Sul problema unidimensionale non lineare di Stefan in uno strato piano indefinito.

Memoria di GIORGIO SESTINI (a Firenze)

A Giovanni Sansone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Considerato un processo unidimensionale di cambiamento di fase in un mezzo occupante uno strato piano indefinito di spessore finito, supposte le caratteristiche fisiche delle due fasi e il calore latente funzioni della temperatura, si dimostra l'esistenza di una sola soluzione per il problema al contorno connesso col problema di* STEFAN *non lineare in esame.*

1. Introduzione.

Problemi analoghi a quello trattato da STEFAN nel 1889 [29] (1), ma già risolto nella stessa formulazione da LAMÈ e CLAPEYRON nel 1831 [20] e da NEUMANN verso il 1840 (cfr. ad es. [31], vol. II, 117-121), continuano a destare interesse tra i fisico-matematici, in quanto nel loro schema si inquadrano studi assai importanti anche per la tecnica. Fino al 1955 (2) data la notevole difficoltà del problema analitico connesso con quello della determinazione dello stato termico in un mezzo in cui sono presenti due diverse fasi ed è incognita e variabile col tempo la superficie di separazione delle stesse, ci si contentò di indagare, in condizioni più o meno semplificate, su esistenza ed unicità della soluzione del problema nel caso unidimensionale lineare, cercando di attenuare il più possibile le ipotesi sui dati ed istituire algoritmi dimostrativi atti a facilitare il calcolo numerico approssimato della ricercata soluzione. Su questa via si è continuato a lavorare ([12], [23], [24]), con tendenza a sostituire ai classici metodi delle approssimazioni successive quelli più moderni degli spazi funzionali ([17], [19], [21]) o del calcolo delle differenze ([7], [10], [11], [30]), quest' ultimo assai vantaggioso quando si voglia affidare il calcolo della soluzione alle moderne calcolatrici, e questo forse anche nella speranza di trovare la via, mediante strumenti analitici più idonei, per superare le gravi difficoltà che il problema matematico presenta non appena si limitino le semplificazioni invero eccessive e tali quasi, come

(1) I numeri in parentesi quadra [ ] si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

(2) Cfr. ad es. la bibliografia in [25] e in [12].

affermava BRILLOUIN [3], da svuotare la questione del suo prevalente significato fisico.

Le principali semplificazioni da rimuovere erano essenzialmente due: la unidimensionalità e la linearità. Quest'ultima condizione in special modo limita fortemente il significato fisico del problema schematizzato, in quanto la presenza stessa di due fasi in evoluzione, e in qualche caso di alte temperature, rende pressochè impossibile l'ipotesi di una *diffusività* indipendente dalla temperatura. Nè può tacersi il fatto che la linearità può venire a mancare, anche supponendo costante la diffusività, ove si consideri la presenza nella equazione dell'equilibrio termico di termini dovuti a moti convettivi, destati sicuramente in almeno una delle fasi, quando si tratti di un problema di fusione. In questo ordine di idee DACEV, nel 1955, in due successivi lavori dava un primo studio di problema di STEFAN bidimensionale [8] e tridimensionale [9], che potrà dare l'avvio ad altri lavori.

Nella speranza di essere il primo a battere la seconda via, ho affrontato sistematicamente il problema unidimensionale non lineare, ma durante la definitiva redazione di questa memoria sono venuto a conoscenza di due recentissimi lavori ([18], [22]) su problemi di STEFAN non lineari, il secondo dei quali veramente interessante, in quanto vi si affronta, risolvendola con i metodi della analisi funzionale, la questione dell'esistenza ed unicità della soluzione di un assai generale problema di STEFAN non lineare, unidimensionale, relativo ad un semispazio, supposta la conduttività e le altre caratteristiche fisiche del mezzo funzioni della temperatura oltre che del posto e del tempo.

A questo mio lavoro, che offro con affettuosa riconoscenza al mio Maestro, spero resti il merito di essere il primo a trattare la questione dell'esistenza di una sola soluzione in un assai generale problema unidimensionale non lineare di STEFAN, relativo allo strato piano di spessore finito e con un classico procedimento di approssimazioni successive, simile a quello usato nei miei precedenti studi nell'ipotesi di linearità ([25], [26], [27], [28]). In un successivo lavoro esporrò i risultati conseguiti nello studio di un analogo problema in campi dotati di simmetria cilindrica o sferica, completando con ciò l'indagine sui problemi non lineari unidimensionali.

2. Posizione del problema.

Il problema di STEFAN qui considerato è del tutto analogo a quello oggetto di studio nella mia Memoria [25], che nel seguito sarà richiamata con la sigla (L), in quanto relativa al caso lineare, con la ipotesi però che le densità ρ_i, i calori specifici c_i, le conduttività K_i delle due fasi ($i = 1, 2$), insieme al calore latente di fusione L, risultino funzioni delle temperature $U^{(i)} = U^{(i)}(x, t)$, soddisfacenti a quelle condizioni che, suggerite anche dal loro significato fisico, saranno più oltre specificate. Volendo mettere in assoluta prevalenza l'influsso della dipendenza delle caratteristiche fisiche dalla temperatura, non abbiamo considerato, in questo primo lavoro, la dipendenza esplicita di tali caratteristiche dal posto e dal tempo, rimanendo affidata ad es. la non omogeneità nelle due fasi alle sole variazioni locali e temporali della temperatura (³).

Come in (L) ci riferiremo, con le stesse notazioni, ad uno strato piano indefinito, di spessore a, costituito, all'istante iniziale, da una sola fase (ad es. solida per fissare le idee) di assegnata temperatura funzione del posto, tramite la distanza x del punto considerato da una delle due facce dello strato, assunta come piano $x = 0$ di un riferimento cartesiano ortogonale e all'istante generico t dell'intervallo $(0, T)$ da due fasi distinte separate da un piano di ascissa $\alpha(t)$ variabile col tempo. Il processo del cambiamento di fase è dovuto, a partire dall'istante $t = 0$, ad un flusso di calore $H(t)$, generato sul piano $x = 0$ da una distribuzione uniforme di sorgenti di rendimento variabile col tempo. Ancor qui, senza ledere la generalità, supporremo uguale a zero la temperatura critica (di fusione).

Manterremo le ipotesi fatte in (L) sulla funzione $f(x)$, che rappresenta lo stato termico iniziale, e sulla funzione $H(t)$, in quanto suggerite o avvalorate da considerazioni di carattere fisico. Supporremo cioè $f(x)$ funzione continua insieme alle sue derivate prima e seconda per ogni x in $(0, a)$, con $f'(x) \leq 0$, $f''(x) \geq 0$, $f(0) = 0$ ed $f'(a) = 0$, ciò che porta a concludere in particolare $f(x) \leq 0$ in tutto $(0, a)$ (cfr. (L), n. 3). Per la $H(t)$ manterremo le ipotesi di essere in $(0, T)$ funzione positiva, crescente, continua insieme alla sua derivata prima. Quanto alle funzioni:

$$K_i = K_i(U^{(i)}), \qquad \rho_i = \rho_i(U^{(i)}), \qquad c_i = c_i(U^{(i)}), \qquad L(U^{(2)}) \ (^4),$$

le supporremo positive, limitate per qualsiasi valore di $U^{(i)}$ nell'intervallo aperto $(-\infty, +\infty)$ ed ivi continue con le loro derivate prime, che supporremo limitate; indicheremo poi con K_i^0, ρ_i^0, c_i^0, L^0 i loro valori per $U^{(i)} = 0$.

In queste ipotesi, e con queste notazioni, il problema di determinare ad un istante t di $(0, T)$ la temperatura $U^{(i)}$ in un punto qualsiasi delle due

(³) Il sig. KYNER, nel suo lavoro [18], ha supposto la conduttività K del mezzo, oltre che della temperatura, del posto e del tempo, funzione anche del gradiente della temperatura. L'esperienza (cfr. [1], 4.77) porta a ritenere trascurabile in K, nei confronti della influenza della temperatura, quella del gradiente termico. Osserveremo poi che in questa memoria, a differenza di quanto è supposto in [18], non saranno fatte ipotesi di monotonia nella dipendenza di K_i da $U^{(i)}$, in quanto difficilmente questo comportamento può essere assicurato per ogni $U^{(i)}$ e per tutti i mezzi (cfr. [1], 4.20 - 79).

(⁴) Nel seguito, ove la cosa non possa dar luogo ad equivoci, tralasceremo di regola di indicare la variabile o le variabili da cui dipende una funzione; gli apici indicheranno sempre derivazione rispetto all'argomento.

fasi di cui a quell'istante è costituito lo strato e l'ascissa $\alpha(t)$ del piano di separazione delle fasi viene tradotto nel problema analitico della determinazione di tre funzioni $U^{(1)}(x, t)$, $U^{(2)}(x, t)$ ed $\alpha(t)$, regolari le prime due e derivabile almeno una volta la terza, soddisfacenti ai due sistemi:

$$(A^{(1)}) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[K_1(U^{(1)})\dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial x}\right] = \rho_1(U^{(1)})c_1(U^{(1)})\dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial \tau}, \quad P \in D^{(1)}_{\alpha, t}; \\ \left[K_1(U^{(1)})\dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=0} = -H(\tau), \\ U^{(1)}[\alpha(t), t] = 0, \quad \alpha(0) = 0, \\ D^{(1)}_{\alpha, t} \equiv \{0 \leq \tau \leq t;\ 0 < x < \alpha(t)\}; \end{cases}$$

$$(A^{(2)}) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[K_2(U^{(2)})\dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial x}\right] = \rho_2(U^{(2)})c_2(U^{(2)})\dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial \tau}, \quad P \in D^{(2)}_{\alpha, t}; \\ U^{(2)}(x, 0) = f(x), \\ U^{(2)}[\alpha(t), t] = 0, \quad \alpha(0) = 0, \\ \left[\dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial x}\right]_{x=a} = 0, \\ D^{(2)}_{\alpha, t} \equiv \{0 \leq \tau \leq t;\ \alpha(t) < x < a\}; \end{cases}$$

con la condizione:

$$(B) \qquad \left[K_2(U^{(2)})\frac{\partial U^{(2)}}{\partial x} - K_1(U^{(1)})\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha(t)} = \rho_2^0 L^0 \dot{\alpha},$$

dove come di consueto $\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt}$ e $[\rho_2(U^{(2)})L(U^{(2)})]_{x=\alpha(t)} = \rho_2^0 L^0$.

3. Trasformazioni.

Con la trasformazione

$$V^{(i)} = V^{(i)}(x, t) = \int_0^{U^{(i)}} K_i(\xi)d\xi,$$

i sistemi $(A^{(i)})$ diventano (cfr. [4], pag. 11 oppure [6], Cap. IX),

$$
(\mathrm{I}^{(1)})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k_1(V^{(1)})}\dfrac{\partial V^{(1)}}{\partial \tau}, \quad P \in D^{(1)}_{\alpha,t}; \\ \left[\dfrac{\partial V^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=0} = -H(\tau), \\ V^{(1)}(\alpha, t) = 0, \quad \alpha(0) = 0; \end{cases}
\qquad
(\mathrm{I}^{(2)})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k_2(V^{(2)})}\dfrac{\partial V^{(2)}}{\partial \tau}, \quad P \in D^{(2)}_{\alpha,t}; \\ V^{(2)}(x, 0) = \varphi(x), \\ V^{(2)}(\alpha, t) = 0, \quad \alpha(0) = 0, \\ \left[\dfrac{\partial V^{(2)}}{\partial x}\right]_{x=a} = 0; \end{cases}
$$

dove

$$
\varphi(x) = \int_0^{f(x)} K_2(\xi)d\xi \tag{2}
$$

e

$$
k_i = k_i(V^{(i)}) = \frac{K_i(V^{(i)})}{\rho_i(V^{(i)})c_i(V^{(i)})}, \tag{3}
$$

ottenuta per eliminazione di $U^{(i)}$ nei coefficienti, mediante inversione della (1), certamente lecita, perchè, essendo $K_i > 0$, la $V^{(i)}$ è funzione continua, monotona crescente di $U^{(i)}$.

La (3), tenuto conto di (1) e delle ipotesi fatte su K_i, ρ_i, c_i, mostra che k_i sono funzioni positive non nulle, continue e derivabili rispetto a $V^{(i)}$ e quindi rispetto ad x ed a t (almeno due volte rispetto ad x ed una rispetto a t).

Dalla (2) si possono ricavare alcune importanti proprietà della $\varphi(x)$. Evidentemente la $\varphi(x)$, che è funzione continua e derivabile rispetto a x, ha il segno di $f(x)$ e perciò è negativa. Essendo poi $f(0) = 0$, è pure $\varphi(0) = 0$ e per essere $K_2 > 0$ e $f'(a) = 0$ si ha anche $\varphi'(x) \leq 0$ e $\varphi'(a) = 0$. Quanto alla derivata seconda di $\varphi(x)$ si ha:

$$
\varphi''(x) = f''K_2 + f'^2 \frac{\partial K_2}{\partial f(x)},
$$

essendo $f'' \geq 0$, se fosse $\dfrac{\partial K_2}{\partial f(x)} \geq 0$, si avrebbe subito $\varphi'' \geq 0$; non facendo però particolari ipotesi sul comportamento di K_2 nulla potrà affermarsi circa il segno di φ''. Concludendo si può affermare che $\varphi(x)$ gode di tutte le proprietà attribuite per ipotesi alla $f(x)$, salvo al più quella inerente alla non negatività della derivata seconda.

La (B), mediante la (1), diventa:

$$\text{(II)} \qquad \left[\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha} = m_0 \dot{\alpha},$$

ove si è posto $m_0 = \rho_2^0 L^0$.

La (1) ha quindi la notevole proprietà di trasformare il sistema non lineare $(A^{(i)})$, (B) nell'altro sistema *quasi lineare* (lineare nelle derivate) $(\mathrm{I}^{(i)})$, (II).

Con l'ulteriore posizione:

$$\text{(4)} \qquad \Omega^{(i)} = \Omega^{(i)}(V^{(i)}) = \int_0^{V^{(i)}} \frac{1}{k_i(\eta)}\, d\eta,$$

con che $\Omega^{(i)}$ risulta funzione continua, derivabile rispetto a $V^{(i)}$, e quindi rispetto ad x e a t, crescente di $V^{(i)}$ e tale che $\Omega^{(i)} V^{(i)} \geq 0$, le due equazioni $(\mathrm{I}^{(i)},1)$ possono scriversi in $D_{\alpha,t}^{(i)}$,

$$(\mathrm{I}^{(1)},1) \qquad \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2} = \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial \tau}; \qquad\qquad (\mathrm{I}^{(2)},1) \qquad \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial x^2} = \frac{\partial \Omega^{(2)}}{\partial \tau},$$

rimanendo la (II) e le condizioni iniziali e al contorno manifestamente inalterate.

4. Relazione fondamentale nelle incognite del problema.

Seguendo il procedimento usato in (L), fissato un generico istante t nell'intervallo $(0, T)$, integriamo le due equazioni $(\mathrm{I}^{(1)},1)$ e $(\mathrm{I}^{(2)},1)$ rispettivamente nei campi $D_{\alpha,t}^{(1)}$ e $D_{\alpha,t}^{(2)}$.

Tenendo conto della (II) e delle condizioni iniziali e al contorno fissate, posto

$$\text{(5)} \qquad A_0 = \frac{1}{m_0}\int_0^a \Omega^{(2)}(f(x))dx, \qquad F(t) = \frac{1}{m_0}\int_0^t H(\tau)d\tau,$$

si ottiene la ricercata relazione nella forma:

$$\text{(III)} \qquad \alpha(t) = A_0 + F(t) - \frac{1}{m_0}\int_0^{\alpha(t)} \Omega^{(1)}(V^{(1)})dx - \frac{1}{m_0}\int_{\alpha(t)}^a \Omega^{(2)}(V^{(2)})dx,$$

analoga alla (6) di (L).

5. Alcune osservazioni sulle soluzioni di due sistemi differenziali parabolici quasi lineari.

Osserveremo subito che i sistemi $(\mathrm{I}^{(i)})$, ove si pensi nota $\alpha(t)$, per le ipotesi formulate su k_i, α, f e H, si trovano nelle condizioni per le quali viene assicurata l'esistenza e l'unicità di una soluzione regolare (cfr. [14], 389-406). Vogliamo ora mettere in rilievo alcune proprietà delle soluzioni regolari di sistemi analoghi ai sistemi $(\mathrm{I}^{(i)})$.

Supposto nota la $\alpha(t)$, funzione crescente e derivabile con $\alpha(0)=0$, è subito visto che le soluzioni regolari di tali sistemi non possono avere internamente a $D_{\alpha,t}^{(i)}$ nè massimi positivi, nè minimi negativi. Infatti con la nota sostituzione $V^{(i)}=W^{(i)}e^{Mt}$, con M costante positiva, le due equazioni $(\mathrm{I}^{(i)},1)$ diventano:

$$\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}=\frac{1}{k_i(W^{(i)}e^{M\tau})}\frac{\partial W^{(i)}}{\partial \tau}+\frac{MW^{(i)}}{k_i(W^{(i)}e^{M\tau})}, \qquad i=1,\ 2$$

e questa mostra, nelle ipotesi dichiarate, la validità dell'asserzione fatta sopra. Come conseguenza si ha che se $V^{(i)}$ è positiva (negativa) sul contorno di $D_{\alpha,t}^{(i)}$ è pure positiva (negativa) internamente a $D_{\alpha,t}^{(i)}$ e quindi se è nulla sul contorno è nulla internamente. Riepilogando si ha per le soluzioni regolari di sistemi analoghi a $(\mathrm{I}^{(i)})$, quando α sia nota e nelle ipotesi dichiarate, il seguente teorema, che nel seguito richiameremo con la sigla P. M. (principio di massimo):

Le soluzioni regolari in $D_{\alpha,t}^{(i)}$ di sistemi analoghi a $(\mathrm{I}^{(i)})$, essendo nota α, non possono avere internamente a $D_{\alpha,t}^{(i)}$ nè massimi positivi, nè minimi negativi; se sono positive o nulle sul contorno di $D_{\alpha,t}^{(i)}$, tali risultano internamente; se sono nulle sul contorno di $D_{\alpha,t}^{(i)}$, sono nulle anche internamente.

Stabiliremo nel paragrafo successivo, come conseguenza di questo teorema, limitazioni per le soluzioni regolari di sistemi analoghi a $(\mathrm{I}^{(i)})$, sempre nella ipotesi che α sia conosciuta.

6. Limitazioni per le soluzioni regolari di sistemi quasi lineari del tipo $(\mathrm{I}^{(i)})$.

a) Sia $\alpha(t)$ una assegnata funzione derivabile e crescente di t in $(0,\ T)$ e tale che $\alpha(0)=0$ e sia $X=X(x,\ t)$ la soluzione regolare del sistema

$$(\mathrm{I}') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2}=\dfrac{1}{k(X)}\dfrac{\partial X}{\partial \tau}, \quad P\in D_{\alpha,t}^{(1)}, \quad t\le T; \\ \left[\dfrac{\partial X}{\partial x}\right]_{x=0}=-H(\tau), \\ X(\alpha,\ t)=0, \end{cases}$$

con ipotesi per $k = k(X)$ e $H = H(\tau)$ analoghe a quelle formulate nei paragrafi 2 e 3.

Come conseguenza di P. M. si ha che, nelle nostre ipotesi, è $X(x, \tau) \geq 0$ in $D^{(1)}_{\alpha,t}$. Ciò è conseguenza del fatto che deve aversi $X(0, \tau) \geq 0$; in caso contrario infatti, essendo $\left[\frac{\partial X}{\partial x}\right]_{x=0} < 0$ e $X(\alpha, t) = 0$, la X dovrebbe avere in $D^{(1)}_{\alpha,t}$ un minimo negativo. Risultando allora la X positiva o nulla sul contorno di $D^{(1)}_{\alpha,t}$, tale dovrà risultare, sempre per P. M., internamente. Nel caso in cui si identifichi la X con la ricercata temperatura $V^{(1)}$ in $D^{(1)}_{\alpha,t}$, la cosa soddisfa anche alla intuizione fisica.

Se con M indichiamo una costante positiva la funzione $W = -Mx$ soddisfa al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k(W)} \dfrac{\partial W}{\partial \tau}, \quad P \in D^{(1)}_{\alpha,t}; \\ \left[\dfrac{\partial W}{\partial x}\right]_{x=0} = -M, \\ W(\alpha, t) = -M\alpha(t). \end{cases}$$

Se allora assumiamo M maggiore del massimo di H in $(0, T)$ la funzione $Z = Z(x, t) = X - W$ soddisfa al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k(Z + Mx)} \dfrac{\partial Z}{\partial \tau}, \quad P \in D^{(1)}_{\alpha,t}; \\ \left[\dfrac{\partial Z}{\partial x}\right]_{x=0} = M - H(\tau) > 0, \\ Z(\alpha, t) = M\alpha(t). \end{cases}$$

Da questo sistema, applicando P. M., si può concludere che Z non può avere in $D^{(1)}_{\alpha,t}$ massimi positivi (o minimi negativi). Gioverà osservare che i valori che Z assume per $x = 0$, qualunque sia τ in $(0, t)$, non possono superare quelli assegnati per $x = \alpha$. Infatti essendo, per ogni fissato τ, $\left[\frac{\partial Z}{\partial x}\right]_{x=0} > 0$, la Z risulta per $x = 0$ funzione crescente di x e perciò, se il valore fosse più grande di quello assunto nello stesso istante in $x = \alpha$, la Z dovrebbe avere internamente a $D^{(1)}_{\alpha,t}$ un massimo positivo o, dopo un massimo negativo, un minimo negativo cosa impossibile per P. M. Ne consegue che i valori assunti da Z internamente a $D^{(1)}_{\alpha,t}$ devono essere minori o eguali a quelli assegnati per $x = \alpha$; si ha perciò, per la supposta crescenza di α,

$$Z(x, t) < M\alpha(t).$$

Da questa segue subito la ricercata limitazione per la X, soluzione regolare di (I'):

$$0 \leq X(x, \tau) = Z(x, \tau) - Mx < M(\alpha(t) - x), \tag{6}$$

con M indipendente da α.

b) Consideriamo il sistema:

$$\text{(II')} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k(Y)} \dfrac{\partial Y}{\partial \tau}, \quad P \in D^{(2)}_{\alpha,t} \quad t \leq T; \\ Y(x, 0) = \varphi(x), \\ Y(\alpha, t) = 0, \\ \left[\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right]_{x=a} = 0, \end{cases}$$

con ipotesi per $k(Y)$ e φ analoghe a quelle formulate nei paragrafi 2, 3.

La $Y = Y(x, \tau)$ risulta negativa o nulla in $D^{(2)}_{\alpha,t}$. Infatti, si consideri il campo $\bar{D}^{(2)}_{\alpha,t}$ ottenuto da $D^{(2)}_{\alpha,t}$ con un ribaltamento attorno alla retta $x = a$ e in esso il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k(y)} \dfrac{\partial y}{\partial \tau}, \quad P \in \bar{D}^{(2)}_{\alpha,t}; \\ y(\alpha, t) = y(2a - \alpha, t) = 0, \\ y(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \end{cases}$$

con

$$\bar{D}^{(2)}_{\alpha,t} \equiv \{ 0 \leq \tau \leq t;\ \alpha(t) < x < 2a - \alpha(t) \},$$

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x),\ x \leq a; \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(2a - x),\ x \geq a.$$

Nel sottocampo $D^{(2)}_{\alpha,t}$ si ha evidentemente $y(x, \tau) = Y(x, \tau)$ ed assumendo la y sul contorno valori negativi o nulli, tale sarà internamente anche a $D^{(2)}_{\alpha,t}$ (per P. M.) e con essa la Y. Ancor qui, ove si identifichi la Y con la ricercata temperatura $V^{(2)}$ in $D^{(2)}_{\alpha,t}$ questo fatto soddisfa la intuizione fisica, date le condizioni in cui ci siamo posti.

Si operi ora in (II') la sostituzione $0 \leq -Y = W(x, \tau) - \varphi(x) + M\tau$, con M costante positiva.

Si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k(W,\ x,\ \tau)} \dfrac{\partial W}{\partial \tau} + \dfrac{M}{k(W,\ x,\ \tau)} + \varphi''(x), \quad P \in D^{(2)}_{\alpha, t}; \\ W(x,\ 0) = 0, \\ W(\alpha,\ t) = \varphi(\alpha) - Mt, \\ \left[\dfrac{\partial W}{\partial x}\right]_{x=a} = 0. \end{cases}$$

Con una riflessione intorno alla retta $x = a$ si consideri il campo $\overline{D}^{(2)}_{\alpha,t}$ e in esso il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k(Z,\ x,\ \tau)} \dfrac{\partial Z}{\partial \tau} + \dfrac{M}{k(Z,\ x,\ \tau)} + \varphi''(x), \quad P \in \overline{D}'^{(2)}_{\alpha, t}; \\ Z(x,\ 0) = 0 \\ Z(\alpha,\ t) = Z(2a - \alpha,\ t) = \varphi(\alpha) - Mt. \end{cases}$$

La $Z = Z(x,\ \tau)$, essendo $\left[\dfrac{\partial W}{\partial x}\right]_{x=a} = 0$ e valendo per il sistema il teorema di esistenza e unicità di una soluzione regolare (cfr. [14]), nel sottocampo $D^{(2)}_{\alpha,t}$ coincide con W e pertanto ogni limitazione stabilita per i valori di Z in $\overline{D}^{(2)}_{\alpha,t}$, è valida come limitazione per i valori di W in $D^{(2)}_{\alpha,t}$. Si scelga ora la costante positiva M in modo che risulti

$$\frac{M}{k(Z,\ x,\ \tau)} + \varphi''(x) > 0,$$

il che è lecito date le ipotesi formulate su k e φ. Nel caso che si potesse assicurare, ad es. nelle condizioni accennate nel paragrafo 3, $\varphi'' \geq 0$, potrebbe assumersi $M = 0$.

Con la conveniente scelta di M, Z non può avere in $D^{(2)}_{\alpha,t}$ massimi e perciò, istante per istante, resta inferiore al corrispondente valore assegnato sul contorno e perciò, essendo $\varphi(\xi)$ decrescente,

$$Z(x,\ \tau) \leq \varphi(\alpha) - Mt$$

e quindi nel sottocampo $D^{(2)}_{\alpha,t}$

$$W(x,\ \tau) \leq \varphi(\alpha) - Mt,$$

con che

$$0 \leq -Y(x,\ \tau) \leq \varphi(\alpha) - \varphi(x), \tag{7}$$

che è la limitazione cercata.

c) Vogliamo ora considerare due soluzioni regolari di sistemi rispettivamente analoghi a (I') o a (II'), ma relative a campi diversi $D^{(i)}_{\alpha,t}$ e $D^{(i)}_{\beta,t}$ con $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ funzioni note, crescenti e derivabili di t, con $\alpha(0) = \beta(0) = 0$.

Siano perciò X_α e X_β due soluzioni di (I') in $D^{(1)}_{\alpha,t}$ e in $D^{(1)}_{\beta,t}$, con $\alpha(t) > \beta(t)$. In $D^{(1)}_{\beta,t}$ si ha evidentemente:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2(X_\alpha - X_\beta)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k(X_\alpha)}\dfrac{\partial X_\alpha}{\partial\tau} - \dfrac{1}{k(X_\beta)}\dfrac{\partial X_\beta}{\partial\tau}, \quad P \in D^{(1)}_{\beta,t}; \\ \left[\dfrac{\partial(X_\alpha - X_\beta)}{\partial x}\right]_{x=0} = 0, \\ X_\alpha(\beta,\ t) - X_\beta(\beta,\ t) = X_\alpha(\beta,\ t). \end{cases}$$

Vogliamo far vedere che ancor qui la funzione $X_\alpha - X_\beta$ se è positiva o nulla sul contorno di $D^{(1)}_{\beta,t}$ (negativa o nulla), tale risulta internamente a $D^{(1)}_{\beta,t}$. Posto

$$(9)\qquad \begin{gathered} \varepsilon_{\alpha,\beta} = X_\alpha - X_\beta, \\ \Phi = \Phi(\varepsilon_{\alpha,\beta},\ x,\ \tau) = \left[\frac{1}{k(\varepsilon_{\alpha\beta} + X_\beta)} - \frac{1}{k(X_\beta)}\right]\frac{\partial X_\alpha}{\partial\tau}, \end{gathered}$$

si ha per $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ il seguente sistema:

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varepsilon_{\alpha,\beta}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k(X_\beta)}\dfrac{\partial\varepsilon_{\alpha,\beta}}{\partial\tau} + \Phi, \quad P \in D^{(1)}_{\beta,t}; \\ \left[\dfrac{\partial\varepsilon_{\alpha,\beta}}{\partial x}\right]_{x=0} = 0, \\ \varepsilon_{\alpha,\beta}(\beta,\ t) = X_\alpha(\beta,\ t), \end{cases}$$

dove il secondo membro della prima equazione soddisfa, per le ipotesi fatte su k, α, β, X_α, X_β, alle condizioni che assicurano al sistema l'esistenza di una ed una sola soluzione regolare in $D^{(1)}_{\beta,t}$ (cfr. [14]). Si consideri in $\overline{D}^{(1)}_{\beta,t}$, ottenuto per riflessione di $D^{(1)}_{\beta,t}$ attorno alla retta $x = 0$, il sistema:

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_{\alpha,\beta}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k(X_\beta)}\dfrac{\partial E_{\alpha,\beta}}{\partial\tau} + \Phi(E_{\alpha,\beta},\ x,\ \tau), \quad P \in \overline{D}^{(1)}_{\beta,t}; \\ E_{\alpha,\beta}(-\beta,\ t) = E_{\alpha,\beta}(\beta,\ t) = X_\alpha(\beta,\ t). \end{cases}$$

Con riferimento a quanto osservato in *a*), supporremo $X_\alpha(\beta,\ t) \geq 0$ e vogliamo dimostrare che è $E_{\alpha,\beta} \geq 0$ in $D^{(1)}_{\beta,t}$. Si operi in (11) la sostituzione

$E_{\alpha,\beta} = W_{\alpha,\beta}e^{Mt}$, con M costante positiva. Si ottiene:

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 W_{\alpha,\beta}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k(X_\beta)} \dfrac{\partial W_{\alpha,\beta}}{\partial \tau} + \Psi, & P \in \bar{D}^{(1)}_{\beta,t}; \\ W_{\alpha,\beta}(-\beta,\ t) = W_{\alpha,\beta}(\beta,\ t) = X_\alpha(\beta,\ t)e^{-Mt}, \end{cases}$$

ove si è posto:

$$\Psi = \Psi(W_{\alpha,\beta},\ x,\ \tau,\ M) = \frac{MW_{\alpha,\beta}}{k(X_\beta)} + \Phi(W_{\alpha,\beta}e^{M\tau},\ x,\ \tau)e^{-M\tau}.$$

Supponiamo per assurdo che, pure essendo $X_\alpha(\beta,\ t)e^{-Mt} \geq 0$, vi sia internamente a $\bar{D}^{(1)}_{\beta,t}$ un punto P_0 in cui sia $W_{\alpha,\beta}(x_0,\ \tau_0) < 0$ e quindi anche $E_{\alpha,\beta}(P_0) < 0$. In tale ipotesi sulla caratteristica $t = \tau_0$, la $W_{\alpha,\beta}$ dovrà avere un minimo negativo in un punto di ascissa $\bar{x}$, dopo essersi annullata per continuità in almeno due punti di ascisse ξ_1 e ξ_2 con $-\beta(\tau_0) < \xi_1 < \bar{x} < \xi_2 < \beta(\tau_0)$. Essendo il punto $\bar{P} \equiv (\bar{x},\ \tau_0)$ interno ad un segmento di caratteristica totalmente contenuto in $\bar{D}^{(1)}_{\beta,t}$, la $\Phi(W_{\alpha,\beta}e^{M\tau_0},\ \bar{x},\ \tau_0)$ è limitata perchè tale è, insieme a k, $\dfrac{\partial X_\alpha}{\partial \tau}$ (cfr. [14], 383-384). Se allora si sceglie, come è lecito, M in modo che Ψ abbia il segno di $W_{\alpha,\beta}$, ne viene che in $\bar{P}$ la (12),1 non può essere soddisfatta e da ciò l'assurdo. Le soluzioni regolari del sistema (11) mantengono internamente al campo il segno dei valori loro assegnati sul contorno. Valendo per sistemi del tipo (11) e (10), nelle ipotesi più volte ricordate, il teorema di unicità (cfr. [14]), nel sottocampo $D^{(1)}_{\beta,t}$ si ha $\varepsilon_{\alpha,\beta} = E_{\alpha,\beta} \geq 0$, come volevamo provare. Come naturale conseguenza si può concludere che anche le soluzioni regolari di sistemi analoghi a (10) (o ad (8)) non possono avere internamente al campo massimi positivi (o minimi negativi) e pertanto si mantengono comprese tra il minimo negativo e il massimo positivo dei valori loro assegnati sul contorno.

Siano adesso Y_α ed Y_β due soluzioni regolari di (II') relative ai campi $D^{(2)}_{\alpha,t}$ e $D^{(2)}_{\beta,t}$ con $\alpha(t) > \beta(t)$. In $D^{(2)}_{\alpha,t}$ si ha:

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2(Y_\alpha - Y_\beta)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k(Y_\alpha)} \dfrac{\partial Y_\alpha}{\partial \tau} - \dfrac{1}{k(Y_\beta)} \dfrac{\partial Y_\beta}{\partial \tau}, & P \in D^{(2)}_{\alpha,t}; \\ (Y_\alpha - Y_\beta)_{t=0} = 0, \\ \left[\dfrac{\partial(Y_\alpha - Y_\beta)}{\partial x}\right]_{x=\alpha} = 0, \\ Y_\alpha(\alpha,\ t) - Y_\beta(\alpha,\ t) = -Y_\beta(\alpha,\ t). \end{cases}$$

Questo sistema, con le posizioni $\delta_{\alpha,\beta} = Y_\alpha - Y_\beta$ e

$$\Phi_1 = \Phi_1(\delta_{\alpha,\beta},\ x,\ \tau) = \left[\frac{1}{k(\delta_{\alpha,\beta} + Y_\beta)} - \frac{1}{k(Y_\beta)}\right]\frac{\partial Y_\beta}{\partial \tau},$$

diventa:

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \delta_{\alpha,\beta}}{\partial x^2} = \frac{1}{k(\delta_{\alpha,\beta} + Y_\beta)}\frac{\partial \delta_{\alpha,\beta}}{\partial \tau} + \Phi_1, \quad P \in D^{(2)}_{\alpha,t}\\ &\delta_{\alpha,\beta}(x,\ 0) = 0,\\ &\delta_{\alpha,\beta}(\alpha,\ t) = -\ Y_\beta(\alpha,\ t),\\ &\left[\frac{\partial \delta_{\alpha,\beta}}{\partial x}\right]_{x=\alpha} = 0,\end{aligned}\right.$$

sul quale si può ragionare in modo del tutto simile a quello impiegato per il sistema (10) e concludere agevolmente che anche le soluzioni regolari di (14) mantengono internamente a $D^{(2)}_{\alpha,t}$ il segno dei loro valori assegnati sul contorno, non vi hanno massimi positivi (o minimi negativi) e restano in ogni caso comprese tra il minimo negativo e il massimo positivo dei valori loro assegnati sul contorno.

Nel caso particolare della soluzione regolare di (14) (ovvero di (13)), essendo, per quanto osservato in *b*), $-Y(\alpha,\ t) \geq 0$, si ha in $D^{(2)}_{\alpha,t}$ $\delta_{\alpha,\beta} = Y_\alpha - Y_\beta \geq 0$.

7. Proprietà delle successive approssimazioni di $\alpha(t)$.

Per la risoluzione del nostro problema ($\mathrm{I}^{(i)}$), (II), associamo alla (III), che ne è conseguenza, un algoritmo di approssimazioni successive ponendo:

$$(15)\qquad \alpha_0(t) = F(t),$$

$$(16)\qquad \alpha_n = A_0 + \alpha_0 - \frac{1}{m_0}\int_0^{\alpha_{n-1}} \Omega^{(1)}(V^{(1)}_{n-1})dx - \frac{1}{m_0}\int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha} \Omega^{(2)}(V^{(2)}_{n-1})dx,$$

dove $V^{(i)}_{n-1}$ sono rispettivamente soluzioni dei due sistemi

$$(\mathrm{I}^{(1)}_{n-1})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V^{(1)}_{n-1}}{\partial x^2} = \frac{1}{k_1(V^{(1)}_{n-1})}\frac{\partial V^{(1)}_{n-1}}{\partial \tau}, \quad P \in D^{(1)}_{\alpha_{n-1},t};\\ &\left[\frac{\partial V^{(1)}_{n-1}}{\partial x}\right]_{x=0} = -\ H(\tau),\\ &V^{(1)}_{n-1}(\alpha_{n-1},\ t) = 0, \quad \alpha_{n-1}(0) = 0\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{I}_{n-1}^{(2)}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V_{n-1}^{(2)}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k_2(V_{n-1}^{(2)})} \dfrac{\partial V_{n-1}^{(2)}}{\partial \tau}, \quad P \in D_{\alpha_{n-1},t}^{(2)}; \\ V_{n-1}^{(2)}(x, 0) = \varphi(x), \\ V_{n-1}^{(2)}(\alpha_{n-1}, t) = 0, \quad \alpha_{n-1}(0) = 0; \\ \left[\dfrac{\partial V_{n-1}^{(2)}}{\partial x}\right]_{x=a} = 0, \end{cases}$$

ottenuti da $(\mathrm{I}^{(i)})$, ponendo α_{n-1} e $V_{n-1}^{(i)}$ rispettivamente al posto di α e $V^{(i)}$.

Faremo subito vedere che le α_n sono funzioni di t monotone crescenti e tali che, qualunque sia t in $(0, T)$ e il valore di n,

$$(17) \qquad 0 \leq \alpha_n(t) \leq \alpha_0(t), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Deriviamo la (16) rispetto a t, tenendo conto di $(\mathrm{I}_{n-1}^{(i)})$, con le equazioni $(\mathrm{I}_{n-1}^{(i)})$,1 nella forma $(\mathrm{I}^{(i)},1)$. Si ha:

$$m_0 \dot{\alpha}_n = H(t) - \int_0^{\alpha_{n-1}} \frac{\partial \Omega_{n-1}^{(1)}}{\partial t} dx - \int_{\alpha_{n-1}}^{a} \frac{\partial \Omega_{n-1}^{(2)}}{\partial t} dx =$$

$$= H(t) - \int_0^{\alpha_{n-1}} \frac{\partial^2 V_{n-1}^{(1)}}{\partial x^2} dx - \int_{\alpha_{n-1}}^{a} \frac{\partial^2 V_{n-1}^{(2)}}{\partial x^2} dx =$$

$$= \left[\frac{\partial V_{n-1}^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial V_{n-1}^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}},$$

dove evidentemente $\Omega_{n-1}^{(i)}$ sta per $\Omega^{(i)}(V_{n-1}^{(i)})$.

Si ha, come in (L),

$$(18) \qquad \dot{\alpha}_n(t) > 0,$$

in quanto $-\left[\dfrac{\partial V_{n-1}^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}}$ e $-\left[\dfrac{\partial V_{n-1}^{(2)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}}$ rappresentano il flusso di calore rispettivamente entrante ed uscente dallo strato infinitesimo fondente. Dato che vi è stato assorbimento di calore per l'avvenuta fusione, dovrà aversi:

$$-\left[\frac{\partial V_{n-1}^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}} > -\left[\frac{\partial V_{n-1}^{(2)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}},$$

da cui, essendo $m_0 > 0$, la (18).

Sempre dalla (16), ricordando (paragrafo 3) che $\Omega^{(2)}[\varphi(x)]$ ha il segno di $\varphi(x)$, che è negativa o nulla e perciò $A_0 \leq 0$, si ha:

$$\alpha_n \leq \alpha_0 + \frac{1}{m_0}\int_{\alpha_{n-1}}^{a} \{\, \Omega^{(2)}[\varphi(x)] - \Omega^{(2)}(V_{n-1}^{(2)}) \,\}\, dx, \tag{19}$$

in quanto accanto a $\int_0^{\alpha_{n-1}} \Omega^{(2)}[\varphi(x)]dx \leq 0$ è pure $-\int_0^{\alpha_{n-1}} \Omega_{n-1}^{(1)} dx \leq 0$, avendosi $V_{n-1}^{(1)} \geq 0$ in $D_{\alpha_{n-1},t}^{(1)}$ (cfr. 6, *a*)). Basta ora provare che in (α_{n-1}, a) è

$$\Omega^{(2)}[\varphi(x)] - \Omega_{n-1}^{(2)} \leq 0,$$

ovvero, essendo la $\Omega^{(2)}(\xi)$ crescente con ξ (cfr. 3),

$$V_{n-1}^{(2)} \geq \varphi(x), \tag{20}$$

perchè resti provata la (17).

Per dimostrare la (20) basterà osservare che in $D_{\alpha_{n-1},t}^{(2)}$ è $V_{n-1}^{(2)} \leq 0$ (cfr. 6, *b*) e non potendovi avere per P. M. minimi negativi, risulterà maggiore del minimo valore assunto sul contorno e quindi, data la decrescenza di $\varphi(x)$, la (20).

Si poteva del resto intuitivamente osservare che, essendovi flusso di calore positivo o nullo in ogni $t > 0$ attraverso il piano $x = \alpha_{n-1}$ e nessun flusso attraverso al piano $x = a$, la temperatura in $D_{\alpha_{n-1},t}^{(2)}$, ad un istante $t > 0$ deve essere necessariamente maggiore o almeno uguale a quella che era all'istante iniziale e cioè a $\varphi(x)$.

Si ha perciò valida la (20), trascurando in (19) un termine negativo o nullo, la (17).

8. Teorema di esistenza.

Dalla successione $\{\alpha_n\}$ delle approssimazioni di α, valendo la (17), si può estrarre una successione $\{\bar{\alpha}_n\}$ convergente ad un limite determinato e finito $\alpha^*(t) \leq \alpha_0(t)$. Si vuol dimostrare che α^* è la ricercata soluzione, non appena le si associno le funzioni $\overline{V}^{(i)}$ soluzioni regolari di $(\mathrm{I}^{(i)})$ in $D_{\alpha^*,t}^{(i)}$.

Cominciamo col dimostrare che, indicate con $\overline{V}_{n-1}^{(i)}$ le soluzioni di $(\mathrm{I}_{n-1}^{(i)})$ quando si faccia $\bar{\alpha}_{n-1}$ al posto di α_{n-1}, esistono i limiti di $\overline{V}_{n-1}^{(i)}$ per $n \to \infty$.

Siano $\bar{\alpha}_r$ ed $\bar{\alpha}_s$ due elementi di $\{\bar{\alpha}_n\}$ e $\overline{V}_r^{(i)}$ e $\overline{V}_s^{(i)}$ le soluzioni regolari dei corrispondenti sistemi, analoghi a $(\mathrm{I}^{(i)})$, $(\mathrm{I}_r^{(i)})$, ed $(\mathrm{I}_s^{(i)})$. Per fissare le idee sia $\bar{\alpha}_r < \bar{\alpha}_s$. Da quanto esposto in 6, *c*) si ha:

$$0 \leq \overline{V}_s^{(1)} - \overline{V}_r^{(1)} \leq \max V_s(\bar{\alpha}_r, t), \tag{21}$$

e per la (6),

$$0 \leq \overline{V}_s^{(1)} - \overline{V}_r^{(1)} \leq M(\bar{\alpha}_s - \bar{\alpha}_r). \tag{22}$$

Da questa, per il classico teorema di CAUCHY, esistendo il limite di $\bar{\alpha}_n$, segue l'esistenza del limite $\overline{V}^{*(1)}$ di $\overline{V}_n^{(1)}$ per $n \to \infty$.

Sempre nell'ipotesi che sia $\bar{\alpha}_r < \bar{\alpha}_s$, ricordando le considerazioni di 6, *c*), per la (7) si ha:

$$0 \leq \overline{V}_s^{(2)} - \overline{V}_r^{(2)} \leq \max\left[-\overline{V}_r^{(2)}(\bar{\alpha}_s, t)\right] \tag{23}$$

e quindi, per la continuità di φ e l'esistenza del limite di $\bar{\alpha}_n$, l'esistenza del limite $\overline{V}^{*(2)}$ di $V_n^{(2)}$ per $n \to \infty$. Analoghe considerazioni per $\alpha_r > \alpha_s$.

Poniamo adesso

$$\alpha' = A_0 + F(t) - \frac{1}{m_0}\int_0^{\alpha^*} \Omega^{(1)}(\overline{V}^{(1)})dx - \frac{1}{m_0}\int_{\alpha^*}^{\alpha} \Omega^{(2)}(\overline{V}^{(2)})dx,$$

dove $\overline{V}^{(i)}$ hanno il significato sopra specificato. Vogliamo provare che è $\alpha' = \alpha^*$ e con questo il teorema di esistenza per il problema (I$^{(i)}$), (II) ovvero ($A^{(i)}$), (B), non appena sarà dimostrata la derivabilità di $\alpha^*(t)$.

Supposto $\bar{\alpha}_{r-1} \leq \alpha^*$, si ha:

$$m_0(\alpha' - \bar{\alpha}_r) = \int_0^{\bar{\alpha}_{r-1}} \left\{ \overline{\Omega}_{r-1}^{(1)} - \overline{\Omega}^{(1)} \right\} dx - \int_{\bar{\alpha}_{r-1}}^{\alpha^*} \overline{\Omega}^{(1)} dx +$$

$$+ \int_{\alpha^*}^{\alpha} \left\{ \overline{\Omega}_{r-1}^{(2)} - \overline{\Omega}^{(2)} \right\} dx - \int_{\alpha^*}^{\bar{\alpha}_{r-1}} \overline{\Omega}_{r-1} dx,$$

dove $\overline{\Omega}^{(i)} = \Omega^{(i)}(\overline{V}^{(i)})$.

Da questa, avendosi per (22) e (23),

$$\left| \overline{\Omega}_{r-1}^{(1)} - \overline{\Omega}^{(1)} \right| \leq n \left| \overline{V}^{(1)} - \overline{V}_{r-1}^{(1)} \right| \leq nM \left| \alpha^* - \bar{\alpha}_{r-1} \right|$$

e

$$\left| \overline{\Omega}_{r-1}^{(2)} - \overline{\Omega}^{(2)} \right| \leq n \left| \overline{V}^{(2)} - \overline{V}_{r-1}^{(2)} \right| \leq n \left| \varphi(\bar{\alpha}_{r-1}) - \varphi(\alpha^*) \right|.$$

si ha

$$m_0 \,|\, \alpha' - \bar{\alpha}_r \,| \leq nM \int_0^{\bar{\alpha}_{r-1}} |\, \alpha^* - \bar{\alpha}_{r-1} \,|\, dx + n \int_{\alpha^*}^{a} |\, \varphi(\bar{\alpha}_{r-1}) - \varphi(\alpha^*) \,|\, dy +$$

$$+ 2m \,|\, \alpha^* - \bar{\alpha}_{r-1} \,| \leq (Mna + npa + 2m) \,|\, \alpha^* - \bar{\alpha}_{r-1} \,|,$$

con $m = \max\limits_{0 \leq \xi \leq a} \Omega(\xi)$, $n = \max\limits_{0 \leq \xi \leq a} \Omega'(\xi)$, $p = \max\limits_{0 \leq \xi \leq a} |\, \varphi'(\xi) \,|$. Da questa essendo $\alpha^* = \lim\limits_{r \to \infty} \bar{\alpha}_r$, per il teorema di CAUCHY, segue anche $\alpha' = \lim\limits_{r \to \infty} \bar{\alpha}_r$ e con ciò, come volevamo, $\alpha' = \alpha^*$ e quindi $\bar{V}^{*(i)} = \bar{V}^{(i)}$.

Analoga dimostrazione nel caso che sia $\bar{\alpha}_{r-1} > \alpha^*$.

Per completare il teorema di esistenza occorre dimostrare la derivabilità di α^*, che d'ora in avanti indicheremo con $\alpha(t)$. Procederemo con metodo diretto. Gioverà subito osservare che, essendo le funzioni α_n crescenti di t, qualunque sia l'indice n, tale è anche il limite della sottosuccessione $\{ \bar{\alpha}_n \}$. Infatti se $t_2 > t_1$ si ha $\bar{\alpha}_n(t_2) > \bar{\alpha}_n(t_1)$ e perciò $\{ \bar{\alpha}_n(t_2) - \bar{\alpha}_n(t_1) \}$ è una successione a termini positivi e quindi il suo limite $\alpha(t_2) - \alpha(t_1)$ è di conseguenza positivo o nullo. Dalla (III) si ha allora:

$$\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \frac{1}{m_0 h} \int_0^{\alpha(t)} [\Omega^{(1)}(x,\ t+h) - \Omega^{(1)}(x,\ t)]dx -$$

$$- \frac{1}{m_0 h} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t+h)} \Omega^{(1)}(x,\ t+h)dx - \frac{1}{m_0 h} \int_{\alpha(t+h)}^{a} [\Omega^{(2)}(x,\ t+h) - \Omega^{(2)}(x,\ t)]dx + \frac{1}{m_0 h} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t+h)} \Omega^{(2)}(x,\ t)dx,$$

dove $\Omega^{(i)}(x,\ t) = \Omega[V^{(i)}(x,\ t)]$.

Applicando il teorema degli accrescimenti finiti, tenuto conto delle proprietà delle funzioni $V^{(i)}$ ed Ω, si ha dalla precedente:

$$\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} \left\{ 1 + \frac{\Omega^{(1)}[\alpha(t+\vartheta_1 h),\ t+h]}{m_0} - \frac{\Omega^{(2)}[\alpha(t+\vartheta_2 h),\ t]}{m_0} \right\} =$$

$$(24) \qquad = \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \frac{1}{m_0} \int_0^{\alpha(t)} \left[\frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon_1 \right] dx - \frac{1}{m_0} \int_{\alpha(t+h)}^{a} \left[\frac{\partial \Omega^{(2)}}{\partial t} + \varepsilon_2 \right] dx =$$

$$= \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \frac{H(t)}{m_0} + \frac{1}{m_0} \left[\left(\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x} \right)_{x=\alpha(t+h)} - \left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x} \right)_{x=\alpha(t)} \right] -$$

$$- \frac{1}{m_0} \int_0^{\alpha(t)} \varepsilon_1 dx - \frac{1}{m_0} \int_{\alpha(t+h)}^{a} \varepsilon_2 dx, \qquad 0 \leq \vartheta_i \leq 1.$$

Per la continuità di $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ si ha $\lim_{h \to 0} \int_0^{\alpha(t)} \varepsilon_1 dx = \lim_{h \to 0} \int_{\alpha(t+h)}^{a} \varepsilon_2 dx = 0$ ed essendo $\Omega^{(1)}(\alpha, t) = \Omega^{(2)}(\alpha, t) = 0$ e $\frac{dF}{dt} = \frac{H(t)}{m_0}$, si ha infine

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = \frac{1}{m_0} \left[\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x} \right]_{x=\alpha},$$

che ci dà insieme la derivabilità di $\alpha(t)$ e la verifica di (II).

9. Teorema di unicità.

Siano x, $U^{(i)}$ e y, $V^{(i)}$ due soluzioni di (I$^{(i)}$), (II) e non sia in ogni istante di $(0, T)$ $x(t) = y(t)$, esista cioè un istante t^* per cui è $x(t^*) > y(t^*)$. Vogliamo provare che tale ipotesi è assurda.

Si ha infatti:

$$0 \leq x(t^*) - y(t^*) = -\frac{1}{m_0} \int_0^{x(t^*)} \Omega^{(1)}(U^{(1)}) dx + \frac{1}{m_0} \int_0^{y(t^*)} \Omega^{(1)}(V^{(1)}) dx -$$
$$- \frac{1}{m_0} \int_{x(t^*)}^{a} \Omega^{(2)}(U^{(2)}) dx + \frac{1}{m_0} \int_{y(t^*)}^{a} \Omega^{(2)}(V^{(2)}) dx$$

e quindi

$$0 \leq x(t^*) - y(t^*) = \frac{1}{m_0} \int_0^{y(t^*)} [\Omega^{(1)}(V^{(1)}) - \Omega^{(1)}(U^{(1)})] dx - \frac{1}{m_0} \int_{y(t^*)}^{x(t^*)} \Omega^{(1)}(U^{(1)}) dx -$$
$$- \frac{1}{m_0} \int_{x(t^*)}^{a} [\Omega^{(2)}(U^{(2)}) - \Omega^{(2)}(V^{(2)})] dx + \frac{1}{m_0} \int_{y(t^*)}^{x(t^*)} \Omega^{(2)}(V^{(2)}) dx.$$

Essendo il secondo e quarto termine di questa negativi (cfr. 6, *a*) e *b*)) sarà provato l'assurdo se potremo dimostrare che per $t = t^*$ valgono le disuguaglianze:

$$\begin{aligned} Z^{(1)}(x, t^*) &= V^{(1)}(x, t^*) - U^{(1)}(x, t^*) \leq 0, \\ Z^{(2)}(x, t^*) &= U^{(2)}(x, t^*) - V^{(2)}(x, t^*) \geq 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Siano $W^{(i)} = W^{(i)}(x, \tau)$ rispettivamente soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k_1(V^{(1)})} \dfrac{\partial W^{(1)}}{\partial \tau} + \Phi(W^{(1)}, x, \tau), \quad P \in D^{(1)}_{y(t^*), t}\,; \\ \left[\dfrac{\partial W^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=0} = 0, \\ W^{(1)}[y(t^*), t] = - U^{(1)}[y(t^*), t] \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W^{(2)}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k_2(W^{(2)} + V^{(2)})} \dfrac{\partial W^{(2)}}{\partial \tau} + \Phi_1(W^{(2)}, x, \tau), \quad P \in D^{(2)}_{x(t^*), t}\,; \\ W^{(2)}(x, 0) = 0, \\ W^{(2)}[x(t^*), t] = U^{(2)}(x(t^*), t] \geq 0, \\ \left[\dfrac{\partial W^{(2)}}{\partial x}\right]_{x=a} = 0\,; \end{cases}$$

analoghi a (10) e (14). Per quanto osservato in 6, c), si ha $W^{(1)} \leq 0$ in $D^{(1)}_{y(t^*), t}$ e $W^{(2)} \geq 0$ in $D^{(2)}_{x(t^*), t}$. Ciò varrà in particolare sulla caratteristica $t = t^* \leq T$. Ma, essendo $U^{(i)}$ e $V^{(i)}$ soluzioni regolari di sistemi ottenuti da $(\mathrm{I}^{(i)})$ facendovi rispettivamente $x(t^*)$ o $y(t^*)$ al posto di $\alpha(t)$, si vede facilmente che è $Z^{(i)}(x, t^*) = W^{(i)}(x, t^*)$ e perciò, come volevamo, le (25). Si ha perciò:

$$0 \leq x(t^*) - y(t^*) \leq 0,$$

assurda se non è $x(t^*) = y(t^*)$.

Gioverà sottolineare che, ancor qui come in (L) (cfr. in particolare [27], [28]), l'indagine è puntuale per $t = t^*$ e non implica ipotesi per ogni $t \leq t^*$.

10. Osservazioni sulle approssimazioni α_n.

Vogliamo adesso mostrare, analogamente a quanto fu esposto in (L), che per le α_n vale il seguente:

TEOREMA. - *Due approssimazioni successive per $\alpha(t)$, secondo la (16), soddisfano alla disuguaglianza opposta a quella che intercede tra la coppia di approssimazioni di indici immediatamente precedenti.*

Sia ad es. $\alpha_{n-2} \leq \alpha_{n-1}$, vogliamo provare che è allora $\alpha_{n-1} \geq \alpha_n$.

Dalla (16) si ha:

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = -\frac{1}{m_0}\int_0^{\alpha_{n-1}} \Omega_{n-1}^{(1)} dx + \frac{1}{m_0}\int_0^{\alpha_{n-2}} \Omega_{n-2}^{(1)} dx -$$

$$-\frac{1}{m_0}\int_{\alpha_{n-1}}^{a} \Omega_{n-1}^{(2)} dx + \frac{1}{m_0}\int_{\alpha_{n-2}}^{a} \Omega_{n-2}^{(2)} dx =$$

$$= \frac{1}{m_0}\int_0^{\alpha_{n-2}} [\Omega_{n-2}^{(1)} - \Omega_{n-1}^{(1)}] dx - \frac{1}{m_0}\int_{\alpha_{n-2}}^{\alpha_{n-1}} \Omega_{n-1}^{(1)} dx =$$

$$-\frac{1}{m_0}\int_{\alpha_{n-1}}^{a} [\Omega_{n-1}^{(2)} - \Omega_{n-2}^{(2)}] dx + \frac{1}{m_0}\int_{\alpha_{n-2}}^{\alpha_{n-1}} \Omega_{n-2}^{(2)} dx.$$

Essendo per 6, *a*) e *b*) $V_{n-1}^{(1)} \geq 0$ e $V_{n-2}^{(2)} \leq 0$, e quindi $\Omega_{n-1}^{(1)} \geq 0$, $\Omega_{n-2}^{(2)} \leq 0$, sarà provato l'asserto se risulterà $\Omega_{n-2}^{(1)} - \Omega_{n-1}^{(1)} \leq 0$ e $\Omega_{n-1}^{(2)} - \Omega_{n-2}^{(2)} \geq 0$. Per la crescenza di $\Omega^{(i)}$ basterà provare che è $V_{n-2}^{(1)} - V_{n-1}^{(1)} \leq 0$ e $V_{n-1}^{(2)} - V_{n-2}^{(2)} \geq 0$.

Ciò è conseguenza di quanto esposto in 6, *c*). Basta infatti osservare che le due differenze soddisfano a due sistemi analoghi a (8) e (13) con le condizioni:

$$[V_{n-2}^{(1)} - V_{n-1}^{(1)}]_{x=\alpha_{n-2}} = - V_{n-1}^{(1)}(\alpha_{n-2},\ t) \leq 0,$$

$$[V_{n-1}^{(2)} - V_{n-2}^{(2)}]_{x=\alpha_{n-1}} = - V_{n-2}^{(2)}(\alpha_{n-1},\ t) \geq 0.$$

Si ha perciò, come volevamo provare, $\alpha_n \leq \alpha_{n-1}$. Analogamente si dimostra $\alpha_n \geq \alpha_{n-1}$ se $\alpha_{n-1} \leq \alpha_{n-2}$.

Come conseguenza si ha subito:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_0 .$$

Provata direttamente, come in (L), la disuguaglianza $\alpha_3 \geq \alpha_1$, con che

$$\alpha_1 \leq \alpha_3 \leq \alpha_2 \leq \alpha_0 ,$$

ragionando per induzione, nel caso di indici consecutivi pari o dispari, si può agevolmente provare, in modo del tutto analogo a quanto è stato fatto sopra, che le approssimazioni di indice pari formano una successione monotona non crescente, limitata inferiormente da α_1 (superiormente da α_0 per (17)), mentre quelle di indice dispari formano una successione monotona non decrescente limitata superiormente da una qualunque approssimazione di indice pari (inferiormente, essendo le α_n tutte positive o nulle, è limitata da 0).

Le due successioni $\{\alpha_{2n}\}$, $\{\alpha_{2n+1}\}$ risultano pertanto convergenti ed essendo valido il teorema di unicità, si ha così un criterio per scegliere nella successione $\{\alpha_n\}$ la sottosuccessione $\{\bar{\alpha}_n\}$, di cui al paragrafo 8, e nello stesso tempo un modo per approssimare, per eccesso o per difetto, la ricercata soluzione $\alpha(t)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] *American Institute of Physics Handbook*, Mc. Graw-Hill Inc., New York, 1957.

[2] D. C. BAXTER, *The freezing and melting times of slabs and cylinders*, « Nat. Res. Council Canada, Div. Mech. Eng., Rep. MK-1 », 1959.

[3] M. BRILLOUIN, *Quelques problèmes non resolus de physique-mathématique*, « Annales Inst. Poincaré », 1, 285-308, 1932.

[4] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, 2ª Ed. Claredon Press, Oxford, 1959.

[5] B. P. CLAPEYRON e G. LAMÈ, cfr. [19].

[6] J. CRANK, *The mathematics of diffusion*, Claredon Press, Oxford, 1956.

[7] J. CRANK, *Two methods for the numerical solution of moving boundary problems in diffusion and heat flow*, « Quart. J. Mech. appl. Math. », 10, 220-231, 1957.

[8] A. B. DACEV, *Sul problema bidimensionale di Stefan*, « Doklady Akad. Nauk. SSSR. », 101, 441-444, 1955 (in Russo).

[9] A. B. DACEV, *Sul problema tridimensionale di Stefan*, « Doklady Akad. Nauk. SSSR. », 101, 629-632, 1955 (in Russo).

[10] J. DOUGLAS jr. and T. M. GALLIE jr., *On the numerical integration of a parabolic equation subject to a moving boundary condition*, « Duke Math. J. », 22, 557-571, 1955.

[11] J. DOUGLAS jr., *A uniqueness theorem for the solution of a Stefan problem*, « Proceedings Am. Math. Soc. », 8, 402-408, 1957.

[12] A. FRIEDMAN, *Free boundary problems for parabolic equations*; Part. I: *Melting of solids*, « J. Math. and Mech. », 8, 499-518, 1959; Part. II: *Evaporation or condensaction of a liquid drop*, « J. Math. and Mech. », 9, 19-66, 1960; Part. III: *Dissolution of a gas bubble in liquid*, « J. Math. and Mech. », 9, 327-345, 1960.

[13] T. M. GALLIE jr. and J. DOUGLAS jr., cfr. [10].

[14] M. GEVREY, *Equations aux dérivées partielles du type parabolique*, « J. Math. Pures Appl. », (6), 9, 306-471, 1913.

[15] J. C. JAEGER and H. S. CARSLAW, cfr. [4].

[16] J. B. KELLER, cfr. [22].

[17] W. T. KYNER, *On a free boundary value problem for the heat equation*, « Quart. appl. Math. », 17, 395-310, 1959.

[18] W. T. KYNER, *An existence and uniqueness theorem for a nonlinear Stefan problem*, « J. Math. and Mech. », 8, 483-498, 1959.

[19] I. KOLODNER, *Free boundary problem for the heat equation with application to problems of change of phase*, « Comm. pure and appl. Math. », 9, 1-31, 1956.

[20] G. LAMÈ e B. P. CLAPEYRON, « Annales de Chymie et Phys. », 47, 250-256, 1831.

[21] W. L. MIRANKER, *A free boundary value problem for the heat equation*, « Quart. appl. Math. », 16, 121-130, 1958.

[22] W. L. MIRANKER and J. B. KELLER, *The Stefan problem for a non linear equation*, « J. Math. and Mech. », 9, 67-70, 1960.

[23] A. L. RUOFF, *An alternate solution of Stefan's problem*, « Quart. appl. Math. », 16, 197-201, 1958.

[24] F. SELING, *Bemerkungen zum Stefanschen Problem*, « Oester. Ingenieur Arch. », 10, 277-280, 1956.

[25] G. SESTINI, *Esistenza di una soluzione in problemi analoghi a quello di Stefan*, « Rivista Mat. Univ. Parma », 3, 3-21, 1952.

[26] G. SESTINI, *Esistenza ed unicità nel problema di Stefan relativo a campi dotati di simmetria*, « Rivista Mat. Univ. Parma », 3, 103-113, 1952.

[27] G. SESTINI, *Sopra un teorema di unicità in problemi unidimensionali analoghi a quello di Stefan*, « Boll. U. M. I. », (3), 12, 516-519, 1957.

[28] G. SESTINI, *Ancora su di un teorema di unicità in problemi unidimensionali analoghi a quello di Stefan*, « Boll. U. M. I. », (3), 14, 373-375, 1959.

[29] J. STEFAN, *Ueber einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung*, « S. B. Kais. Akad. Wiss. Wien », 98, 965-983, 1889.

[30] W. F. TRENCH, *On an explicit method for the solution of a Stefan problem*, « J. Soc. Indust. Appl. Math. », 7, 184-204, 1959.

[31] H. WEBER, *Die partiellen Differentialgleichungen der Math.-Phys.*, 6ª Ed., Braunschweig, 1919.