Sui coefficienti di Fourier di una funzione rispetto al sistema dei polinomi ultrasferici. (*)

di ALESSANDRO OSSICINI (a Roma)

A Giovanni Sansone per il suo 70^mo compleanno.

Sunto. - *Si trova al n. 1 del Lavoro stesso.*

1. In questo lavoro ci proponiamo di determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un'assegnata successione di numeri $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n \ldots$ sia quella dei coefficienti di FOURIER, rispetto al sistema dei polinomi ultrasferici:

$$c_n = \frac{2^{2\lambda-1}[\Gamma(\lambda)]^2 (n+\lambda) n!}{\pi\Gamma(n+2\lambda)} \int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_n^{(\lambda)}(x) dx \tag{1.1}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \left(\frac{1}{2} \leq \lambda < 1\right)$$

di una funzione $f(x)$ (reale e quasi continua) *verificante quasi ovunque nell'intervallo* $(-1, 1)$ *la limitazione*

$$0 \leq f(x)(1-x^2)^{\lambda} \leq 1. \tag{1.2}$$

Per la dimostrazione del teorema è necessario premettere due particolari sviluppi in serie di polinomi ultrasferici.

2. Determiniamo lo sviluppo per polinomi ultrasferici di x^m ove m è intero e positivo.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(1) Per un teorema relativo ai coefficienti LEGENDRE cfr. FRANCESCO SAVERIO ROSSI, *Sui coefficienti di Legendre di una funzione limitata compresa fra limiti assegnati* «Annali della Scuola Normale superiore di Pisa», Serie III, Vol. VI, 1952, p. 317.

Avremo $x^m = \Sigma\, c_s P_s^{(\lambda)}(x)$ e poichè x^m si esprime per $P_m^{(\lambda)}(x)$ $x^{m-2}, x^{m-4}, \ldots;$ x^{m-2} si esprime per $P_{m-2}^{(\lambda)}(x)$, $x^{m-4}, \ldots$; ne viene che

$$c_s = \frac{2^{2\lambda-1}[\Gamma(\lambda)]^2 (s+\lambda) s!}{\pi\Gamma(s+2\lambda)} \int_{-1}^{1} x^m (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_s^{(\lambda)}(x) dx \tag{2.1}$$

per $m - s \geq 0$ $m - s$ pari, mentre

$$\int_{-1}^{1} x^m (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_s^{(\lambda)}(x) dx = 0$$

per $m - s$ dispari.

Poichè [2]

$$P_0^{(\lambda)}(x) = 1,\ P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(-2)^n \Gamma(n+\lambda)\,\Gamma(n+2\lambda)}{n!\,\Gamma(\lambda)\Gamma(n+2\lambda)} (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

abbiamo

$$c_s = \frac{(-1)^s 2^{s+2\lambda-1}\Gamma(\lambda)\Gamma(s+\lambda+1)}{\pi\Gamma(2s+2\lambda)} \int_{-1}^{1} x^m \frac{d^s}{dx^s} (1-x^2)^{s+\lambda-\frac{1}{2}} dx .$$

Trasformando quest'integrale con s successive integrazioni per parti e tenendo conto che $m - s$ è pari, troviamo

$$c_s = \frac{2^{s+2\lambda-1}\Gamma(\lambda)\Gamma(s+\lambda+1)}{\pi\Gamma(2s+2\lambda)} \frac{m!}{(m-s)!} \int_{-1}^{1} x^{m-s} (1-x^2)^{s+\lambda-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{2^{s+2\lambda-1}\Gamma(\lambda)\Gamma(s+\lambda+1)}{\pi\Gamma(2s+2\lambda)} \frac{m!}{(m-s)!} \int_{0}^{1} t^{\frac{m-s-1}{2}} (1-t)^{s+\lambda-\frac{1}{2}} dt.$$

Ora per la [3]

$$\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

---

(2) Cfr. G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, «Am. Math. Soc. Coll. 23», New York 1939, p. 81.

(3) Cfr. A. Ghizzetti, *Complementi ed Esercizi di Analisi Matematica*, Vol. II, 1953, Roma, p. 361.

ne segue

$$c_s = \frac{2^{s+2\lambda-1}\Gamma(\lambda)\Gamma(s+\lambda+1)\Gamma\left(s+\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-s}{2}+\frac{1}{2}\right)m\,!}{\pi\Gamma(2s+2\lambda)\Gamma\left(\frac{m+s}{2}+\lambda+1\right)(m-s)\,!}$$

e quindi se teniamo conto della [4]

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)\,!\,!}{2^k}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

e della formula di duplicazione del LEGENDRE [5]

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z)$$

$$c_s = \frac{(s+\lambda)\Gamma(\lambda)\,m\,!}{2^{\frac{m+s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{m+s}{2}+\lambda+1\right)(m-s)\,!\,!} \tag{2.3}$$

se $m \geq s$, $m-s \equiv 0 \pmod 2$ e perciò per m intero positivo [6]

$$x^m = \Gamma(\lambda)m\,!\sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(m-2s+\lambda)\,P^{(\lambda)}_{m-2s}(x)}{2^{m-s}(2s)\,!\,!\,\Gamma(m-s+\lambda+1)} \tag{2.4}$$

od anche

$$x^m = \frac{\Gamma(\lambda)m\,!}{2^m}\sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(m-2s+\lambda)P^{(\lambda)}_{m-2s}(x)}{s\,!\,\Gamma(m-s+\lambda+1)}\,. \tag{2.5}$$

3. Consideriamo i polinomi di TCHEBYCHEF di prima specie [7]

$$T_0(x) = 1,\ \ T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m(n-m-1)\,!\,(2x)^{n-2m}}{m\,!\,(n-2m)\,!}\,,\ \ n \geq 1\,. \tag{3.1}$$

---

(4) Cfr. A. GHIZZETTI, vol. cit. p. 361.

(5) Cfr. G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa* Vol. I, Padova 1950, p. 186.

(6) Nella [2,4] il simbolo $\left[\frac{n}{2}\right]$ indica la parte interna di $\frac{n}{2}$ e conveniamo che sia $0!! = 1$.

(7) Cfr. G. SZEGÖ op. cit. (2) p. 80.

A causa delle (2.5) possiamo esprimere questi polinomi per mezzo dei polinomi ultrasferici [7]

$$T_0(x) = P_0^{(\lambda)}(x) = 1 \tag{3.2}$$

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\Gamma(\lambda) \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{m!} \sum_{s=0}^{\frac{n-2m}{2}} \frac{(n-2m-2s+\lambda) P_{n-2m-2s}^{(\lambda)}(x)}{s!\,\Gamma(n-2m-s+\lambda+1)} \tag{3.3}$$

$$(n \geq 1)$$

se n è pari la seconda somma per $m = \frac{n}{2}$ va sostituita col valore 1. La (3.3) può mettersi sotto la forma

$$T_n(x) = \Gamma(\lambda) \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (n-2m+\lambda) K_{n,m}^{(\lambda)} P_{n-2m}^{(\lambda)}(x) \tag{3.4}$$

ove $K_{n,m}^{(\lambda)}$ denota

$$K_{n,m}^{(\lambda)} = \frac{n}{2} \sum_{s=0}^{m} \frac{(-1)^s (n-s-1)!}{s!\,(m-s)!\,\Gamma(n-m-s+\lambda+1)}.$$

4. Supponiamo che la funzione $f(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ sia sommabile (nel senso di Lebesgue) nell'intervallo $(-1, 1)$ se poniamo $x = \cos t$ la nostra ipotesi equivale a supporre $f(\cos t)\,\mathrm{sen}^{2\lambda} t$ sommabile in $(0, \pi)$.

Facciamo ora vedere che è possibile esprimere linearmente per mezzo dei coefficienti c_n definiti dalle (1. 1) i seguenti numeri $a_0, a_1, a_2 \ldots$ definiti dalla formula

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos t)\,\mathrm{sen}^{2\lambda} t \cos nt\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.1}$$

Si ha infatti per le (3.2) (3.4) poiché $T_n(\cos t) = \cos nt$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\Gamma(2\lambda)}{2^{2\lambda-2}[\Gamma(\lambda)]^2\lambda} c_0 \\ a_n &= \frac{1}{2^{2\lambda-2}\Gamma(\lambda)} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} K_{n,m}^{(\lambda)} \frac{\Gamma(n-2m+2\lambda)}{(n-2m)!} c_{n-2m} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Viceversa i coefficienti c_n possono esprimersi linearmente per mezzo degli a_n. Basta ricordare che

$$P_n^{(\lambda)}(\cos t) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varepsilon_{n-2m} \alpha_m \alpha_{n-m} \cos(n-2m)t \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.3}$$

ove

$$\alpha_k = \frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!\,\Gamma(\lambda)} \qquad \varepsilon_k = \begin{cases} 1 & (\text{se } k=0) \\ 2 & (\text{se } k \neq 0) \end{cases}$$

per ottenere introdotta la funzione Beta

$$c_n = 2^{2\lambda-2}(n+\lambda) \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varepsilon_{n-2m} \binom{n}{m} B(m+\lambda,\ n-m+\lambda) a_{n-2m} \tag{4.4}$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots).$$

5. Se poniamo

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(\cos t)\,|\operatorname{sen} t\,|^{2\lambda} \\ \text{in } (-\pi,\ \pi) \end{cases} \tag{5.1}$$

la $\varphi(t)$ è una funzione pari verificante la condizione

$$0 \leq \varphi(t) \leq 1$$

e i suoi coefficienti di FOURIER della serie in forma esponenziale

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) c^{int} dt$$

sono legati ai $a_n (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots)$ dalla relazione $\gamma_n = \frac{a_n}{2}$ e quindi se teniamo conto di un teorema di GHIZZETTI sui coefficienti di FOURIER [8] concludiamo che:

Condizione necessaria è sufficiente affinchè una data successione di numeri $\{c_n\}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots)$ sia quella dei coefficienti di FOURIER rispetto al sistema dei polinomi ultrasferici, di una funzione verificante la (1.2) è che, costruita la corrispondente successione $\{a_n\}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots)$ definita dalle (4.2) dedotti $s_1,\ s_2,\ s_3 \ldots$ per mezzo della funzione generatrice

$$c^{-\pi i \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n} = 1 - i e^{\frac{\pi i a_0}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} s_n z^n$$

---

[8] Cfr. A. GHIZZETTI, *Sui coefficienti di Fourier di una funzione limitata, compresa tra limiti assegnati*, «Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa», Serie III, Vol. IV, 1950 pp. 131-156.

con

$$s_0 = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi a_0}{2}$$

e costruiti i determinanti

$$D_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_n \\ s_{-1} & s_0 & s_1 & s_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{-n} & s_{-n+1} & s_{-n+2} & s_0 \end{vmatrix} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots)$$

si verifichi uno dei seguenti casi:

1°) sia $a_0 = 0$ oppure $a_0 = 2$ (quindi $D_0 = 0$) e i determinanti $D_1, D_2, D_3 \ldots$ tutti nulli.

2°) sia $0 < a_0 < 2$ (quindi $D_0 > 0$) ed esiste un intero $n \geq 1$ in modo che i determinanti D_1, D_2, $D_3 \ldots D_{n-1}$ siano positivi ed i successivi D_n, D_{n+1}, $D_{n+2} \ldots$ tutti nulli.

3°) sia $0 < a_0 < 2$ (quindi $D_0 > 0$) ed i determinanti D_1, D_2, $D_3 \ldots$ tutti positivi.

Nel 1° caso $f(x)(1 - x^2)^\lambda$ è quasi ovunque uguale a 0, oppure a 1.

Nel 2° caso $f(x)(1 - x^2)^\lambda$ coincide con una funzione costante a tratti con valori 0, 1, individuata da a_0, a_1, $a_2, \ldots a_{n-1}$.

Nel 3° caso $f(x)(1 - x^2)^\lambda$ non può coincidere quasi ovunque con alcuna funzione costante a tratti.