e si vede facilmente che $\bar{\omega}'(t)$ deve essere asintoticamente positiva, in caso contrario $\bar{\omega}(t)$ finirebbe per annullarsi ed assumere valori negativi, in contraddizione con le (14).

---

[8] Cfr. G. Villari, loc. cit. in [7]; n. 1.

In conclusione possiamo affermare che per $t > t_1 \geq t_0$

$$\bar{\omega}(t) > 0, \qquad \bar{\omega}'(t) > 0, \qquad \bar{\omega}''(t) < 0. \tag{15}$$

Ciò posto, indichiamo con $\omega(t)$ una qualsiasi soluzione dell'equazione (2), e poniamo

$$\omega(t) = \bar{\omega}(t) \cdot u(t). \tag{16}$$

Con successive derivazioni si vede facilmente che la funzione $v(t) = u'(t)$ è soluzione dell'equazione lineare omogenea del secondo ordine

$$\bar{\omega}(t)v''(t) + 3\bar{\omega}'(t)v'(t) + 3\bar{\omega}''(t)v(t) = 0 \tag{17}$$

da cui, moltiplicando per $\bar{\omega}^2(t)$:

$$\frac{d}{dt}[\bar{\omega}^3(t)v'(t)] = -3\bar{\omega}^2(t)\bar{\omega}''(t)v(t). \tag{18}$$

Sia $\bar{v}(t)$ una soluzione della (17) che, per $t = \xi > t_1$, verifica le condizioni $\bar{v}(\xi) > 0$, $\bar{v}'(\xi) > 0$; per la (15) e la (18) in un conveniente intorno destro di ξ la funzione $\bar{\omega}^3(t)\bar{v}'(t)$ risulta crescente, e poichè $\bar{\omega}^3(\xi)\bar{v}'(\xi) > 0$, ne consegue che per $t \geq \xi$ si ha sempre $\bar{v}(t) > 0$, $\bar{v}'(t) > 0$.

$\bar{v}(t)$ ha pertanto carattere non oscillatorio, e per una nota proprietà delle equazioni differenziali lineari del 2° ordine, nessun'altra soluzione della (17) può essere oscillante. Lo stesso può allora dirsi per la funzione $u(t)$ che figura nella (16), e resta provato che non può esistere alcuna soluzione oscillante per l'equazione (2).

Da quanto precede possiamo concludere:

TEOREMA 3. - *Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni oscillanti dell'equazione* (1) *è che esistano soluzioni oscillanti dell'equazione aggiunta* (2).

7. Supponiamo in questo numero la (simultanea) esistenza di soluzioni oscillanti delle equazioni (1) e (2).

Indicando con $w(t)$ una soluzione di (2) che non abbia carattere oscillatorio [9], a partire da un conveniente valore di t, ad es. per $t > t_0$, sarà $w(t) \neq 0$, e per fissare le idee supponiamo $w(t) > 0$.

---

[9] L'esistenza di una soluzione di questo tipo è data ad es. dalle condizioni iniziali $w(t_0) = w'(t_0) = 0$, $w''(t_0) > 0$.

$w''(t)$ risulta pertanto crescente per $t > t_0$ e deve necessariamente diventare e mantenersi positiva. Se così non fosse, se cioè si avesse $w''(t) < 0$ per $t > t_0$, dovrebbe anche essere $w'(t) > 0$, in caso contrario la funzione $w(t)$, decrescente e convessa, finirebbe per diventare negativa, e ciò contraddice quanto è stato supposto.

L'ipotesi $w''(t) < 0$ porterebbe dunque di conseguenza

$$w(t) > 0, \qquad w'(t) > 0, \qquad w''(t) < 0, \quad \text{per } t > t_0;$$

ma, in virtù del ragionamento svolto nella seconda parte del numero precedente, nessuna soluzione della (9), potrebbe avere carattere oscillatorio, e si cade in assurdo.

Ne segue che, se per $t > t_0$, $w(t) > 0$, $w''(t)$ finirà per diventare e mantenersi positiva, e analogo fatto dovrà accadere per $w'(t)$ che risulta asintoticamente crescente e concava.

In definitiva si può affermare che: *se l'equazione* (2) *presenta soluzioni oscillanti, ogni altra soluzione* $w(t)$ *che non abbia carattere oscillatorio è tale da verificare asintoticamente le relazioni*

$$w(t)w'(t) > 0, \qquad w'(t)w''(t) > 0. \tag{19}$$

Ciò posto, indichi $\omega(t)$ una soluzione oscillante di (2) e $z(t)$ una soluzione di (1) appartenente alla classe A.

Poichè si ha, qualunque siano le soluzioni $z(t)$ e $\omega(t)$ di (1) e (2)

$$\frac{d}{dt}[\omega''z - \omega'z' + \omega z''] = 0$$

sarà anche identicamente

$$\omega''(t)z(t) - \omega'(t)z'(t) + \omega(t)z''(t) = \text{cost.}, \tag{20}$$

e dimostriamo che, nelle ipotesi fatte sulla natura di $\omega(t)$ e $z(t)$, dovrà necessariamente aversi

$$\omega''(t)z(t) - \omega'(t)z'(t) + \omega(t)z''(t) = 0. \tag{21}$$

Infatti ragionando per assurdo, se al secondo membro della (21) figurasse una costante $k \neq 0$, negli zeri di $\omega(t)$ si avrebbe

$$\omega''(t)z(t) = k + \omega'(t)z'(t);$$

poichè, come si è visto (nn. 4. e 5), $\omega'(t)$ risulta asintoticamente limitata e $\lim_{t\to\infty} z'(t) = 0$, sarà anche $\lim_{t\to\infty} \omega'(t)z'(t) = 0$, e pertanto, a partire da un conveniente valore della variabile t, negli zeri di $\omega(t)$ la funzione $\omega''(t)\ z(t)$ avrebbe sempre lo stesso segno, quello della costante k.

Ciò contraddice quanto è stato osservato al n. 5, poichè, essendo $z(t)$ di segno costante, ne seguirebbe che, per t sufficientemente grande, negli zeri di $\omega(t)$ la funzione $\omega''(t)$ avrebbe sempre lo stesso segno.

Se ne conclude che ogni soluzione oscillante dell'equazione (2) verifica la (21).

Inversamente, se $z(t) \in A$ e si suppone l'esistenza di soluzioni oscillanti della (2), la (21) è condizione sufficiente perchè $\omega(t)$ abbia carattere oscillatorio.

Basta per questo osservare che, nelle nostre ipotesi, ogni soluzione di (2) che non sia oscillante verifica asintoticamente le (19), e pertanto al primo membro della (21) verrebbe ad aversi la somma di tre termini non nulli e di segno uguale.

Osserviamo infine che, se $\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$ rappresentano due soluzioni oscillanti, linearmente indipendenti, della (2), la funzione $\omega(t) = c_1\omega_1(t) + c_2\omega_2(t)$ (con c_1, c_2 costanti reali qualsiasi) è ancora soluzione della (2) e, poichè verifica la (21), presenta carattere oscillatorio.

Inversamente ogni soluzione oscillante di (2) si esprime come combinazione lineare di $\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$.

Infatti, indicando con $w(t)$ una soluzione che non abbia carattere oscillatorio, la terna di funzioni $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $w(t)$ rappresenta un sistema fondamentale di soluzioni della (2), ed è ben noto che per una qualunque soluzione oscillante $\omega(t)$ di tale equazione si ha identicamente

$$\omega(t) = c_1\omega_1(t) + c_2\omega_2(t) + c_3 w(t),$$

con c_1, c_2, c_3 costanti reali.

È allora facile vedere che dev'essere $c_3 = 0$. In caso contrario si avrebbe

$$\omega'(t) = c_1\omega'_1(t) + c_2\omega'_2(t) + c_3 w'(t);$$

ma, da quanto è stato osservato al n. 5, $\omega'_1(t)$ e $\omega'_2(t)$ si mantengono limitate, mentre $w'(t)$ per le (19) e la stessa (2) diverge per $t \to +\infty$. Ne seguirebbe $\lim_{t\to\infty} |\omega'(t)| = +\infty$, e ciò è in contraddizione con l'aver supposto $\omega(t)$ oscillante.

In definitiva le considerazioni svolte in questo numero possono riassumersi nel seguente

TEOREMA 4 - *Se l'equazione* (2) *presenta soluzioni* $\omega(t)$ *oscillanti, queste costituiscono uno spazio lineare di dimensione* 2, *e sono caratterizzate dalla proprietà di verificare, nei confronti delle soluzioni* $z(t)$ *di* (1) $\in A$ *la relazione di «ortogonalità»* (21).

Ogni altra soluzione $w(t)$ *della* (2) *che non abbia carattere oscillatorio, verifica asintoticamente le* (19).

8. - Supponiamo adesso che nessuna delle soluzioni delle equazioni (1) e (2) abbia carattere oscillatorio.

In tale ipotesi, a partire da un conveniente valore di t, qualunque soluzione di (2) e la sua derivata terza finiscono per assumere e mantenere valori di segno non discorde.

Ne segue che la derivata seconda è sempre asintoticamente monotona; ed allora sono a priori possibili due soli casi:

soluzioni $w(t)$ per le quali finisce per essere $w(t)w''(t) > 0$ $(w''(t)w'''(t) \geq 0)$, e che pertanto sono caratterizzate dalla proprietà di verificare asintoticamente le condizioni

$$w(t)w'(t) > 0, \qquad w'(t)w''(t) > 0; \tag{19}$$

soluzioni $\omega(t)$ per le quali si ha invece $\omega(t)\omega''(t) < 0$ $(\omega''(t)\omega'''(t) \leq 0)$ e che pertanto sono caratterizzate dalla proprietà di verificare asintoticamente le condizioni

$$\omega(t)\omega'(t) > 0, \qquad \omega'(t)\omega''(t) < 0 \ \text{[10]}. \tag{22}$$

Osserviamo che, in assenza di soluzioni oscillanti dell'equazione (2), esistono in ogni caso soluzioni appartenenti ai due tipi descritti. Per il primo basta infatti considerare una soluzione dotata di uno zero doppio; per il secondo tipo è sufficiente rifarsi alla funzione $\bar{\omega}(t)$ introdotta con la (13) del n. 6.

Ciò posto, se $z(t)$ rappresenta una soluzione della (1) appartenente alla classe A, una soluzione dell'equazione (2) che verifichi la relazione (di ortogonalità) (21) non può che essere del tipo caratterizzato dalle (22).

Per le altre soluzioni infatti, per le quali valgono asintoticamente le (19), al primo membro della (21) finirebbe per aversi la somma di tre termini non nulli e di segno uguale.

Dimostriamo allora che, reciprocamente, ogni soluzione $\omega(t)$ caratterizzata dalle (22) verifica la (21).

Fissata la funzione $z(t)$ esistono certamente almeno due soluzioni di (2) del tipo richiesto, $\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$, che sono linearmente indipendenti e verificano la (21); ad es. quelle determinate dalle condizioni iniziali

$$\omega_1(t_0) = 0, \qquad \omega_1'(t_0) = z(t_0), \qquad \omega_1''(t_0) = z'(t_0),$$
$$\omega_2(t_0) = z(t_0), \qquad \omega_2'(t_0) = 0, \qquad \omega_2''(t_0) = -z''(t_0).$$

[10] $\omega'(t)$ non può che comportarsi come è indicato nella (22); basta riflettere che, se diventasse (e perciò si mantenesse) tale da verificare $\omega'(t)\omega''(t) > 0$, la funzione $\omega(t)$ dovrebbe necessariamente annullarsi e cambiare di segno, contro l'ipotesi.

Indicando con $\overline{w}(t)$ un'altra soluzione che verifica le condizioni

$$\overline{w}(t_0) = \overline{w}'(t_0) = 0, \qquad \overline{w}''(t_0) \neq 0$$

(ed appartiene pertanto al tipo caratterizzato dalla (19)), la terna di funzioni $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\overline{w}(t)$ rappresenta un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (2), e per qualunque altra soluzione $\omega(t)$ si ha

$$\omega(t) = c_1\omega_1(t) + c_2\omega_2(t) + c_3\overline{w}(t)$$

con c_1, c_2, c_3 costanti reali.

Si riscontra da qui che, se $\omega(t)$ verifica asintoticamente le (22), deve essere $c_3 = 0$.

In caso contrario, poichè dalle (22) $|\omega_1'(t)|$ e $|\omega_2'(t)|$ risultano limitate, mentre, per le (19) e la stessa (2), $\lim\limits_{t \to \infty} |\overline{w}'(t)| = +\infty$, si avrebbe $\lim\limits_{t \to \infty} |\omega'(t)| = +\infty$, e ciò contraddice il supposto carattere di $\omega(t)$.

Concludiamo che ogni soluzione appartenente al secondo dei due tipi indicati è combinazione lineare di $\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$ e come tale verifica la (21).

Si osservi infine che, inversamente, ogni combinazione lineare di $\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$ è ancora soluzione della (2) e tale da verificare asintoticamente le (22); infatti le soluzioni di tipo diverso posseggono, come si è visto, derivata prima divergente, contrariamente a quanto accade per $\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$.

Vale dunque il

TEOREMA 5. - *In assenza di soluzioni oscillanti, l'equazione* (2) *possiede in ogni caso soluzioni* $\omega(t)$ *che verificano asintoticamente le* (22); *esse costituiscono uno spazio lineare di dimensione* 2 *e sono caratterizzate dalla proprietà di verificare, nei confronti delle soluzioni* $z(t)$ *di* $(1) \in A$, *la relazione di «ortonalità»* (21).

Ogni altra soluzione $w(t)$ *della* (2) *verifica asintoticamente le* (19).

9. - I risultati conseguiti ai due numeri precedenti, e considerazioni di analogia con quanto è stato fatto per le soluzioni dell'equazione (1), consigliano di introdurre per le soluzioni dell'equazione (2) la seguente classificazione:

CLASSE A': *costituita dalle soluzioni* $\omega(t)$ *per cui, comunque si scelga la costante reale* $\alpha > 0$, *esiste un valore* $t_0 > \alpha$ *tale che*

$$\omega'(t_0)\omega''(t_0) \leq 0; \tag{6}$$

CLASSE B': *costituita dalle soluzioni $w(t)$ che verificano asintoticamente la relazione*

$$w'(t)w''(t) > 0. \tag{7}$$

Le classi A' e B' non sono vuote. Per la prima basta considerare le soluzioni oscillanti di (2) o, nel caso che non ve ne siano, quelle che verificano asintoticamente le (22) (vedi n. 8). Per la seconda classe basta considerare le soluzioni di (2) dotate di uno zero doppio, o di uno zero doppio della loro derivata prima.

Dai risultati dei numeri precedenti segue inoltre:

TEOREMA 6. – *Le soluzioni della classe A' costituiscono uno spazio lineare di dimensione 2, e godono della proprietà di essere o tutte oscillanti o tutte non oscillanti.*

TEOREMA 7. – *Le soluzioni della classe B' sono tutte non limitate, e sono in ogni caso asintoticamente monotone.*

TEOREMA 8. – *Tra le soluzioni dell'equazione* (2) *quelle della classe A' possono caratterizzarsi mediante la proprietà di verificare, nei confronti delle soluzioni $z(t) \in A$, la relazione* (*di ortogonalità*) (22).

PARTE SECONDA

10. Per una più accurata indagine sul carattere asintotico delle soluzioni dell'equazione (1), ed allo scopo di individuare l'eventuale tipo di stabilità della sua soluzione nulla, riveste particolare interesse il comportamento delle soluzioni $z(t)$ appartenenti alla classe A.

Per ciascuna di queste si sa già che $|z(t)|$ ha andamento monotono decrescente, e cercheremo ora di stabilire sotto quali condizioni accade che

$$\lim_{t \to \infty} z(t) = 0. \tag{23}$$

A questo scopo, indicando con $w(t)$ una soluzione appartenente alla classe B', ricordiamo che dalla (20) e dal *Teorema* 8 si ha:

$$w(t)z''(t) - w'(t)z'(t) + w''(t)z(t) = k \neq 0. \tag{24}$$

Ne segue che, se $\lim_{t \to \infty} |w''(t)| = +\infty$, *dovrà necessariamente valere la* (23) ([11]).

([11]) La monotonia di $w''(t)$, e quindi l'esistenza del suo limite, si desume dalle (19) e dalla (2).

Inversamente, valga la (23), e per fissare le idee supponiamo che si abbia

$$z(t) > 0, \qquad z'(t) < 0, \qquad z''(t) > 0.$$

La funzione $f(t) = z(t) - tz'(t)$, poichè $f'(t) = -tz''(t) < 0$, risulta positiva e decrescente [12], ed ha per limite lo zero. In caso contrario infatti esisterebbe una costante positiva h_1, tale che: $-z'(t) > h_1/t$; ciò porterebbe, integrando:

$$z(t_0) - z(t) > h_1 \log \frac{t}{t_0},$$

e passando al limite per $t \to +\infty$ si cadrebbe in assurdo.

Sarà dunque $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = 0$, e pertanto, se vale la (23), vale anche

$$\lim_{t \to \infty} tz'(t) = 0. \tag{25}$$

Analogamente, la funzione $g(t) = t^2 z''(t) - 2tz'(t) + 2z(t)$, poichè si ha $g'(t) = -t^2 p(t) z(t) \leq 0$, risulta positiva e decrescente, e deve avere per limite lo zero. Diversamente esisterebbe una costante positiva h_2 tale che $tz''(t) > h_2/t$. Da qui integrando si avrebbe

$$f(t_0) - f(t) > h_2 \log \frac{t}{t_0},$$

e passando al limite per $t \to +\infty$ si cadrebbe in assurdo.

Sarà dunque $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 0$, e pertanto, se vale la (23) (e quindi la (25)), vale anche

$$\lim_{t \to \infty} t^2 z''(t) = 0. \tag{26}$$

Da quanto precede è facile dimostrare che, *se vale la* (23), *dovrà anche essere* $\lim\limits_{t \to \infty} |\, w''(t)\, | = +\infty$.

Infatti, supponendo $w''(t)$ limitata, lo saranno anche $\dfrac{w'(t)}{t}$ e $\dfrac{w(t)}{t^2}$, e passando al limite per $t \to +\infty$ al primo membro della (24), che possiamo scrivere

$$\frac{w(t)}{t^2} t^2 z''(t) - \frac{w'(t)}{t} tz'(t) + w''(t) z(t) = k \neq 0,$$

per le (23), (25) e (26) si cade in assurdo.

---

(12) Ovviamente potremo sempre supporre $t > 0$.

Concludendo si ha il

TEOREMA 9. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè per le soluzioni* $z(t)$ *dell'equazione* (1) *appartenenti alla classe* A *si abbia* $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)=0$, *è che le soluzioni* $w(t)$ *dell'equazione* (2) *appartenenti alla classe* B' *verifichino* $\lim\limits_{t\to\infty} |\, w''(t)\, | = +\infty$.

11. Sia $\bar{w}(t)$ una soluzione dell'equazione (2) definita in $t_0>0$ delle condizioni iniziali

$$\bar{w}(t_0)=\bar{w}'(t_0)=0, \qquad \bar{w}''(t_0)>0,$$

e perciò appartenente alla classe B'.

Si ha

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\bar{w}(t)}{t^2}\right]=\frac{t\bar{w}'(t)-2\bar{w}(t)}{t^3},$$

e, ponendo $r(t)=t\bar{w}'(t)-2\bar{w}(t)$, otteniamo

$$r(t_0)=0, \quad r'(t_0)>0, \quad r''(t)=tp(t)\bar{w}(t)>0 \quad \text{per} \quad t\geq t_0 .$$

La funzione $\dfrac{\bar{w}(t)}{t^2}$ risulta dunque positiva e crescente per $t>t_0$, e dalla (2) integrando

$$\bar{w}''(t)-\bar{w}''(t_0)=\int_{t_0}^{t} p(\tau)w(\tau)d\tau > \frac{\bar{w}(t_0)}{t_0^2}\int_{t_0}^{t}\tau^2 p(\tau)d\tau.$$

Da qui, in virtù del *Teorema* 9, segue che: *la condizione*

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\tau^2 p(\tau)d\tau=+\infty \tag{27}$$

è sufficiente perchè ogni soluzione $z(t)$ *appartenente alla classe* A *verifichi la* (23).

Nel numero seguente invertiremo questo risultato dimostrando che la condizione

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\tau^2 p(\tau)d\tau=k<+\infty \tag{28}$$

è sufficiente perchè ogni soluzione $z(t)\in A$ abbia limite non nullo per $t\to+\infty$.

Più precisamente proveremo che, se vale la (28), comunque si scelga la costante reale $c > 0$, esiste almeno una soluzione, sia della (1) che della (2), che tende a c per $t \to +\infty$.

Nel caso dell'equazione (1) tale soluzione risulta dunque non oscillante, e poichè è limitata, per il *Teorema* 1 non può che appartenere alla classe A.

Ne segue, in virtù del *Teorema* 2, che ogni soluzione della classe A ammette limite non nullo.

12. Proponiamoci di dimostrare che, se $p(t)$ è una funzione continua e tale che si abbia

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} \tau^2 \mid p(\tau) \mid d\tau = k < +\infty, \tag{29}$$

esiste almeno una soluzione $\bar{x}(t)$ dell'equazione

$$x'''(t) + p(t)x(t) = 0 \tag{30}$$

tale da verificare asintoticamente la limitazione

$$0 < q \leq \mid \bar{x}(t) \mid < +\infty. \tag{31}$$

Ponendo

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = \dfrac{t^2}{2} u_1(t) + tu_2(t) + u_3(t), \\ \bar{x}'(t) = tu_1(t) + u_2(t), \\ \bar{x}''(t) = u_1(t), \end{cases}$$

$\bar{x}(t)$ sarà soluzione della (30) allora e solo che sia

$$\begin{cases} u'_1(t) = -p(t)\left[\dfrac{t^2}{2} u_1(t) + tu_2(t) + u_3(t)\right], \\ u'_2(t) = tp(t)\left[\dfrac{t^2}{2} u_1(t) + tu_2(t) + u_3(t)\right], \\ u'_3(t) = -\dfrac{t^2}{2} p(t)\left[\dfrac{t^2}{2} u_1(t) + tu_2(t) + u_3(t)\right]. \end{cases} \tag{32}$$

Basterà allora provare che tale sistema risulta verificato da tre funzioni continue $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ che verificano inoltre asintoticamente le limitazioni

$$(33)\qquad |u_1(t)| \leq \frac{1}{t^2}, \qquad |u_2(t)| \leq \frac{1}{t}, \qquad |u_3(t) - c| \leq 1,$$

con c costante reale che basterà supporre ≥ 3.

Ciò posto, per ottenere il risultato desiderato, dimostreremo dapprima l'esistenza di almeno una soluzione del sistema di equazioni integrali

$$(34)\qquad \begin{cases} u_1(t) = \displaystyle\int_t^\infty p(\tau)\left[\frac{\tau^2}{2} u_1(\tau) + \tau u_2(\tau) + u_3(\tau)\right] d\tau, \\[2ex] u_2(t) = -\displaystyle\int_t^\infty \tau p(\tau)\left[\frac{\tau^2}{2} u_1(\tau) + \tau u_2(\tau) + u_3(\tau)\right] d\tau, \\[2ex] u_3(t) = c + \displaystyle\int_t^\infty \frac{\tau^2}{2} p(\tau)\left[\frac{\tau^2}{2} u_1(\tau) + \tau u_2(\tau) + u_3(\tau)\right] d\tau, \end{cases}$$

con che rimane provato che il sistema (32) è soddisfatto da almeno una terna di funzioni soddisfacenti le condizioni

$$\lim_{t\to+\infty} u_1(t) = \lim_{t\to+\infty} u_2(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} u_3(t) = c,$$

e verificheremo poi che tali funzioni soddisfano anche alle prime due delle (33) [13].

Cominciamo con l'osservare che per la (29), fissata la costante $c \geq 3$, è sempre possibile determinare $\bar{t}$ in modo che per $t \geq \bar{t}$ si abbia

$$\int_{\bar{t}}^{t} \tau^2 |p(\tau)| \, d\tau < \frac{1}{3+c},$$

e pertanto

$$(35)\quad \int_t^\infty \tau^2 |p(\tau)| \, d\tau \leq \frac{1}{3+c}, \qquad \int_t^\infty \tau |p(\tau)| \, d\tau \leq \frac{1}{t}\,\frac{1}{3+c}, \qquad \int_t^\infty |p(\tau)| \, d\tau \leq \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{3+c}.$$

([13]) Ci serviremo, con opportuni affinamenti, di un metodo già in precedenza adottato in vari problemi di carattere esistenziale; cfr. ad es. G. VILLARI, *Sul comportamento asintotico degli integrali di una classe di equazioni differenziali non lineari*, « Riv. Mat. Univ. di Parma », 5 (1954), 83-98.

Ciò posto definiamo in $[\bar{t}, +\infty]$ le successioni $\{u_i^{(n)}(t)\}$ $(i=1, 2, 3)$ con la seguente legge

$$(36)\quad \begin{cases} u_1^{(n)}(t) = u_2^{(n)}(t) = 0, \qquad u_3^{(n)}(t) = c, & \text{per } t \geq \bar{t}+n; \\ \left.\begin{array}{l} u_1^{(n)}(t) = \displaystyle\int_{t+\frac{1}{n}}^{\bar{t}+n+\frac{1}{n}} p(\tau)R[\tau, u^{(n)}(\tau)]d\tau, \\ u_2^{(n)}(t) = \displaystyle\int_{t+\frac{1}{n}}^{\bar{t}+n+\frac{1}{n}} \tau p(\tau)R[\tau, u^{(n)}(\tau)]d\tau, \\ u_3^{(n)}(t) = c + \displaystyle\int_{t+\frac{1}{n}}^{\bar{t}+n+\frac{1}{n}} \frac{\tau^2}{2} p(\tau)R[\tau, u^{(n)}(\tau)]d\tau, \end{array}\right\} & \text{per } \bar{t} \leq t \leq \bar{t}+n \end{cases}$$

ove per semplicità di scrittura abbiamo posto

$$R[t, u^{(n)}(t)] = \frac{t^2}{2} u_1^{(n)}(t) + t u_2^{(n)}(t) + u_3^{(n)}(t) \text{ (14)}.$$

Negli intervalli $\left[\bar{t}+n-\frac{1}{n}, \bar{t}+n\right]$, $\left[\bar{t}+n-\frac{2}{n}, \bar{t}+n-\frac{1}{n}\right], \dots, \left[\bar{t}, \bar{t}+\frac{1}{n}\right]$, tenendo conto delle (35) risulta allora

$$|u_1^{(n)}(t)| < \frac{1}{t^2}, \qquad |u_2^{(n)}(t)| < \frac{1}{t}, \qquad |u_3^{(n)}(t) - c| < 1,$$

---

(14) Analogamente, nel corso di questo paragrafo, porremo

$$R[t, \bar{u}] = \frac{t^2}{2}\bar{u}_1 + t\bar{u}_2 + \bar{u}_3,$$

$$R[t, (\bar{u} - u^{(n)})] = \frac{t^2}{2}(\bar{u}_1 - u_1^{(n)}) + t(\bar{u}_2 - u_2^{(n)}) + (\bar{u}_3 - u_3^{(n)}),$$

$$R[t, |\bar{u} - u^{(n)}|] = \frac{t^2}{2} |\bar{u}_1 - u_1^{(n)}| + t|\bar{u}_2 - u_2^{(n)}| + |\bar{u}_3 - u_3^{(n)}|,$$

$$R[t, (|\bar{u}| + |u^{(n)}|)] = \frac{t^2}{2}(|\bar{u}_1| + |u_1^{(n)}|) + t(|\bar{u}_2| + |u_2^{(n)}|) + (|\bar{u}_3| + |u_3^{(n)}|).$$

e ne segue l'equilimitatezza, per $t \geq \bar{t}$, delle funzioni $\{ u_i^{(n)}(t) \}$, $i = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, \dots$.

Indicando poi con t' e t'' $(t'' > t')$ due valori dell'intervallo $[t, +\infty)$, si ha

$$\Delta_i^{(n)} = | u_i^{(n)}(t'') - u_i^{(n)}(t') | \leq (3 + c) \int_{t'+\frac{1}{n}}^{t''+\frac{1}{n}} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} |p(\tau)| d\tau, \quad i = 1, 2, 3;$$

in virtù delle (35), fissato $\sigma > 0$, è possibile determinare t^* in guisa che si abbia

$$\int_{t^*}^{\infty} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} |p(\tau)| d\tau < \frac{1}{2} \frac{\sigma}{3+c}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

e pertanto, qualunque sia la coppia t', t'' di valori maggiori di t^*, risulta $\Delta_i^{(n)} < \sigma$.

Nell'intervallo $[t, t^*]$ indicando con H_i il massimo della funzione continua $\dfrac{t^{i-1}}{(i-1)!} | p(t) |$, si ha d'altra parte

$$\Delta_i^{(n)} < (3 + c) H_i (t'' - t').$$

Concludiamo che nell' intervallo $[\bar{t}, +\infty)$, per $t'' - t' < \dfrac{\sigma}{H(3+c)}$ $(H = \max H_i,\ i = 1, 2, 3)$, risulta, qualunque sia l'indice n,

$$\Delta_i^{(n)} = | u_i^{(n)}(t'') - u_i^{(n)}(t') | < \sigma, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Segue da qui l'equicontinuità delle funzioni considerate, ed allora da ciascuna delle successioni $\{ u_i^{(n)}(t) \}$, $i = 1, 2, 3$, è possibile estrarre una sottosuccessione, di eguali indici, convergente uniformemente per $t \geq \bar{t}$ verso una funzione continua $\bar{u}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$.

Si ha

$$(37) \qquad | \bar{u}_1(t) | \leq \frac{1}{t^2}, \qquad | \bar{u}_2(t) | \leq \frac{1}{t}, \qquad | \bar{u}_3(t) - c | \leq 1.$$

Si ha pure

$$D_i = \int_t^\infty \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} p(\tau) R[\tau,\ \bar{u}(\tau)] d\tau - \int_{t+\frac{1}{n}}^{\bar{t}+n+\frac{1}{n}} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} p(\tau) R[\tau,\ u^{(n)}(\tau)] d\tau =$$

$$= \int_t^{t+\frac{1}{n}} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} p(\tau) R[\tau,\ \bar{u}(\tau)] d\tau + \int_{\bar{t}+n+\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} p(\tau) R[\tau,\ u^{(n)}] d\tau +$$

$$+ \int_{t+\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} p(\tau) R[\tau,\ (\bar{u}(\tau) - u^{(n)})] d\tau,$$

da cui

$$| D_i | < (3+c) \int_t^{t+\frac{1}{n}} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} | p(\tau) | d\tau + (3+c) \int_{\bar{t}+n+\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} | p(\tau) | d\tau +$$

$$+ \int_{t+\frac{1}{n}}^{t^*} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} | p(\tau) | R[\tau,\ | \bar{u}(\tau) - u^{(n)}(\tau) |] d\tau +$$

$$+ \int_{t^*}^{\infty} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} | p(\tau) | R[\tau,\ (| \bar{u}(\tau) | + | u^{(n)}(\tau) |)] d\tau.$$

Scelto allora $\sigma > 0$, è possibile determinare t^* in modo che il quarto degli integrali ora scritti risulti minore di $\sigma/4$; poichè poi nell'intervallo $[\bar{t},\ t^*]$ le successioni $\{ u_i^{(n)}(t) \}$ tendono uniformemente alle funzioni $\bar{u}_i(t)$, $i = 1,\ 2,\ 3$, esisterà un indice n_1 tale che, per $n > n_1$, anche il terzo integrale risulterà minore di $\sigma/4$; ed in modo analogo esisteranno due altri indici n_2 e n_3 a partire dai quali anche il primo ed il secondo integrale risultano minori di $\sigma/4$.

Detto allora $\bar{n}$ il più grande degli indici n_1, n_2, n_3, ne segue che, per $n > \bar{n}$, $| D_i | < \sigma$, ovvero

$$\lim_{n \to \infty} \int_{t+\frac{1}{n}}^{\bar{t}+n+\frac{1}{n}} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} p(\tau) R[\tau,\ u^{(n)}(\tau)] d\tau = \int_t^\infty \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} p(\tau) R[\tau,\ \bar{u}(\tau)] d\tau.$$

Si conclude che le funzioni $\bar{u}_1(t)$, $\bar{u}_2(t)$, $\bar{u}_3(t)$ verificano il sistema (34), e poichè valgono le (37), la funzione

$$\bar{x}(t) = \frac{t^2}{2}\bar{u}_1(t) + t\bar{u}_2(t) + \bar{u}_3(t)$$

è soluzione della (30) e verifica la (31).

13. Le considerazioni svolte al numero precedente permettono di affermare, come conseguenza della (28), l'esistenza di una soluzione dell'equazione (1), asintoticamente limitata e maggiore di un opportuno numero positivo.

Tale soluzione risulta dunque non oscillante, ed essendo limitata, non può che appartenere alla classe A.

Ne segue, per il *Teorema* 2, che *la* (28) *è condizione sufficiente perchè le soluzioni della classe A ammettano limite non nullo,* e pertanto, con riferimento a quanto osservato al n. 11, possiamo concludere:

TEOREMA 10. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè per le soluzioni* $z(t)$ *della classe A si abbia* $\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$, *è che valga la* (27) *cioè*

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\tau^2 p(\tau)d\tau = +\infty.$$

In termini di stabilità i risultati ottenuti possono così riassumersi:

TEOREMA 11. - *Per la soluzione nulla dell'equazione* (1), *in assenza di soluzioni oscillanti* ([15]), *si ha stabilità di tipo condizionato relativa alle soluzioni della classe A. E precisamente tale stabilità sarà asintotica se vale la* (27), *non asintotica in caso contrario.*

14. Rimane da esaminare il caso non oscillante per le equazioni del tipo (2).

Dai risultati del n. 8 si sa che le soluzioni della classe B' non sono limitate, mentre quelle della classe A' sono caratterizzate dalla proprietà di verificare asintoticamente le relazioni

$$\omega(t)\omega'(t) > 0, \qquad \omega'(t)\omega''(t) < 0. \tag{22}$$

([15]) L'esistenza di equazioni dei tipi (1) e (2) prive di soluzioni oscillanti, nel caso che la condizione (27) sia o meno soddisfatta, è garantita dalle considerazioni e dagli esempi che, per comodità di trattazione, sono riportati nel successivo n. 15.

Dalle considerazioni del n. 12 è possibile affermare, come conseguenza della (28), l'esistenza di una soluzione limitata della (2). Tale soluzione non può allora che appartenere alla classe A', e pertanto, in considerazione delle (22): *se vale la* (28) *esistono soluzioni della classe A' dotate di limite finito non nullo.*

Sia $\omega(t)$ una di tali soluzioni; per la (22) possiamo supporre che per $t \geq t_0$ si abbia

$$\omega(t) > 0, \qquad \omega'(t) > 0, \qquad \omega''(t) < 0;$$

sia inoltre $z(t)$ una soluzione della (1) appartenente alla classe A, ed è lecito ancora supporre che sia

$$z(t) > 0, \qquad z'(t) < 0, \qquad z''(t) > 0.$$

La funzione $\bar{\omega}(t) = \omega(t) \int_{t_0}^{t} \frac{z(\tau)}{\omega^2(\tau)} d\tau$, tenendo conto delle (21), risulta soluzione della (2) e verifica le condizioni (22); inoltre per il wronskiano di $\omega(t)$ e $\bar{\omega}(t)$ si ha: $W(\omega, \bar{\omega}) = z(t) > 0$.

Ne segue che $\bar{\omega}(t)$ è una soluzione della classe A', linearmente indipendente da $\omega(t)$; e poichè, valendo la (28), $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{z(t)}{\omega^2(t)} > 0$, si ha anche $\lim\limits_{t \to +\infty} \bar{\omega}(t) = +\infty$.

Nelle nostre ipotesi *esistono dunque soluzioni limitate e soluzioni non limitate della classe A'. Quelle limitate differiscono necessariamente per una costante moltiplicativa* [16] *e costituiscono pertanto uno spazio lineare di dimensione* 1.

Supponiamo adesso, sempre in assenza di soluzioni oscillanti per l'equazione (2), che la (28) non sia verificata, e valga pertanto la (27).

Indicando con $z(t)$ e $\omega(t)$ due soluzioni appartenenti rispettivamente alle classi A e A', ponendo $G(t) = \omega(t)z(t)$, per la (21) si ottiene

$$G'(t) = \omega'(t)z(t) + \omega(t)z'(t), \qquad G''(t) = 3\omega'(t)z'(t).$$

È lecito supporre che si abbia per $t \geq t_0$

$$\omega(t) > 0, \qquad \omega'(t) > 0, \qquad \omega''(t) < 0;$$

$$z(t) > 0, \qquad z'(t) < 0, \qquad z''(t) > 0;$$

---

[16] In caso contrario, per il *Teorema* 6, ogni soluzione della classe A' potrebbe esprimersi come combinazione lineare di due soluzioni limitate, e tutte le soluzioni di A' sarebbero limitate.

e pertanto

$$G(t) > 0, \qquad G''(t) < 0 \qquad \text{per } t \geq t_0 .$$

Ciò porta che la funzione $G'(t)$ deve mantenersi positiva in $[t_0, +\infty)$; in caso contrario $G(t)$, asintoticamente decrescente e convessa, finirebbe per cambiare di segno contro l'ipotesi.

Si ha dunque $\lim\limits_{t \to +\infty} G(t) > 0$, e poichè dal *Teorema* 10 $\lim\limits_{t \to +\infty} z(t) = 0$, ne consegue che si ha, qualunque sia $\omega \in A'$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \omega(t) = +\infty$.

In conclusione vale il

TEOREMA 12. - *In assenza di soluzioni oscillanti, se la condizione* (27) *è soddisfatta, le soluzioni della classe A' sono tutte non limitate; in caso contrario dalla classe A' può estrarsi una sottoclasse $\bar{A}'$ di soluzioni limitate (le uniche) costituenti uno spazio lineare di dimensione* 1.

In termini di stabilità i risultati ottenuti possono così riassumersi:

TEOREMA 13. - *Per la soluzione nulla dell'equazione* (2), *in assenza di soluzioni oscillanti, si ha instabililà totale se è soddisfatta la condizione* (27); *in caso contrario si ha stabilità condizionata di tipo non asintotico relativa alle soluzioni della sottoclasse $\bar{A}'$.*

15. È noto per l'equazione (1) che, se le soluzioni della classe B hanno carattere oscillatorio, quelle $z(t)$ della classe A sono tali che

$$\lim_{t \to \infty} z(t) = 0 \text{ } [17].$$

Dal *Teorema* 10 risulta dunque che la (27) è condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni oscillanti dell'equazione (1), e quindi anche della sua aggiunta (2).

Tale condizione, come facilmente si verifica, non è tuttavia sufficiente. Infatti, l'equazione

$$x'''(t) + \frac{\alpha(\alpha-1)(2-\alpha)}{t^3} x(t) = 0, \qquad t > 0, \tag{38}$$

ove la costante reale α verifica le limitazioni $1 < \alpha < 2$, rientra nel tipo (1) da noi studiato, ed inoltre la funzione $p(t) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(2-\alpha)}{t^3}$ soddisfa la condizione (27).

---

[17] Cfr. M. SVEC, loc. cit. in [7].

Un integrale particolare di tale equazione è dato da

$$y(t) = t^{\alpha} > 0, \qquad y'(t) = \alpha t^{\alpha-1} > 0, \qquad y''(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} > 0,$$

che appartiene alla classe B ed è manifestamente non oscillante.

Ne segue che nessuna soluzione della (38) può presentare carattere oscillante.

16. Facciamo l'ipotesi che la funzione $p(t)$ che compare nell'equazione (1) verifichi la (27), e che inoltre, come ad es. accade per la (38), nessuna soluzione abbia carattere oscillatorio.

È lecito supporre l'esistenza di una soluzione $y(t)$ della classe A tale che

$$y(t_0) = 0, \qquad y'(t_0) > 0, \qquad y''(t_0) > 0,$$

$$y(t) > 0, \qquad y'(t) > 0, \qquad y''(t) > 0, \qquad \text{per } t > t_0 \text{ [18]}.$$

Ponendo $G(t) = ty'(t) - y(t)$, si ha

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{t}\right) = \frac{G(t)}{t^2},$$

e poichè, per $t \geq t_0$, $G(t) > 0$, $G'(t) > 0$, ne segue

$$ty'(t) > y(t) \tag{39}$$

e la funzione $y(t)/t$ risulta positiva e crescente.

Ponendo ancora

$$H(t) = y'(t) - ty''(t), \quad \text{da cui} \quad H'(t) = tp(t)y(t),$$

otteniamo per $t > t_1 > t_0$:

$$H(t) - H(t_1) = \int_{1}^{t} \tau p(\tau) y(\tau) d\tau > \frac{y(t_1)}{t_1} \int_{t_1}^{t} \tau^2 p(\tau) d\tau;$$

---

[18] Infatti nelle nostre ipotesi, nessuna soluzione della (2) ha carattere oscillante. Se allora indichiamo con $\omega(t)$ una soluzione della classe A' soddisfacente per $t \geq t_0$ le condizioni $\omega(t) > 0$, $\omega'(t) > 0$, $\omega''(t) < 0$, e con $w(t)$ una soluzione della classe B' tale che $w(t_0) = w'(t_0) = 0$, $w''(t_0) > 0$, il wronskiano di $\omega(t)$ e $w(t)$ è una soluzione dell'equazione (1) che verifica le condizioni richieste.

da qui, poichè vale la (27), si ha $\lim_{t \to \infty} H(t) = +\infty$, e ne segue, per $t > t_2 \geq t_1$:

(40) $$y'(t) > ty''(t).$$

Infine, ponendo $K(t) = ty'(t) - 2y(t)$, otteniamo $K'(t) = ty''(t) - y'(t) = -H(t)$, da cui $\lim_{t \to \infty} K(t) = -\infty$; pertanto, per $t > t_3 \geq t_2$:

(41) $$2y(t) > ty'(t).$$

Concludiamo, in virtù delle (39), (40) e (41), che esiste un valore t^* di t tale che, per $t > t^*$ risulta verificato

$$2y(t) > ty'(t) > y(t),$$

ovvero

(42) $$0 < \frac{y''(t)}{y(t)} < \frac{2}{t^2}.$$

Ciò posto, sia λ un arbitrario numero reale positivo; dalla (1), per $t \geq \bar{t} > t^*$, si ha:

$$\int_{\bar{t}}^{t} \frac{\tau^{2-\lambda} y'''(\tau)}{y(\tau)} d\tau + \int_{\bar{t}}^{t} \tau^{2-\lambda} p(\tau) d\tau = 0,$$

ovvero, integrando per parti:

(43) $$\frac{t^{2-\lambda} y''(t)}{y(t)} - \frac{\bar{t}^{2-\lambda} y''(\bar{t})}{y(\bar{t})} + \int_{\bar{t}}^{t} \tau^{2-\lambda} \frac{y'(\tau) y''(\tau)}{y^2(\tau)} d\tau -$$
$$-(2-\lambda) \int_{\bar{t}}^{t} \tau^{1-\lambda} \frac{y''(\tau)}{y(\tau)} d\tau + \int_{\bar{t}}^{t} \tau^{2-\lambda} p(\tau) d\tau = 0.$$

In quest'ultima, per le ipotesi fatte sulla funzione $y(t)$, il primo termine si mantiene positivo per $t > \bar{t}$; il secondo è una costante negativa; il terzo è positivo; infine il quarto è negativo ma, poichè per la (42):

$$0 < \int_{\bar{t}}^{t} \tau^{1-\lambda} \frac{y''(\tau)}{y(\tau)} d\tau < 2 \int_{\bar{t}}^{t} \frac{d\tau}{\tau^{1+\lambda}},$$

risulta limitato per ogni $t > \bar{t}$.

Ne segue, per la validità della (43), che anche l'ultimo termine, positivo per $t > \bar{t}$, deve necessariamente mantenersi limitato; e pertanto, se ciò non accade, non possono esistere soluzioni della classe B che abbiano carattere non oscillante.

Da quanto precede si conclude:

TEOREMA 14. – *Se esiste una costante reale* $\lambda > 0$ *tale che*

$$\lim_{t \to \infty} \int_{\bar{t}}^{t} \tau^{2-\lambda} p(\tau) d\tau = +\infty,$$

l'equazione (1) *e la sua aggiunta* (2) *ammettono soluzioni oscillanti.*