Sulla curvatura delle faccette di una varietà kähleriana.

Memoria di G. B. RIZZA (a Roma)

Sunto. - *La conoscenza delle curvature (ordinaria e mista) delle faccette caratteristiche di una varietà kähleriana consente la determinazione della curvatura di tutte le faccette delle varietà.*

1. In diversi lavori ⁽¹⁾ E. MARTINELLI ha posto in luce che l'elemento geometrico fondamentale nello studio di una varietà a struttura complessa V_{2n} ($n > 1$) è il sistema delle ∞^{2n-2} *faccette caratteristiche* tangenti nei singoli punti di V_{2n} (immagini reali delle direzioni complesse) ⁽²⁾. Appare perciò naturale, in ogni questione geometrica su V_{2n} , porre in relazione gli enti che interessano con l'insieme delle faccette caratteristiche.

In quest'ordine di idee va considerato il presente lavoro, nel quale mostro che *la curvatura delle faccette non caratteristiche di una V_{2n} kähleriana dipende unicamente dalle curvature (ordinarie e miste) ⁽³⁾ delle faccette caratteristiche di V_{2n}* (n. 4).

Il risultato si precisa nel modo seguente. Ad ogni faccetta non caratteristica E_2 di V_{2n} , come ho indicato in una precedente nota ⁽⁴⁾, può essere associato un sistema ∞^1 di faccette caratteristiche (sistema Σ), che permette di definire la deviazione caratteristica di E_2 , cioè il divario della faccetta E_2 dall'essere caratteristica (n. 3). Ciò, premesso, *la curvatura K di una faccetta E_2 di V_{2n} si esprime linearmente nelle medie μ_Σ , $\mathfrak{M}_\Sigma$ delle curvature (ordinarie o miste) relative alle faccette caratteristiche del sistema Σ , associato ad E_2 ; precisamente $K = 3\mathfrak{M}_\Sigma - 2\mu_\Sigma$* (n. 4).

Al n. 5 è segnalata una seconda espressione per la curvatura K di E_2 , nella quale intervengono soltanto le curvature di quattro particolari piani di Σ .

⁽¹⁾ Ved. i nn. [6], [7], [8], [9], [10] della bibliografia.

⁽²⁾ L'osservazione sussiste più in generale con riferimento alle varietà quasi-complesse (ved. E. MARTINELLI, [8], n. 8), alle quali possono di conseguenza venir estesi i risultati del seguito.

⁽³⁾ La nozione di curvatura mista per una coppia di faccette è stata introdotta da E. BOMPIANI in [3], p. 130.

⁽⁴⁾ G. B. RIZZA, [11].

Il n. 6 comprende invece l'esame di alcuni casi particolari, tra i quali ha interesse sopra tutto quello di *isotropia caratteristica* (caso B) ⁽⁵⁾. In questa ipotesi, la curvatura K di una faccetta E_2 dipende soltanto dalla curvatura caratteristica costante k e dalla deviazione caratteristica δ di E_2 , secondo la formula $K = \frac{k}{4}(1 + 3 \cos^2 \delta)$. La relazione permette, in particolare, di ritrovare, con maggiori precisazioni, due teoremi di S. BOCHNER ⁽⁶⁾.

2. Generalità. - Sia V_{2n} ($n > 1$) una varietà kähleriana, O un suo punto e:

$$(1) \quad ds^2 = 2g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n)$$

la forma quadratica che definisce la metrica in un intorno U di O ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾.

I vettori $u, v, w, \dots$ di V_{2n} che si considerano, sono vettori uscenti da O .

Sia J la trasformazione lineare nello spazio affine tangente di O , che definisce la struttura quasi-complessa, determinata dalla struttura complessa di V_{2n} ⁽⁹⁾. Le componenti complesse ⁽¹⁰⁾ del vettore $\tilde{u} = Ju$, corrispondente al vettore u , sono:

$$(2) \quad \tilde{u}^\alpha = iu^\alpha, \quad \tilde{u}^{\bar{\beta}} = -iu^{\bar{\beta}};$$

quindi u ed $\tilde{u}$ sono ortogonali e di ugual lunghezza.

Una coppia ordinata uv di vettori di V_{2n} uscenti da O definisce una *faccetta* di V_{2n} di origine O . Le faccette *caratteristiche* sono le faccette unite nella trasformazione J ⁽¹¹⁾.

Per un vettore, uscente da O , passa una ed una sola faccetta caratteristica. Ad es. u determina la faccetta caratteristica $u\tilde{u}$.

⁽⁵⁾ Sulle V_{2n} kähleriane dotate di isotropia caratteristica ved. S. BOCHNER, [2], p. 184 K. YANO - S. BOCHNER, [13], p. 128; E. MARTINELLI, [7], pag. 20 e [10].

⁽⁶⁾ S. BOCHNER, [2].

⁽⁷⁾ Per la definizione, le proprietà essenziali, le notazioni ved. K. YANO - S. BOCHNER, [13], Cap. VIII, nn. 1 e 2.

⁽⁸⁾ Più generalmente si potrebbero considerare varietà quasi-complesse (con o senza torsione), dotate di metrica kähleriana (non necessariamente definita positiva). Ved. le osservazioni al n. 8 del lavoro [8] di E. MARTINELLI.

⁽⁹⁾ Ved. B. ECKMANN, [5], I, II, III, VI.

⁽¹⁰⁾ Le componenti complesse del vettore s di componenti reali σ^j ($j = 1, \dots, 2n$) sono $s^\alpha = \sigma^\alpha + i\sigma^{n+\alpha}$, $s^{\bar{\beta}} = \sigma^{\bar{\beta}} - i\sigma^{n+\bar{\beta}}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$).

⁽¹¹⁾ In K. YANO-S. BOCHNER, [13] i termini: 2-dimensional section, holomorphic section equivalgono risp. ai termini qui usati: faccetta, faccetta caratteristica.

Nel seguito interviene frequentemente il tensore di curvatura $R_{j\bar{h}k\bar{l}}$ ($j, h, k, l = 1, \dots, n, \bar{1}, \dots, \bar{n}$), che gode di note proprietà di simmetria ed emisimmetria.

Convieni notare che, per una V_{2n} kähleriana è:

$$(3) \quad R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = R_{\alpha\bar{\delta}\gamma\bar{\beta}}$$

onde $R_{j\bar{h}k\bar{l}}$ risulta simmetrico rispetto agli indici, primo e terzo, secondo e quarto ⁽¹²⁾.

È classica la definizione di *curvatura* di una faccetta. Più in generale, per una coppia di faccette E. BOMPIANI ha introdotta la nozione di *curvatura mista* ⁽¹³⁾.

La curvatura della faccetta definita dai vettori unitari e ortogonali uv è:

$$(4) \quad K_{uv} = -R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}(u^\alpha v^\beta u^\gamma v^\delta - 2u^\alpha u^\beta v^\gamma v^\delta + v^\alpha u^\beta v^\gamma u^\delta).$$

In particolare, la curvatura della faccetta caratteristica determinata dal vettore unitario w è:

$$(5) \quad K_{ww} = 4R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}w^\alpha w^\beta w^\gamma w^\delta.$$

La curvatura di BOMPIANI per le faccette definite dai vettori uv, xy unitari e ortogonali è:

$$(6) \quad \chi_{uv, xy} = -R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}(u^\alpha v^\beta x^\gamma y^\delta - u^\alpha v^\beta y^\gamma x^\delta - v^\alpha u^\beta x^\gamma y^\delta + v^\alpha u^\beta y^\gamma x^\delta).$$

In particolare, la curvatura mista per le faccette caratteristiche determinate dai vettori unitari r, s è:

$$(7) \quad \chi_{rr, ss} = 4R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}r^\alpha r^\beta s^\gamma s^\delta.$$

La (6) si ottiene direttamente esplicitando la definizione di curvatura mista ⁽¹⁴⁾. Dalla (6), nell'ipotesi che le due faccette coincidano, tenuta presente la (3), scende la (4) ⁽¹⁵⁾. In particolare se le faccette sono caratteristiche, dalla (7) segue la (5).

⁽¹²⁾ Ved. S. BOCHNER, [1], p. 788.

⁽¹³⁾ E. BOMPIANI, [3], p. 130.

⁽¹⁴⁾ Ved. p. es. E. CARTAN, [4], p. 195.

⁽¹⁵⁾ Alla (4) si perviene anche direttamente partendo dalla (8.37) di [13] e tenendo conto della (3). In particolare la (5) si ottiene subito dalla (8.40).

Evidentemente le nozioni introdotte dipendono dalle faccette e non dalle coppie di vettori (unitari e ortogonali) che le definiscono. Gli indici bassi nelle notazioni $K_{n\tilde{v}}$, $\chi_{uv, v\bar{v}}$, $\chi_{r\tilde{r}, s\tilde{s}}$ servono soltanto per individuare le faccette.

3. Il sistema Σ . - Sia E_2 una faccetta non caratteristica di origine O , definita dai vettori unitari e ortogonali uv e Σ il sistema ∞^1 delle faccette caratteristiche individuare dai vettori uscenti da O ed appartenenti ad E_2 .

Le faccette caratteristiche di Σ formano con E_2 angolo costante δ che dicesi *deviazione caratteristica* della faccetta $E_2.E'$:

$$(8) \quad \cos \delta = -u \times \tilde{v} \quad (16).$$

Il sistema Σ associato ad E_2 ha ruolo preminente nel seguito. È utile quindi lo studio delle curvature (ordinaria e mista) delle faccette caratteristiche di Σ .

Sia w un vettore unitario uscente da O ed appartenente alla faccetta $E_2.E'$:

$$(9) \quad w = u \cos \tau + v \sin \tau \quad (0 \leq \tau < 2\pi).$$

Tenuto conto delle (5) (9) (3), la curvatura della faccetta caratteristica $n\tilde{v}$ di Σ è:

$$(10) \quad K_{n\tilde{v}} = 4R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}[u^\alpha u^\beta u^\gamma u^\delta \cos^4 \tau + 2(v^\alpha u^\beta u^\gamma u^\delta + u^\alpha v^\beta u^\gamma u^\delta) \cos^3 \tau \sin \tau + \\ + (u^\alpha v^\beta u^\gamma v^\delta + 4u^\alpha u^\beta v^\gamma v^\delta + v^\alpha u^\beta v^\gamma u^\delta) \cos^2 \tau \sin^2 \tau + \\ + 2(u^\alpha v^\beta v^\gamma v^\delta + v^\alpha u^\beta v^\gamma v^\delta) \cos \tau \sin^3 \tau + v^\alpha v^\beta v^\gamma v^\delta \sin^4 \tau].$$

La media delle curvature dei piani caratteristici del sistema Σ è dunque:

$$(11) \quad \mu_\Sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{n\tilde{v}} d\tau = \frac{1}{2} R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}(3u^\alpha u^\beta u^\gamma u^\delta + 3v^\alpha v^\beta v^\gamma v^\delta + \\ + u^\alpha v^\beta u^\gamma v^\delta + 4u^\alpha u^\beta v^\gamma v^\delta + v^\alpha u^\beta v^\gamma u^\delta).$$

(16) Ved. G. B. RIZZA, [11], n. 3. Ivi il sistema Σ e la deviazione caratteristica di una faccetta sono considerati per la prima volta. Più in generale per la definizione di deviazione caratteristica di un elemento $2q$ -dimensionale orientato E_{2q} ($q=1, \dots, n$) ved. G. B. RIZZA [12].

Siano poi r, s due vettori unitari uscenti da O ed appartenenti ad E_2 ; cioè:

$$(12) \quad r = u \cos \varphi + v \sin \varphi, \quad s = u \cos \psi + v \sin \psi$$

($0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$).

Tenuto conto delle (7) (12), la curvatura di BOMPIANI per le faccette caratteristiche $r\bar{r}, s\bar{s}$ di Σ è:

$$(13) \quad \chi_{r\bar{r}, s\bar{s}} = 4R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}[u^\alpha u^{\bar{\beta}} \cos^2 \varphi + (u^\alpha v^{\bar{\beta}} + v^\alpha u^{\bar{\beta}}) \cos \varphi \sin \varphi + v^\alpha v^{\bar{\beta}} \sin^2 \varphi] \cdot \\ \cdot [u^\alpha u^{\bar{\delta}} \cos^2 \psi + (u^\alpha v^{\bar{\delta}} + v^\alpha u^{\bar{\delta}}) \cos \psi \sin \psi + v^\alpha v^{\bar{\delta}} \sin^2 \psi].$$

Dalle (13) (3) segue che la media delle curvature miste per le faccette caratteristiche di Σ è:

$$(14) \quad \mathfrak{M}_\Sigma = \frac{1}{4\pi^2} \iint \chi_{r\bar{r}, s\bar{s}} d\varphi d\psi = R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}(u^\alpha u^{\bar{\beta}} u^\gamma u^{\bar{\delta}} + 2u^\alpha u^{\bar{\beta}} v^\gamma v^{\bar{\delta}} + v^\alpha v^{\bar{\beta}} v^\gamma v^{\bar{\delta}}),$$

ove è inteso di integrare da O a 2π rispetto a ciascuna variabile.

4. Teorema sulla curvatura - Le considerazioni del n. 3 permettono di dare una semplice espressione della curvatura di una faccetta non caratteristica.

Sia E_2 una faccetta non caratteristica, definita da una coppia uv di vettori unitari e ortogonali e Σ il sistema associato ad E_2 (n. 3).

Per la curvatura K della faccetta E_2 sussiste la relazione:

$$(15) \quad K = 3\mathfrak{M}_\Sigma - 2\mu_\Sigma,$$

dove μ_Σ ed $\mathfrak{M}_\Sigma$ sono risp. le medie delle curvature ordinarie e miste delle faccette di Σ .

Alla (15) si perviene direttamente in virtù delle (4) (11) (14).

È opportuno segnalare che dal risultato stabilito seguono:

a) La curvatura di una faccetta non caratteristica dipende soltanto dalle curvature (ordinarie e miste) delle faccette caratteristiche del sistema Σ associato alla faccetta considerata.

b) La conoscenza delle curvature (ordinarie e miste) delle faccette caratteristiche di origine O è sufficiente a determinare la curvatura di ogni faccetta di origine O .

5. Osservazioni complementari. - La valutazione delle medie μ_Σ , $\mathfrak{M}_\Sigma$, che intervengono nella relazione (14), può ottenersi nel modo seguente.

Sulla faccetta E_2 si considerino due rette ortogonali per O e le relative bisettrici. Siano uv , xy vettori unitari uscenti da O ed aventi risp. le direzioni delle due coppie di rette considerate.

Ciò premesso, vale la *relazione*:

$$(16) \quad \mu_\Sigma = \frac{1}{4} (k_{u\tilde{u}} + k_{v\tilde{v}} + k_{x\tilde{x}} + k_{y\tilde{y}}),$$

che proviene dalla (10), assegnando successivamente all'angolo τ , che interessa mod. π , i valori $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

Analogamente, dalle (5) (7) scende la *relazione*:

$$(17) \quad \mathfrak{M}_\Sigma = \frac{1}{4} (k_{u\tilde{u}} + 2\chi_{u\tilde{u}, v\tilde{v}} + k_{v\tilde{v}}).$$

Infine, la curvatura K di una faccetta non caratteristica E_2 di origine O può esprimersi mediante le curvature (ordinarie e miste) di quattro faccette caratteristiche di Σ , le quali incontrino E_2 secondo due rette ortogonali per O e le loro bisettrici. Precisamente:

$$(18) \quad K = -\frac{1}{8} (k_{u\tilde{u}} + k_{v\tilde{v}} + k_{x\tilde{x}} + k_{y\tilde{y}} - 6\chi_{u\tilde{u}, v\tilde{v}} - 6\chi_{x\tilde{x}, y\tilde{y}}).$$

Alla (18) si perviene partendo dalle (15) (16) (17) e notando che nella (17) la coppia di vettori unitari ortogonali uv può sostituirsi con la coppia xy .

6. Casi particolari. - Si considerano alcuni casi particolari, che si presentano imponendo alle curvature delle faccette di origine O ipotesi via via più forti.

A) Σ -isotropia: la curvatura delle faccette caratteristiche del sistema Σ associato alla faccetta E_2 è costante. Quindi:

$$(19) \quad K_{v\tilde{v}} = k_\Sigma = \text{costante}$$

al variare di τ nella (9), vale a dire al variare del vettore unitario w nel fascio di centro O su E_2 .

Le (16) (17) divengono:

$$(20) \quad \mu_\Sigma = k_\Sigma, \quad \mathfrak{M}_\Sigma = \frac{1}{2} (k_\Sigma + \chi_{u\tilde{u}, v\tilde{v}}).$$

Infine, la curvatura K della E_2 è espressa dalla relazione:

$$(21) \quad K = \frac{1}{2} (3\chi_{u\tilde{u}, v\tilde{v}} - k_\Sigma),$$

che segue dalle (15) (20) o direttamente dalla (18) ⁽¹⁷⁾.

Nell'ipotesi di Σ -isotropia non è difficile esaminare la distribuzione delle curvature di BOMPIANI relative alle faccette di Σ .

Posto:

$$(22) \quad \begin{aligned} \mathcal{A} &= 4R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}(u^\alpha v^{\bar{\beta}} + v^\alpha u^{\bar{\beta}})u^\gamma v^{\bar{\delta}}, & \mathcal{B} &= 4R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}(u^\alpha v^{\bar{\beta}} + v^\alpha u^{\bar{\beta}})v^\gamma v^{\bar{\delta}}, \\ \mathcal{C} &= 4R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}(u^\alpha v^{\bar{\beta}} u^\gamma v^{\bar{\delta}} + 4u^\alpha u^{\bar{\beta}} v^\gamma v^{\bar{\delta}} + v^\alpha u^{\bar{\beta}} v^\gamma u^{\bar{\delta}}), \end{aligned}$$

le (10) (13) del n. 3 divengono

$$(23) \quad k_{v\tilde{v}} = k_{u\tilde{u}} \cos^4 \tau + k_{v\tilde{v}} \sin^4 \tau + \mathcal{C} \sin^2 \tau \cos^2 \tau + \sin 2\tau (\mathcal{A} \cos^2 \tau + \mathcal{B} \sin^2 \tau)$$

$$(24) \quad \begin{aligned} \chi_{r\tilde{r}, s\tilde{s}} &= k_{u\tilde{u}} \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + k_{v\tilde{v}} \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + \mathcal{C} \cos \varphi \cos \psi \sin \varphi \sin \psi + \\ &+ \sin(\varphi + \psi) [\mathcal{A} \cos \varphi \cos \psi + \mathcal{B} \sin \varphi \sin \psi] + \sin^2(\varphi - \psi) \chi_{u\tilde{u}, v\tilde{v}}. \end{aligned}$$

Assegnati successivamente a τ nella (23) i valori $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, per somma e differenza delle uguaglianze ottenute, nell'ipotesi (19), risulta:

$$(25) \quad \mathcal{C} = 2k_\Sigma, \quad \mathcal{A} + \mathcal{B} = 0.$$

In virtù delle (19) (25), dalla (23) segue $\mathcal{A} \sin 2\tau \cos 2\tau = 0$ con τ arbitrario; quindi:

$$(26) \quad \mathcal{A} = \mathcal{B} = 0.$$

In conclusione, per la curvatura mista delle faccette di Σ sussiste la relazione:

$$(27) \quad \chi_{r\tilde{r}, s\tilde{s}} = k_\Sigma \cos^2(\varphi - \psi) + \chi_{u\tilde{u}, v\tilde{v}} \sin^2(\varphi - \psi),$$

che deriva direttamente dalla (24), tenuto conto delle (19) (25) (26).

⁽¹⁷⁾ Come appare dalla (20), $\chi_{r\tilde{r}, s\tilde{s}}$ è costante per ogni coppia rs di vettori unitari ortogonali di E_2 uscenti da 0.

I valori estremi di $\chi_{r\tilde{r}, s\tilde{s}}$, al variare delle faccette in Σ , sono k_2 e $\chi_{u\tilde{u}, v\tilde{v}}$ e si ottengono in corrispondenza a vettori r, s risp. coincidenti e ortogonali.

B) *Isotropia caratteristica*: la curvatura delle faccette caratteristiche di origine O è costante. Per ogni vettore unitario w uscente da O è quindi:

$$(28) \quad K_{w\tilde{w}} = k = \text{costante}.$$

Dalle (5) (28) deriva la relazione:

$$(29) \quad R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = \frac{k}{2} (g_{\alpha\bar{\beta}}g_{\gamma\bar{\delta}} + g_{\alpha\bar{\delta}}g_{\gamma\bar{\beta}}) \quad (18).$$

Indipendentemente dall'ipotesi di isotropia caratteristica per due vettori arbitrari a, b può scriversi:

$$(30) \quad a * b = g_{\mu\bar{\nu}} a^\mu b^\nu = \frac{1}{2} [(a \times b) + i(a \times \tilde{b})].$$

Sia ora E_2 una faccetta di origine O , definita dai vettori unitari ortogonali uv , Σ il sistema associato ad E_2 , δ la deviazione caratteristica di E_2 (n. 3).

Dalle (30) (8) segue:

$$(31) \quad u * v = g_{\mu\bar{\nu}} u^\mu v^\nu = -\frac{i}{2} \cos \delta.$$

Tenuto poi conto delle (29) (31), la (7) diviene:

$$(32) \quad \chi_{u\tilde{u}, v\tilde{v}} = \frac{k}{2} (1 + \cos^2 \delta),$$

onde la (20) si riduce a:

$$(33) \quad \mu_2 = k, \quad \mathfrak{M}_2 = \frac{k}{4} (3 + \cos^2 \delta).$$

Infine, nell'ipotesi di isotropia caratteristica, per la curvatura K della faccetta E_2 sussiste la relazione:

$$(34) \quad K = \frac{k}{4} (1 + 3 \cos^2 \delta),$$

che scende direttamente dalle (21) (28) (32).

(18) Ved. K. YANO - S. BOCHNER, [13], p. 128.

I valori estremi K sono k e $\frac{k}{4}$ e si ottengono risp. per $\delta \equiv 0, \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, vale a dire in corrispondenza di faccette caratteristiche e di faccette a prodotto hermitiano reale ⁽¹⁹⁾. Questo risultato, immediata conseguenza della (34), precisa un teorema di S. BOCHNER ⁽²⁰⁾.

Per le curvature miste delle faccette di Σ sussiste la relazione:

$$(35) \quad \chi_{r\tilde{r}, s\tilde{s}} = \frac{k}{2} (2 - \sin^2 \lambda \sin^2 \delta) \quad (\lambda = \varphi - \psi)$$

che segue dalla (27), in virtù delle (28) (32).

I valori estremi di $\chi_{r\tilde{r}, s\tilde{s}}$ sono k e $\frac{k}{2} (1 + \cos^2 \delta)$ e si ottengono risp. per $\lambda \equiv 0, \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

È bene notare che la (35) esprime, più generalmente, la curvatura di BOMPIANI per una coppia qualunque di faccette caratteristiche di origine O . Basta intendere che i vettori unitari r, s uscenti da O definiscano le due faccette in considerazione, λ denoti l'angolo $\widehat{rs}$ e δ la deviazione caratteristica della faccetta rs .

I valori estremi della curvatura mista per le coppie di faccette caratteristiche sono evidentemente k e $\frac{k}{2}$ e si presentano risp. quando le due faccette coincidono e quando segano una faccetta a prodotto hermitiano reale secondo due vettori per O ortogonali.

Infine, siano E_2, E_2^* due faccette arbitrarie di origine O , definite dalle coppie uv, xy di vettori unitari ortogonali uscenti da O e δ, δ^* le deviazioni caratteristiche di E_2, E_2^* risp.

La curvatura mista relativa alle faccette E_2, E_2^ è:*

$$(36) \quad \chi_{E_2 E_2^*} = \frac{k}{4} (\cos E_2 E_2^* + 2 \cos \delta \cos \delta^* + \cos E_2 \tilde{E}_2^*)$$

ove $\tilde{E}_2^* = JE_2^*$.

La (36) deriva dalla (6) in virtù della (29). Per la dimostrazione vanno tenute presenti le (30) (31) e, per l'angolo di due faccette, le (12) (13) del lavoro [11].

⁽¹⁹⁾ Ved. G. B. RIZZA [11], n. 8.

⁽²⁰⁾ S. BOCHNER, p. 186; ved. anche K. YANO - S. BOCHNER, [13], p. 129.

C) *Isotropia*: la curvatura delle faccette di origine O è costante.

Non varia quindi il primo membro della (34) al variare di δ da 0 a $\frac{\pi}{2}$.
Ciò è possibile se e solo se $K=0$, vale a dire se e solo se *la curvatura è nulla per ogni faccetta di origine O* .

È così ritrovato un teorema di S. BOCHNER ⁽²¹⁾.

⁽²¹⁾ Ved. K. YANO - S. BOCHNER, [13], p. 127.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. BOCHNER, *Vector fields and Ricci curvature*, « Bull. Am. Math. Soc. », 52, (1946).
 - [2] S. BOCHNER, *Curvature in Hermitian manifolds*, « Bull. Am. Math. Soc. », 53, (1947).
 - [3] E. BOMPIANI, *Spazi riemanniani luoghi di varietà totalmente geodetiche*, « Rend. Palermo », 48, (1924).
 - [4] E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, (1951).
 - [5] B. ECKMANN, *Cours sur les variétés complexes*, « Centro Int. Mat. Est., C. I. M. E. » (1956), Edizioni Cremonese, Roma.
 - [6] E. MARTINELLI, *Qualche proprietà geometrica delle varietà a struttura complessa*, « Atti Acc. Ligure », 9, (1952).
 - [7] E. MARTINELLI, *Punti di vista geometrici nello studio delle varietà a struttura complessa*, « Centro Int. Mat. Est., C. I. M. E. », (1956), Edizioni Cremonese, Roma.
 - [8] E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa*, « Ann. di Mat. », 43, (1957).
 - [9] E. MARTINELLI, *Sulla curvatura delle superficie caratteristiche in una varietà kähleriana*, « Rend. Lincei », 21, (1956).
 - [10] E. MARTINELLI, *Sulle varietà dotate di isotropia caratteristica*, « Rend. Lincei », 21, (1959).
 - [11] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa*, « Rend. Lincei », 24, (1958).
 - [12] G. B. RIZZA, *Holomorphic deviation for the $2q$ -dimensional sections of complex analytic manifolds*, « Archiv der Math. », 10, (1959).
 - [13] K. YANO - S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*, « Ann. of Math. Studies », 32, Princeton Univ. Press, (1953).
-