Un problema ai limiti per una classe di sistemi di equazioni integrali.

Memoria di LUIGI MERLI (a Firenze)

A Giovanni Sansone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Si studiano alcune classi di sistemi di equazioni integrali per le quali vengono stabilite condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni continue, con assegnate condizioni ai limiti, che generalizzano alcuni noti risultati relativi a certe classi di sistemi di equazioni alle derivate parziali.*

Summary. - *Sufficient conditions for the existence of continuous solutions of a class of systems of integral equations, with prescribed boundary conditions are established, which generalise some known results relative to certain classes of systems of partial differential equations.*

1. È noto che il problema dell'esistenza di soluzioni di un sistema di equazioni alle derivate parziali viene spesso agevolato dalla trasformazione del sistema stesso in un sistema integrodifferenziale o in un sistema integrale. Per esempio, il sistema

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} = F[x, y, u(x, y), v(x, y)], \\[2ex] \dfrac{\partial v(x, y)}{\partial y} = G[x, y, u(x, y), v(x, y)], \end{cases}$$

con le condizioni al contorno $u(0, y) = 0$, $v(x, 0) = 0$, risulta equivalente al sistema integrale

$$\text{(I')} \qquad \begin{cases} u(x, y) = \displaystyle\int_0^x F[t, y, u(t, y), v(t, y)]dt, \\[2ex] v(x, y) = \displaystyle\int_0^y G[x, s, u(x, s), v(x, s)]ds. \end{cases}$$

Tale sistema è stato studiato recentemente da G. VILLARI [1], il quale ha dimostrato, generalizzando noti risultati [2], che se F e G sono due funzioni continue di (x, y, u, v), con $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ e soddisfacenti rispettivamente alle condizioni di LIPSCHITZ

$$\begin{cases} |F(x, y, u', v) - F(x, y, u, v)| < M|u' - u|, \\ |G(x, y, u, v') - G(x, y, u, v)| < L|v' - v|, \end{cases}$$

esiste, in un conveniente rettangolo $0 \leq x \leq h$, $0 \leq y \leq k$, $(0<h \leq a,\ 0<k \leq b)$, almeno una coppia di funzioni continue $u(x, y)$ e $v(x, y)$ che soddisfano il sistema (I) e verificano le prescritte condizioni al contorno.

Così il noto teorema di PH. HARTMAN e A. WINTNER [3] riguardante l'equazione di tipo iperbolico

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f[x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)],$$

con le condizioni al contorno

$$z(x, 0) = 0, \ z(0, y) = 0,$$

affermante che *se in* R: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, *la funzione* $f[x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)]$ *risulta uniformemente lipschitziana rispetto a* z_x *e* z_y, *esiste in* R *una funzione* $z(x, y)$ *continua insieme alle sue derivate* $z_x(x, y)$, $z_y(x, y)$, $z_{xy}(x, y)$, *soluzione dell'equazione* (II), si dimostra agevolmente trasformando la (II) nella forma integrale

$$\text{(II')} \qquad z(x, y) = \int_0^x \int_0^y f[t, s, z(t, s), z_t(t, s), z_s(t, s)]dtds, \ ([4]).$$

Pertanto in questo lavoro ci siamo proposti di studiare un sistema integrale per il quale dimostreremo un teorema di esistenza e faremo vedere

(1) G. VILLARI, *Su un problema al contorno per una classe di sistemi di equazioni alle derivate parziali*, «Boll. U. M. I.», S. III, XIII, 4 (1958), pp. 514-521.

(2) F. TRICOMI, *Equazioni a derivate parziali*, Roma (1957), p. 117.

(3) PH. HARTMAN - A. WINTNER, *On hyperbolic partial differential equations*, «Am. J.I. of. Math.», 74 (1952), pp. 834-864.

(4) Per un'ampia bibliografia dei lavori che si riconnettono all'argomento della presente nota, cfr. R. CONTI, *Sull'equazione integrodifferenziale di* DARBOUX-PICARD, «Le Matematiche», vol. XIII, fasc. 1 (1958), pp. 30-39.

che vi rientrano i teoremi di G. VILLARI e di PH. HARTMAN - A. WINTNER. Esso è il seguente:

$$(1)\qquad \begin{cases} q(x,\ y) = \displaystyle\int_0^x F[u,\ y,\ \int_0^y q(u,\ t)dt,\ p(u,\ y),\ q(u,\ y)]du, \\ \\ p(x,\ y) = \displaystyle\int_0^y G[x,\ v,\ \int_0^x p(t,\ v)dt,\ p(x,\ v),\ q(x,\ v)]dv, \end{cases}$$

dove $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$ e $G(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$ sono funzioni assegnate per $(x,\ y)$ variabile nel rettangolo R: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, con $|z| < +\infty$, $|p| < +\infty$, $|q| < +\infty$. Relativamente a tale sistema integrale dimostreremo, nel numero 2, il

TEOREMA. - *Supponiamo che in* (1) *la F e la G siano funzioni continue rispetto a $(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$ e limitate: $|F| < M$, $|G| < M$. Esistano inoltre due funzioni $\chi(\rho)$, $\pi(\sigma)$, non negative e non decrescenti per $\rho \geq 0$, $\sigma \geq 0$, con*

$$(2)\qquad \int_{+0} \frac{d\rho}{\chi(\rho)} = +\infty, \qquad \int_{+0} \frac{d\sigma}{\pi(\sigma)} = +\infty$$

e tale che risulti

$$(3)\qquad \begin{cases} |F(x,\ y,\ z,\ p,\ q') - F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)| \leq \chi(|q - q'|), \\ |G(x,\ y,\ z,\ p',\ q) - G(x,\ y,\ z,\ p,\ q)| \leq \pi(|p - p'|). \end{cases}$$

Esiste allora, in un conveniente R: $0 \leq x \leq h$, $0 \leq y \leq\ y \leq k$, $(0<h\leq a$, $0<k \leq b)$, almeno una coppia di funzioni continue $p(x,\ y)$, $q(x,\ z)$ soddisfacenti in ogni punto di R' il sistema (1) *e le condizioni al contorno*

$$(4)\qquad p(0,\ y) = 0, \qquad q(x,\ 0) = 0.$$

Il metodo che adopreremo per la dimostrazione permette inoltre di ottenere lo stesso teorema di esistenza qualora, ferme restando tutte le condizioni enunciate, si consideri, anzichè il sistema (1), il sistema

$$
(1') \qquad \begin{cases} q(x,\ y) = \displaystyle\int_0^x F[u,\ y,\ \int_0^y q(x,\ t)dt,\ p(u,\ y),\ q(u,\ y)]du, \\ \\ p(x,\ y) = \displaystyle\int_0^y G[x,\ v,\ \int_0^v q(x,\ t)dt,\ p(x,\ v),\ q(x,\ v)]dv. \end{cases}
$$

Bastano allo scopo lievi adattamenti nel ragionamento. Per brevità noi ci limiteremo a dimostrare il teorema soltanto relativamente al sistema (1).

Vedremo poi, al numero 3, come in questo teorema rientrino i noti risultati che abbiamo sopra ricordato.

2. Ci serviremo, per la dimostrazione del teorema enunciato, del metodo esistenziale di L. TONELLI di cui si fa uso nel caso delle equazioni differenziali ordinarie ([5]) e di cui si è servito il VILLARI, per la dimostrazione del suo teorema. Nel rettangolo R: $0 \leq x \leq h$, $0 \leq y \leq k$, $(0 < h \leq a,\ 0 < k \leq b)$, definiamo le successioni

$$
(5) \qquad \{p_n(x,\ y)\}, \qquad \{q_n(x,\ y)\}, \qquad n = 1,\ 2, \ldots,
$$

con la seguente legge:

$$
\begin{cases} q_1\ (x,\ y) = 0 \\ p_1(x,\ y) = 0, \qquad \text{in tutto } R', \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} q_n(x,\ y) = 0, \qquad \text{in } S_1\text{: } 0 \leq x \leq \dfrac{h}{n}, \qquad 0 \leq y \leq k, \\ p_n(x,\ y) = 0, \qquad \text{in } S_2\text{: } 0 \leq x \leq h, \qquad 0 \leq y \leq \dfrac{k}{n}, \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} q_n(x,\ y) = \displaystyle\int_0^{x-\frac{h}{n}} F[u,\ y, \int_0^y q(u,\ t)dt,\ p_n(u,y).\ q_n(u,\ y)]du, \text{ in } R' - S_1. \\ p_n(x,\ y) = \displaystyle\int_0^{y-\frac{k}{n}} G[x,\ v, \int_0^x p_n(t,\ v)dt,\ p_n(x,\ v),\ q_n(x,\ v)]dv, \text{ in } R' - S_2. \end{cases}
$$

([5]) G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, P. I[a], Bologna (1948), p. 45.

Si ha, qualunque sia n, in R'

$$|q_n(x, y)| \leq \int_0^h |F| \, du \leq Mh \leq Ma,$$

$$|p_n(x, y)| \leq Mk \leq Mb,$$

e se $L = \max(Ma, Mb)$ sarà:

$$|q_n(x, y)| \leq L,$$

$$|p_n(x, y)| \leq L.$$

Se indichiamo ora con (x_1, y_1) e (x_2, y_2) due punti qualsiasi di R', sarà:

$$(6) \quad |q_n(x_2, y_2) - q_n(x_1, y_1)| \leq |q_n(x_2, y_2) - q_n(x_2, y_1)| + |q_n(x_2, y_1) - q_n(x_1, y_1)|.$$

Ma è

$$(7) \quad |q_n(x_2, y_1) - q_n(x_1, y_1)| \leq \int_{x_1 - \frac{h}{n}}^{x_2 - \frac{h}{n}} \left| F[u, y_1, \int_0^{y_1} q_n(u, t)dt, p_n(u, y_1), q_n(u, y_1)] \right| du \leq$$

$$\leq M |x_2 - x_1|.$$

D' altra parte

$$|q_n(x_2, y_2) - q_n(x_2, y_1)| \leq \int_0^{x_2 - \frac{h}{n}} \left| F[u, y_2, \int_0^{y_2} q_n(u, t)dt, p_n(u, y_2), q_n(u, y_2)] - \right.$$

$$\left. - F[u, y_1, \int_0^{y_1} q_n(u, t)dt, p_n(u, y_1), q_n(u, y_1)] \right| dv \leq$$

$$\leq \int_0^{x_2 - \frac{h}{n}} \left| F[u, y_2, \int_0^{y_2} q_n(u, t)dt, p_n(u, y_2), q_n(u, y_2)] - \right.$$

$$\left. - F[u, y_2, \int_0^{y_2} q_n(u, t)dt, p_n(u, y_2), q_n(u, y_1)] \right| dv +$$

$$+ \int_0^{x_2 - \frac{h}{n}} \left| F[u, y_2, \int_0^{y_2} q_n(u, t)dt, p_n(u, y_2), q_n(u, y_1)] - \right.$$

$$\left. - F[u, y_1, \int^{y_1} q_n(u, t)dt, p_n(u, y_1), q_n(u, y_1)] \right| dv.$$

Posto

$$C_n = \int_0^{x_2 - \frac{h}{n}} \Big| F\Big[u,\ y_2, \int_0^{y_2} q_n(u,\ t)dt,\ p_n(u,\ y_2),\ q_n(u,\ y_1)\Big] -$$

$$- F\Big[u,\ y_1, \int_0^{y_1} q_n(u,\ t)dt,\ p_n(u,\ y_1),\ q_n(u,\ y_1)\Big] \Big| dv,$$

per la continuità della $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$ rispetto alla y, per $0 \leq y \leq h$ e per il fatto che

$$| p_n(u,\ y_2) - p_n(u,\ y_1) | \leq \int_{y_1 - \frac{k}{n}}^{y_2 - \frac{k}{n}} | G | du \leq M | y_2 - y_1 |$$

ed anche, che

$$\left| \int_0^{y_2} q_n(u,\ t)dt - \int_0^{y_1} q_n(u,\ t)dt \right| \leq \int_{y_1}^{y_2} | q_n(u,\ t) | dt < L | y_2 - y_1 |,$$

segue che $C_n = 0(| y_2 - y_1 |)$, uniformemente rispetto ad n. Si ha allora, tenuto conto della seconda delle (3),

$$| q_n(x_2,\ y_2) - q_n(x_2,\ y_1) | \leq \int_0^{x_2 - \frac{h}{n}} \pi(| q_n(u,\ y_2) - q_n(u,\ y_1) |) du + C_n \leq$$

$$\leq \int_0^{x_2} \pi(| q_n(u,\ y_2) - q_n(u,\ y_1) |) du + C_n .$$

Se poniamo ora

$$\Omega(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{d\sigma}{\pi(\sigma)}$$

ed indichiamo con $\breve{\Omega}$ la sua inversa, per un lemma di I. BIHARI [6], si avrà

$$|q_n(x_2, y_2) - q_n(x_2, y_1)| \leq \breve{\Omega}(\Omega(C_n) + x_2).$$

Ma per la seconda delle (2), essendo

$$\Omega(C_n) = -\int_{C_n}^{u_0} \frac{d\sigma}{\pi(\sigma)},$$

si ha che $\Omega(C_n) \to -\infty$ per $C_n \to 0$ e quindi $\breve{\Omega}(\Omega(C_n) + x_2) \to 0$ per $C_n \to 0$.

Sarà quindi

$$(8) \qquad |q_n(x_2, y_2) - q_n(x_2, y_1)| = 0(|y_2 - y_1|).$$

Tenuto conto allora delle (6), (7), (8), si ha che l'espressione

$$|q_n(x_2, y_2) - q_n(x_1, y_1)|$$

risulta uniformemente infinitesima, rispetto ad n, con la quantità $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ e pertanto la successione di funzioni $\{q_n(x, y)\}$ è una successione di funzioni *equicontinue* in R'.

Analogamente si prova l'equicontinuità della successione $\{p_n(x, y)\}$. È possibile allora, in base al teorema di ASCOLI estrarre dalle due successioni $\{q_n(x, y)\}$, $\{p_n(x, y)\}$ due sottosuccessioni convergenti uniformemente in R' rispettivamente verso due funzioni $\bar{q}(x, y)$ e $\bar{p}(x, y)$ e, passando al limite, per

(6) I. BIHARI, *A generalisation of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations*, « Acta Math. Acad. Hung », 7 (1956), pp. 81-94. Per comodità del lettore riportiamo qui l'enunciato del lemma di BIHARI: Siano $y(x)$, $F(x)$ continue e positive in $a \leq x \leq b$ e $k \geq 0$ e sia $w(u)$ una funzione continua non decrescente, non negativa per $u \geq 0$. Allora posto

$$\Omega(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{dt}{w(t)}, \qquad (u_0 > 0,\ u \geq 0),$$

se

$$y(x) \leq k + \int_a^x F(t) w(y(t)) dt, \qquad (a \leq x \leq b),$$

segue, indipendentemente dalla scelta di u_0,

$$y(x) \leq \breve{\Omega}(\Omega(k) + \int_a^x F(t) dt), \qquad (a \leq x \leq b' \leq b),$$

dove $\breve{\Omega}$ indica la funzione inversa di Ω.

$n \to \infty$ in

$$\begin{cases} q_n(x, y) = \displaystyle\int_0^{x-\frac{h}{n}} F[u,\ y, \int_0^y q_n(u,\ t)dt,\ p_n(u,\ y),\ q_n(u,\ y)]du, \\ p_n(x, y) = \displaystyle\int_0^{y-\frac{k}{n}} G[x,\ v, \int_0^x p_n(t,\ v)dt,\ p_n(x,\ v),\ q_n(x,\ v)]dv, \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} \bar{q}(x, y) = \displaystyle\int_0^x F[u,\ y,\ \int_0^y \bar{q}(u,\ t)dt,\ \bar{p}(u,\ y),\ \bar{q}(u,\ y)]du, \\ \bar{p}(u, y) = \displaystyle\int_0^y G[x,\ v,\ \int_0^x \bar{p}(t,\ v)dt,\ \bar{p}(x,\ v),\ \bar{q}(x,\ v)]dv \end{cases}$$

e quindi le due funzioni continue $\bar{q}(x, y)$ e $\bar{p}\ (x, y)$ verificano il sistema dato e soddisfano alle condizioni date.

3. Osserviamo ora, in primo luogo, che se è $\chi(\rho) = L_q\rho$, $\pi(\sigma) = L_p\sigma$, con $L_q \geq 0$ ed $L_p \geq 0$ costanti, le (3) sono le condizioni di LISPCHITZ

$$(3) \qquad \begin{cases} |F(x,\ y,\ z,\ p,\ q') - F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)| \leq L_q|q - q'|, \\ |G(x,\ y,\ z,\ p',\ q) - G(x,\ y,\ z,\ p,\ q)| \leq L_p|p - p'|. \end{cases}$$

Particolareggiando ora la F e la G si ottengono facilmente i teoremi ricordati.

Se, per esempio, infatti, è $F(x, y, z, p, q) = F_1(x, y, p, q)$ e $G(x, y, z, p, q) = G_1(x, y, p, q)$ si ha il teorema di G. VILLARI relativo al sistema

$$(\mathrm{I}') \qquad \begin{cases} u(x,\ y) = \displaystyle\int_0^x F[t,\ y,\ u(t,\ y),\ v(t,\ y)]dt, \\ v(x,\ y) = \displaystyle\int_0^y G[x,\ s,\ u(x,\ s),\ v(x,\ s)]ds, \end{cases}$$

con le F e b soddisfacenti rispettivamente le (3') e con le condizioni al contorno $u(0,\ y) = 0$, $v(x,\ 0) = 0$.

Se nel sistema (1') si suppone invece $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = G(x,\ y,\ z, p, q) = f(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$ si ritrova il teorema di PH. HARTMAN e A. WINTNER.