Isomorfismo tra piani di traslazione di Marshall Hall.

Memoria di GIANFRANCO PANELLA (a Parma)

Sunto. - Si studia la suddivisione in classi di equivalenza, rispetto alla relazione di isomorfismo geometrico, dell'insieme dei quasicorpi di M. Hall il nucleo dei quali non sia isomorfo a un suo sottocampo proprio. Si determina, inoltre, il gruppo delle collineazioni spettante ai piani di traslazione che rappresentano quelle classi.

Nel presente lavoro determino una condizione caratteristica per l'isomorfismo tra piani di traslazione sopra quasicorpi di MARSHALL HALL ([2] ⁽¹⁾, Appendice II) e il gruppo degli automorfismi spettante a tali piani, nella ipotesi che il campo F che genera il quasicorpo di HALL abbia almeno quattro elementi, non sia isomorfo a un suo sottocampo proprio e, quindi, risulti necessariamente perfetto. Proseguo, così, uno studio iniziato in una precedente nota [5] ⁽²⁾: in essa ho già stabilito che *due piani di traslazione sopra due quasicorpi di M. Hall sono sempre isomorfi se i due quasicorpi che li definiscono sono costruiti a partire da un campo isomorfo a un campo di Galois di caratteristica diversa da due o isomorfo al campo reale*.

Il lavoro si suddivide in tre parti.

Nella prima di esse (nn. 1 e 2) mi occupo di piani di traslazione relativi a congruenze di sottospazi $(n-1)$ -dimensionali dello S_{2n-1} lineare sopra un corpo K ⁽³⁾: stabilisco, così, due lemmi i quali possono avere interesse, indipendentemente dall'uso che di essi si fa nel seguito, per affrontare lo studio della relazione di isomorfismo tra piani di traslazione più generali di quelli da me trattati.

Successivamente, nella seconda parte (nn. 3 e 4), specializzo il corpo K in un campo F , che sia diverso dal campo di GALOIS di ordine due e tale che esista un polinomio di secondo grado $x^2 - bx - c$ con coefficienti in F e irriducibile su F , e considero la congruenza di rette dello S_3 lineare sopra il campo F atta a definire un piano di traslazione $S(F, b, c)$ relativo al quasicorpo di M. HALL $J(F, b, c)$; faccio vedere, tra l'altro, che a tale congruenza rimane spontaneamente associata una congruenza lineare di rette $\bar{H}(F, b, c)$ ⁽⁴⁾,

⁽¹⁾ I numeri tra [] rinviano alla bibliografia in fine. Per la definizione di quasicorpo di M. HALL si può anche consultare il n. 3 di questo lavoro.

⁽²⁾ Una dimostrazione della proposizione del n. 1 di tale nota è già data in [7] (pp. 96-97).

⁽³⁾ Per constatare che a un piano di traslazione, che sia di dimensione finita sopra il suo nucleo, si può associare una congruenza di spazi $(n-1)$ -dimensionali dello S_{2n-1} lineare sopra un corpo isomorfo al nucleo del piano di traslazione, si confronti [1].

⁽⁴⁾ Che risulta ellittica nel caso che il polinomio $x^2 - bx - c$ sia separabile su F .

la quale individua un piano di traslazione isomorfo al piano lineare affine sopra il campo estensione algebrica di F mediante il polinomio $x^2 - bx - c$.

Ciò premesso, al n. 5, dimostro che *se il campo F ha almeno quattro elementi, se non è isomorfo a un suo sottocampo proprio, e se, quindi, è necessariamente perfetto, condizione necessaria e sufficiente perchè i piani $S(F, b, c)$ e $S(F, b', c')$ siano isomorfi è che le congruenze lineari ellittiche di rette $\bar{H}(F, b, c)$ e $\bar{H}(F, b', c')$ ad essi associate risultino proiettivamente equivalenti* ⁽⁵⁾.

Infine, al n. 6, immaginando lo S_3 come spazio improprio dello S_4 lineare affine sopra il campo F , provo che *se il campo F ha almeno quattro elementi, se non è isomorfo a un suo sottocampo proprio, e quindi, se di caratteristica due, il polinomio $x^2 - bx - c$ è separabile su F , il gruppo degli automorfismi del piano di Hall $S(F, b, c)$ è isomorfo al gruppo delle collineazioni dello S_4 che mantengono fisso lo S_3 e inducono ivi una collineazione rispetto alla quale la congruenza di rette $H(F, b, c)$, che individua il piano $S(F, b, c)$, è unita*.

Questi risultati, conseguiti nel presente lavoro, sono già stati parzialmente enunciati, senza dimostrazione, in [6] ⁽⁶⁾. Vi è un miglioramento dei teoremi, enunciati in [6], poichè essi sono estesi al caso di campi di caratteristica due che siano perfetti; ma i campi F , considerati in questo lavoro, si suppongono non isomorfi a un loro sottocampo proprio.

Oltre a ciò si dimostra, n. 4, che *il piano di Hall $S(F, b, c)$, se F non è isomorfo al campo di Galois di ordine tre, non è un piano sopra un quasicorpo associativo*.

1. Si consideri un corpo K (non necessariamente commutativo) e lo spazio lineare affine ⁽⁷⁾ a $2n$ ($n \geq 2$) dimensioni S_{2n} sopra K : sia S_{2n-1}^∞ lo spazio improprio di S_{2n} . Una congruenza di spazi $(n-1)$ -dimensionali in S_{2n-1}^∞ è un insieme C_{n-1} di sottospazi a $n-1$ dimensioni di S_{2n-1}^∞ , tale che ogni punto di S_{2n-1}^∞ appartenga a uno e a un solo elemento di C_{n-1} . È noto che la congruenza C_{n-1} individua un piano di traslazione $S(K, C_{n-1})$ i cui punti sono i punti (propri) dello S_{2n} e le cui rette sono quei sottospazi di dimensione n di S_{2n} che hanno in comune con S_{2n-1}^∞ un elemento di C_{n-1} : diremo $S(K, C_{n-1})$ piano di traslazione relativo al corpo K e alla congruenza C_{n-1} .

Se, ora, si considerano due piani di traslazione $S(K, C_{n-1})$ e $S(K, C'_{n-1})$ relativi al corpo K e alle congruenze C_{n-1} e C'_{n-1} rispettivamente, un isomor-

⁽⁵⁾ Intendendo con ciò che deve esistere una collineazione di S_3 , inerente un automorfismo φ di F , la quale trasforma le rette appartenenti a $\bar{H}(F, b, c)$ in quelle appartenenti a $\bar{H}(F, b', c')$.

⁽⁶⁾ E, sempre parzialmente, citati in [4].

⁽⁷⁾ Destro o sinistro. Nel seguito, per comodità di linguaggio, ci riferiremo allo spazio affine ampliato con i suoi elementi impropri: specificheremo, quando ciò non risulterà chiaro dal contesto, se gli elementi che si considerano sono elementi dello spazio affine o dello spazio affine ampliato. Per le nozioni di geometria proiettiva, delle quali si fa uso, si rimanda al trattato [9].

fismo affine tra i due piani è una corrispondenza biunivoca tra i punti propri di S_{2n} , che muta punti appartenenti a una retta di $S(K, C_{n-1})$ in punti appartenenti a una retta di $S(K, C'_{n-1})$, e viceversa; di conseguenza ([7], pp. 11-12), un isomorfismo affine tra $S(K, C_{n-1})$ e $S(K, C'_{n-1})$ pone una corrispondenza biunivoca tra gli elementi delle congruenze C_{n-1} e C'_{n-1} .

Ciò premesso, dimostriamo il seguente

LEMMA I. - *Se un isomorfismo affine ϑ tra i piani $S(K, C_{n-1})$ e $S(K, C'_{n-1})$ trasforma i punti di una particolare retta r di S_{2n} in punti di una retta r' , allora ϑ muta terne di punti allineati di S_{2n} in terne di punti che verificano la medesima condizione.*

Sia, infatti, s una retta di S_{2n} incidente r ma sghemba con l'elemento di C_{n-1} passante per il punto R improprio di r e siano A_i ($i = 1, 2, 3$) tre suoi punti e S il suo punto improprio: cominciamo col provare che ϑ trasforma i tre punti A_i in tre punti $A'_i = \vartheta(A_i)$ che risultano allineati e, quindi, trasforma i punti della retta s in punti di una retta s' . Perciò si consideri un punto T della retta congiungente R e S ($T \neq R, T \neq S$) e sia $S_{n-1}(T)$ l'elemento di C_{n-1} passante per il punto T ; $S_{n-1}(T)$ è congiunto con le rette s e r da un sottospazio di dimensione $n+1$ dello S_{2n} . I tre spazi S_n^i che proiettano i tre punti A_i da $S_{n-1}(T)$ intersecano r in tre punti B_i e sono mutati da ϑ in tre spazi a n dimensioni di S_{2n} , $\vartheta(S_n^i) = S_n'^i$, risultando $\vartheta[S_{n-1}(T)] = S_{n-1}'(T) \subset S_n'^i$ e $\vartheta(B_i) = B'_i, A'_i \subset S_n'^i$. Essendo i punti B'_i allineati (per ipotesi) gli spazi $S_n'^i$ appartengono a un sottospazio $(n+1)$ -dimensionale di S_{2n} , il quale interseca lo S_n di S_{2n} rappresentante la retta di $S(K, C'_{n-1})$ individuata dai tre punti A'_i [i quali in $S(K, C'_{n-1})$ sono dipendenti] in una retta (e per constatare ciò basta riferirsi agli elementi impropri di tali spazi) che contiene i punti A'_i . È così provato che i punti di una qualunque retta di S_{2n} che incida la retta r , ma non l'elemento di C_{n-1} passante per il punto improprio di r , sono mutati dall'isomorfismo affine ϑ in punti appartenenti a una retta dello spazio S_{2n} . Se, poi, s è una retta di S_{2n} sghemba con r e con l'elemento $S_{n-1}(R)$ di C_{n-1} passante per R , si verifica facilmente (sempre riferendosi agli elementi impropri degli spazi che si considerano) l'esistenza di una retta, analoga alla retta s , incidente r e s : da ciò si deduce la tesi del lemma per la retta s . Giunti a questo punto è d'immediata verifica che anche i punti di una retta di S_{2n} incidente $S_{n-1}(R)$ sono mutati da ϑ in punti appartenenti a una retta di S_{2n} .

OSSERVAZIONE. - Si noti che nel precedente lemma I l'ipotesi che l'isomorfismo ϑ muti i punti di una retta r di S_{2n} in punti di una retta r' non è sovrabbondante. Se, infatti, il corpo K è isomorfo al campo reale RF , si consideri nello S_3^∞ improprio dello S_4 lineare affine sopra RF una congruenza lineare ellittica C_1 di rette: il piano di traslazione $S(RF, C_1)$ relativo al campo RF e alla congruenza C_1 è isomorfo al piano lineare affine sopra il campo

dei numeri complessi CF . Ciò significa che si può fissare in $S(RF, C_1)$ un riferimento il quale permette di introdurre delle coordinate estratte dal campo dei numeri complessi. Detto Φ un automorfismo del campo CF che non coincida con l'automorfismo identico o col coniugio, e l'esistenza di un tale automorfismo è provata in [9], sia Φ una collineazione dello $S(RF, C_1)$, ampliato con i suoi elementi impropri, la quale mantenga fissa la retta impropria dello $S(RF, C_1)$ e sia inerente all'automorfismo Φ . Ci si rende facilmente conto che, nello S_4 , la collineazione Φ ⁽⁸⁾ rappresenta una trasformazione che non conserva le condizioni di appartenenza.

2. - Per stabilire un secondo lemma, necessario per il seguito, inerente al piano di traslazione $S(K, C_{n-1})$ relativo al corpo K e alla congruenza C_{n-1} , è opportuno richiamare alcuni concetti essenziali e introdurre alcune locuzioni. Perciò cominciamo col dire punto improprio dello $S(K, C_{n-1})$ un elemento dell'insieme quoziente della totalità delle rette di $S(K, C_{n-1})$ rispetto alla nozione di parallelismo e con l'identificare i punti impropri di $S(K, C_{n-1})$ con gli S_{n-1} di S_{2n-1}^∞ appartenenti alla congruenza C_{n-1} . Ciò premesso, siano O, E, U, V quattro punti, a tre a tre indipendenti, di $S(K, C_{n-1})$ e i punti U e V siano impropri; sono individuati i tre S_n di S_{2n} rappresentanti le rette di $S(K, C_{n-1})$ congiungenti il punto O con i punti E, U, V : diciamoli OE, x, y rispettivamente e siano $e^\infty, x^\infty, y^\infty$ gli elementi di C_{n-1} appartenenti a OE, x, y .

Si è così fissato un riferimento affine R in $S(K, C_{n-1})$ e ad ogni punto di tale piano rimane associata una coppia ordinata di punti di y mediante l'operazione ternaria di M. HALL: tra i punti di y si introduce una struttura algebrica rispetto alla quale essi costituiscono un quasicorpo Y . Detto E_y il punto proiezione di E da x^∞ su y , vale il seguente

LEMMA II: *Gli elementi del quasicorpo Y che appartengono alla retta di S_{2n} congiungente i punti O e E_y costituiscono un sottoquasicorpo di Y : tale sottoquasicorpo è isomorfo al corpo K .*

Detta r_y la retta di S_{2n} congiungente O e E_y , sia r_e la retta di S_{2n} proiezione di r_y da x^∞ sullo S_n OE di S_{2n} e r_x la retta di S_{2n} proiezione di r_e da y^∞ sullo S_n x di S_{2n} . Le tre rette r_y, r_e, r_x appartengono al piano π comune ai due S_{n+1} congiungenti, rispettivamente, la retta r_y con x^∞ e la retta r_e con y^∞ ; a tale piano appartengono, quindi, anche i punti E e E_y . Per dimostrare il lemma II basta osservare che per operare sui punti di r_y mediante l'operazione ternaria di M. HALL, allo scopo di definire la struttura algebrica ad essi spettante come elementi di Y , è equivalente ad operare su π (che, come sot-

⁽⁸⁾ Pur agendo in modo da porre una corrispondenza biunivoca tra i punti di S_4 , biunivoca tra gli elementi della congruenza C_1 , e trasformando i punti appartenenti a un piano per una retta di C_1 in punti che verificano la stessa condizione.

to spazio di S_{2n} , è un piano affine irriducibile) in relazione al riferimento O', E', U', V' ove $O' = O$, $E' = E$, $U' = \pi \cap x^\infty$, $V' = \pi \cap y^\infty$. Ma, poichè in π vale universalmente il teorema di DESARGUES, segue che i punti di r_y costituiscono un sottocorpo di Y : tale sottocorpo è isomorfo a K poichè π è un piano di S_{2n} .

3. - In questo numero, e nei successivi, ci occuperemo di piani di traslazione relativi a particolari corpi K e particolari congruenze C_{n-1} . Specializzeremo il corpo K in un campo (corpo commutativo) F , non isomorfo al campo di GALOIS GF (2), tale che esista un polinomio $x^2 - bx - c$ con coefficienti in F e irriducibile su F , e specializzeremo la congruenza C_{n-1} in una congruenza $C_1 = H(F, b, c)$ di rette (appartenente allo S_3^∞ improprio dello S_4 lineare affine sopra il campo F) costituita dalle rette dello S_3^∞ rappresentabili in una delle seguenti forme ⁽⁹⁾:

$$\alpha) \equiv \begin{cases} y_1 = a_1 x_1 - (a_1^2 - b a_1 - c) a_2^{-1} x_2 \\ y_2 = a_2 x_1 + (b - a_1) x_2 \end{cases}$$

$$\alpha') \equiv y_1 - a_1 x_1 = y_2 - a_1 x_2 = 0$$

$$\beta) \equiv x_1 = x_2 = 0$$

ove a_1, a_2 ($a_2 \neq 0$) sono elementi del campo F .

Il piano di traslazione relativo al campo F e alla congruenza $H(F, b, c)$, il quale, nel seguito, si indicherà con $S(F, b, c)$ e si dirà piano di HALL, si può anche definire [5] come piano di traslazione sopra il quasicorpo di HALL $J(F, b, c)$; tale quasicorpo è costituito dalle coppie ordinate (x_1, x_2) di elementi estratti da F , quando le operazioni di somma e prodotto tra coppie siano definite alla seguente maniera:

definizione di somma

$$(x_1, x_2) + (z_1, z_2) = (x_1 + z_1, x_2 + z_2)$$

definizione di prodotto

$$(x_1, x_2)(a_1, a_2) = (y_1, y_2)$$

(y_1, y_2) ottenendosi mediante le α) o α') a seconda che a_2 sia diverso o uguale a zero.

La congruenza $H(F, b, c)$ contiene il regolo della quadrica $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ costituito dalle rette $\alpha')$ e $\beta)$; l'ulteriore regolo della quadrica esaurisce, insieme alle rette $\alpha)$, la congruenza lineare $\bar{H}(F, b, c)$ di rette di S_3^∞ che si

⁽⁹⁾ x_1, x_2, y_1, y_2 sono coordinate proiettive omogenee in S_3^∞ , e, quindi, coordinate affini dello S_4 .

appoggiano alle due rette (dello spazio tridimensionale lineare sopra il campo F' estensione algebrica di F mediante il polinomio $x^2 - bx - c$) di rispettive equazioni

$$y_1 - k_1 x_1 = y_2 - k_1 x_2 = 0, \quad y_1 - k_2 x_1 = y_2 - k_2 x_2 = 0 \quad [k_i^2 - bk_i - c = 0; \quad i = 1, 2].$$

Le precedenti rette risultano distinte se $k_1 \neq k_2$: tale eventualità non si presenta di necessità se il campo F , avendo caratteristica due, non è perfetto.

Il piano $\bar{S}(F, b, c)$ relativo al campo F e alla congruenza lineare $\bar{H}(F, b, c)$ è desarguesiano; infatti vale la proposizione:

Il piano $\bar{S}(F, b, c)$ è isomorfo al piano affine lineare sopra il campo estensione algebrica di F mediante il polinomio $x^2 - bc^{-1}x - c^{-1}$ (e, quindi, al piano affine lineare sopra il campo F').

Per provarlo si osservi che l'affinità di S_4 di equazioni

$$x_1' = x_1 \quad x_2' = y_1 \quad y_1' = x_2 \quad y_2' = y_2$$

trasforma la congruenza lineare $\bar{H}(F, b, c)$ in una congruenza lineare $\bar{H}'(F, b, c)$ costituita dalle rette rappresentabili, in S_3^∞ , sotto la forma (si trascurano gli apici relativi alle variabili):

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}) &= \begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + c^{-1} a_2 x_2 \\ y_2 = a_2 x_1 + (c^{-1} b a_2 + a_1) x_2 \end{cases} \\ \bar{\beta}) &= x_1 = x_2 = 0 \end{aligned}$$

Il piano di traslazione $\bar{S}'(F, b, c)$ relativo al campo F e alla congruenza $\bar{H}'(F, b, c)$ è isomorfo a quello relativo al campo F e alla congruenza $\bar{H}(F, b, c)$, poichè la precedente affinità pone un isomorfismo affine tra i due piani. Se in $\bar{S}'(F, b, c)$ si fissa un riferimento affine nel quale gli assi x, y e la retta unità siano i piani di S_4 di rispettive equazioni $y_1 = y_2 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = 0$ ed il punto unità sia il punto $E = (1, 0, 1, 0)$, si genera, mediante l'operazione ternaria di M. HALL, una struttura algebrica tra i punti dell'asse y , rispetto alla quale l'insieme di tali punti è un quasicorpo. Si verifica che quella struttura algebrica è definita da:

$$\text{somma} \quad (0, 0, x_1, x_2) + (0, 0, a_1, a_2) = (0, 0, x_1 + a_1, x_2 + a_2)$$

$$\text{prodotto} \quad (0, 0, x_1, x_2)(0, 0, a_1, a_2) = (0, 0, y_1, y_2)$$

ove y_1, y_2 si ottengono da x_1, x_2, a_1, a_2 mediante le uguaglianze $\bar{\alpha}$). Risulta:

$$\begin{aligned} (0, 0, a_1, a_2) &= (0, 0, a_1, 0) + (0, 0, a_2, 0)(0, 0, 0, 1) \quad \text{e} \quad (0, 0, 0, 1)^2 = \\ &= (0, 0, c^{-1}, c^{-1}b) = (0, 0, c^{-1}b, 0)(0, 0, 0, 1) + (0, 0, c^{-1}, 0). \end{aligned}$$

Poichè gli elementi dell'asse y del tipo $(0, 0, y_1, 0)$ costituiscono, rispetto alla somma e al prodotto già definiti, un campo isomorfo al campo F , pos-

siamo affermare che l'elemento $(0, 0, 0, 1)$ verifica l'equazione $x^2 - c^{-1}bx - c^{-1} = 0$ con coefficienti in F , e da ciò segue la proposizione enunciata.

Concludendo, si ha che:

Ogni congruenza $H(F, b, c)$, inerente un piano di M. Hall, individua una congruenza $\bar{H}(F, b, c)$ lineare di rette di S_3^∞ ; il piano di traslazione $S(F, b, c)$ relativo al campo F e alla congruenza $\bar{H}(F, b, c)$ è isomorfo al piano affine lineare sopra il campo estensione algebrica di F mediante il polinomio $x^2 - bx - c$.

4. - Si consideri, ancora, il piano di HALL $S(F, b, c)$ e, nello S_3^∞ , la congruenza $H(F, b, c)$ ad esso associata. Il gruppo G delle omografie di S_3^∞ che sono rappresentabili con equazioni del tipo:

$$G \equiv \begin{cases} \rho x_1 = \sigma(\gamma x_1' + \delta x_2') + \tau(\gamma y_1' + \delta y_2') \\ \rho x_2 = \sigma(\mu x_1' + \nu x_2') + \tau(\mu y_1' + \nu y_2') \\ \rho y_1 = c\tau(\gamma x_1' + \delta x_2') + (\sigma + b\tau)(\gamma y_1' + \delta y_2') \\ \rho y_2 = c\tau(\mu x_1' + \nu x_2') + (\sigma + b\tau)(\mu y_1' + \nu y_2') \end{cases}$$

(ove $\gamma, \delta, \mu, \nu, \sigma, \tau$ sono dei parametri omogenei scelti in F con la condizione che $\gamma\nu - \delta\mu \neq 0$, σ, τ non siano contemporaneamente nulli e ρ è un elemento di F diverso dallo zero) trasforma la congruenza $H(F, b, c)$ in sè mantenendo fisso l'insieme delle sue rette appartenenti alla quadrica $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

Si verifica facilmente che le rette α' e β , le quali costituiscono un regolo della precedente quadrica, appartengono a un insieme di transitività per G : ciò discende dall'osservare che le uniche rette di $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ che sono mantenute fisse da G appartengono allo spazio, a tre dimensioni, lineare sopra il campo F' , ove F' indica, al solito, il campo estensione algebrica di F mediante il polinomio $x^2 - bx - c$, e coincidono con gli assi della congruenza lineare $\bar{H}(F, b, c)$ associata (cfr. n. 3) alla congruenza $H(F, b, c)$.

Inoltre, se si considerano le rette α della congruenza $H(F, b, c)$ e le trasformazioni di G ottenute per $\delta = \mu = \tau = 0$, si vede immediatamente che tali trasformazioni costituiscono un sottogruppo di G che trasforma la retta di α individuata dagli elementi a_1, a_2 ($a_2 \neq 0$) di F nella retta dell'insieme α individuata dagli elementi $a_1' = a_1$ e $a_2' = a_2\gamma\nu^{-1}$ di F .

Le precedenti considerazioni ci permettono di affermare: *Nessuna retta di $H(F, b, c)$ è mutata in sè da ogni trasformazione di G .*

Ciò premesso, possiamo provare che:

In un piano di Hall esiste una e una sola retta r rispetto alla quale esso risulti $(r - r)$ -transitivo⁽¹⁰⁾ (tale retta coincidendo con la retta impropria del piano).

⁽¹⁰⁾ Un piano di traslazione S si dice $(r - r)$ -transitivo se esiste, in S , un gruppo di omologie speciali aventi per asse la retta r e transitivo sui punti di S non appartenenti ad r ; in tal caso si dice anche che il piano S è microdesarguesiano rispetto alla retta r .

Ricordato che un piano di traslazione è, per definizione, microdesarguesiano rispetto alla retta impropria, sia r un'eventuale retta di $S(F, b, c)$, distinta dalla retta impropria, rispetto alla quale il piano risulti $(r - r)$ -transitivo. Detta h la retta di $H(F, b, c)$ immagine del punto improprio di r , si osservi che nell'ipotesi ammessa, come è ben noto [3], $S(F, b, c)$ dovrebbe risultare $(s - s)$ -transitivo rispetto ad ogni sua retta s avente punto improprio h . Ma il gruppo delle affinità di S_4 che inducono nello S_3^∞ improprio di S_4 una trasformazione di G , costituisce un gruppo di automorfismi affini di $S(F, b, c)$; per un'osservazione precedente esiste almeno uno di tali automorfismi affini che muta la retta h in una retta $h' \in H(F, b, c)$ risultando $h' \neq h$. Poichè un automorfismo affine ϑ di un piano grafico irriducibile conserva i gruppi di omologie spettanti al piano, (il che significa, ad esempio, che se il piano risulta $(r - r)$ -transitivo e $r' = \vartheta(r)$ allora il piano deve essere anche $(r' - r')$ -transitivo) il piano di HALL $S(F, b, c)$, oltre ad essere $(s - s)$ -transitivo per ogni sua retta s avente come punto improprio h , dovrebbe risultare $(s' - s')$ -transitivo anche per ogni sua retta s' passante per il punto improprio h' . Quindi il piano $S(F, b, c)$ risulterebbe microdesarguesiano [3]: esso, cioè, sarebbe $(r - r)$ -transitivo rispetto ad ogni sua retta r . Ciò è assurdo, poichè in tal caso il piano $H(F, b, c)$ dovrebbe essere un piano di H. MOUFANG ([7], pp. 186-198) e tra i sistemi algebrici da esso individuati mediante l'operazione ternaria di M. HALL, in relazione ad un qualsiasi riferimento, non ve ne sarebbe alcuno isomorfo al quasicorpo di HALL $J(F, b, c)$.

Ricordato che si dice isomorfismo tra due piani di traslazione una corrispondenza biunivoca tra i loro punti la quale conserva gli allineamenti, in base al risultato precedente possiamo affermare che:

Ogni isomorfismo tra due piani di Hall $S(F, b, c)$ e $S(F, b', c')$, relativi al campo F e alle congruenze $H(F, b, c)$ e $H(F, b', c')$ rispettivamente, trasforma punti impropri in punti impropri: esso, cioè, risulta un isomorfismo affine.

Si noti che il precedente teorema è conosciuto in generale per piani di traslazione (propri) qualsiasi (cfr. [7], p. 207, per piani di traslazione di caratteristica diversa da due; [8] nel caso di piani di traslazione di caratteristica due). Ho ritrovato il risultato per i piani di HALL poichè, in questo caso, si giunge ad esso con considerazioni molto semplici mettendo, inoltre, in evidenza il gruppo G e, quindi, un gruppo di automorfismi del piano di HALL $S(F, b, c)$. L'opportunità delle considerazioni svolte in questo numero è confermata anche dal fatto che, mediante esse, si perviene al seguente risultato:

Ogni piano di Hall $S(F, b, c)$, nel caso che F non sia isomorfo al campo di Galois di ordine tre, non è un piano associativo; ossia: in $S(F, b, c)$ non esistono riferimenti che, mediante l'operazione ternaria di M. Hall, generino un quasicorpo associativo.

Infatti, dalle considerazioni svolte all'inizio del presente numero discende facilmente che G opera su $H(F, b, c)$ in modo tale che nessuna copia di rette

di $H(F, b, c)$ è unita per ogni trasformazione del gruppo. Esiste, quindi, in $S(F, b, c)$ un gruppo di automorfismi che non muta in sé una coppia di punti impropri del piano; l'esistenza di un riferimento in $S(F, b, c)$ che generi un quasicorpo associativo (necessariamente non distributivo) è, quindi, assurda ([7], p. 218, teorema 17) se il campo F non ha ordine tre.

5. - I risultati conseguiti nei numeri 3 e 4 ci permettono di affrontare il problema, posto nell'introduzione del presente lavoro, della caratterizzazione dei quasicorpi di HALL geometricamente isomorfi o, se si vuole, dei piani di HALL che risultano tra loro isomorfi. Per procedere più speditamente nel seguito è opportuno premettere la seguente proposizione:

I sottocampi del quasicorpo di Hall $J(F, b, c)$ che risultano isomorfi al campo F sono contenuti nel sottoinsieme di $J(F, b, c)$ costituito dai suoi elementi del tipo $(x_1, 0)$.

Poichè ogni sottocampo SC di $J(F, b, c)$ deve contenere l'elemento $(1, 0)$ se $x = (x_1, x_2) \in SC$ allora anche $x + 1 = (x_1 + 1, x_2) \in SC$; da ciò segue, quando la caratteristica di F è diversa da due, che gli elementi di SC sono tutti del tipo $(x_1, 0)$, poichè, in tal caso, $x(x + 1) \neq x^2 + x$ se $x_2 \neq 0$.

Si consideri, ora, il caso in cui F abbia caratteristica due. L'uguaglianza $xx = xx^2$ implica o $x_2 = 0$ oppure $b^2(b + 1)x_1 = b^2c + c^2 + bc + c$; l'ultima equazione in x_1 , per un'osservazione precedente, deve avere due soluzioni distinte, il che comporta $b = c = 1$. Rimane, quindi, da discutere solamente il caso di quasicorpi di HALL $J(F, 1, 1)$ relativi a un campo F di caratteristica due. Poichè l'equazione $x^2 - x - 1 = 0$ è risolubile nel campo di GALOIS di ordine quattro, si può supporre che F abbia più di quattro elementi; in tal caso, in SC , oltre a x e $x + 1$ non può essere contenuto $y = (y_1, y_2)$ e distinto da x e $x + 1$ se $x_2y_2 \neq 0$. Infatti, se $x_2 + y_2 \neq 0$ risulta $(x + y)^2 \neq x^2 + y^2$ mentre, se $x_2 = y_2$, $xy = yx$ comporta $y_1 = x_1$ o $y_1 = x_1 + 1$. Ciò significa che, nel caso in discussione, un sottocampo SC di $J(F, 1, 1)$ che sia isomorfo a F è necessariamente costituito da elementi del tipo $(x_1, 0)$ di $J(F, 1, 1)$ fatta, al più, eccezione per due elementi $x, x + 1$ che non risultano di tale tipo. Ma in SC vi è, quindi, un elemento $z = (z_1, 0)$ con $z_1 \neq 0, 1$ e, quindi, accanto a x e $x + 1$ dovrebbe esserci anche l'elemento $xz = (x_1z_1, x_2z_1)$ ove $x_2z_1 \neq x_2$: è assurdo, cioè, supporre $x \in SC$, se $x_2 \neq 0$, poichè $xz \in SC$ è in contraddizione con quanto già stabilito.

Ciò premesso, possiamo dimostrare il seguente

TEOREMA I. - *Siano $S(F, b, c)$ e $S(F, b', c')$ due piani di Hall relativi al campo F che si suppone dotato di almeno quattro elementi, non isomorfo ad un suo sottocampo proprio e, quindi, necessariamente perfetto. Siano, inoltre, $H(F, b, c)$ e $H(F, b', c')$ le congruenze di rette relative a $S(F, b, c)$ e a $S(F, b', c')$ rispettivamente e $\bar{H}(F, b, c)$ e $\bar{H}(F, b', c')$ le congruenze lineari ellettiche di rette ad esse associate. Condizione necessaria e sufficiente perchè i piani $S(F, b, c)$*

e $S(F, b', c')$ risultino isomorfi è che esista una collineazione dello spazio tridimensionale lineare sopra il campo F che trasformi la congruenza $\bar{H}(F, b, c)$ nella congruenza $\bar{H}(F, b', c')$.

Per dimostrare la sufficienza della condizione si osservi che, se esiste una collineazione $\bar{\Phi}$ dello S_3^∞ improprio dello S_4 lineare affine sopra il campo F che trasforma la congruenza $\bar{H}(F, b, c)$ nella congruenza $\bar{H}(F, b', c')$ deve esistere una collineazione Φ di S_3^∞ la quale, oltre a trasformare la congruenza $\bar{H}(F, b, c)$ nella congruenza $\bar{H}(F, b', c')$ mantiene fissa la quadrica $Q = x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ di S_3^∞ . Infatti la $\bar{\Phi}$ muta la Q , un cui regolo appartiene a $\bar{H}(F, b, c)$, in una quadrica Q' che ha un regolo contenuto in $\bar{H}(F, b', c')$; le quadriche Q e Q' , se sono distinte, individuano un fascio di quadriche. Si verifica facilmente che, nelle ipotesi poste, il gruppo delle omografie dello S_3^∞ , che mantiene fisso tale fascio e la congruenza $\bar{H}(F, b', c')$, è un gruppo transitivo sulle quadriche non degeneri del fascio. Ma, allora, Φ trasforma la congruenza $H(F, b, c)$ nella congruenza $H(F, b', c')$ e, quindi, ogni affinità dello S_4 , inerente un opportuno automorfismo di F , che induca nello S_3^∞ la collineazione Φ , pone un isomorfismo affine tra i piani $S(F, b, c)$ e $S(F, b', c')$.

Dimostriamo, ora, che la condizione è necessaria. Raggiungeremo lo scopo provando che un eventuale isomorfismo tra i piani $S(F, b, c)$ e $S(F, b', c')$ induce, in S_3^∞ , una collineazione $\bar{\Phi}$ che trasforma la congruenza $\bar{H}(F, b, c)$ nella congruenza $\bar{H}(F, b', c')$. Perciò si consideri un riferimento R in $S(F, b, c)$ che generi, mediante l'operazione ternaria di M. HALL, un quasicorpo isomorfo al quasicorpo $J(F, b, c)$: siano, in relazione al riferimento R , O l'origine, E il punto unità, U e V i punti impropri degli assi x ed y rispettivamente. Detto $\mathfrak{A}$ un eventuale isomorfismo tra $S(F, b, c)$ e $S(F, b', c')$ siano $O' = \mathfrak{A}(O)$, $E' = \mathfrak{A}(E)$, $U' = \mathfrak{A}(U)$, $V' = \mathfrak{A}(V)$ i quattro punti trasformati, mediante l'isomorfismo $\mathfrak{A}$, dei punti che individuano il riferimento R in $S(F, b, c)$: il riferimento R' , individuato in $S(F, b', c')$ dai quattro punti O' , E' , U' , V' genera un quasicorpo isomorfo a $J(F, b, c)$. Inoltre l'isomorfismo $\mathfrak{A}$ è necessariamente affine (cfr. 4): ciò significa che i punti O' e E' sono propri. Per il lemma II i punti della retta OE_v [$O'E'_v$] (E_v indica, al solito, il punto proiezione di E da U sulla retta OV) costituiscono un sottocorpo, isomorfo al campo F , del quasicorpo $J(F, b, c)$ generato dal riferimento O, E, U, V di $S(F, b, c)$ [O', E', U', V' di $S(F, b', c')$]. Tenendo conto della proposizione enunciata all'inizio del presente numero, si può affermare che il quasicorpo di HALL $J(F, b, c)$ ammette, nelle ipotesi poste, un unico sottocorpo isomorfo al campo F e che, quindi, $\mathfrak{A}$ trasforma i punti della retta OE_v di S_4 nei punti della retta $O'E'_v$, ponendo tra le due rette una corrispondenza biunivoca. Ma allora il lemma I, applicato all'isomorfismo $\mathfrak{A}$ e all'isomorfismo $\mathfrak{A}^{-1}$, ci assicura che $\mathfrak{A}$ trasforma terne di punti allineati in S_4 in terne di punti che verificano la medesima condizione, e viceversa. Inoltre $\mathfrak{A}$ agisce nello S_3^∞ mutando rette di $H(F, b, c)$ in rette di $H(F, b', c')$: la corrispondenza tra quelle rette di S_3^∞ può essere estesa ai punti di tale spazio

associando ad ogni punto P di S_3^∞ il punto improprio delle rette di S_4 trasformate, mediante $\mathfrak{d}$, delle rette di S_4 passanti per P . In tal modo si è posta nello S_3^∞ una corrispondenza biunivoca tra i punti la quale, come è subito visto, mantiene gli allineamenti. Tale corrispondenza è, perciò, una collineazione $\bar{\Phi}$, inerente un opportuno automorfismo di F , di S_3^∞ in sè, nella quale alla congruenza $H(F, b, c)$ resta associata la congruenza $H(F, b', c')$. Tenuto presente che i concetti di quadrica e di congruenza lineare ellittica di rette sono invarianti per collineazioni e il fatto che una congruenza lineare ellittica di rette è individuata da quattro sue rette non appartenenti a una quadrica, possiamo affermare che la quadrica $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ di S_3^∞ , poichè il campo F ha ordine maggiore di tre, è mutata in sè dalla $\bar{\Phi}$ e, quindi, si verifica immediatamente che la $\bar{\Phi}$ trasforma la congruenza lineare ellittica di rette $\bar{H}(F, b, c)$ nella congruenza lineare ellittica di rette $\bar{H}(F, b', c')$.

È appena necessario avvertire che il teorema precedente è applicabile per confrontare piani di HALL $S(F, b, c)$ e $S(F, b', c')$, relativi a un campo di caratteristica due poichè, essendo il campo F perfetto, la congruenza $H(F, b, c)$ associata a $S(F, b, c)$ è necessariamente ellittica.

Si noti, poi, che in [2] (Appendice II) è provato l'isomorfismo geometrico dei quasicorpi di HALL relativi al campo di GALOIS di ordine tre.

6. - Per completare i risultati annunciati nell'introduzione al lavoro, ci occuperemo, ancora, della determinazione del gruppo degli automorfismi spettante al piano di HALL $S(F, b, c)$ relativo al campo F e alla congruenza $H(F, b, c)$. Il teorema I (si tenga presente la dimostrazione della necessità delle condizioni poste) ci permette di affermare che ogni automorfismo di $S(F, b, c)$ (se F ha almeno quattro elementi, se non è isomorfo a un suo sottocampo proprio, e se, avendo caratteristica due, è perfetto) è realizzabile mediante un'opportuna affinità di S_4 (collineazione di S_4 , inerente un automorfismo φ di F , che muta S_3^∞ in sè) la quale deve agire nello S_3^∞ improprio di S_4 in modo da mutare in sè la congruenza $H(F, b, c)$; viceversa, ogni tale affinità di S_4 equivale a un automorfismo di $S(F, b, c)$. Ricordato che $H(F, b, c)$ si compone delle rette di $\bar{H}(F, b, c)$ non appartenenti alla quadrica $Q = x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ e delle rette di Q che non siano elementi di $\bar{H}(F, b, c)$, possiamo enunciare il seguente:

TEOREMA II. - *Sia $S(F, b, c)$ il piano di Hall relativo al campo F e alla congruenza di rette $H(F, b, c)$ dello S_3^∞ improprio dello S_4 lineare affine sopra il campo F ; siano, inoltre, $\bar{H}(F, b, c)$ la congruenza lineare ellittica di rette di S_3^∞ associata a $H(F, b, c)$ e Q la quadrica di S_3^∞ , di equazione $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.*

Se il campo F ha almeno quattro elementi, se non è isomorfo a un suo sottocampo proprio e, quindi, nel caso di caratteristica due, risulta $b \neq 0$, allora il gruppo degli automorfismi del piano di Hall $S(F, b, c)$ è isomorfo al gruppo delle affinità di S_4 che inducono nello S_3^∞ una collineazione la quale muta in sè la congruenza lineare ellittica di rette $\bar{H}(F, b, c)$ e la quadrica Q .

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANDRÉ, J., *Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe*, «Math. Z.», **60** (1954), 156-186.
 - [2] HALL, M., *Projective planes*, «Trans. Amer. Math. Soc.», **54**, (1943) 229-277.
 - [3] LENZ, H., *Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen*, «Jahresbericht der Deutschen Math.», (1954), 20-31.
 - [4] LOMBARDO-RADICE, L., *Quelques résultats nouveaux et quelques problèmes ouverts dans la théorie des quasicorps*, Faculté des Sciences de Paris - Séminaire P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot (Algèbre et Théorie des nombres) (1957-58).
 - [5] PANELLA, G., *Un insieme di piani di traslazione isomorfi*, Reticoli e Geometrie proiettive (Convegno Internazionale, Palermo-Messina, 1957) Cremonese, Roma, (1958), 109-119.
 - [6] PANELLA, G., *Isomorfismo tra i piani di traslazione di Marshall Hall*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», **25** (1958), 172-173.
 - [7] PICKERT, G., *Projektive Ebenen*, Springer, Berlin (1955).
 - [8] SAN-SOUCIE, *Right alternative division rings of characteristic two*, «Proc. Amer. Math. Soc.», **6** (1955), 291-296.
 - [9] SEGRE, B., *Gli automorfismi del campo complesso ed un problema di Corrado Segre*, «Rend. Acc. Naz. Lincei» **3** (1947), 414-420.
 - [10] SEGRE, B., *Lezioni di Geometria moderna*, vol. I, Zanichelli, Bologna, (1948).
-