Sulle equazioni lagrangiane della meccanica di una particella di alta energia.

Memoria di Antonio Pignedoli (a Bologna)

A Giovanni Sansone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Come al n. 1.*

1. Nel presente lavoro si considera in generale la impostazione lagrangiana della dinamica relativistica di una particella materiale assimilabile ad un punto, nell'ambito dello schema deterministico, cioé non quantistico.

A fondamento della meccanica della particella di alta energia considerata si può assumere un principio variazionale della forma:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L}_p + \mathcal{L}_i) dt = 0,$$

dove $\mathcal{L}_p$ é la «funzione lagrangiana della particella» ed $\mathcal{L}_i$ la «funzione lagrangiana di inter-azione».

Se ne deducono alcune proposizioni che estendono quelle della meccanica analitica classica, in particolare l'integrale generalizzato delle forze vive, e nel caso della ignorabilità di una coordinata, per fissare le idee q_1, il corrispondente integrale relativistico del momento cinetico.

Si studia il caso in cui le forze generalizzate siano funzioni lineari delle accelerazioni e quadratiche delle velocità lagrangiane, cioé il caso in cui la funzione lagrangiana sia della forma, molto generale:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_i = \mathcal{L}_p(q,\ \dot{q},\ t) + U + \Sigma_s\, U_s \dot{q}_s + \frac{1}{2} \Sigma_{st}\, U_{st} \dot{q}_s \dot{q}_t, \qquad (U_{st} = U_{ts}),$$

$$U = U(q,\ t), \qquad U_s = U_s(q,\ t), \qquad U_{st} = U_{st}(q,\ t),$$

dove con q si intende indicare il complesso di tutte le coordinate lagrangiane q_1, q_2, q_3 e con $\dot{q}$ quello delle velocità lagrangiane $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$. Nel caso in cui si abbia l'ignorabilità di una coordinata, sussiste in corrispondenza l'integrale primo relativistico del momento cinetico e si hanno inoltre due equazioni lagrangiane scritte in funzione di una lagrangiana ridotta.

Se inoltre il tempo non figura esplicitamente in quest'ultima, sussiste ancora per le equazioni sopradette l'integrale dell'energia, che assume la forma:

$$\sum_{j=2}^{3}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}_p}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j + U_j\dot{q}_j\right) + \sum_{j=2}^{3}\sum_{s=1}^{3} U_{sj}\dot{q}_s\dot{q}_j - \mathfrak{L}_p - U -$$
$$- \sum_{s=1}^{3} U_s\dot{q}_s - \frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{st}\, U_{st}\dot{q}_s\dot{q}_t + \alpha_1\dot{q}_1 = \text{costante.}$$

Si rivolge particolare attenzione a due problemi. Il primo é quello del moto, con riferimento ad un sistema di coordinate cilindriche r, φ, z, di una particella elettrizzata veloce in un campo elettrico ed in un campo magnetico sovrapposti, nel caso in cui il potenziale scalare V e le componenti del potenziale vettore, A_1, A_2, A_3, siano funzioni tutte indipendenti, oltre che dal tempo, anche dalla coordinata φ o dalla coordinata z.

Sussistono allora l'integrale generalizzato relativistico dell'energia ed un integrale relativistico del momento cinetico corrispondente alla coordinata ciclica.

Tale integrale contiene in particolare quelli classici già stabiliti da AGOSTINELLI e successivamente estesi da BOGGIO.

Il secondo problema é quello del moto di un elettrone veloce in presenza di un altro elettrone, qualora si assuma come schema di inter-azione elettrodinamica fra le due particelle quello fornito dalla formula di WEBER.

In materia va osservato che, per quanto la formula di WEBER non fornisca la reale inter-azione fra le due particelle, nel presente lavoro si fa vedere come tale formula consenta la deduzione di relazioni numeriche che si traducono nel seguente notevole risultato: *solo se la distanza r fra i due elettroni é dell'ordine di 10^{-12} cm. é possibile l'esistenza di moti oscillatori.*

2. Consideriamo in generale una particella dotata di massa e di alta energia (relativistica). Sia la particella in questione assimilabile ad un punto.

Alla base della sua dinamica — nell'ambito della validità degli schemi deterministici, cioé non quantistici — si potrà assumere come principio fondamentale il principio variazionale seguente:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(\mathfrak{L}_p + \mathfrak{L}_i)dt = 0, \tag{1}$$

il quale esprime la stazionarietà dell'integrale hamiltoniano d'azione. Nella (1) $\mathfrak{L}_p$ sta ad indicare la «funzione lagrangiana relativistica della particella», caratterizzante appunto la medesima come non sollecitata da campi di forza, ed $\mathfrak{L}_i$ la «funzione lagrangiana di inter-azione» dipendente dalla esistenza e dalla struttura del campo di forza sollecitante la particella stessa.

Della (1) diremo soltanto che, per basse velocità, cioé per $v \ll c$, e per forze dipendenti da un potenziale, essa deve ridursi alla:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0, \tag{2}$$

dove T é l'energia cinetica classica ed U il potenziale. Per il moto di una particella veloce si deducono, dunque, dalla (1) le equazioni lagrangiane relativistiche:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}_p}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \mathfrak{L}_p}{\partial q_r} = \frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial \dot{q}_r} = Q_r, \qquad (r = 1,\ 2,\ 3) \tag{3}$$

dove la forza generalizzata secondo la variabile q_r, cioè la Q_r, si riduce a $\dfrac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial q_r}$ nel caso in cui la funzione lagrangiana di inter-azione $\mathfrak{L}_i$ non dipenda dalle velocità lagrangiane $\dot{q}_r$.

Alle (3) equivalgono le equazioni hamiltoniane:

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \qquad \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \tag{4}$$

dove la «funzione caratteristica» H è data da:

$$H = \sum_{r=1}^{3} p_r \dot{q}_r - \mathfrak{L}_p - \mathfrak{L}_i \tag{5}$$

con

$$p_r = p_r^{(p)} + p_r^{(i)} = \frac{\partial \mathfrak{L}_p}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial \dot{q}_r}$$

sicchè l'equazione di JACOBI si scriverà:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q,\ \frac{\partial S}{\partial t},\ t\right) = 0. \tag{6}$$

Nel caso in cui una coordinata lagrangiana q_k sia «ignorabile» o «ciclica», cioè non intervenga nell'espressione della funzione lagrangiana, si avrà:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}_p}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0; \qquad p_k^{(p)} + p_k^{(i)} = p_k = c_k = \text{cost}, \tag{7}$$

essendosi posto

$$p_k^{(p)} = \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{q}_k}, \qquad p_k^{(i)} = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{q}_k};$$

cioè sussisterà «l'integrale primo del momento cinetico» corrispondente alla sopradetta coordinata ignorabile. Più in particolare potrà avvenire quanto segue. Se la lagrangiana di inter-azione $\mathcal{L}_i$ non dipende dalle velocità lagrangiane, le equazioni di LAGRANGE (3) si riducono alle

$$\text{(8)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial q_r} = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial q_r}, \qquad (r = 1,\ 2,\ 3).$$

Se, inoltre, tanto la lagrangiana di inter-azione $\mathcal{L}_i$ quanto la lagrangiana della particella $\mathcal{L}_p$ sono indipendenti dalla coordinata q_k, ne discende:

$$\text{(9)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{q}_k} = 0, \qquad p_k^{(p)} = \text{cost.}$$

Se supponiamo ora di trovarci di fronte ad una lagrangiana dalla forma, molto generale:

$$\text{(10)} \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_i = \mathcal{L}_p(q,\ \dot{q},\ t) + U + \Sigma_s U_s \dot{q}_s + \frac{1}{2}\Sigma_{st} U_{st}\dot{q}_s\dot{q}_t,$$

con $U_{st} = U_{ts}$ ed $U = (q,\ t)$, $\dot{U}_s = U_s(q,\ t)$, $U_{st} = U_{st}(q,\ t)$, le equazioni lagrangiane diventano:

$$\text{(11)} \qquad \frac{d}{dl}\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial q_r} = \frac{\partial U}{\partial q_r} + \Sigma_s\left(\frac{\partial U_s}{\partial q_r} - \frac{\partial U_r}{\partial q_s}\right)\dot{q}_s +$$

$$+ \frac{1}{2}\Sigma_s\left(\frac{\partial U_{st}}{\partial q_r} - 2\frac{\partial U_{rs}}{\partial q_t}\right)\dot{q}_s\dot{q}_t - \frac{\partial U_r}{\partial t} - \Sigma_s \frac{\partial U_{rs}}{\partial t}\dot{q}_s - \Sigma_s U_{rs}\ddot{q}_s$$

e presentano forze generalizzate lagrangiane che sono funzioni lineari delle accelerazioni e quadratiche delle velocità. Nel caso in cui si abbia la ignorabilità di una coordinata lagrangiana, sussisterà in corrispondenza l'integrale primo del momento cinetico. Invero, se, per esempio, manca la coordinata q_1, la prima delle equazioni (11) diventa:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{q}_1} = -\Sigma_{s\,2}\frac{\partial U_1}{\partial q_s}\dot{q}_s - \Sigma_{s\,1}\Sigma_{t\,2}\frac{\partial U_{1s}}{\partial q_t}\dot{q}_s\dot{q}_t - \Sigma_{s\,1} U_{1s}\ddot{q}_s - \frac{\partial U_1}{\partial t} -$$

$$- \Sigma_{s\,1}\frac{\partial U_{1s}}{\partial t}\dot{q}_s = -\frac{dU_1}{dt} - \Sigma_{s\,1}\dot{q}_s\frac{dU_{1s}}{dt} - \Sigma_{s\,1} U_{1s}\ddot{q}_s =$$

$$= -\left(\frac{dU_1}{dt} + \frac{d}{dt}\Sigma_{s\,1} U_{1s}\dot{q}_s\right),$$

e ne consegue dunque l'integrale primo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{q}_1} + U_1 + \sum_1^3{}_s U_{s1}\dot{q}_s = \alpha_1, \tag{12}$$

dove α_1 è una costante. Ad esso andranno associate, per la completa descrizione del movimento, le equazioni lagrangiane seguenti:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_j} = 0, \qquad (j = 2,\ 3), \tag{13}$$

dove la «funzione lagrangiana ridotta» $\mathcal{L}^*$ vale:

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} - \alpha_1\dot{q}_1.$$

3. Riprendiamo ora in esame le equazioni lagrangiane (3). Si vede subito che da esse discende:

$$\frac{dH}{dt} + \frac{\partial(\mathcal{L}_p + \mathcal{L}_i)}{\partial t} + 0; \tag{14}$$

se la funzione lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_i$ non dipende esplicitamente dal tempo, si ha l'integrale primo relativistico generalizzato delle forze vive:

$$H = \sum_{r=1}^{3} p_r\dot{q}_r - \mathcal{L}_p - \mathcal{L}_i = \sum_{r=1}^{3}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r + \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r\right) - \mathcal{L}_p - \mathcal{L}_i = \text{cost.} \tag{15}$$

Nel caso particolare in cui la lagrangiana di inter-azione $\mathcal{L}_i$ sia funzione delle sole q_r, l'integrale primo (15) diventa:

$$\sum_{r=1}^{3}\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r - \mathcal{L}_p - \mathcal{L}_i = \text{cost}, \tag{16}$$

quindi, per esempio, nel caso in cui il moto della particella sia riferito alle coordinate cartesiane spaziali x, y, z, essendo

$$\mathcal{L}_p = -m_0c^2[1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)]^{\frac{1}{2}}, \qquad (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2),$$

risulta:

$$m_0v^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} + m_0c^2(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} - \mathcal{L}_i = m_0c^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} - \mathcal{L}_i = \text{cost}, \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right).$$

Va tenuto presente che nel caso precedentemente considerato in cui si abbia una coordinata ignorabile e quindi un integrale primo corrispondente del momento cinetico, se la funzione lagrangiana ridotta

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_i - \alpha_1 \dot{q}_1$$

non risulta esplicitamente dipendente dal tempo, sussiste ancora l'integrale delle forze vive:

$$H^* = \sum_{j=2}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}^* = \text{cost.} \tag{17}$$

Tale integrale assume nel nostro caso la forma:

$$\sum_{j=2}^{3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + U_j \dot{q}_j \right) + \sum_{j=2}^{3} \sum_{s=1}^{3} U_{sj} \dot{q}_s \dot{q}_j - \tag{18}$$

$$- \mathcal{L}_p - U - \sum_{s=1}^{3} U_s \dot{q}_s - \frac{1}{2} \sum_{st\,1}^{3} U_{st} \dot{q}_s \dot{q}_t + \alpha_1 \dot{q}_1 = \text{cost.}$$

4. Per quanto riguarda la forma della funzione lagrangiana della particella $\mathcal{L}_p$ si assume:

$$\mathcal{L}_p = - m_0 c^2 (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \left(\beta = \frac{v}{c} \right), \tag{19}$$

dove m_0 é la « massa a riposo » della particella stessa e c la « velocità critica ».

Se si esaminano i rispettivi sviluppi in serie dell'energia cinetica relativistica $W_c = (m - m_0)c^2$, dell'energia totale $W = mc^2$ e della funzione lagrangiana della particella $\mathcal{L}_p$:

$$\begin{cases} W_c = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 c^2 \beta^4 + \frac{5}{16} m_0 c^2 \beta^6 + \dots, \\ W \;= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 c^2 \beta^4 + \frac{5}{16} m_0 c^2 \beta^6 + \dots, \\ \mathcal{L}_p \;= - m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{8} m_0 c^2 \beta^4 + \frac{1}{16} m_0 c^2 \beta^6 + \dots, \end{cases} \tag{20}$$

si vede chiaramente che le tre quantità, non coincidenti, tendono allo stesso limite $\frac{1}{2} m_0 v^2$ quando si conservino soltanto i termini quadratici nella velocità e non si consideri l'« energia a riposo ». In generale, poi, la funzione lagrangiana di inter-azione di una particella ha la forma

$$\mathfrak{L}_i = -(\mathfrak{U} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A}), \tag{21}$$

dove $\mathfrak{U}$ é una funzione scalare ed $\boldsymbol{A}$ un vettore il cui significato fisico resta a priori imprecisato. Allo scopo di segnalarne integrali primi, consideriamo ora l'importante problema del movimento di una particella di carica e e massa a riposo m_0 sollecitata da un campo elettromagnetico. Essendo V ed $\boldsymbol{A}$ rispettivamente il potenziale scalare e il potenziale vettore tali che il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ ed il campo magnetico $\boldsymbol{H}$ sono dati da

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V,$$

potenziali ai quali LORENTZ impone, come noto, la condizione, restrittiva dell'indeterminazione dei medesimi

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

la funzione lagrangiana relativistica di inter-azione, per la particella puntuale considerata, mobile nel campo elettromagnetico, vale, come si sa:

$$\mathfrak{L}_i = -eV + \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A},$$

sicché la funzione lagrangiana é la seguente:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_p + \mathfrak{L}_i = -m_0c^2\sqrt{1-\beta^2} - eV + \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A}. \tag{22}$$

Sia ora P la posizione istantanea della particella rispetto ad una terna di assi cartesiani ortogonali $Oxyz$, di versori $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$. $\boldsymbol{K}$ ed individuiamo P mediante le coordinate cilindriche r, φ, z. Avremo:

$$(P - O) = re^{i\varphi}\boldsymbol{I} + z\boldsymbol{K}, \ (i = \sqrt{-1}), \ \dot{P} = \boldsymbol{v} = \dot{r}e^{i\varphi}\boldsymbol{I} + r\dot{\varphi}ie^{i\varphi}\boldsymbol{I} + \dot{z}\boldsymbol{K},$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$$

Dette poi A_1, A_2, A_3 le componenti del potenziale vettore $\boldsymbol{A}$ in coordinate cilindriche, sarà:

$$\boldsymbol{A} = A_1e^{i\varphi}\boldsymbol{I} + A_2ie^{i\varphi}\boldsymbol{I} + A_3\boldsymbol{K},$$

per cui la funzione lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_i$ sarà:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_i = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} - eV + \frac{e}{c}(\dot{r}A_1 + r\dot{\varphi}A_2 + \dot{z}A_3), \tag{23}$$

e si avranno le equazioni lagrangiane del movimento seguenti:

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0\dot{r}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}A_1\right] = \frac{m_0 r\dot{\varphi}^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}} - e\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{e}{c}\dot{r}\frac{\partial A_1}{\partial r} + \\
&\qquad\qquad + \dot{\varphi}A_2 + r\dot{\varphi}\frac{\partial A_2}{\partial r} + \dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial r}, \\
&\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 r^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}rA_2\right] = -e\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{e}{c}\dot{r}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi} + \frac{e}{c}r\dot{\varphi}\frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + \frac{e}{c}\dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial \varphi}, \\
&\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}A_3\right] = -e\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{e}{c}\dot{r}\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{e}{c}r\dot{\varphi}\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{e}{c}\dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial z}.
\end{aligned}\right.$$

Se le funzioni V, A_1, A_2, A_3 sono tutte non esplicitamente dipendenti dal tempo, sussiste l'integrale generalizzato delle forze vive. Se, inoltre, le sopraddette funzioni sono tutte indipendenti da φ (che é, dunque, coordinata ciclica) le equazioni di LAGRANGE, che si riducono alle seguenti:

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{m_0\dot{r}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}} - \frac{m_0 r\dot{\varphi}^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}} = -e\frac{\partial V}{\partial r} + \\
&\qquad\qquad + \frac{e}{c}\left(\dot{\varphi}A_2 + r\dot{\varphi}\frac{\partial A_2}{\partial r} + \dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial z} - \dot{z}\frac{\partial A_1}{\partial z}\right), \\
&\frac{d}{dt}\frac{m_0 r^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}} = -\frac{e}{c}\left(\dot{r}A_2 + r\dot{r}\frac{\partial A_2}{\partial r} + r\dot{z}\frac{\partial A_2}{\partial z}\right) = -\frac{e}{c}\frac{d}{dt}(rA_2), \\
&\frac{d}{dt}\frac{m_0\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}} = -e\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{e}{c}\left(\dot{r}\frac{\partial A_1}{\partial z} + r\dot{\varphi}\frac{\partial A_2}{\partial z} - \dot{r}\frac{\partial A_3}{\partial r}\right),
\end{aligned}\right.$$

ammettono ulteriormente l'integrale primo discendente anche subito dalla seconda delle (β):

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_0 r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)}} + \frac{e}{c} r A_2 = \text{cost.} \tag{24}$$

Se, essendo $\boldsymbol{H} = \text{rot}\,\boldsymbol{A}$, si assume $\boldsymbol{H} = \text{grad}\,\Phi$, con Φ funzione armonica, e si fa l'ipotesi di indipendenza di Φ da φ, si ha:

$$\text{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\,\text{grad}\,r + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\text{grad}\,z, \tag{25}$$

e tanto il campo elettrico quanto il campo magnelico sono simmetrici rispetto all'asse Oz. Supponendo allora:

$$A_1 = A_3 = 0, \qquad A_2 = \Psi(r, z),$$

$$\boldsymbol{A} = r\Psi\,\text{grad}\,\varphi, \qquad \text{rot}\,\boldsymbol{A} = \text{grad}\,(r\Psi) \wedge \text{grad}\,\varphi,$$

$$\text{grad}\,(r\Psi) \wedge \text{grad}\,\varphi = \text{grad}\,\Phi,$$

si ha:

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\Psi)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \qquad -\frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\Psi)}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{25'}$$

da cui, eliminando Ψ, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0, \qquad \triangle_2 \Phi = 0,$$

mentre, eliminando Φ, discende:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\Psi)}{\partial r}\right] = 0,$$

od anche:

$$\nabla_2(r\Psi) = r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\Psi)}{\partial z}\right] + \frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial z^2} = 0, \qquad \left(\nabla_2 = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

Dalle (25') si deduce:

$$\frac{\partial(rA)}{\partial r} = r\,\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial(rA)}{\partial z} = -\,r\,\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \qquad (A = \Psi).$$

D'altra parte é:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \operatorname{grad} r + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \operatorname{grad} z = \operatorname{rot} [\Psi(r, z) \boldsymbol{K} \wedge \operatorname{grad} r] =$$

$$= \left(\frac{1}{r} A + \frac{\partial A}{\partial r}\right) \boldsymbol{K} - \frac{\partial A}{\partial z} \operatorname{grad} r.$$

Indicando ora con $G(r, z)$ la « funzione associata » di Φ, tale che é:

$$\frac{\partial G}{\partial r} = - r \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = r \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \qquad G = r\Psi, \qquad \nabla_2 G = \nabla_2 (r\Psi) = 0,$$

si può assumere $rA = G$ e scrivere, quindi, l'integrale primo (24) sotto la forma:

$$m_0 r^2 \dot{\varphi} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + G = \text{costante}. \tag{26}$$

Analogamente, nel caso in cui V, A_1, A_2, A_3 siano indipendenti da z supponendo

$$A_1 = A_2 = 0, \quad A_3 = A(x, y), \quad \boldsymbol{A} = A(x, y) \operatorname{grad} z, \quad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{grad} A \wedge \operatorname{grad} z =$$

$$= \frac{\partial A}{\partial y} \boldsymbol{I} - \frac{\partial A}{\partial x} \boldsymbol{J} = \operatorname{grad} \Phi, \qquad (\operatorname{grad} z = \boldsymbol{K}),$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial A}{\partial x} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

si troverà sussistere l'integrale primo, che segue anche dalla terza delle (α):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m_0 \dot{z} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{e}{c} A = \text{costante}, \tag{27}$$

dove $A = A(x, y)$ é la funzione armonica coniugata di Φ.

Gli integrali (26) e (27) estendono relativisticamente quelli ottenuti in meccanica classica da BOGGIO [1], il quale aveva esteso quelli precedentemente trovati da AGOSTINELLI [2] nelle sue ricerche sul problema delle aurore boreali.

---

(1) Cfr. T. BOGGIO, « Comptes Rendus », luglio 1938. Id., « Comptes Rendus », dicembre 1938. Id., « Boll. U. M. I. », novembre 1938.

(2) C. AGOSTINELLI. « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 73, 1937-38 (giugno). Idem, « Rend. della R. Accademia dei Lincei », 2° sem. 1938. Vedi anche: [illegible] della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », 1959.

5. Un problema di notevole interesse è, senza dubbio, quello del movimento di una carica elettrica sotto l'azione del campo di forza dipendente dalla presenza di un'altra. Ed è un problema assai difficile quello della rigorosa caratterizzazione del tipo della inter-azione dinamica che si verifica, anche se è estremamente naturale pensare subito che l'inter-azione fra due cariche in movimento debba essere diversa da quella fra due cariche ferme. Si considerino, dunque, due cariche e ed e' alla distanza istantanea r una dall'altra e sia v la grandezza della loro velocità relativa, facente con la direzione della congiungente le due cariche l'angolo θ. Una prima formula che dà la forza di inter-azione fu ottenuta da GAUSS [3].

Tale forza, in valore assoluto, vale:

$$F = \frac{ee'}{r^2}\left[1 + \frac{v^2}{c^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)\right]. \tag{28}$$

Un classico sforzo per la risoluzione del problema fu anche, come è noto, quello di WEBER [4], il quale si collocò dal seguente punto di vista: la cercata espressione della forza deve contenere i parametri del movimento, velocità ed accelerazione, nella maniera più semplice possibile e tenendo conto del fatto che la velocità deve intervenire al quadrato, in modo che la forza sia la stessa quando si cambi il senso di spostamento delle due cariche; la legge cercata deve inoltre fornire una forza diretta come la congiungente le due cariche e ridursi alla legge di COULOMB allorché le cariche sono ferme. WEBER trovò notoriamente per il valore assoluto della forza l'espressione:

$$F = \frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2}\right]. \tag{29}$$

RIEMANN [5] introdusse l'idea che le formule dovessero tener conto della velocità di propagazione delle azioni. RITZ [6] arrivò, nella revisione dei fondamenti dell'elettrodinamica, ad una legge che è sostanzialmente una combinazione di quelle di WEBER e di RIEMANN. Va anche tenuto presente

---

(3) C. F. GAUSS, *Zur mathematischen Theorie der elektrodynamischen Wirkung*, Werke-Göttingen, 1867.

(4) W. WEBER, *Elektrodynamische Maasbestimmungen über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung*, J. Springer, Berlin, 1893.

(5) B. RIEMANN, *Ein Beitrag zur Elektrodynamik*, «Annalen der Phisik», 1867. Idem, *Gesammelte mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, 1892.

(6) W. RITZ, *Recherches critiques sur les théories electrodynamiques de Maxwell et Lorentz*, «Arch. Genève», 1908. Idem, *Recherches critiques d'électrodynamique génerale* «Ann. Chim. Phys.», 1908.

che una seria critica di HELMOLTZ alla legge di WEBER aveva condotto, già prima dei lavori di RITZ, a ricerche di BOGGIO (7) nelle quali, per l'assegnazione di quella che è pensata come la forza di inter-azione elettrodinamica fra due cariche, è necessaria la completa conoscenza del moto delle due cariche in un intero intervallo di tempo; ma, in approssimazione, l'espressione della forza dipende ancora dalle sole velocità ed accelerazione all'istante considerato t. Nel 1946, WARBURTON (8) ha assegnato una formula che generalizza quelle di GAUSS, RIEMANN, WEBER e RITZ. Ma la teoria relativistica diretta della inter-azione fra cariche in moto è stata fatta da ARZELIÈS (9) e fornisce formule in accordo con le attuali conoscenze fisiche. Tuttavia, per la relativa semplicità di trattazione che consente, la legge di WEBER, pur non fornendo la reale inter-azione, riesce comoda e consente alcuni risultati molto espressivi dal punto di vista meccanico. Per questo motivo é forse non privo di interesse soffermarsi ancora sul problema del moto nello schema di approssimazione in cui lo si pensi come determinato da una inter-azione del tipo di WEBER. Consideriamo, dunque, il problema del moto centrale di una particella puntuale P_1 di cariça e e di massa a riposo m_0, costretta a muoversi in virtù della inter-azione elettrodinamica con un'altra particella puntuale P_2 pure di massa a riposo m_0 e di carica e. Le equazioni differenziali vettoriali relativistiche del moto « assoluto » delle due particelle a distanza r all'istante t nel sistema di riferimento dell'osservatore, sono, rispetto a tale sistema di riferimento solidale con l'osservatore:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(m_1\frac{dP_1}{dt}\right)=-\frac{e^2}{r^3}\left[1-\frac{\dot r^2-2r\ddot r}{c^2}\right](P_1-P_2),\\
&\frac{d}{dt}\left(m_2\frac{dP_2}{dt}\right)=\frac{e^2}{r^3}\left[1-\frac{\dot r^2-2r\ddot r}{c^2}\right](P_1-P_2).\quad \boldsymbol{v}_1=\frac{dP_1}{dt},\quad \boldsymbol{v}_2=\frac{dP_2}{dt},\\
&r=\operatorname{mod}(P_1-P_2),\quad \dot r=\frac{dr}{dt},\quad \ddot r=\frac{d^2r}{dt^2},\\
&m_1=m_0(1-v_1^2/c^2)^{-\frac{1}{2}},\quad m_2=m_0(1-v_2^2/c^2)^{-\frac{1}{2}};
\end{aligned}\right.$$

(7) T. BOGGIO, *Sulla legge elementare di Weber relativa alle azioni elettrodinamiche di due cariche elettriche in movimento*, « Rend. delle R. Accademia dei Lincei », 19(3.

(8) F. W. WARBURTON, *Reciprocal electric force*, « Phys. Rev. », 1946. Idem, *Relative electrodynamics*, « Bull. Amer. Phys. Soc. », 1948.

(9) H. ARZELIÈS, *La dynamique relativiste et ses applications*, fasc. I, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

mentre l'equazione differenziale vettoriale relativistica del moto *relativo* delle due particelle é

$$\frac{d}{dt}\left[m\,\frac{d(P_1-P_2)}{dt}\right]=-\frac{2e^2}{r^3}\left[1-\frac{\dot{r}^2-2r\ddot{r}}{c^2}\right](P_1-P_2),$$

dove $m=m_0(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ é la massa assunta, alla velocità $\boldsymbol{v}=\dfrac{d(P_1-P_2)}{dt}$ dalla particella P_1 pensata nel suo moto relativo alla particella P_2 considerata come ferma ([10]). Si tratta dunque del problema del moto centrale di una particella puntuale P di massa a riposo m_0 sollecitata da una forza del tipo di WEBER affetta da un coefficiente uguale a due:

$$\boldsymbol{F}=-\frac{2e^2}{r^3}\left[1-\frac{\dot{r}^2-2r\ddot{r}}{c^2}\right]\frac{P-0}{r}\,. \tag{30}$$

La funzione lagrangiana di inter-azione sarà, nel nostro caso:

$$\mathfrak{L}_i=\frac{2e^2}{r}\left(1-\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right), \tag{31}$$

e quella totale sarà, quindi:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_p+\mathfrak{L}_i&=-m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}+\frac{2e^2}{r}\left(1-\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)=\\&=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2}{c^2}}+\frac{2e^2}{r}\left(1-\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right).\end{aligned} \tag{32}$$

Ne discenderanno per il movimento in questione le equazioni lagrangiane:

$$\left\{\begin{aligned}&m_0\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}}{\sqrt{1-\dfrac{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2}{c^2}}}-\frac{4e^2\dot{r}}{m_0rc^2}\right)-\frac{m_0r\dot{\theta}^2}{\sqrt{1-\dfrac{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2}{c^2}}}+\frac{2e^2}{r^2}\left(1-\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)=0,\\&m_0\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2\dot{\theta}^2}{\sqrt{1-\dfrac{r^2+r^2\dot{\theta}^2}{c^2}}}\right)=0.\end{aligned}\right. \tag{33}$$

([10]) Cfr. A. PIGNEDOLI, «Bollettino della U. M. I.», serie III, anno XI, n. 1, marzo 1956.

La seconda delle (33) fornisce subito l'integrale primo relativistico del momento della quantità di moto:

$$(34)\qquad m_0 r^2\dot\theta\left(1-\frac{\dot r^2+r^2\dot\theta^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=A,\qquad (A=\text{costante}).$$

Siccome poi la funzione lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, sussisterà l'integrale primo:

$$(35)\qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot r}\dot r+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\dot\theta-\mathcal{L}=h,\qquad (h=\text{costante}),$$

che si esplicita come segue:

$$(36)\qquad \frac{m_0\dot r^2}{\sqrt{1-\frac{\dot r^2+r^2\dot\theta^2}{c^2}}}+\frac{m_0 r^2\dot\theta^2}{\sqrt{1-\frac{\dot r^2+r^2\dot\theta^2}{c^2}}}+m_0c^2\sqrt{1-\frac{\dot r^2+r^2\dot\theta^2}{c^2}}-$$
$$-\frac{2e^2}{r}\left(1-\frac{\dot r^2}{c^2}\right)=h(=\text{cost}),$$

cioè infine:

$$(37)\qquad m_0c^2\left(1-\frac{\dot r^2+r^2\dot\theta^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2e^2}{r}\left(1-\frac{\dot r^2}{c^2}\right)+h.$$

Eliminando $\dot\theta$ fra i due integrali primi (34) e (37) e tenendo conto del fatto che deve essere $0\leq\dot r^2\leq c^2$, si ottiene anzitutto, come ho fatto vedere nel mio precedente citato lavoro, la seguente limitazione per le distanze r della particella P dal centro di forza O durante il movimento centrale considerato:

$$(38)\qquad \mathcal{F}(r)\equiv\frac{h^2-m_0^2c^4}{4e^4}r^2+\frac{hr}{e^2}+1-\frac{A^2c^2}{4e^4}\geq 0,\qquad \text{con } r\geq 0.$$

E, per quanto riguarda la questione, di particolare interesse, concernente la natura dei moti possibili, si ha:

I) per $h<0$ non sono possibili moti periodici;

II) per

$$h>0,\ m_0^2c^4(1-4e^4/A^2c^2)<h^2<m_0^2c^4,\quad \text{con } A^2c^2/4e^4>1,$$

si ha moto oscillatorio fra r_1 e r_2, radici positive della equazione $\mathcal{F}(r)=0$;

III) per

$$h > 0, \qquad 0 < h^2 < m_0^2 c^4, \qquad A^2c^2/4e^4 < 1,$$

si ha che r varierà fra O e la radice positiva r_1 ammessa, sotto tali condizioni, dall'equazione $\mathfrak{F}(r) = 0$.

Indicato poi con $R(r)$ il valore di $\dot{r}^2$ relativo ad un moto possibile si trova:

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\pm\sqrt{R(r)}}, \tag{39}$$

$$\theta - \theta_0 = \int \pm \sqrt{\frac{c^2 - R(r)}{r^2R(r) + m_0^2c^2r^4R(r)/A^2}}\, dr. \tag{40}$$

Non sono superflue alcune considerazioni numeriche. Per la oscillatorietà del movimento, deve essere anzitutto verificata, come abbiamo visto, la condizione:

$$0 < h < m_0c^2$$

cioè:

$$0 < h < 9 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{20} = 8{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ ergon.}$$

Inoltre deve essere:

$$A^2c^2/4e^4 > 1,$$

cioè:

$$A > \frac{2e^2}{c} = 1{,}47 \cdot 10^{-29}, \qquad (e = 4{,}77 \cdot 10^{-10} \text{ u. e. s. C. G. S.}).$$

Supponiamo ora che si abbia.

$$v \simeq 10^{10}\ \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}, \qquad r \simeq 10^{10}\ \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1},$$

$$m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} = \sim 1{,}07 \cdot m_0.$$

Poiché in virtù dell'integrale primo (37) si ha:

$$h = mc^2 - \frac{2e^2}{r} + \frac{2e^2}{c^2}\frac{\dot{r}^2}{r}, \tag{41}$$

ne discende

$$h = 8{,}667 \cdot 10^{-7} - \frac{4{,}55 \cdot 10^{-19}}{r} + \frac{5{,}05 \cdot 10^{-20}}{r}, \tag{42}$$

per cui risulta

$$h < m_0 c^2 = 8{,}1 \cdot 10^{-7}.$$

cioè moto oscillatorio se la distanza r delle due particelle é dell'ordine di $r_n = 10^{-12}$ *cm.*

6. Vogliamo ora concludere con una osservazione di carattere generale. È ben noto come sia problema di notevole difficoltà il passaggio dalle equazioni relativistiche del moto di una singola particella a quelle del moto di un sistema rigido di punti materiali. Ciò essenzialmente per il fatto che la nozione di corpo rigido non può essere « sic et simpliciter » introdotta in teoria della relatività e per il fatto che non è possibile conservare in relatività la legge newtoniana di azione e reazione ([11]).

Quindi l'estensione di quanto stabilito nei nn. 2 e 3 del presente lavoro, per quanto riguarda la dinamica relativistica della particella, al problema dei sistemi dinamici lagrangiani, in generale, non appare fisicamente possibile.

([11]) Cfr. W. PAULI, « Encykl. der mathem. Wissenschaften », V (2). J. L. SYNGE, « Transactions of Royal Society of Canada », (3) 28, 1934. Vedi anche: O. COSTA DE BEAUREGARD, *La Théorie de la Relativité reistreinte*, « Masson », Paris, 1949.