

Su alcuni sistemi di equazioni integrodifferenziali in ipotesi di Carathéodory (*).

Nota di GIUSEPPE SANTAGATI (a Catania)

Sunto. - *Vengono studiate alcune classi di sistemi di equazioni integrodifferenziali, stabilendo, in ipotesi del tipo di Carathéodory e con dati al contorno sommabili, dei teoremi di esistenza che estendono alcuni noti risultati relativi a problemi al contorno per sistemi di equazioni alle derivate parziali. In particolare viene ritrovato un noto teorema sull'esistenza di soluzioni per il problema di Darboux per un'equazione del 2° ordine di tipo iperbolico. I metodi seguiti richiedono la dimostrazione preliminare di alcuni criteri di compattezza rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare.*

Summary. - *Existence theorems for a class of integro-differential equations are given under very weak assumptions of Carathéodory type on the data. These theorems extend some known results about b. v. problems for hyperbolic p. d. equations with data given along the characteristic lines, such as, for instance, the well-known Darboux problem. The methods used are functional theoretic and they require the use of certain compactness criteria established in the first part of the paper.*

Si considerino i seguenti problemi :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial x} = F(x, y, \sigma(x) + \int_0^y v(x, t) dt, v, w) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = G(x, y, \tau(y) + \int_0^x w(t, y) dt, v, w) \end{array} \right. , \quad (x, y) \in \Delta ,$$

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} v(0, y) = \psi(y), \quad y \in \Delta_y \\ w(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Delta_x \end{array} \right.$$

e :

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial x} = F(x, y, \sigma(x) + \int_0^y v(x, t) dt, v, w) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = G(x, y, \sigma(x) + \int_0^y v(x, t) dt, v, w) \end{array} \right. , \quad (x, y) \in \Delta ,$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del C. N. R.

$$(II) \quad \begin{cases} v(0, y) = \psi(y), & y \in \Delta_y \\ w(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Delta_x \end{cases}$$

con :

$$\Delta = \Delta_x \times \Delta_y, \quad \Delta_x = [0, a], \quad \Delta_y = [0, b] \quad (a, b > 0),$$

$\psi(y)$ e $\varphi(x)$ essendo due funzioni ⁽¹⁾ definite e sommabili rispettivamente in Δ_y ed in Δ_x , $F(x, y, z, v, w)$ e $G(x, y, z, v, w)$ due funzioni definite nello strato :

$$S_0 = \{(x, y, z, v, w) : (x, y) \in \Delta, |z|, |v|, |w| < +\infty, (x, y, z, v, w) \in R^5\} \quad (2)$$

ed inoltre con :

$$\sigma(x) = z_0 + \int_0^x \varphi(t) dt, \quad \tau(y) = z_0 + \int_0^y \psi(t) dt \quad (\sigma(0) = \tau(0) = z_0).$$

Parecchi sono, ormai, i lavori sui problemi (I) (II) e (III) (II) tendenti ad assicurare l'esistenza di almeno una soluzione, sia nel caso in cui le funzioni F e G non dipendono da z (cfr. F. GUGLIELMINO [2], G. SANTAGATI [2], F. TRICOMI [1] p. 118 e seguenti, G. VILLARI [1], A. ZITAROSA [1] e [2]) ⁽³⁾, sia nel caso in cui vi dipendono (cfr. G. CARADONNA [1], L. MERLI [1], G. SANTAGATI [3]); per una storia piuttosto completa, in proposito, basta consultare G. SANTAGATI [3].

Nel presente lavoro, analogamente a quanto recentemente fatto da G. ARNESE in [2] riguardo il classico problema di DARBOUX per una equazione del secondo ordine di tipo iperbolico, mi occupo, sostanzialmente, dello studio dei problemi (I) (II) e (III) (II), sempre con riferimento alla questione esistenziale, supponendo i dati $\psi(y)$ e $\varphi(x)$ sommabili in Δ_y ed in Δ_x rispettivamente e ponendo sulle funzioni $F(x, y, z, v, w)$, $G(x, y, z, v, w)$ ipotesi del tipo di quelle, classiche, di C. CARATHÉODORY per le equazioni ordinarie, nonché condizioni del tipo di quelle poste, precedentemente, in G. SANTAGATI [3].

Detto S (risp. S') l'insieme delle funzioni di due variabili definite in Δ , ivi assolutamente continue rispetto ad x (risp. rispetto ad y) per tutti gli y (risp. per tutti gli x) di Δ_y (risp. di Δ_x) sommabili rispetto ad y (risp. rispetto ad x) per tutti gli x (risp. per tutti gli y) di Δ_x (rispet. di Δ_y), intenderò,

⁽¹⁾ Le funzioni che si considerano nel presente lavoro sono tutte funzioni numeriche; pertanto mi esimerò, di volta in volta, di dichiararlo esplicitamente.

⁽²⁾ Viene indicato, qui e nel seguito, con R^n lo spazio euclideo reale ad n dimensioni.

⁽³⁾ I numeri in [] rinviano alla bibliografia posta in fondo al presente lavoro.

come in G. SANTAGATI [3], per soluzione del problema (I) (II) una coppia di funzioni, $v(x,y)$, $w(x,y)$, la prima dell'insieme S , la seconda dell'insieme S' , verificanti le (II) e, quasi ovunque in Δ , il sistema (I) e per soluzione del problema (III) (II) una coppia di funzioni, $v(x,y)$, $w(x,y)$, sempre, la prima dell'insieme S , la seconda dell'insieme S' , verificanti le (II) e, quasi ovunque in Δ , il sistema (III).

Ottingo, così, i teoremi di esistenza dei nn. 4 (teoremi 4.1 e 4.2) e 5 (teoremi 5.1-5.4) che rappresentano i risultati centrali del presente lavoro e che migliorano i precedenti risultati stabiliti in G. SANTAGATI [3].

Le dimostrazioni di detti teoremi sono conseguite utilizzando, con i dovuti adattamenti, il metodo esistenziale di TONELLI, e, successivamente, nei nn. 9 e 10, anche facendo uso dei metodi dell'analisi funzionale e precisamente applicando il teorema del punto unito ad opportune trasformazioni funzionali.

Nel n. 1 sono poste le questioni di nomenclatura e sono dimostrati alcuni criteri di compattezza (teoremi 1.1-1.10) rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare, utili per le dimostrazioni dei teoremi dei nn. 4 e 5, facendone, inoltre, un raffronto, a mio avviso esauriente, con noti teoremi di compattezza di G. ARNESE (cfr. [2]), C. CILIBERTO (cfr. [1]), A. ZITAROSA (cfr. [1] e [2]), G. SANTAGATI (cfr. [1] e [3]).

Nel n. 2 sono riportati due teoremi (teoremi 2.1 e 2.2) che permettono di dedurre dai teoremi 1.1, 1.2, 1.5, 1.6, 1.8 e 1.9 del numero precedente dei criteri di compattezza di natura più concreta; si ottengono, così, i teoremi 3.1 e 3.2 del n. 3, l'uso dei quali permette di acquisire i teoremi di esistenza, per i problemi (I) (II) e (III) (II), del n. 6 (teoremi 6.1-6.6), come casi particolari di quelli dimostrati nei nn. 4 e 5.

Il n. 7 è dedicato, poi, sempre con riferimento al problema esistenziale, allo studio di due problemi al contorno intimamente legati ai problemi (I) (II) e (III) (II) (teoremi 7.1-7.4); il n. 8, infine, ad alcune considerazioni riguardanti il classico problema di DARBOUX; si ottengono, infatti, con riferimento a questo, in base ai risultati stabiliti nei numeri precedenti, dei teoremi di esistenza molto generali fra i quali viene ritrovato il risultato di G. ARNESE [2] sopra menzionato. Vengono, così, conseguentemente, assorbiti un noto teorema di W. WALTER (cfr. [1]), un teorema di A. ALEXIEWCZ e W. ORLICZ (cfr. [1]), i teoremi di G. SANTAGATI (cfr. [1] e [3]) e quindi anche quelli R. CONTI (cfr. [1] e [2]) nonché, ancora, sotto certi aspetti, un risultato di J. KISYNSKI (cfr. [1]) ⁽⁴⁾.

⁽⁴⁾ Si noti che il risultato di J. KISYNSKI concerne soluzioni, a valori in uno spazio di BANACH, di un problema più generale di quello di DARBOUX. La estensione sopra detta è intesa, quindi, solo con riferimento al fatto che nel teorema di KISYNSKI sono poste, sulla funzione assegnata, ipotesi del tipo di OSGOOD.

1. - Nomenclatura. Criteri di Compattezza.

Diciamo T (risp. T') l'insieme delle funzioni $g(x,y)$ definite in Δ ivi misurabili rispetto ad y (risp. ad x) per tutti gli x (risp. per tutti gli y) di Δ_x (risp. di Δ_y), continue rispetto ad x (risp. rispetto ad y) per quasi tutti gli y (risp. per quasi tutti gli x) di Δ_y (risp. di Δ_x).

Assegnata una funzione $g(x,y) \in T$ (risp. $g(x,y) \in T'$), per un noto teorema di G. SCORZA DRAGONI ⁽⁵⁾, essa é *superficialmente quasi continua in modo semiregolare rispetto ad x* (risp. *rispetto ad y*) ⁽⁶⁾; in particolare essa é quindi *quasi uniformemente continua rispetto ad x* (risp. *rispetto ad y*). Ogni funzione $g(x,y) \in T$ (risp. $g(x,y) \in T'$) gode, allora, della seguente proprietà ⁽⁷⁾:

B) (risp. B')) Per ogni coppia di numeri reali positivi ε ed ω , esiste una parte e_y (risp. e_x) di Δ_y (risp. di Δ_x), di misura minore di ε , ed un numero reale positivo δ in guisa tale che risulti:

$$|g(x', y) - g(x'', y)| < \omega \quad (\text{risp. } |g(x, y') - g(x, y'')| < \omega)$$

per ogni y (risp. per ogni x) di $\Delta_y - e_y$ (risp. di $\Delta_x - e_x$) ed ogni coppia, x' ed x'' (risp. y' ed y''), di valori di x (risp. di valori di y) soddisfacenti alla limitazione $|x' - x''| < \delta$ (risp. alla limitazione $|y' - y''| < \delta$).

Ciò osservato, richiamiamo le seguenti definizioni: ⁽⁸⁾

DEFINIZIONE 1.1. - *Diremo che le funzioni, dell'insieme T (risp. dell'insieme T'), di una data famiglia Φ godono uniformemente della proprietà B) (risp. B')), quando, per ogni coppia di numeri reali positivi ε ed ω , é possibile associare ad ogni funzione $g(x, y) \in \Phi$ una parte $e_y^{(g)}$ (risp. $e_x^{(g)}$) di Δ_y (risp. di Δ_x), di misura minore di ε nonché determinare un numero reale positivo δ , in guisa tale che risulti:*

$$|g(x', y) - g(x'', y)| < \omega \quad (\text{risp. } |g(x, y') - g(x, y'')| < \omega)$$

⁽⁵⁾ Cfr. G. SCORZA DRAGONI [1], p. 103.

⁽⁶⁾ Una funzione $g(x, y)$, definita in Δ , si dice *superficialmente quasi continua in modo semiregolare rispetto ad x* (risp. *rispetto ad y*) se, per ogni numero reale $\sigma > 0$, esiste una parte chiusa C_σ di Δ in guisa tale che la proiezione di $\Delta - C_\sigma$ sull'asse y (risp. sull'asse x) abbia misura minore di σ e la restrizione di $g(x, y)$ a C_σ sia ivi continua. Cfr. G. SCORZA DRAGONI [1], p. 103.

⁽⁷⁾ Cfr. F. CAFIERO [3], p. 231.

⁽⁸⁾ Queste definizioni sono state, per la prima volta, introdotte in G. SANTAGATI [1] n. 1. Notiamo, poi, che da queste definizioni, con le ovvie modifiche, conseguono le analoghe con riferimento al caso in cui la famiglia Φ , che in esse interviene, sia una successione.

per ogni y (risp. per ogni x) di $\Delta_y - e_y^{(g)}$ (risp. di $\Delta_x - e_x^{(g)}$) ed ogni coppia, x' ed x'' (risp. y' ed y''), di valori di x (risp. di valori di y) soddisfacenti alla limitazione $|x' - x''| < \delta$ (risp. alla limitazione $|y' - y''| < \delta$).

DEFINIZIONE 1.2. - Diremo che una famiglia Φ di funzioni dell'insieme T (risp. dell'insieme T') gode della proprietà $A^{(x)}$ (risp. $A^{(y)}$) quando, per ogni numero reale $\sigma > 0$, esiste una parte chiusa C_y^σ (risp. C_x^σ) di Δ_y (risp. di Δ_x), la cui misura differisca da b (risp. da a) per meno di σ , in maniera che le funzioni di Φ risultino equicontinue in $A_\sigma = \Delta_x \times C_y^\sigma$ (risp. in $B_\sigma = C_x^\sigma \times \Delta_y$).

È evidente, allora, che le funzioni, dell'insieme T (risp. dell'insieme T'), di una data famiglia Φ godente della proprietà $A^{(x)}$ (risp. $A^{(y)}$), sono egualmente quasi continue in Δ in modo semiregolare rispetto ad x (risp. rispetto ad y) ⁽⁹⁾ e godono, inoltre, uniformemente della proprietà B (risp. B').

Poniamo, ora, la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1.3. - Diremo che una funzione $g(x, y, z)$ definita nello strato:

$$S_1 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Delta, z \in R^m, (x, y, z) \in R^{m+2}\},$$

per un fissato y di Δ_y (risp. x di Δ_x), gode della proprietà (C) (risp. (C')) se essa risulta misurabile rispetto ad x (risp. rispetto ad y) per ogni $z \in R^m$ e continua rispetto a z per quasi ogni $x \in \Delta_x$ (risp. per quasi ogni $y \in \Delta_y$).

Se la funzione $g(x, y, z)$ definita in S_1 è continua rispetto a z per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e misurabile in Δ per ogni $z \in R^m$, essa, per quasi ogni $y \in \Delta_y$ gode delle proprietà (C) , e, per quasi ogni $x \in \Delta_x$ gode delle proprietà (C') ⁽¹⁰⁾.

Ciò posto, vale il seguente criterio di compattezza che si deduce, con ovvii adattamenti, da un noto teorema di G. ARNESE ⁽¹¹⁾:

TEOREMA 1.1. - Sia $f(x, y, z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ una funzione definita nello strato:

$$S_2 = \{(x, y, z, w_1, \dots, w_k) : (x, y) \in \Delta, |z|, |w_i| < +\infty (i = 1, \dots, k), \\ (x, y, z, w_1, \dots, w_k) \in R^{k+3}\},$$

⁽⁹⁾ Cioè, per ogni coppia di numeri reali positivi ε ed ω , è possibile decomporre Δ in un numero finito di parti E_i misurabili e disgiunte, nonché associare ad ogni funzione $g(x, y)$ della famiglia considerata una parte $e^{(g)}$ di Δ la cui proiezione sull'asse delle y (risp. delle x) abbia misura minore di ε , in modo tale che l'oscillazione di ogni funzione della famiglia sia, in ogni insieme $E_i - E_i \cap e^{(g)}$, minore di ω . Cfr. G. STAMPACCHIA [1], p. 204 e nota ⁽¹⁷⁾ di p. 213.

⁽¹⁰⁾ Ciò segue con un semplice ragionamento, a norma di un risultato di G. ARNESE. Cfr., per quest'ultimo, G. ARNESE [1], p. 154 e osservazione 2^a p. 158.

⁽¹¹⁾ Cfr. G. ARNESE [2], p. 23.

misurabile in Δ per ogni (z, w_1, \dots, w_k) , continua rispetto a (z, w_1, \dots, w_k) per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e tale da verificare la limitazione:

$$(1.1) \quad |f(x, y, z, w_1, \dots, w_k)| \leq M(x, y), \quad (x, y, z, w_1, \dots, w_k) \in S_z$$

con $M(x, y)$ funzione definita in Δ ed ivi sommabile; sia, inoltre, $\lambda(y)$ una funzione definita e quasi continua in Δ_y .

Per quasi ogni $y \in \Delta_y$, comunque si assegnino la funzione $\varphi_1(x)$ misurabile in Δ_x e $k-1$ successioni $(\varphi_{i,n}(x))_{n \in N}$ ($i = 2, 3, \dots, k$) di funzioni misurabili in Δ_x ed ivi egualmente quasi limitate, il problema:

$$(1.2) \quad z(x) = \lambda(y) + \lim_n \int_0^x f(\xi, y, z(\xi), \varphi_1(\xi), \varphi_2, n(\xi), \dots, \varphi_{k,n}(\xi)) d\xi \text{ in } \Delta_x$$

non abbia più di una soluzione assolutamente continua.

Detta Y la parte di misura nulla di Δ_y per gli y della quale o $M(x, y)$ non è sommabile rispetto ad x ⁽¹²⁾ o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (1.2) ovvero la funzione f non gode della proprietà (C), al variare della funzione $\varphi_1(x, y)$ in una famiglia Φ' e della $(k-1)$ -upla di funzioni $\varphi_2(x, y), \dots, \varphi_k(x, y)$ in una famiglia Φ , di funzioni dell'insieme T' , la prima compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad y ⁽¹³⁾ e la seconda costituita da funzioni egualmente quasi limitate in Δ in modo semiregolare rispetto ad y ⁽¹⁴⁾ e godenti ivi uniformemente della

⁽¹²⁾ $M(x, y)$ essendo sommabile in Δ , risulta, infatti, sommabile rispetto ad x per quasi tutti gli y di Δ_y ; cfr., ad es., F. CAFIERO [1], p. 211, oppure E. J. Mc. SHANE [1], p. 137.

⁽¹³⁾ Una famiglia di funzioni $g(x, y)$ definite in Δ si dice *compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x* (risp. *rispetto ad y*) se da ogni successione $(g_n(x, y))_{n \in N}$ di funzioni di essa se ne può estrarre una convergente in Δ quasi uniformemente in modo semiregolare rispetto ad x (risp. rispetto ad y). Una successione $(g_n(x, y))_{n \in N}$ di funzioni definite in Δ , si dice *convergente ivi quasi uniformemente in modo semiregolare rispetto ad x* (risp. *rispetto ad y*) quando, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, esiste una parte e_y (risp. e_x) di Δ_y (risp. di Δ_x), di misura minore di ε , in modo tale che la successione converga uniformemente in $\Delta_x \times (\Delta_y - e_y)$ (risp. in $(\Delta_x - e_x) \times \Delta_y$). Cfr. F. CAFIERO [3], p. 228.

⁽¹⁴⁾ Le funzioni $g(x, y)$ di una data famiglia, definite in Δ , diconsi *egualmente quasi limitate in Δ in modo semiregolare rispetto ad x* (risp. *rispetto ad y*), quando, per ogni numero reale positivo ε , esiste un numero $M > 0$ ed è possibile associare ad ogni funzione $g(x, y)$ della famiglia una parte $e_y^{(g)}$ (risp. $e_x^{(g)}$) di Δ_y (risp. di Δ_x), di misura minore di ε , in modo, tale che si abbia $|g(x, y)| \leq M$ per ogni g e per ogni $(x, y) \in \Delta_x \times (\Delta_y - e_y^{(g)})$ (risp. per ogni $(x, y) \in (\Delta_x - e_x^{(g)}) \times \Delta_y$). Cfr. F. CAFIERO [3], p. 232.

proprietà B'), si consideri il problema:

$$(1.3) \quad z(x, y) = \lambda(y) + \int_0^x f(\xi, y, z(\xi, y), \varphi_1(\xi, y), \varphi_2(\xi, y), \dots, \varphi_k(\xi, y)) d\xi$$

in $\Delta_x \times (\Delta_y - Y)$.

Allora, posto, per ogni $z(x, y)$ soluzione del problema (1.3) in corrispondenza di una fissata k -upla $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \in \Phi' \times \Phi$ ⁽¹⁵⁾:

$$(1.4) \quad \tilde{z}(x, y) = \begin{cases} z(x, y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times (\Delta_y - Y) \\ \lambda(y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times Y, \end{cases}$$

la famiglia delle funzioni $\tilde{z}(x, y)$, definite dalla (1.4), al variare di $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ in $\Phi' \times \Phi$, è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x e gode, inoltre, della proprietà $A^{(x)}$ ⁽¹⁶⁾.

È da notare che, se nel teorema 1.1 si particolarizza opportunamente l'ipotesi di unicità per il problema (1.2), si può, conseguentemente, attenuare l'ipotesi posta su Φ' ; si ha, infatti, il seguente altro criterio di compattezza che ne generalizza uno già stabilito in G. SANTAGATI [3] ⁽¹⁷⁾ e che, assieme al precedente, costituiscono altrettante generalizzazioni di un noto teorema di A. ZITAROSA ⁽¹⁸⁾:

⁽¹⁵⁾ Il problema (1.3) ammette, in $\Delta_x \times (\Delta_y - Y)$, una ed una sola soluzione (cioè esiste una ed una sola funzione $z(x, y)$ definita in $\Delta_x \times (\Delta_y - Y)$ tale da soddisfare ivi identicamente la (1.3)) in corrispondenza di una fissata k -upla $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \in \Phi' \times \Phi$ in quanto, a norma delle ipotesi poste sul problema (1.2), per ogni $y \in \Delta_y - Y$, posto $\varphi_1(x) = \varphi_1(x, y)$, $\varphi_{i,n}^{(x)} = \varphi_i(x, y)$ ($i = 2, 3, \dots, k$), il problema:

$$z(x) = \lambda(y) + \int_0^x f(\xi, y, z(\xi), \varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \dots, \varphi_k(\xi)) d\xi \quad \text{in } \Delta_x$$

non ha più di una soluzione (assolutamente continua) ed inoltre per la funzione $f(x, y, z, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_k(x, y))$ sono verificate le ipotesi di CARATHÉODORY in Δ_x . Vale, infatti, la (1.1) ed inoltre la funzione $f(x, y, z, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_k(x, y))$ risulta continua rispetto a z per quasi ogni $x \in \Delta_x$ e misurabile rispetto ad x per ogni z .

⁽¹⁶⁾ Ciò si può rilevare modificando opportunamente la dimostrazione del teorema di G. ARNESE citato in ⁽¹⁴⁾.

⁽¹⁷⁾ Cfr. Lemma III^o, p. 86.

⁽¹⁸⁾ Cfr. A. ZITAROSA [1] e [2].

TEOREMA 1.2. - Sia $f(x, y, z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ una funzione definita nello strato S_2 , misurabile in Δ per ogni (z, w_1, \dots, w_k) , continua rispetto a (z, w_1, \dots, w_k) per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e tale da verificare la limitazione (1.1); sia, inoltre, $\lambda(y)$ una funzione definita e quasi continua in Δ_y .

Per quasi ogni $y \in \Delta_y$, comunque si assegnino k successioni $(\varphi_{i,n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) di funzioni misurabili in Δ_x ed ivi egualmente quasi limitate, il problema:

$$(1.5) \quad z(x) = \lambda(y) + \lim_n \int_0^x f(\xi, y, z(\xi), \varphi_{1,n}(\xi), \varphi_{2,n}(\xi), \dots, \varphi_{k,n}(\xi)) d\xi \quad \text{in } \Delta_x$$

non abbia più di una soluzione assolutamente continua.

Detta Y la parte di misura nulla di Δ_y per gli y della quale o $M(x, y)$ non è sommabile rispetto ad x o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (1.5) ovvero la funzione f non gode della proprietà (C), al variare della k -upla di funzioni $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_k(x, y)$ in una famiglia Φ di funzioni dell'insieme T' egualmente quasi limitate in Δ in modo semiregolare rispetto ad y e godenti ivi uniformemente della proprietà B' , si consideri il problema:

$$(1.6) \quad z(x, y) = \lambda(y) + \int_0^x f(\xi, y, z(\xi, y), \varphi_1(\xi, y), \varphi_2(\xi, y), \dots, \varphi_k(\xi, y)) d\xi$$

in $\Delta_x \times (\Delta_y - Y)$.

Allora, posto, per ogni $z(x, y)$ soluzione del problema (1.6) in corrispondenza di una fissata k -upla $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \in \Phi$ ⁽¹⁹⁾:

$$(1.7) \quad \tilde{z}(x, y) = \begin{cases} z(x, y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times (\Delta_y - Y) \\ \lambda(y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times Y, \end{cases}$$

la famiglia delle funzioni $\tilde{z}(x, y)$, definite dalla (1.7), al variare di $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ in Φ , è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x ed inoltre gode della proprietà $A^{(\infty)}$.

⁽¹⁹⁾ Anche qui il problema (1.6) ammette, in $\Delta_x \times (\Delta_y - Y)$, una ed una sola soluzione in corrispondenza di una fissata k -upla $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \in \Phi$; basta, infatti, ripetere quanto osservato in ⁽¹⁵⁾ ponendo, questa volta, $\varphi_{i,n}^{(x)} = \varphi_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) per ogni $y \in \Delta_y - Y$.

Essendo le funzioni $\lambda(y)$ e $\int_0^a M(\xi, y) d\xi$ quasi continue in Δ_ν , la prima per ipotesi e la seconda perché ivi sommabile ⁽²⁰⁾, esse sono tali anche in $\Delta_\nu - Y$; pertanto, per ogni numero reale $\sigma > 0$, esiste una parte chiusa $C_{y,1}^\sigma$ di $\Delta_\nu - Y$ tale che $m(\Delta_\nu - C_{y,1}^\sigma) < \frac{\sigma}{4}$ ⁽²¹⁾ e le restrizioni delle funzioni $\lambda(y)$ e $\int_0^a M(\xi, y) d\xi$ a $C_{y,1}^\sigma$ sono ivi continue. Ne segue, quindi:

$$(1.8) \quad |\lambda(y)| \leq \tilde{h}, \quad \int_0^a M(\xi, y) d\xi \leq \tilde{\tilde{h}} \quad \text{per } y \in C_{y,1}^\sigma$$

con \tilde{h} e $\tilde{\tilde{h}}$ costanti non negative.

Le funzioni $\tilde{z}(x, y)$ definite dalla (1.7) al variare di $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ in Φ sono, allora, egualmente quasi limitate in Δ in modo semiregolare rispetto ad x in quanto si ha, a norma della (1.1), della (1.6) e delle (1.8):

$$(1.9) \quad |\tilde{z}(x, y)| = |z(x, y)| \leq |\lambda(y)| + \int_0^a M(\xi, y) d\xi \leq \tilde{h} + \tilde{\tilde{h}} = h_1 \quad \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times C_{y,1}^\sigma.$$

Essendo, inoltre, le funzioni $\tilde{z}(x, y)$ definite dalla (1.7) continue rispetto ad x per ogni $y \in \Delta_\nu$ e ⁽²²⁾ misurabili rispetto ad y per ogni $x \in \Delta_x$, a norma di un noto teorema di FRÉCHET-STAMPACCHIA ⁽²³⁾, la compattezza della famiglia delle funzioni $\tilde{z}(x, y)$ sarà provata se faremo vedere che esse sono egualmente quasi continue in Δ in modo semiregolare rispetto ad x . Basterà, allora, provare che la famiglia delle funzioni $\tilde{z}(x, y)$, definite dalla (1.7) al variare di $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ in Φ , gode della proprietà $A^{(x)}$, perché il teorema resti completamente dimostrato.

A tale scopo cominciamo con l'osservare che, essendo $M(x, y)$ sommabile in Δ , in corrispondenza del numero reale $\sigma > 0$ esiste ⁽²⁴⁾ una parte chiusa

⁽²⁰⁾ Cfr. F. CAFIERO [1], p. 212, oppure E. J. MC. SHANE [1], p. 137.

⁽²¹⁾ D'ora in poi con $m(Z)$ saremo soliti indicare la misura secondo LEBESGUE dell'insieme Z misurabile.

⁽²²⁾ Cfr. G. ARNESE [1], p. 161. La funzione $f(x, y, z, \varphi_1(x, y), \dots, \varphi_k(x, y))$ risulta, infatti, misurabile in Δ per ogni z e continua rispetto a z per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ ed inoltre vale la (1.1).

⁽²³⁾ Cfr. G. STAMPACCHIA [1], p. 204 e nota ⁽¹⁷⁾ di p. 213.

⁽²⁴⁾ Cfr. G. ARNESE [2], p. 16.

$C_{y,2}^\sigma$ di Δ_y tale che $m(\Delta_y - C_{y,2}^\sigma) < \frac{\sigma}{4}$ e l'integrale $\int_Z M(\xi, y) d\xi$ risulta una funzione assolutamente continua nell'insieme delle parti misurabili Z di Δ_x , uniformemente al variare di $y \in C_{y,2}^\sigma$. A norma, poi, delle ipotesi poste sulla funzione $f(x, y, z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ nonché della (1.1), in corrispondenza del numero σ , esistono ⁽²⁵⁾ due parti chiuse, $C_{y,3}^\sigma$ e $C_{y,4}^\sigma$, di Δ_y tali che $m(\Delta_y - C_{y,3}^\sigma) < \frac{\sigma}{4}$, $m(\Delta_y - C_{y,4}^\sigma) < \frac{\sigma}{4}$ e che per ogni numero reale $c > 0$ la funzione $f(x, y, z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ risulta quasi continua e quasi limitata nell'insieme $D_c = \Delta_x \times L_c$ ($L_c = \{(z, w_1, w_2, \dots, w_k) : |z|, |w_i| \leq c \ (i = 1, 2, \dots, k), (z, w_1, w_2, \dots, w_k) \in R^{k+1}\}$) in modo semiregolare rispetto a $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ ed uniformemente al variare di $y \in C_{y,3}^\sigma$ ⁽²⁶⁾ mentre da ogni successione $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n \in C_{y,4}^\sigma$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, convergente, può estrarsi una sottosuccessione $(y_{n_r})_{r \in \mathbb{N}}$ di guisa che se $y_0 = \lim_n y_n$ si abbia:

$$(1.10) \lim_r \int_{\Delta_x} |f(\xi, y_{n_r}, z, w_1, w_2, \dots, w_k) - f(\xi, y_0, z, w_1, w_2, \dots, w_k)| d\xi = 0$$

uniformemente al variare di $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ nel cubo L_c .

Ciò premesso, posto:

$$C_y^\sigma = C_{y,1}^\sigma \cap C_{y,2}^\sigma \cap C_{y,3}^\sigma \cap C_{y,4}^\sigma$$

e quindi:

$$A_\sigma = \Delta_x \times C_y^\sigma,$$

si ha:

$$C_y^\sigma \subseteq \Delta_y - Y \quad \text{e} \quad m(\Delta_y - C_y^\sigma) < \sigma;$$

⁽²⁵⁾ Cfr. G. ARNESE [1], lemma V p. 154 e osservazione 2^a p. 158 e G. ARNESE [2], lemma III p. 17 e lemma IV p. 19, rispettivamente.

⁽²⁶⁾ Si dice che una funzione $g(x, y, z, w_1, \dots, w_k)$ è quasi continua in D_c in modo semiregolare rispetto a (z, w_1, \dots, w_k) ed uniformemente al variare di y in una parte chiusa C di Δ_y , quando, per ogni coppia di numeri reali positivi ε ed ω , è possibile decomporre D_c in un numero finito di parti E_i misurabili e disgiunte, nonché associare ad ogni $y \in C$ una parte $e^{(y)}$ di D_c la cui proiezione sull'asse x abbia misura minore di ε e l'oscillazione di $g(x, y, z, w_1, \dots, w_k)$, per ogni fissato $y \in C$, in ogni insieme $E_i - E_i \cap e^{(y)}$, risulti minore di ω .

Si dice che una funzione $g(x, y, z, w_1, \dots, w_k)$ è quasi limitata in D_c , in modo semiregolare rispetto a $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ ed uniformemente al variare di y in una parte chiusa C di Δ_y , quando, per ogni numero reale positivo ε , esiste un numero $M > 0$ ed è possibile associare ad ogni $y \in C$ una parte $e_x^{(y)}$ di Δ_x di misura minore di ε , in modo tale che si abbia $|g(x, y, z, w_1, \dots, w_k)| \leq M$ per ogni $y \in C$ e per $(x, z, w_1, \dots, w_k) \in (\Delta_x - e_x^{(y)}) \times L_c$. Cfr., per queste definizioni, G. ARNESE [1], p. 142 e p. 146 rispettivamente, nonché l'osservazione 2^a di p. 158.

conseguentemente, se faremo vedere che le funzioni $\tilde{z}(x, y)$, definite dalla (1.7), sono equicontinue in A_σ separatamente rispetto a ciascuna delle variabili e uniformemente rispetto all'altra, avremo provato l'asserto.

Ora, che le $\tilde{z}(x, y)$ siano equicontinue in A_σ rispetto ad x , uniformemente rispetto ad y , é ovvio, in quanto, a norma della (1.1), qualunque sia la coppia di punti $(x', y), (x'', y) \in A_\sigma$, si ha:

$$(1.11) \quad |\tilde{z}(x', y) - \tilde{z}(x'', y)| = |z(x', y) - z(x'', y)| \leq \left| \int_{x''}^{x'} M(\xi, y) d\xi \right|,$$

la funzione $\int_Z M(\xi, y) d\xi$ risultando, inoltre, assolutamente continua nell'insieme delle parti misurabili Z di Δ_x , uniformemente rispetto ad $y \in C_y^\sigma \subseteq C_{y,2}^\sigma$.

Per quanto riguarda la equicontinuità delle $\tilde{z}(x, y)$ in A_σ rispetto ad y , uniformemente rispetto ad x , eseguiremo la dimostrazione per assurdo.

Supponiamo, cioè, che le $\tilde{z}(x, y)$ non siano equicontinue in A_σ rispetto ad y , uniformemente rispetto ad x ; esiste, allora, un numero reale positivo ε in corrispondenza del quale esistono, una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di punti di Δ_x convergente ad un limite x_0 , due successioni $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di punti di C_y^σ convergenti allo stesso limite y_0 , nonché una successione $(\tilde{z}_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni definite dalla (1.7), tali che:

$$(1.12) \quad |\tilde{z}_n(x_n, y_n) - \tilde{z}_n(x_n, y'_n)| = |z_n(x_n, y_n) - z_n(x_n, y'_n)| \geq \varepsilon \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Le successioni $(\tilde{z}_n(x, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\tilde{z}_n(x, y'_n))_{n \in \mathbb{N}}$, a norma della (1.9) e della (1.11), sono costituite da funzioni equicontinue ed equilimitate in Δ_x ; pertanto é possibile estrarne da esse altre due, che continueremo ad indicare allo stesso modo, uniformemente convergenti in Δ_x , rispettivamente, verso due funzioni $z(x)$ e $z'(x)$.

Indicata con $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h}, \dots, \varphi_{k,h})$ la k -upla di funzioni della famiglia Φ cui corrisponde la $z_n(x, y)$ quale soluzione del problema (1.6) e quindi la $\tilde{z}_n(x, y)$ definita, corrispondentemente, dalla (1.7), si ha:

$$(1.13) \quad \tilde{z}_n(x, y_n) = z_n(x, y_n) = \lambda(y_n) + \int_0^x f(\xi, y_n, z_n(\xi, y_n), \varphi_{1,h}(\xi, y_n), \varphi_{2,h}(\xi, y_n), \dots, \varphi_{k,h}(\xi, y_n)) d\xi$$

ed inoltre:

$$(1.14) \quad \tilde{z}_n(x, y'_n) = z_n(x, y'_n) = \lambda(y'_n) + \int_0^x f(\xi, y'_n, z_n(\xi, y'_n), \varphi_{1,h}(\xi, y'_n), \varphi_{2,h}(\xi, y'_n), \dots, \varphi_{k,h}(\xi, y'_n)) d\xi.$$

Ma la (1.13) si può scrivere:

$$(1.15) \quad \tilde{z}_h(x, y_h) = \lambda(y_h) + \int_0^x [f(\xi, y_h, z_h(\xi, y_h), \varphi_{1,h}(\xi, y_h), \dots, \varphi_{k,h}(\xi, y_h)) - \\ - f(\xi, y_h, z(\xi), \varphi_{1,h}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k,h}(\xi, y_0))] d\xi + \int_0^x f(\xi, y_h, z(\xi), \varphi_{1,h}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k,h}(\xi, y_0)) d\xi.$$

Avendosi:

$$\lim_h y_h = y_0$$

$$(1.16) \quad \lim_h \tilde{z}_h(x, y_h) = \lim_h z_h(x, y_h) = z(x)$$

uniformemente in Δ_x , in virtù delle ipotesi poste sulla funzione $f(x, y, z, w_1, \dots, w_k)$ e sulle funzioni di Φ , segue, come proveremo in seguito, che è possibile estrarre dalla successione $(y_h)_{h \in \mathbb{N}}$ un'altra successione $(y_{v_j})_{j \in \mathbb{N}}$ tale che:

$$(1.17) \quad \lim_j \int_0^x [f(\xi, y_{v_j}, z_{v_j}(\xi, y_{v_j}), \varphi_{1,v_j}(\xi, y_{v_j}), \dots, \varphi_{k,v_j}(\xi, y_{v_j})) - \\ - f(\xi, y_{v_j}, z(\xi), \varphi_{1,v_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k,v_j}(\xi, y_0))] d\xi = 0$$

ed inoltre, si abbia:

$$(1.18) \quad \lim_j \int_0^x f(\xi, y_{v_j}, z(\xi), \varphi_{1,v_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k,v_j}(\xi, y_0)) d\xi = \\ = \lim_j \int_0^x f(\xi, y_0, z(\xi), \varphi_{1,v_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k,v_j}(\xi, y_0)) d\xi.$$

Dalla (1.15) ne viene, allora:

$$z(x) = \lambda(y_0) + \lim_j \int_0^x f(\xi, y_0, z(\xi), \varphi_{1,v_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k,v_j}(\xi, y_0)) d\xi \text{ in } \Delta_x$$

e operando in maniera analoga sulla (1.14):

$$z'(x) = \lambda(y_0) + \lim_j \int_0^x f(\xi, y_0, z'(\xi), \varphi_{1,v_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k,v_j}(\xi, y_0)) d\xi \text{ in } \Delta_x$$

con $z(x)$ e $z'(x)$ assolutamente continue in virtù della (1.1) ed essendo $y_0 \in C_y^\sigma$.

Da ciò, in virtù dell'ipotesi di unicità per il problema (1.5), segue:

$$z(x) = z'(x) \quad \text{per ogni } x \in \Delta_x,$$

ciò che è in contrasto con la (1.12), dalla quale segue:

$$|z(x_0) - z'(x_0)| \geq \varepsilon > 0.$$

Proviamo, ora, per completare la dimostrazione del teorema, la (1.17) e, poi, la (1.18).

Dimostriamo la (1.17). Per questo, basta provare che:

$$(1.19) \quad \lim_j [f(x, y_{v_j}, z_{v_j}(x, y_{v_j}), \varphi_{1, v_j}(x, y_{v_j}), \dots, \varphi_{k, v_j}(x, y_{v_j})) - \\ - f(x, y_{v_j}, z(x), \varphi_{1, v_j}(x, y_0), \dots, \varphi_{k, v_j}(x, y_0))] = 0$$

in misura Δ_x , in quanto, le funzioni integrali della successione:

$$\left(\int_Z [f(\xi, y_{v_j}, z_{v_j}(\xi, y_{v_j}), \varphi_{1, v_j}(\xi, y_{v_j}), \dots, \varphi_{k, v_j}(\xi, y_{v_j})) - \\ - f(\xi, y_{v_j}, z(\xi), \varphi_{1, v_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k, v_j}(\xi, y_0))] d\xi \right)_{j \in N}$$

risultano, a norma della (1.1) ed essendo $y_{v_j} \in C_y^\sigma \subseteq C_{y, 2}^\sigma$ per ogni $j \in N$, equi-assolutamente continue nell'insieme delle parti misurabili Z di Δ_x . A tal uopo, assegnamo ad arbitrio la coppia di numeri reali positivi η e τ ; poiché le funzioni della famiglia Φ sono, per ipotesi, egualmente quasi limitate in Δ in modo semiregolare rispetto ad y , in corrispondenza del numero τ , esistono una costante $h_2 > 0$ e k successioni $(e_{x, i}^{(h)})_{h \in N}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) di parti di Δ_x , di misura minore di $\frac{\tau}{3k}$, in guisa che si abbia:

$$(1.20) \quad |\varphi_{i, h}(x, y)| \leq h_2 \quad \text{per ogni } (x, y) \in (\Delta_x - e_{x, i}^{(h)}) \times \Delta_y \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

e per ogni $h \in N$.

Posto

$$(1.21) \quad c = \max(h_1, h_2),$$

consideriamo il relativo insieme D_c . Si ha, intanto, a norma della (1.9),

della (1.16) e della (1.20):

$$(1.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\tilde{z}_h(x, y_h)| = |z_h(x, y_h)|, |z(x)| \leq c \text{ per ogni } x \in \Delta_x \text{ e per ogni } h \in N, \\ |\varphi_{i,h}(x, y)| \leq c \text{ per ogni } (x, y) \in (\Delta_x - e_{x,i}^{(h)}) \times \Delta_y \quad (i = 1, 2, \dots, k) \end{array} \right.$$

e per ogni $h \in N$.

Ora, poiché $y_h \in C_y^\sigma \subseteq C_{y,3}^\sigma$ per ogni $h \in N$, la successione $(f(x, y_h, z, w_1, \dots, w_k))_{h \in N}$ è costituita da funzioni egualmente quasi continue ed egualmente quasi limitate in D_c , in modo semiregolare rispetto a (z, w_1, \dots, w_k) ⁽²⁷⁾.

Per un noto teorema di G. STAMPACCHIA ⁽²⁸⁾ è possibile estrarre, allora, dalla successione $(f(x, y_h, z, w_1, \dots, w_k))_{h \in N}$ una successione $(f(x, y_{h_j}, z, w_1, \dots, w_k))_{j \in N}$ quasi uniformemente convergente in D_c , in modo semiregolare rispetto a (z, w_1, \dots, w_k) ⁽²⁹⁾. Pertanto, in corrispondenza del numero τ , esiste una parte aperta \tilde{A}_x di Δ_x di misura minore di $\frac{\tau}{6}$ ⁽³⁰⁾ tale che la successione $(f(x, y_{h_j}, z, w_1, \dots, w_k))_{j \in N}$ converge uniformemente in $(\Delta_x - \tilde{A}_x) \times L_c$. D'altra parte, ogni funzione della suddetta successione è ⁽³¹⁾ quasi continua in D_c

⁽²⁷⁾ Le funzioni di una successione $(g_n(x, z, w_1, \dots, w_k))_{n \in N}$ definite in D_c ed ivi misurabili rispetto ad x per ogni $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$, continue rispetto a (z, w_1, \dots, w_k) per quasi ogni $x \in \Delta_x$, si dicono *egualmente quasi continue in D_c in modo semiregolare rispetto a (z, w_1, \dots, w_k)* se, per ogni coppia di numeri reali positivi ε ed ω , è possibile decomporre D_c in un numero finito di parti E_i misurabili e disgiunte, nonché associare ad ogni funzione della successione una parte $e^{(n)}$ di D_c la cui proiezione sull'asse delle x abbia misura minore di ε , in modo tale che l'oscillazione di ogni funzione della successione sia, in ogni insieme $E_i - E_i \cap e^{(n)}$, minore di ω . Le funzioni della successione $(g_n(x, z, w_1, \dots, w_k))_{n \in N}$ si dicono *egualmente quasi limitate in D_c in modo semiregolare rispetto a (z, w_1, \dots, w_k)* se, per ogni numero reale positivo ε , esiste un numero $M > 0$ ed una successione $(e_x^{(n)})_{n \in N}$ di parti di Δ_x di misura minore di ε , in modo tale che si abbia $|g_n(x, z, w_1, \dots, w_k)| \leq M$ per ogni $n \in N$ e per ogni $(x, z, w_1, \dots, w_k) \in (\Delta_x - e_x^{(n)}) \times L_c$. Cfr., per le definizioni sopra richiamate, G. STAMPACCHIA [2] p. 40. Si noti che le definizioni richiamate in ⁽²⁶⁾ sono una naturale estensione di quelle sopra riportate.

⁽²⁸⁾ Cfr. G. STAMPACCHIA [2], p. 40.

⁽²⁹⁾ Si dice che una successione $(g_n(x, z, w_1, \dots, w_k))_{n \in N}$ di funzioni definite in D_c converge *ivi quasi uniformemente in modo semiregolare rispetto a (z, w_1, \dots, w_k)* , quando, per ogni numero reale positivo ε , esiste una parte e_x di Δ_x , di misura minore di ε , in modo tale che la successione converga uniformemente in $(\Delta_x - e_x) \times L_c$. Cfr., per questo concetto, G. STAMPACCHIA [2], p. 39.

⁽³⁰⁾ Ciò in quanto la misura di un insieme misurabile è l'estremo inferiore dell'insieme numerico costituito dalle misure degli aperti che lo contengono.

⁽³¹⁾ Cfr. G. STAMPACCHIA [2], p. 30.

in modo semiregolare rispetto a $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ ⁽³²⁾ e, pertanto, per ogni $j \in N$, esiste una parte aperta $A_x^{(j)}$ di Δ_x di misura minore di $\frac{\tau}{3 \cdot 2^{j+1}}$ e tale che la funzione $f(x, y_{h_j}, z, w_1, \dots, w_k)$ sia continua in $(\Delta_x - A_x^{(j)}) \times L_c$.

Posto allora:

$$A_x = \tilde{A}_x \cup \left(\bigcup_{j \in N} A_x^{(j)} \right),$$

si ha:

$$m(A_x) \leq m(\tilde{A}_x) + \sum_{j=1}^{\infty} m(A_x^{(j)}) < \frac{\tau}{3},$$

e nella parte chiusa e limitata $(\Delta_x - A_x) \times L_c$ di D_c le funzioni della successione risultano continue; essendo, inoltre, la successione $(f(x, y_{h_j}, z, w_1, \dots, w_k))_{j \in N}$ ivi uniformemente convergente, ne segue che le funzioni di essa sono ivi equicontinue; pertanto, esiste, in corrispondenza ad η , un numero $\omega > 0$ tale che:

$$(1.23) \quad |f(x, y_{h_j}, z', w'_1, \dots, w'_k) - f(x, y_{h_j}, z'', w''_1, \dots, w''_k)| < \eta, \quad j \in N,$$

per:

$$(x, z', w'_1, \dots, w'_k), (x, z'', w''_1, \dots, w''_k) \in (\Delta_x - A_x) \times L_c,$$

$$|z' - z''| < \omega, |w'_1 - w''_1| < \omega, \dots, |w'_k - w''_k| < \omega.$$

Godendo, poi, le funzioni della famiglia Φ , uniformemente della proprietà B' , esistono, in corrispondenza della coppia di numeri $\frac{\tau}{3k}$ ed ω , un numero reale $\delta > 0$ e k successioni $(\tilde{e}_{x,i}^{(h_j)})_{j \in N}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) di parti di Δ_x , di misura minore di $\frac{\tau}{3k}$, in maniera che risulti:

$$|\varphi_{i,h_j}(x, y') - \varphi_{i,h_j}(x, y'')| < \omega \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

per $|y' - y''| < \delta$, $(x, y'), (x, y'') \in (\Delta_x - \tilde{e}_{x,i}^{(h_j)}) \times \Delta_y$ e per $j \in N$.

Ora, poiché la successione $(y_{h_j})_{j \in N}$ converge ad y_0 , segue, dalla relazione

⁽³²⁾ Una funzione $g(x, z, w_1, \dots, w_k)$ definita in D_c , si dice *quasi continua in D_c in modo semiregolare rispetto a (z, w_1, \dots, w_k)* se, per ogni numero reale $\sigma > 0$, esiste una parte chiusa C_σ di D_c in guisa tale che la proiezione di $D_c - C_\sigma$ sull'asse x abbia misura minore di σ e la restrizione di $g(x, z, w_1, \dots, w_k)$ a C_σ sia ivi continua. Cfr. G. STAMPACCHIA [2], p. 30.

precedente, per j sufficientemente grande :

$$|\varphi_{i,h_j}(x, y_{h_j}) - \varphi_{i,h_j}(x, y_0)| < \omega \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad x \in \Delta_x - \tilde{e}_{x,i}^{(h_j)}.$$

Ciò posto, si ha, per j sufficientemente grande ⁽³³⁾ :

$$\begin{aligned} & \Delta_x(|f(x, y_{h_j}, z_{h_j}(x, y_{h_j}), \varphi_{1,h_j}(x, y_{h_j}), \dots, \varphi_{k,h_j}(x, y_{h_j}) - \\ & - f(x, y_{h_j}, z(x), \varphi_{1,h_j}(x, y_0), \dots, \varphi_{k,h_j}(x, y_0))| \geq \eta) \subseteq \\ & \subseteq (\bigcup_{i \leq k} (\Delta_x(|\varphi_{i,h_j}(x, y_{h_j}) - \varphi_{i,h_j}(x, y_0)| \geq \omega) \cup e_{x,i}^{(h_j)})) \cup A_x \subseteq \\ & \subseteq (\bigcup_{i \leq k} \tilde{e}_{x,i}^{(h_j)}) \cup (\bigcup_{i \leq k} e_{x,i}^{(h_j)}) \cup A_x; \end{aligned}$$

conseguentemente, per j sufficientemente grande, segue :

$$\begin{aligned} & m[\Delta_x(|f(x, y_{h_j}, z_{h_j}(x, y_{h_j}), \varphi_{1,h_j}(x, y_{h_j}), \dots, \varphi_{k,h_j}(x, y_{h_j}) - \\ & - f(x, y_{h_j}, z(x), \varphi_{1,h_j}(x, y_0), \dots, \varphi_{k,h_j}(x, y_0))| \geq \eta)] \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^k m(\tilde{e}_{x,i}^{(h_j)}) + \sum_{i=1}^k m(e_{x,i}^{(h_j)}) + m(A_x) < \tau, \end{aligned}$$

il che prova, appunto, la (1.19).

Dimostriamo, infine, la (1.18).

A tale scopo, assegniamo ad arbitrio il numero reale $\eta > 0$; esiste allora, in corrispondenza, un numero reale $\tau > 0$ tale che, per ogni parte misurabile Z di Δ_x , di misura minore di τ , risulta :

$$(1.24) \quad \int_Z M(\xi, y) d\xi < \eta \quad \text{per } y \in C_y^\sigma \subseteq C_{y,2}^\sigma.$$

Partendo dai numeri η e τ , ripetiamo il procedimento seguito per dimostrare la (1.19), in modo da stabilire la (1.20) e successivamente le (1.22) in cui il numero c è sempre dato dalla (1.21) ed, infine, in modo da determinare l'insieme A_x ed il numero $\omega > 0$ per cui sussista la (1.23). Inoltre, poiché $y_{h_j} \in C_y^\sigma \subseteq C_{y,4}^\sigma$, per ogni $j \in N$, è possibile estrarre dalla successione $(y_{h_j})_{j \in N}$

⁽³³⁾ Avvertiamo che se $f(x)$ è una funzione definita nell'insieme Z , indicheremo, d'ora in poi, con « $Z(f(x) \geq a)$ » la parte di Z in cui $f(x) \geq a$, a essendo un numero reale.

un'altra successione $(y_{\nu_j})_{j \in N}$ per cui si abbia:

$$(1.25) \quad \lim_j \int_{\Delta_x} |f(\xi, y_{\nu_j}, z, w_1, \dots, w_k) - f(\xi, y_0, z, w_1, \dots, w_k)| d\xi = 0$$

uniformemente rispetto a $(z, w_1, \dots, w_k) \in L_c$.

D'altra parte, essendo le funzioni $z(x)$ e $\varphi_{i, \nu_j}(x, y_0)$ ($i = 1, 2, \dots, k; j \in N$) misurabili in Δ_x e, a norma delle (1.22), verificando le disuguaglianze:

$$(1.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} |z(x)| \leq c \text{ per ogni } x \in \Delta_x \\ |\varphi_{i, \nu_j}(x, y_0)| \leq c \text{ per ogni } x \in \Delta_x - e_{x,i}^{(\nu_j)} \text{ (} i = 1, 2, \dots, k \text{) e per ogni } j \in N, \end{array} \right.$$

esistono ⁽³⁴⁾ delle successioni $(g_n(x))_{n \in N}$, $(h_{i,n}^{(j)}(x))_{n \in N}$ ($i = 1, 2, \dots, k; j \in N$) di funzioni semplici ⁽³⁵⁾ tali che:

$$z(x) = \lim_n g_n(x), \quad \varphi_{i, \nu_j}(x, y_0) = \lim_n h_{i,n}^{(j)}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, k; j \in N)$$

uniformemente in Δ_x e in $\Delta_x - e_{x,i}^{(\nu_j)}$ ($i = 1, 2, \dots, k; j \in N$) rispettivamente.

Anzi, è noto ⁽³⁶⁾ che, se $\mu \in N$ è tale che $\mu > c$ e $\frac{1}{2^\mu} < \frac{\omega}{2}$, si ha:

$$(1.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} |z(x) - g_\mu(x)| < \omega \text{ per ogni } x \in \Delta_x \\ |\varphi_{i, \nu_j}(x, y_0) - h_{i,\mu}^{(j)}(x)| < \omega \text{ per ogni } x \in \Delta_x - e_{x,i}^{(\nu_j)} \text{ (} i = 1, 2, \dots, k; j \in N \text{)}. \end{array} \right.$$

Le funzioni $g_\mu(x)$ e $h_{i,\mu}^{(j)}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k; j \in N$), essendo semplici, assumono ciascuna, rispettivamente sugli insiemi Δ_x e $\Delta_x - e_{x,i}^{(\nu_j)}$ ($i = 1, 2, \dots, k; j \in N$), un numero di valori non superiore ad un certo $n_0 \in N$ dipendente solo da μ , tali valori essendo tutti compresi fra certi numeri r_1, r_2, \dots, r_{n_0} .

Sia $Z_{l_1, l_2, \dots, l_k}^{(j)}$ la parte di $\Delta_x - \bigcup_{i \leq k} e_{x,i}^{(\nu_j)} - A_x$ in cui le funzioni $g_\mu(x)$ e $h_{i,\mu}^{(j)}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) assumono, rispettivamente, i valori $r_{l_1}, r_{l_2}, \dots, r_{l_k}$ ($l_1, l_2, \dots, l_k = 1, 2, \dots, n_0$); le $Z_{l_1, l_2, \dots, l_k}^{(j)}$ ($l_1, l_2, \dots, l_k = 1, 2, \dots, n_0$), potendo qual-

⁽³⁴⁾ Cfr. F. CAFIERO [2], p. 295.

⁽³⁵⁾ Cioè assumenti, ciascuna, un numero finito di valori distinti.

⁽³⁶⁾ Cfr. loco cit. in ⁽³⁴⁾.

cuna di esse essere eventualmente vuota, sono disgiunte e si ha:

$$\bigcup_{l, l_1, \dots, l_k \leq n_0} Z_{l, l_1, \dots, l_k}^{(j)} = \Delta_x - \bigcup_{i \leq k} e_{x, i}^{(v_j)} - A_x.$$

Se osserviamo, ora, che, in virtù delle (1.26), si ha:

$$|g_\mu(x)| \leq c \quad \text{per ogni } x \in \Delta_x$$

$$|h_{i, \mu}^{(j)}(x)| \leq c \quad \text{per ogni } x \in \Delta_x - e_{x, i}^{(v_j)} \quad (i = 1, 2, \dots, k; j \in N) \quad (37)$$

e quindi:

$$(1.28) \quad \begin{cases} |r_l| \leq c & (l = 1, 2, \dots, n_0) \\ |r_{l_s}| \leq c & (l_s = 1, 2, \dots, n_0; s = 1, 2, \dots, k), \end{cases}$$

a norma della (1.25), esiste $v' \in N$ tale che, per $j \geq v'$, risulta:

$$(1.29) \quad \int_{\Delta_x} |f(\xi, y_{v_j}, r_l, r_{l_1}, \dots, r_{l_k}) - f(\xi, y_0, r_l, r_{l_1}, \dots, r_{l_k})| d\xi < \frac{\eta}{n_0^{k+1}} \\ (l, l_1, \dots, l_k = 1, 2, \dots, n_0).$$

In virtù della (1.23), tenendo presente le (1.26), (1.27) e (1.28), e in virtù della (1.24) e della (1.29), si ha, allora, infine, per $j \geq v'$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^x [f(\xi, y_{v_j}, z(\xi), \varphi_{1, v_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k, v_j}(\xi, y_0)) - f(\xi, y_0, z(\xi), \varphi_{1, v_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k, v_j}(\xi, y_0))] d\xi \right| \leq \\ & \leq \int_{\left(\bigcup_{i \leq k} e_{x, i}^{(v_j)} \right) \cup A_x} |f(\xi, y_{v_j}, z(\xi), \varphi_{1, v_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k, v_j}(\xi, y_0)) - f(\xi, y_0, z(\xi), \varphi_{1, v_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k, v_j}(\xi, y_0))| d\xi + \\ & + \int_{\Delta_x - \bigcup_{i \leq k} e_{x, i}^{(v_j)} - A_x} |f(\xi, y_{v_j}, z(\xi), \varphi_{1, v_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k, v_j}(\xi, y_0)) - f(\xi, y_0, z(\xi), \varphi_{1, v_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k, v_j}(\xi, y_0))| d\xi \leq \end{aligned}$$

(37) Invero, è noto che le successioni di funzioni semplici $(g_n(x))_{n \in N}$ e $(h_{i, n}^{(j)}(x))_{n \in N}$ ($i = 1, 2, \dots, k; j \in N$) approssimanti le funzioni misurabili $z(x)$ e $\varphi_{i, v_j}(x, y_0)$ ($i = 1, 2, \dots, k; j \in N$) si possono supporre tali che: $|g_n(x)| \leq |g_{n+1}(x)|$ e $|h_{i, n}^{(j)}(x)| \leq |h_{i, n+1}^{(j)}(x)|$ per ogni $n \in N$ e per ogni $x \in \Delta_x$. Cfr., in proposito, C. BAIROCHI [1], p. 242.

$$\begin{aligned}
 & \leq \int_{\left(\bigcup_{i \leq k} e^{(\nu_j)}\right) \cup A_x} M(\xi, y_j) d\xi + \int_{\left(\bigcup_{i \leq k} e^{(\nu_j)}\right) \cup A_x} M(\xi, y_0) d\xi + \\
 & + \sum_{l, l_1, \dots, l_k=1}^{n_0} \int_{Z_{l, l_1, \dots, l_k}^{(j)}} |f(\xi, y_{\nu_j}, z(\xi), \varphi_{1, \nu_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k, \nu_j}(\xi, y_0)) - f(\xi, y_{\nu_j}, r_l, r_{l_1}, \dots, r_{l_k})| d\xi + \\
 & + \sum_{l, l_1, \dots, l_k=1}^{n_0} \int_{Z_{l, l_1, \dots, l_k}^{(j)}} |f(\xi, y_{\nu_j}, r_l, r_{l_1}, \dots, r_{l_k}) - f(\xi, y_0, r_l, r_{l_1}, \dots, r_{l_k})| d\xi + \\
 & + \sum_{l, l_1, \dots, l_k=1}^{n_0} \int_{Z_{l, l_1, \dots, l_k}^{(j)}} |f(\xi, y_0, r_l, r_{l_1}, \dots, r_{l_k}) - f(\xi, y_0, z(\xi), \varphi_{1, \nu_j}(\xi, y_0), \dots, \varphi_{k, \nu_j}(\xi, y_0))| d\xi < \\
 & < 2\eta + 2\eta a + \frac{\eta}{n_0^{k+1}} n_0^{k+1} = \eta(3 + 2a).
 \end{aligned}$$

La (1.18) é, così, provata ⁽³⁸⁾ ed il teorema in esame é completamente dimostrato.

Con procedimento analogo a quello seguito per la dimostrazione del teorema 1.2, si dimostra il seguente che generalizza un teorema di compattezza stabilito in G. SANTAGATI [3] ⁽³⁹⁾ e quindi anche un noto teorema di compattezza di C. CILIBERTO ⁽⁴⁰⁾:

TEOREMA 1.3. - *Sia $f(x, y, z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ una funzione definita nello strato S_2 , misurabile in Δ per ogni $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$, continua rispetto a $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e tale da verificare la limitazione (1.1); sia, inoltre, $v(x)$ una funzione definita e quasi continua in Δ_x .*

Per quasi ogni $x \in \Delta_x$, comunque si assegni una k -upla di funzioni $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_k(y)$ misurabili in Δ_y , il problema:

$$(1.30) \quad z(y) = v(x) + \int_0^y f(x, \eta, z(\eta), \varphi_1(\eta), \varphi_2(\eta), \dots, \varphi_k(\eta)) d\eta \quad \text{in } \Delta_y$$

non abbia più di una soluzione assolutamente continua.

⁽³⁸⁾ Il ragionamento seguito si ispira ad un procedimento di G. ARNESE; cfr., in proposito, G. ARNESE [2], pp. 29-31.

⁽³⁹⁾ Cfr. Lemma II^o, p. 79.

⁽⁴⁰⁾ Cfr. C. CILIBERTO [1], p. 20.

Detta X la parte di misura nulla di Δ_x per gli x della quale o $M(x, y)$ non è sommabile rispetto ad y o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (1.30) ovvero la funzione f non gode della proprietà (C), al variare della k -upla di funzioni $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_k(x, y)$ dell'insieme T in una famiglia Φ compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x , si consideri il problema:

$$(1.31) \quad z(x, y) = v(x) + \int_0^y f(x, \eta, z(x, \eta), \varphi_1(x, \eta), \varphi_2(x, \eta), \dots, \varphi_k(x, \eta)) d\eta$$

in $(\Delta_x - X) \times \Delta_y$ ⁽⁴¹⁾.

Allora, posto, per ogni $z(x, y)$ soluzione del problema (1.31) in corrispondenza di una fissata k -upla $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ di funzioni di Φ :

$$(1.32) \quad \tilde{z}(x, y) = \begin{cases} z(x, y) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y \\ v(x) & \text{per } (x, y) \in X \times \Delta_y, \end{cases}$$

la famiglia delle funzioni $\tilde{z}(x, y)$, definite dalla (1.32), al variare di $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ in Φ , è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad y ed inoltre gode della proprietà $A^{(y)}$.

Dall'esame della dimostrazione del teorema 1.2 si constata che è possibile generalizzare l'ipotesi di unicità per il problema (1.30), supponendo, direttamente, che il problema (1.31) in $\Delta_x \times \Delta_y$, abbia, per quasi ogni $x \in \Delta_x$, per ogni k -upla di funzioni $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_k(x, y)$ dell'insieme T appartenenti a Φ , una sola soluzione in Δ_y e supponendo, inoltre, che se $\psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \dots, \psi_k(x, y)$ sono le funzioni limiti secondo la convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x di k successioni di funzioni $(\varphi_{i, n_j}(x, y))_{j \in \mathbb{N}}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) estratte da k successioni di funzioni di Φ , per quasi ogni $x \in \Delta_x$, il problema:

$$z(y) = v(x) + \int_0^y f(x, \eta, z(\eta), \psi_1(x, \eta), \psi_2(x, \eta), \dots, \psi_k(x, \eta)) d\eta \quad \text{in } \Delta_y$$

abbia una sola soluzione.

(41) Tale problema ammette, in $(\Delta_x - X) \times \Delta_y$, una ed una sola soluzione (cioè esiste una ed una sola funzione $z(x, y)$ definita in $(\Delta_x - X) \times \Delta_y$ e tale da soddisfare ivi identicamente la (1.31)) in corrispondenza di una fissata k -upla $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ di funzioni di Φ , a norma delle ipotesi poste sul problema (1.30) e poiché, inoltre, per la funzione $f(x, y, z, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_k(x, y))$, per ogni $x \in \Delta_x - X$, sono verificate le ipotesi di CARATHÉODORY in Δ_y .

Si ha, così, il seguente altro teorema di compattezza ⁽⁴²⁾ che generalizza il teorema 1.3:

TEOREMA 1.4. - Sia $f(x, y, z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ una funzione definita nello strato S_2 , misurabile in Δ per ogni $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$, continua rispetto a $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e tale da verificare la limitazione (1.1); sia, inoltre, $v(x)$ una funzione definita e quasi continua in Δ_x .

Per quasi ogni $x \in \Delta_x$, comunque si assegni una k -upla di funzioni $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_k(x, y)$ dell'insieme T ed appartenenti ad una famiglia Φ compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x , il problema:

$$(1.33) \quad z(y) = v(x) + \int_0^y f(x, \eta, z(\eta), \varphi_1(x, \eta), \varphi_2(x, \eta), \dots, \varphi_k(x, \eta)) d\eta \quad \text{in } \Delta_y$$

non abbia più di una soluzione assolutamente continua ed, inoltre, se $\psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \dots, \psi_k(x, y)$ sono le funzioni limiti secondo la convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x di k successioni di funzioni $(\varphi_{i,h}(x, y))_{h \in N}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) estratte da k successioni di funzioni di Φ , il problema:

$$(1.34) \quad z(y) = v(x) + \int_0^y f(x, \eta, z(\eta), \psi_1(x, \eta), \psi_2(x, \eta), \dots, \psi_k(x, \eta)) d\eta \quad \text{in } \Delta_y$$

non abbia più di una soluzione assolutamente continua.

Detta X la parte di misura nulla di Δ_x per gli x della quale o $M(x, y)$ non è sommabile rispetto ad y o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (1.33) o per il problema (1.34) ovvero la funzione f non gode della proprietà (C'), al variare della k -upla $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_k(x, y)$ in Φ , si consideri il problema:

$$(1.35) \quad z(x, y) = v(x) + \int_0^y f(x, \eta, z(x, \eta), \varphi_1(x, \eta), \varphi_2(x, \eta), \dots, \varphi_k(x, \eta)) d\eta$$

in $(\Delta_x - X) \times \Delta_y$ ⁽⁴³⁾.

⁽⁴²⁾ L'osservazione di cui sopra è stata esplicitamente messa in luce, con riferimento ad un teorema di compattezza analogo a quello citato in ⁽⁴¹⁾, in G. ARNESE [2], p. 32.

⁽⁴³⁾ È ovvio che tale problema, a norma delle ipotesi poste, ammette, in $(\Delta_x - X) \times \Delta_y$, una ed una sola soluzione in corrispondenza di una fissata k -upla $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ di funzioni di Φ .

Allora, posto, per ogni $z(x, y)$ soluzione del problema (1.35) in corrispondenza di una fissata k -upla $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ di funzioni di Φ :

$$(1.36) \quad \tilde{z}(x, y) = \begin{cases} z(x, y) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y \\ v(x) & \text{per } (x, y) \in X \times \Delta_y, \end{cases}$$

la famiglia delle funzioni $\tilde{z}(x, y)$, definite dalla (1.36), al variare di $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ in Φ , è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad y ed inoltre gode della proprietà $A^{(v)}$.

In maniera analoga ai teoremi 1.1, 1.2, 1.3, con le ovvie modifiche del caso, si dimostrano i seguenti altri teoremi di compattezza:

TEOREMA 1.5. - Sia $f(x, y, z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ una funzione definita nello strato S_2 , misurabile in Δ per ogni $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$, continua rispetto a $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e tale da verificare la limitazione (1.1); sia, inoltre, $\lambda(y)$ una funzione definita e quasi continua in Δ_y .

Esistano una costante $M_1 > 0$ e $k-1$ funzioni $\chi_2(x), \chi_3(x), \dots, \chi_k(x)$ quasi continue in Δ_x tali che, per quasi ogni $y \in \Delta_y$, comunque si assegnino la funzione $\varphi_1(x)$ continua in Δ_x e $k-1$ successioni $(\varphi_{i,n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ($i=2, 3, \dots, k$) di funzioni misurabili in Δ_x verificanti le disuguaglianze:

$$|\varphi_1(x)| \leq M_1 \text{ per } x \in \Delta_x, \quad |\varphi_{i,n}(x)| \leq \chi_i(x) \quad (i=2, 3, \dots, k)$$

quasi ovunque in Δ_x e per ogni $n \in \mathbb{N}$,

il problema (1.2) non abbia più di una soluzione assolutamente continua.

Detta Y la parte di misura nulla di Δ_y per gli y della quale o $M(x, y)$ non è sommabile rispetto ad x o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (1.2) ovvero la funzione f non gode della proprietà (C), al variare delle funzioni $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_k(x, y)$, rispettivamente, in k famiglie $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ di funzioni verificanti le disuguaglianze:

$$(1.37) \quad |\varphi_i(x, y)| \leq M_1 \text{ per } (x, y) \in \Delta, \varphi_i \in \Phi_i, \quad |\varphi_i(x, y)| \leq \chi_i(x)$$

per $y \in \Delta_y$ e quasi ovunque in Δ_x , $\varphi_i \in \Phi_i$ ($i=2, 3, \dots, k$),

la prima costituita da funzioni equicontinue in Δ , le altre costituite da funzioni dell'insieme T' , godenti uniformemente della proprietà B' , si consideri il problema (1.3). Allora, posto, per ogni $z(x, y)$ soluzione del problema (1.3)

in corrispondenza di una fissata k -upla $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \in \Phi_1 \times \Phi_2 \times \dots \times \Phi_k$ ⁽⁴⁴⁾:

$$(1.38) \quad \tilde{z}(x, y) = \begin{cases} z(x, y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times (\Delta_y - Y) \\ \lambda(y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times Y, \end{cases}$$

la famiglia delle funzioni $\tilde{z}(x, y)$, definite dalla (1.38), al variare di $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ in $\Phi_1 \times \Phi_2 \times \dots \times \Phi_k$, è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x ed inoltre gode della proprietà $A^{(x)}$.

TEOREMA 1.6. - Sia $f(x, y, z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ una funzione definita nello strato S_2 , misurabile in Δ per ogni $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$, continua rispetto a $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e tale da verificare la limitazione (1.1); sia, inoltre, $\lambda(y)$ una funzione definita e quasi continua in Δ_y .

Esistano una costante $M_1 > 0$ e $k-1$ funzioni $\chi_2(x), \dots, \chi_k(x)$ quasi continue in Δ_x tali che, per quasi ogni $y \in \Delta_y$, comunque si assegnino k successioni $(\varphi_{i,n}(x))_{n \in N}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), la prima di funzioni continue in Δ_x e le altre di funzioni ivi misurabili, verificanti, per ogni $n \in N$, le limitazioni:

$$|\varphi_{1,n}(x)| \leq M_1 \text{ per } x \in \Delta_x, \quad |\varphi_{i,n}(x)| \leq \chi_i(x) \quad (i = 2, 3, \dots, k)$$

quasi ovunque in Δ_x ,

il problema (1.5) non abbia più di una soluzione assolutamente continua.

Detta Y la parte di misura nulla di Δ_y per gli y della quale o $M(x, y)$ non è sommabile rispetto ad x o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (1.5) ovvero la funzione f non gode della proprietà (C), al variare delle funzioni $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_k(x, y)$, rispettivamente, in k famiglie $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ di funzioni verificanti le limitazioni (1.37), la prima costituita da funzioni equicontinue in Δ , le altre da funzioni dell'insieme T' , godenti uniformemente della proprietà B' , si consideri il problema (1.6).

Allora, definite, al variare di $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ in $\Phi_1 \times \Phi_2 \times \dots \times \Phi_k$, le funzioni $\tilde{z}(x, y)$ mediante le (1.38), vale la tesi del teorema (1.5) ⁽⁴⁵⁾.

TEOREMA 1.7. - Sia $f(x, y, z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ una funzione definita nello strato S_2 , misurabile in Δ per ogni $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$, continua rispetto a $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e tale da verificare la limitazione (1.1); sia, inoltre, $v(x)$ una funzione definita e quasi continua in Δ_x .

Esistano una costante $M_1 > 0$ e $k-1$ funzioni $\chi_2(y), \chi_3(y), \dots, \chi_k(y)$

⁽⁴⁴⁾ Il problema (1.3) ammette, anche in questo caso, in $\Delta_x \times (\Delta_y - Y)$, una ed una sola soluzione in corrispondenza di una fissata k -upla $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \in \Phi_1 \times \Phi_2 \times \dots \times \Phi_k$; cfr. ⁽⁴⁵⁾.

⁽⁴⁵⁾ Si noti che il teorema 1.6 si può, pure, riguardare come un corollario del teorema 1.5.

quasi continue in Δ_y tali che, per quasi ogni $x \in \Delta_x$, comunque si assegnino la funzione $\varphi_1(y)$ continua in Δ_y e $k-1$ funzioni $\varphi_2(y), \dots, \varphi_k(y)$ ivi misurabili, verificanti le disuguaglianze:

$$|\varphi_1(y)| \leq M_1 \text{ per } y \in \Delta_y, \quad |\varphi_i(y)| \leq \chi_i(y) \quad (i = 2, 3, \dots, k) \text{ quasi ovunque in } \Delta_y,$$

il problema (1.30) non abbia più di una soluzione assolutamente continua.

Detta X la parte di misura nulla di Δ_x per gli x della quale o $M(x, y)$ non è sommabile rispetto ad y o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (1.30) ovvero la funzione f non gode della proprietà (C'), al variare delle funzioni $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_k(x, y)$, rispettivamente, in k famiglie $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ di funzioni verificanti le disuguaglianze:

$$|\varphi_1(x, y)| \leq M_1 \text{ per } (x, y) \in \Delta, \varphi_1 \in \Phi_1, \quad |\varphi_i(x, y)| \leq \chi_i(y)$$

$$\text{per } x \in \Delta_x \text{ e quasi ovunque in } \Delta_y, \varphi_i \in \Phi_i \quad (i = 2, \dots, k),$$

la prima costituita da funzioni equicontinue in Δ , le altre costituite da funzioni dell'insieme T egualmente quasi continue in Δ in modo semiregolare rispetto ad x ⁽⁴⁵⁾, si consideri il problema (1.31).

Allora, posto, per ogni $z(x, y)$ soluzione del problema (1.31) in corrispondenza di una fissata k -upla $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \in \Phi_1 \times \Phi_2 \times \dots \times \Phi_k$ ⁽⁴⁷⁾:

$$(1.39) \quad \tilde{z}(x, y) = \begin{cases} z(x, y) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y \\ v(x) & \text{per } (x, y) \in X \times \Delta_y, \end{cases}$$

la famiglia delle funzioni $\tilde{z}(x, y)$, definite dalla (1.39), al variare di $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ in $\Phi_1 \times \Phi_2 \times \dots \times \Phi_k$, è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad y ed inoltre gode della proprietà $A^{(y)}$.

Ciò posto, per ogni $n \in N$, porremo, d'ora in poi:

$$\Delta_x^{(i)} = \left\{ x : \frac{i-1}{n} a \leq x \leq \frac{i}{n} a, x \in R^1 \right\}, \quad \Delta_y^{(i)} = \left\{ y : \frac{i-1}{n} b \leq y \leq \frac{i}{n} b, y \in R^1 \right\} \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

⁽⁴⁶⁾ Le famiglie Φ_i ($i = 2, \dots, k$) sono, quindi, compatte rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x . Cfr. G. STAMPACCHIA [1], p. 204 e nota ⁽⁴⁷⁾ p. 213.

⁽⁴⁷⁾ Il problema (1.31) ammette, anche qui, in $(\Delta_x - X) \times \Delta_y$ una ed una sola soluzione in corrispondenza di una fissata k -upla $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \in \Phi_1 \times \Phi_2 \times \dots \times \Phi_k$; cfr. ⁽⁴⁴⁾.

Valgono, allora, i seguenti teoremi di compattezza di cui il primo si ottiene, con ovvii adattamenti, da un noto criterio di G. ARNESE ⁽⁴⁸⁾, mentre il secondo ed il terzo conseguono, rispettivamente, dalle dimostrazioni dei teoremi 1.2 e 1.3, qualora si osservi che, mantenendo le notazioni introdotte in essi, si ha:

$$\lim_n \int_x^{x-\frac{a}{n}} M(\xi, y) d\xi = 0 \text{ uniformemente al variare di } y \text{ in } C_y^\sigma,$$

$$\lim_n \int_y^{y-\frac{b}{n}} M(x, \eta) d\eta = 0 \text{ uniformemente al variare di } x \text{ in } C_x^\sigma \text{ (49)}$$

e, per $x = 0$:

$$\begin{aligned} z(0) = z'(0) &= \lim_h \tilde{z}_h(0, y_h) = \lim_h z_h(0, y_h) = \lim_h \tilde{z}_h(0, y'_h) = \lim_h z_h(0, y'_h) = \\ &= \lim_h \lambda(y_h) = \lim_h \lambda(y'_h) = \lambda(y_0), \end{aligned}$$

per $y = 0$:

$$\begin{aligned} z(0) = z'(0) &= \lim_h \tilde{z}_h(x_h, 0) = \lim_h z_h(x_h, 0) = \lim_h \tilde{z}_h(x'_h, 0) = \lim_h z_h(x'_h, 0) = \\ &= \lim_h v(x_h) = \lim_h v(x'_h) = v(x_0) \text{ (50)}, \end{aligned}$$

rispettivamente:

TEOREMA 1.8. - *Sia $f(x, y, z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ una funzione definita nello strato S_2 , misurabile in Δ per ogni $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$, continua rispetto a $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e tale da verificare la limitazione (1.1); sia, inoltre, $\lambda(y)$ una funzione definita e quasi continua in Δ_y .*

⁽⁴⁸⁾ Cfr. G. ARNESE [2], p. 32.

⁽⁴⁹⁾ Si è indicato con C_x^σ l'analogo insieme di C_y^σ con riferimento al teorema 1.3.

⁽⁵⁰⁾ Si sono indicate con $(x_h)_{h \in N}$ e $(x'_h)_{h \in N}$ le analoghe successioni delle $(y_h)_{h \in N}$ e $(y'_h)_{h \in N}$ con riferimento al teorema 1.3.

Esistano una costante $M_1 > 0$ e $k-1$ funzioni $\chi_2(x), \chi_3(x), \dots, \chi_k(x)$ quasi continue in Δ_x tali che, per quasi ogni $y \in \Delta_y$, comunque si assegnino la funzione $\varphi_1(x)$ continua in Δ_x e $k-1$ successioni $(\varphi_{i,n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ($i = 2, 3, \dots, k$) di funzioni misurabili in Δ_x verificanti le disuguaglianze:

$$|\varphi_1(x)| \leq M_1 \text{ per } x \in \Delta_x, \quad |\varphi_{i,n}(x)| \leq \chi_i(x) \quad (i = 2, 3, \dots, k)$$

quasi ovunque in Δ_x e per ogni $n \in \mathbb{N}$,

il problema (1.2) non abbia più di una soluzione assolutamente continua.

Detta Y la parte di misura nulla di Δ_y per gli y della quale o $M(x, y)$ non è sommabile rispetto ad x o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (1.2) ovvero la funzione f non gode della proprietà (C), e dette $(\varphi_{i,n}(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) k successioni di funzioni verificanti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, le disuguaglianze:

$$(1.40) \quad |\varphi_{1,n}(x, y)| \leq M_1 \text{ per } (x, y) \in \Delta, \quad |\varphi_{i,n}(x, y)| \leq \chi_i(x) \quad (i = 2, 3, \dots, k)$$

per $y \in \Delta_y$ e quasi ovunque in Δ_x ,

la prima costituita da funzioni equicontinue in Δ , le altre da funzioni dello insieme T' godenti uniformemente della proprietà B'), si consideri la successione $(z_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni definite, per ogni $n \in \mathbb{N}$, da:

$$(1.41) \quad z_n(x, y) = \begin{cases} \lambda(y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x^{(1)} \times (\Delta_y - Y) \\ \lambda(y) + \int_0^{x - \frac{\alpha}{n}} f(\xi, y, z_n(\xi, y), \varphi_{1,n}(\xi, y), \dots, \varphi_{k,n}(\xi, y)) d\xi & \text{per } (x, y) \in \left(\bigcup_{2 \leq i \leq n} \Delta_x^{(i)} \right) \times (\Delta_y - Y). \end{cases}$$

Allora, posto, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$(1.42) \quad \tilde{z}_n(x, y) = \begin{cases} z_n(x, y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times (\Delta_y - Y) \\ \lambda(y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times Y, \end{cases}$$

la successione $(\tilde{z}_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$, di funzioni appartenenti a T , è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x e gode, inoltre, della proprietà $A^{(w)}$.

TEOREMA 1.9. - Sia $f(x, y, z, v_1, v_2, \dots, v_k)$ una funzione definita nello strato S_2 , misurabile in Δ per ogni $(z, v_1, v_2, \dots, v_k)$, continua rispetto a $(z, v_1, v_2, \dots, v_k)$ per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e tale da verificare la limitazione (1.1); sia, inoltre, $\lambda(y)$ una funzione definita e quasi continua in Δ_y .

Esistano una costante $M_1 > 0$ e $k-1$ funzioni $\chi_2(x), \chi_3(x), \dots, \chi_k(x)$ quasi continue in Δ_x tali che, per quasi ogni $y \in \Delta_y$, comunque si assegnino k successioni $(\varphi_{i,n}(x))_{n \in N}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), la prima di funzioni continue in Δ_x e le altre di funzioni ivi misurabili, verificanti, per ogni $n \in N$, le limitazioni:

$$|\varphi_{1,n}(x)| \leq M_1 \text{ per } x \in \Delta_x, \quad |\varphi_{i,n}(x)| \leq \chi_i(x) \quad (i = 2, 3, \dots, k)$$

quasi ovunque in Δ_x ,

il problema (1.5) non abbia più di una soluzione assolutamente continua.

Detta Y la parte di misura nulla di Δ_y per gli y della quale o $M(x, y)$ non è sommabile rispetto ad x o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (1.5) ovvero la funzione f non gode della proprietà (C), e dette $(\varphi_{i,n}(x, y))_{n \in N}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) k successioni di funzioni verificanti, per ogni $n \in N$, le disuguaglianze (1.40), la prima costituita da funzioni equicontinue in Δ , le altre da funzioni dell'insieme T' godenti uniformemente della proprietà B' , si consideri la successione $(z_n(x, y))_{n \in N}$ di funzioni definite, per ogni $n \in N$, dalle (1.41).

Allora, definita la successione $(\tilde{z}_n(x, y))_{n \in N}$ mediante la (1.42), vale la tesi del teorema 1.8 ⁽⁵¹⁾.

TEOREMA 1.10. - Sia $f(x, y, z, v_1, v_2, \dots, v_k)$ una funzione definita nello strato S_2 , misurabile in Δ per ogni $(z, v_1, v_2, \dots, v_k)$, continua rispetto a $(z, v_1, v_2, \dots, v_k)$ per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e tale da verificare la limitazione (1.1); sia, inoltre, $\nu(x)$ una funzione definita e quasi continua in Δ_x .

Esistano una costante $M_1 > 0$ e $k-1$ funzioni $\chi_2(y), \chi_3(y), \dots, \chi_k(y)$ quasi continue in Δ_y tali che, per quasi ogni $x \in \Delta_x$, comunque si assegnino la funzione $\varphi_1(y)$ continua in Δ_y e $k-1$ funzioni $\varphi_2(y), \dots, \varphi_k(y)$ ivi misurabili, verificanti le disuguaglianze:

$$|\varphi_1(y)| \leq M_1 \text{ per } y \in \Delta_y, \quad |\varphi_i(y)| \leq \chi_i(y) \quad (i = 2, 3, \dots, k)$$

quasi ovunque in Δ_y ,

il problema (1.30) non abbia più di una soluzione assolutamente continua.

⁽⁵¹⁾ Si noti che il teorema 1.9 si può, pure, riguardare come un corollario del teorema 1.8.

Detta X la parte di misura nulla di Δ_x per gli x della quale o $M(x, y)$ non è sommabile rispetto ad y o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (1.30) ovvero la funzione f non gode della proprietà (C'), e dette $(\varphi_{i,n}(x, y))_{n \in N}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) k successioni di funzioni verificanti, per ogni $n \in N$, le disuguaglianze:

$$|\varphi_{1,n}(x, y)| \leq M_1 \text{ per } (x, y) \in \Delta, \quad |\varphi_{i,n}(x, y)| \leq \chi_i(y) \quad (i = 2, 3, \dots, k)$$

per $x \in \Delta_x$ e quasi ovunque in Δ_y ,

la prima costituita da funzioni equicontinue in Δ , le altre da funzioni dello insieme T egualmente quasi continue in Δ in modo semiregolare rispetto ad x ⁽⁵²⁾, si consideri la successione $(z_n(x, y))_{n \in N}$ di funzioni definite, per ogni $n \in N$, da:

$$(1.43) \quad z_n(x, y) = \begin{cases} v(x) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y^{(1)} \\ v(x) + \int_0^{y - \frac{b}{n}} f(x, \eta, z_n(x, \eta), \varphi_{1,n}(x, \eta), \dots, \varphi_{k,n}(x, \eta)) d\eta & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \left(\bigcup_{2 \leq i \leq n} \Delta_y^{(i)} \right). \end{cases}$$

Allora, posto, per ogni $n \in N$:

$$(1.44) \quad \tilde{z}_n(x, y) = \begin{cases} z_n(x, y) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y \\ v(x) & \text{per } (x, y) \in X \times \Delta_y, \end{cases}$$

la successione $(\tilde{z}_n(x, y))_{n \in N}$ di funzioni appartenenti a T' è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare ad y ed inoltre gode della proprietà $A^{(v)}$.

È da notare che le (1.42) definiscono le funzioni della successione $(\tilde{z}_n(x, y))_{n \in N}$ in Δ , risultando esse ivi misurabili rispetto ad y per ogni $x \in \Delta_x$ e continue rispetto ad x per ogni $y \in \Delta_y$, in quanto le (1.41) definiscono le $z_n(x, y)$ in $\Delta_x \times (\Delta_y - Y)$ risultando esse ivi continue rispetto ad x per ogni y e misurabili rispetto ad y per ogni x . Infatti, la prima delle (1.41) definisce, per ogni $n \in N$, $z_n(x, y)$ in $\Delta_x^{(1)} \times (\Delta_y - Y)$ risultando ivi, ovviamente, misura-

⁽⁵²⁾ Le successioni $(\varphi_{i,n}(x, y))_{n \in N}$ ($i = 2, 3, \dots, k$) sono, quindi, compatte rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x . Cfr. G. STAMPACCHIA [1] p. 204.

bile rispetto ad y per ogni x e continua rispetto ad x per ogni y . La funzione $f(x, y, z_n(x, y), \varphi_{1,n}(x, y), \dots, \varphi_{k,n}(x, y))$, per ogni $y \in \Delta_\nu - Y$, risulta, allora, misurabile in $\Delta_x^{(1)}$ e maggiorata, in valore assoluto, da una funzione sommabile; pertanto, la seconda delle (1.41) definisce, per ogni $n \in N$, $z_n(x, y)$ in $\Delta_x^{(2)} \times (\Delta_\nu - Y)$, risultando, ivi, misurabile rispetto ad y per ogni x e continua rispetto ad x per ogni y . Conseguentemente, per ogni $n \in N$, viene, così, a definirsi $z_n(x, y)$ in $(\Delta_x^{(1)} \cup \Delta_x^{(2)}) \times (\Delta_\nu - Y)$ risultando, ivi, continua rispetto ad x per ogni y e misurabile rispetto ad y per ogni x . Così proseguendo, si dimostra quanto sopra affermato.

Analogamente si prova che le (1.43) definiscono le $z_n(x, y)$ in $(\Delta_x - X) \times \Delta_\nu$ risultando esse ivi continue rispetto ad y per ogni x e misurabili rispetto ad x per ogni y e, conseguentemente, che le (1.44) definiscono le funzioni della successione $(\tilde{z}_n(x, y))_{n \in N}$ in Δ , risultando esse ivi misurabili rispetto ad x per ogni $y \in \Delta_\nu$ e continue rispetto ad y per ogni $x \in \Delta_x$.

2. - Teoremi di unicità per i problemi (1.2) e (1.5).

Volendo delle condizioni espressive le quali assicurino, per quasi ogni $y \in \Delta_\nu$, l'unicità della soluzione per il problema (1.2) ovvero per il problema (1.5), la via più naturale da seguire sembra quella già seguita in G. SANTAGATI [3] ⁽⁵³⁾, consistente nel ricercare delle condizioni di unicità per il problema differenziale ordinario:

$$\begin{cases} z' = f(x, y, z, \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)) \text{ in } \Delta_x \\ z(0) = \lambda(y) \end{cases}$$

ove $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) è un'assegnata k -upla di funzioni misurabili in Δ_x , condizioni che, se verificate in modo opportuno, bastino ad assicurare l'unicità per i problemi (1.2) e (1.5).

In questo ordine di idee, abbiamo stabilito (cfr. G. SANTAGATI [3], n. 3) dei risultati, ispirandoci, ad esempio, ad una nota condizione di unicità, relativa ai problemi differenziali ordinari, dovuta ad F. CAFIERO ⁽⁵⁴⁾, che contiene ⁽⁵⁵⁾ sia un criterio di G. SCORZA DRAGONI ⁽⁵⁶⁾, generalizzazione, a sua volta, di un criterio di L. TONELLI ⁽⁵⁷⁾, sia un secondo criterio di L. TONELLI ⁽⁵⁸⁾.

⁽⁵³⁾ Cfr. il n. 3.

⁽⁵⁴⁾ Cfr. F. CAFIERO [4], p. 20.

⁽⁵⁵⁾ Cfr. loco cit. in ⁽⁵⁴⁾ §. 3.

⁽⁵⁶⁾ Cfr. G. SCORZA DRAGONI [2], p. 381.

⁽⁵⁷⁾ Cfr. L. TONELLI [1], p. 273.

⁽⁵⁸⁾ Cfr. L. TONELLI [1], p. 277.

Questi risultati, qualora le condizioni che in essi sono supposte verificate ovunque in Δ_ν si suppongono, invece, verificate per quasi ogni $y \in \Delta_\nu$, possono costituire dei criteri di unicità per i problemi (1.2) e (1.5).

Allo scopo di enunciarli esplicitamente, premettiamo la seguente ⁽⁵⁹⁾:

DEFINIZIONE 2.1. - Diremo che la funzione $f(x, y, z, w_1, \dots, w_k)$ verifica in S_2 la condizione (D) rispetto alla coppia (x, z) uniformemente rispetto alle w_i se, per quasi ogni $y \in \Delta_\nu$ e per ogni punto $P(x_0, z_0)$ del piano $\Pi = (x, z)$, con $x_0 \in [0, a)$, $|z_0| < +\infty$, esiste una funzione $K_P(x, \gamma)$, soddisfacente alle ipotesi di CARATHÉODORY in ogni insieme del tipo:

$$\Omega = \{(\xi, \gamma) : \alpha_1 \leq x \leq a, \alpha_2 \leq \gamma < +\infty, 0 < \alpha_1 < a, \alpha_2 > 0, (x, \gamma) \in \Pi\}$$

in modo tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

i) *Risulta:*

$$f(x, y, z_1, w_1, \dots, w_k) - f(x, y, z_2, w_1, \dots, w_k) \leq K_P(x, z_1 - z_2), \quad (z_1 > z_2),$$

per quasi tutti gli x di un intorno destro di x_0 , per z_1 e z_2 appartenenti ad un intorno di z_0 e qualunque siano le w_i ($i = 1, 2, \dots, k$);

ii) per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un numero reale $h > 0$ in modo tale che, per ogni numero δ reale positivo e non maggiore di h , l'integrale superiore ⁽⁶⁰⁾ dell'equazione:

$$\gamma = h + \int_{x_0 + \delta}^x K_P(\xi, \gamma) d\xi$$

risulti non maggiore di ε a destra di $x_0 + \delta$.

Ciò posto, vale il seguente teorema di unicità per i problemi (1.2) e (1.5) per la cui dimostrazione rinviamo a G. SANTAGATI [3] ⁽⁶¹⁾:

TEOREMA 2.1. - Sia $f(x, y, z, w_1, w_2, \dots, w_k)$, una funzione definita nello strato S_2 , misurabile in Δ per ogni $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$, continua rispetto a $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e tale da verificare la limitazione (1.1) nonché la condizione (D) rispetto alla coppia (x, z) uniformemente rispetto alle w_i .

⁽⁵⁹⁾ La definizione 2.1 si ispira, appunto, ad una nota condizione di unicità di F. CAFIERO. Cfr. loco cit. in ⁽⁵⁴⁾.

⁽⁶⁰⁾ Tale integrale esiste come è provato in F. CAFIERO [4], § 1.

⁽⁶¹⁾ Cfr. G. SANTAGATI [3], teorema I°. Bisogna, naturalmente, nella dimostrazione, tenere conto delle modifiche di cui si è detto sopra.

Allora, per quasi ogni $y \in \Delta_y$, i problemi (1.2) e (1.5) non possono avere più di una soluzione assolutamente continua.

Dal teorema 2.1 discende, poi, ad esempio, il seguente che corrisponde, con riferimento alle equazioni differenziali ordinarie, ad un criterio di G. SCORZA DRAGONI ⁽⁶²⁾, forma affinata di un noto criterio di L. TONELLI ⁽⁶³⁾:

TEOREMA 2.2. - Sia $f(x, y, z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ una funzione definita nello strato S_2 , misurabile in Δ per ogni $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$, continua rispetto a $(z, w_1, w_2, \dots, w_k)$ per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e tale da verificare la limitazione (1.1); inoltre, per quasi ogni $y \in \Delta_y$, esistano due funzioni $\mu(x)$ ed $\omega(u)$, la prima definita quasi ovunque in Δ_x e sommabile in ogni intervallo $[\delta, a]$, $0 < \delta < a$, e la seconda definita per $u > 0$, continua e positiva, tali da aversi:

$$c_1) \quad \int_{a_1}^{a_2} \mu(x) dx < P \quad (0 < a_1 < a_2 \leq a)$$

P essendo una costante;

$$c_2) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{\tau}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \quad (u_0 > 0);$$

$c_3)$ risulta:

$$f(x, y, z_1, w_1, w_2, \dots, w_k) - f(x, y, z_2, w_1, w_2, \dots, w_k) \leq \mu(x) \omega(z_1 - z_2)$$

per quasi tutti gli x di Δ_x , per $z_1 > z_2$, $z_1 - z_2 \leq K$, essendo K un certo numero positivo, e qualunque siano le w_i ($i = 1, 2, \dots, k$).

Allora, vale la tesi del teorema 2.1 ⁽⁶⁴⁾.

Si noti, ancora, che dal teorema 2.1 discendono, pure ⁽⁶⁵⁾, teoremi di unicità per i problemi (1.2) e (1.5) corrispondenti ai criteri di L. TONELLI citati in ⁽⁵⁷⁾ e ⁽⁵⁸⁾. Ci esimiamo, però, per brevità, di enunciarli esplicitamente, la loro formulazione potendosi, del resto, ottenere con ovvii adattamenti.

⁽⁶²⁾ Cfr. loco cit. in ⁽⁵⁶⁾.

⁽⁶³⁾ Cfr. loco cit. in ⁽⁵⁷⁾.

⁽⁶⁴⁾ Che la proposizione 2.2 sia un corollario della 2.1 si prova facilmente seguendo la via indicata da F. CAFIERO in [4], pp. 26-28.

⁽⁶⁵⁾ Cfr. loco cit. in ⁽⁵⁵⁾.

3. - Alcuni criteri di compattezza particolari.

Dai teoremi 1.1, 1.2, 1.5, 1.6, 1.8 e 1.9 stabiliti nel n. 1, a norma dei criteri di unicità 2.1 e 2.2, discendono i seguenti altri teoremi di compattezza, l'uso dei quali ci permetterà di dedurre, nel n. 6, dei teoremi di esistenza relativi ai problemi (I) (II) e (III) (II), come casi particolari di quelli che stabiliremo nei nn. 4 e 5. ⁽⁶⁶⁾:

TEOREMA 3.1. - *Se sono verificate le ipotesi del teorema 2.1, allora valgono le tesi dei teoremi 1.1, 1.2, 1.5, 1.6, 1.8 e 1.9.*

TEOREMA 3.2. - *Se sono verificate le ipotesi del teorema 2.2, allora valgono le tesi dei teoremi 1.1, 1.2, 1.5, 1.6, 1.8 e 1.9.*

4. - Teoremi di esistenza per il problema (I) (II).

Dimostriamo, ora, il seguente teorema di esistenza relativo al problema (I) (II):

TEOREMA 4.1. - *Le funzioni $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $F(x, y, z, v, w)$, $G(x, y, z, v, w)$ soddisfino le seguenti ipotesi:*

α) $\varphi(x)$, $\psi(y)$ siano due funzioni definite e sommabili rispettivamente negli intervalli Δ_x , Δ_y ;

β) $F(x, y, z, v, w)$, $G(x, y, z, v, w)$ siano due funzioni definite nello strato:

$$S_0 = \{(x, y, z, v, w) : (x, y) \in \Delta, \quad |z|, \quad |v|, \quad |w| < +\infty, \\ (x, y, z, v, w) \in R^5\},$$

misurabili in Δ per ogni (z, v, w) , continue rispetto a (z, v, w) per quasi ogni $(x, y) \in \Delta$ e tali da verificare le limitazioni:

$$|F(x, y, z, v, w)| \leq M(x, y), \quad |G(x, y, z, v, w)| \leq M(x, y),$$

con $M(x, y)$ funzione definita e sommabile in Δ ⁽⁶⁷⁾;

⁽⁶⁶⁾ Evidentemente, dai teoremi 1.1, 1.2, 1.5, 1.6, 1.8 e 1.9 discendono, pure, altri teoremi di compattezza più particolari, a norma dei criteri di unicità per i problemi (1.2) e (1.5) corrispondenti ai criteri di L. TONELLI in precedenza menzionati, e, in base a questi, altrettanti teoremi di esistenza per i problemi (I) (II) e (III) (II), casi particolari, anche questi, di quelli che stabiliremo nei nn. 4 e 5. Ci risparmiamo, però, al solito, per brevità, di enunciarli esplicitamente.

⁽⁶⁷⁾ La funzione $M(x, y)$ è non negativa ma, evidentemente, non comporta restrizione alcuna il supporla positiva.

γ) *posto:*

$$M_1 = \max \{ | \sigma(x) + \tau(y) - z_0 | : (x, y) \in \Delta \} + \iint_{\Delta} M(x, y) dx dy$$

$$\chi(x) = | \varphi(x) | + \int_0^b M(x, \eta) d\eta,$$

per quasi ogni $y \in \Delta_y$, comunque si assegnino una funzione $\varphi_1(x)$ continua in Δ_x ed una successione $(\varphi_{2,n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni misurabili in Δ_x verificanti le disuguaglianze:

$$| \varphi_1(x) | \leq M_1 \text{ per } x \in \Delta_x, \quad | \varphi_{2,n}(x) | \leq \chi(x) \text{ quasi ovunque in } \Delta_x$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$,

il problema:

$$(4.1) \quad v(x) = \psi(y) + \lim_n \int_0^x F(\xi, y, \varphi_1(\xi), v(\xi), \varphi_{2,n}(\xi)) d\xi \text{ in } \Delta_x$$

non abbia più di una soluzione assolutamente continua;

δ) *posto:*

$$\eta(y) = | \psi(y) | + \int_0^a M(\xi, y) d\xi,$$

per quasi ogni $x \in \Delta_x$, comunque si assegnino due funzioni $\psi_1(y), \psi_2(y)$, la prima continua in Δ_y e la seconda ivi misurabile, verificanti le limitazioni:

$$| \psi_1(y) | \leq M_1 \text{ per } y \in \Delta_y, \quad | \psi_2(y) | \leq \eta(y) \text{ quasi ovunque in } \Delta_y,$$

il problema:

$$(4.2) \quad w(y) = \varphi(x) + \int_0^y G(x, \eta, \psi_1(\eta), \psi_2(\eta), w(\eta)) d\eta \text{ in } \Delta_y$$

non abbia più di una soluzione.

Allora esiste almeno una soluzione del problema (I) (II) in Δ .

Indicata con X la parte di misura nulla di Δ_x per gli x della quale o $M(x, y)$ non é sommabile rispetto ad y o non vale l'ipotesi di unicità per il

problema (4.2) ovvero la funzione G non gode della proprietà (C') e con Y la parte di misura nulla di Δ_ν per gli y della quale o $M(x, y)$ non é sommabile rispetto ad x o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (4.1) ovvero la funzione F non gode della proprietà (C) , poniamo, per ogni $n \in N$:

$$(4.3) \quad v_n(x, y) = \begin{cases} \phi(y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x^{(1)} \times (\Delta_\nu - Y) \\ \phi(y) + \int_0^{x - \frac{\alpha}{n}} F(\xi, y, z_n(\xi, y), v_n(\xi, y), \tilde{w}_n(\xi, y)) d\xi & \end{cases}$$

per $(x, y) \in (\bigcup_{2 \leq i \leq n} \Delta_x^{(i)}) \times (\Delta_\nu - Y)$,

$$(4.4) \quad z_n(x, y) = \sigma(x) + \int_0^y v_n(x, t) dt \quad \text{per } (x, y) \in \Delta$$

e quindi:

$$(4.5) \quad \tilde{v}_n(x, y) = \begin{cases} v_n(x, y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times (\Delta_\nu - Y) \\ \phi(y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times Y, \end{cases}$$

ed ancora:

$$(4.6) \quad w_n(x, y) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y^{(1)} \\ \varphi(x) + \int_0^{y - \frac{b}{n}} G(x, \eta, h_n(x, \eta), \tilde{v}_n(x, \eta), w_n(x, \eta)) d\eta & \end{cases}$$

per $(x, y) \in \Delta_x - X) \times (\bigcup_{2 \leq i \leq n} \Delta_y^{(i)})$,

$$(4.7) \quad h_n(x, y) = \tau(y) + \int_0^x w_n(t, y) dt \quad \text{per } (x, y) \in \Delta$$

e quindi:

$$(4.8) \quad \tilde{w}_n(x, y) = \begin{cases} w_n(x, y) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \Delta_\nu \\ \varphi(x) & \text{per } (x, y) \in X \times \Delta_\nu. \end{cases}$$

Le (4.4), (4.5), (4.7) e (4.8) definiscono, univocamente, le funzioni $z_n(x, y)$, $\tilde{v}_n(x, y)$, $h_n(x, y)$ e $\tilde{w}_n(x, y)$ in Δ , risultando ivi le $z_n(x, y)$ e le $h_n(x, y)$ continue, mentre le $\tilde{v}_n(x, y)$ sommabili rispetto ad y per ogni x , continue rispetto ad x per ogni y e le $\tilde{w}_n(x, y)$ sommabili rispetto ad x per ogni y , continue rispetto ad y per ogni x .

Ciò posto, cominciamo con l'osservare che le funzioni della successione $(z_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$ sono equilimitate ed equicontinue in Δ .

Si ha, infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, per $(x, y) \in \Delta$:

$$(4.9) \quad |z_n(x, y)| \leq \max \{ |\sigma(x) + \tau(y) - z_0| : (x, y) \in \Delta \} + \iint_{\Delta} M(x, y) dx dy = M_1.$$

ed inoltre, per ogni coppia di punti $(x, y), (x', y') \in \Delta$:

$$|z_n(x, y) - z_n(x', y')| \leq |z_n(x, y) - z_n(x', y)| + |z_n(x', y) - z_n(x', y')|,$$

nonché, per $(x, y), (x', y') \in \Delta_x^{(1)} \times \Delta_y$:

$$|z_n(x, y) - z_n(x', y)| = |\sigma(x) - \sigma(x')|$$

e:

$$|z_n(x', y) - z_n(x', y')| = |\tau(y) - \tau(y')|,$$

per $(x, y), (x', y') \in (\bigcup_{2 \leq i \leq n} \Delta_x^{(i)}) \times \Delta_y$:

$$|z_n(x, y) - z_n(x', y)| \leq |\sigma(x) - \sigma(x')| + \left| \int_0^b \int_{x' - \frac{a}{n}}^{x - \frac{a}{n}} M(\xi, \eta) d\xi d\eta \right|$$

e:

$$|z_n(x', y) - z_n(x', y')| \leq |\tau(y) - \tau(y')| + \left| \int_{y'}^y \int_0^a M(\xi, \eta) d\xi d\eta \right|,$$

per $(x, y) \in \Delta_x^{(1)} \times \Delta_y, (x', y') \in (\bigcup_{2 \leq i \leq n} \Delta_x^{(i)}) \times \Delta_y$:

$$|z_n(x, y) - z_n(x', y)| \leq |\sigma(x) - \sigma(x')| + \left| \int_0^b \int_0^{x' - \frac{a}{n}} M(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| \quad (68)$$

(68) Si noti che essendo $(x, y) \in \Delta_x^{(1)} \times \Delta_y, (x', y') \in (\bigcup_{2 \leq i \leq n} \Delta_x^{(i)}) \times \Delta_y$, risulta $x \leq \frac{a}{n}$, $x' \geq \frac{a}{n}$, quindi: $x' - \frac{a}{n} \leq x' - x$; conseguentemente: $b(x' - \frac{a}{n}) \leq b(x' - x)$; allora, essendo la funzione integrale di $M(x, y)$ assolutamente continua nell'insieme delle parti di Δ misurabili, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un numero reale $\eta > 0$ tale che se $b(x' - x) < \eta$,

risulta: $\left| \int_0^b \int_0^{x' - \frac{a}{n}} M(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| < \varepsilon$ in quanto $b(x' - \frac{a}{n}) < \eta$.

e:

$$|z_n(x', y) - z_n(x', y')| \leq |\tau(y) - \tau(y')| + \left| \int_{y'}^y \int_0^a M(\xi, \eta) d\xi d\eta \right|.$$

La successione $(z_n(x, y))_{n \in N}$ é, pertanto, compatta rispetto alla convergenza uniforme.

La successione $(\tilde{w}_n(x, y))_{n \in N}$ é, poi, costituita da funzioni appartenenti all'insieme T' e godenti, inoltre, uniformemente della proprietà B' ; si ha, invero, per ogni $n \in N$, se $(x, y'), (x, y'') \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y^{(1)}$:

$$|\tilde{w}_n(x, y') - \tilde{w}_n(x, y'')| = 0;$$

se $(x, y'), (x, y'') \in (\Delta_x - X) \times (\bigcup_{2 \leq i \leq n} \Delta_y^{(i)})$:

$$|\tilde{w}_n(x, y') - \tilde{w}_n(x, y'')| \leq \left| \int_{y'' - \frac{b}{n}}^{y' - \frac{b}{n}} M(x, \eta) d\eta \right|$$

ed inoltre, per ogni coppia di numeri reali positivi ε ed ω esistono ⁽⁶⁹⁾ una parte chiusa C_x^ε di Δ_x tale che $m(\Delta_x - C_x^\varepsilon) < \varepsilon$ ed un numero reale positivo δ

in guisa tale che risulti $\left| \int_{y'' - \frac{b}{n}}^{y' - \frac{b}{n}} M(x, \eta) d\eta \right| < \omega$ per ogni coppia, y' ed y'' , di

valori di y soddisfacenti alla limitazione $|y' - y''| < \delta$, uniformemente al variare di $x \in C_x^\varepsilon$ ⁽⁷⁰⁾; se, infine, $(x, y') \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y^{(1)}$ e $(x, y'') \in (\Delta_x - X) \times (\bigcup_{2 \leq i \leq n} \Delta_y^{(i)})$:

$$|\tilde{w}_n(x, y') - \tilde{w}_n(x, y'')| \leq \left| \int_0^{y'' - \frac{b}{n}} M(x, \eta) d\eta \right|$$

e quindi l'asserto, a norma di quanto sopra detto, osservando, in più, che risulta $y'' - \frac{b}{n} \leq y' - y'$.

⁽⁶⁹⁾ Cfr. loco cit. in ⁽²⁴⁾.

⁽⁷⁰⁾ Basta, infatti, assumere $e_x^{(n)} = (\Delta_x - C_x^\varepsilon) \cup X$, per essere verificate le condizioni della definizione 1.1.

Inoltre si ha, per ogni $n \in N$:

$$(4.10) \quad |\tilde{w}_n(x, y)| \leq |\varphi(x)| + \int_0^b M(x, \eta) d\eta = \chi(x) \text{ per } y \in \Delta_y \text{ e quasi ovunque in } \Delta_x,$$

$\chi(x)$ risultando sommabile e quindi quasi continua in Δ_x ⁽⁷¹⁾.

A norma del teorema 1.8, tenendo presente le (4.9) e (4.10) nonché l'ipotesi γ), ne viene, allora, che la successione $(\tilde{v}_n(x, y))_{n \in N}$, costituita da funzioni dell'insieme T , è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x .

Ripetendo quanto precedentemente fatto in riferimento alla successione $(z_n(x, y))_{n \in N}$, si dimostra che le funzioni della successione $(h_n(x, y))_{n \in N}$ sono equicontinue ed equilimitate in Δ , avendosi, in particolare, per ogni $n \in N$:

$$(4.11) \quad |h_n(x, y)| \leq M_1 \text{ per } (x, y) \in \Delta;$$

pertanto, la successione $(h_n(x, y))_{n \in N}$ è compatta rispetto alla convergenza uniforme.

Inoltre, si ha, per ogni $n \in N$:

$$(4.12) \quad |\tilde{v}_n(x, y)| \leq |\psi(y)| + \int_0^a M(\xi, y) d\xi = \eta(y) \text{ per } x \in \Delta_x \text{ e quasi ovunque in } \Delta_y,$$

$\eta(y)$ risultando sommabile e quindi quasi continua in Δ_y .

In virtù delle (4.11), (4.12) e dell'ipotesi δ), ne viene, allora, a norma del teorema 1.10, che la successione $(\tilde{w}_n(x, y))_{n \in N}$ è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad y .

Dalle successioni $(z_n(x, y))_{n \in N}$, $(h_n(x, y))_{n \in N}$, $(\tilde{v}_n(x, y))_{n \in N}$, $(\tilde{w}_n(x, y))_{n \in N}$, possono, pertanto, estrarsi delle successioni $(z_{n_k}(x, y))_{k \in N}$, $(h_{n_k}(x, y))_{k \in N}$, $(\tilde{v}_{n_k}(x, y))_{k \in N}$ e $(\tilde{w}_{n_k}(x, y))_{k \in N}$, le prime due uniformemente convergenti in Δ , le altre due quasi uniformemente convergenti in Δ in modo semiregolare rispetto ad x e ad y rispettivamente. Detta, allora, Y_0 la parte di misura nulla di Δ_y per gli y della quale la successione $(\tilde{v}_{n_k}(x, y))_{k \in N}$ non converge ovunque in Δ_x ed X_0 la parte di misura nulla di Δ_x per gli x della quale la successione $(\tilde{w}_{n_k}(x, y))_{k \in N}$

(71) Tali sono, infatti, ivi, $|\varphi(x)|$, a norma dell'ipotesi α), e $\int_0^b M(x, \eta) d\eta$, essendo $M(x, y)$ sommabile in Δ .

non converge ovunque in Δ_y , poniamo:

$$(4.13) \quad \tilde{v}(x, y) = \begin{cases} \lim_k \tilde{v}_{n_k}(x, y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times (\Delta_y - Y_0) \\ \psi(y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times Y_0 \end{cases}$$

$$(4.14) \quad \tilde{w}(x, y) = \begin{cases} \lim_k \tilde{w}_{n_k}(x, y) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X_0) \times \Delta_y \\ \varphi(x) & \text{per } (x, y) \in X_0 \times \Delta_y, \end{cases}$$

ed ancora:

$$(4.15) \quad z(x, y) = \lim_k z_{n_k}(x, y), \quad h(x, y) = \lim_k h_{n_k}(x, y) \quad \text{per } (x, y) \in \Delta.$$

È facile constatare che le funzioni $\tilde{v}(x, y)$ e $\tilde{w}(x, y)$, definite dalle (4.13) e (4.14), costituiscono una soluzione del problema (I) (II) in Δ .

Si ha, infatti, da (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8):

$$(4.16) \quad \tilde{v}_{n_k}(x, y) = \begin{cases} \psi(y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x^{(1)} \times (\Delta_y - Y) \\ \psi(y) + \int_0^{x - \frac{\alpha}{n_k}} F(\xi, y, \sigma(\xi)) + \int_0^y \tilde{v}_{n_k}(\xi, t) dt, \tilde{v}_{n_k}(\xi, y), \tilde{w}_{n_k}(\xi, y) d\xi & \\ & \text{per } (x, y) \in (\bigcup_{2 \leq i \leq n_k} \Delta_x^{(i)}) \times (\Delta_y - Y) \end{cases}$$

e

$$(4.17) \quad \tilde{w}_{n_k}(x, y) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y^{(1)} \\ \varphi(x) + \int_0^{y - \frac{b}{n_k}} G(x, \eta, \tau(\eta)) + \int_0^x \tilde{w}_{n_k}(t, \eta) dt, \tilde{v}_{n_k}(x, \eta), \tilde{w}_{n_k}(x, \eta) d\eta & \\ & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times (\bigcup_{2 \leq i \leq n_k} \Delta_y^{(i)}); \end{cases}$$

avendosi, inoltre, dalla (4.4) e dalla (4.7), a norma della (4.10), della (4.12), delle (4.13), (4.14) e delle (4.15):

$$z(x, y) = \sigma(x) + \int_0^y \tilde{v}(x, t) dt, \quad h(x, y) = \tau(y) + \int_0^x \tilde{w}(t, y) dt,$$

dalle (4.16) e (4.17), in virtù dell'ipotesi β) e delle (4.13) e (4.14), ne viene:

$$\tilde{v}(x, y) = \psi(y) + \int_0^x F(\xi, y, \sigma(\xi)) + \int_0^y \tilde{v}(\xi, t) dt, \tilde{v}(\xi, y), \tilde{n}(\xi, y) d\xi \text{ in } \Delta_x \times (\Delta_y - (Y \cup Y_0))$$

e

$$\tilde{n}(x, y) = \varphi(x) + \int_0^y G(x, \eta, \tau(\eta)) + \int_0^x \tilde{n}(t, \eta) dt, \tilde{v}(x, \eta) \tilde{n}(x, \eta) d\eta \text{ in } (\Delta_x - (X \cup X_0)) \times \Delta_y$$

e quindi, infine, quasi ovunque in Δ ⁽⁷²⁾:

$$\frac{\partial \tilde{v}(x, y)}{\partial x} = F(x, y, \sigma(x)) + \int_0^y \tilde{v}(x, t) dt, \tilde{v}(x, y), \tilde{n}(x, y)$$

$$\frac{\partial \tilde{n}(x, y)}{\partial y} = G(x, y, \tau(y)) + \int_0^x \tilde{n}(t, y) dt, \tilde{v}(x, y) \tilde{n}(x, y).$$

Poiché, poi:

$$\tilde{v}(0, y) = \psi(y), \quad \tilde{n}(x, 0) = \varphi(x)$$

e, ovviamente, $\tilde{v}(x, y) \in S$ e $\tilde{n}(x, y) \in S'$ ⁽⁷³⁾, segue l'asserto.

Il teorema é, così, dimostrato.

Vale, anche, il seguente altro teorema di esistenza relativo al problema (I) (II) e che assorbe un teorema già dimostrato in G. SANTAGATI [3] ⁽⁷⁴⁾:

TEOREMA 4.2. - *Le funzioni $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $F(x, y, z, v, w)$, $G(x, y, z, v, w)$ soddisfino le ipotesi $\alpha)$, $\beta)$, $\delta)$ del teorema 4.1 unite alla seguente:*

$\gamma')$ *Definite la costante M_1 e la funzione $\chi(x)$ come nell'enunciato del teorema 4.1, per quasi ogni $y \in \Delta_y$, comunque si assegnino due successioni $(\varphi_{i, n}(x))_{n \in N}$ ($i = 1, 2$), la prima di funzioni continue in Δ_x e la seconda di funzioni ivi misurabili, verificanti, per ogni $n \in N$, le limitazioni:*

$$|\varphi_{1, n}(x)| \leq M_1 \text{ per } x \in \Delta_x, \quad |\varphi_{2, n}(x)| \leq \chi(x) \text{ quasi ovunque in } \Delta_x,$$

⁽⁷²⁾ Cfr. L. M. GRAVES [1], pp. 252-253.

⁽⁷³⁾ Ricordiamo che gli insiemi S ed S' sono stati definiti nell'introduzione.

⁽⁷⁴⁾ Cfr. teorema III^o, p. 98.

il problema:

$$(4.18) \quad v(x) = \phi(y) + \lim_n \int_0^x F(\xi, y, \varphi_{1,n}(\xi), v(\xi), \varphi_{2,n}(\xi)) d\xi \quad \text{in } \Delta_x$$

non abbia più di una soluzione assolutamente continua.

Allora, il problema (I) (II) ammette almeno una soluzione in Δ .

La dimostrazione di questo teorema si consegue con lo stesso procedimento seguito per dimostrare il teorema 4.1, invocando, però, questa volta, il criterio di compattezza 1.9 al posto del criterio 1.8 e intendendo che Y è la parte di misura nulla di Δ_y per gli y della quale o $M(x, y)$ non è sommabile rispetto ad x o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (4.18) ovvero la funzione F non gode della proprietà (C) ⁽⁷⁵⁾.

5. - Teoremi di esistenza per il problema (III) (II).

Stabiliamo, ora, il seguente teorema di esistenza relativo al problema (III) (II):

TEOREMA 5.1. - *Se sono soddisfatte le ipotesi del teorema 4.1, allora il problema (III) (II) ammette almeno una soluzione in Δ .*

Mantenendo le notazioni introdotte nel teorema 4.1, definiamo, univocamente, in Δ , le funzioni delle successioni $(z_n(x, y))_{n \in N}$, $(\tilde{v}_n(x, y))_{n \in N}$, $(\tilde{w}_n(x, y))_{n \in N}$ mediante le (4.3), (4.4), (4.5) e ponendo, ancora, per ogni $n \in N$:

$$w_n(x, y) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y^{(1)} \\ \varphi(x) + \int_0^{y - \frac{b}{n}} G(x, \eta, z_n(x, \eta), \tilde{v}_n(x, \eta), w_n(x, \eta)) d\eta & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \left(\bigcup_{2 \leq i \leq n} \Delta_y^{(i)} \right) \end{cases}$$

e quindi:

$$\tilde{w}_n(x, y) = \begin{cases} w_n(x, y) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y \\ \varphi(x) & \text{per } (x, y) \in X \times \Delta_y. \end{cases}$$

⁽⁷⁵⁾ Il teorema 4.2 si può anche riguardare come corollario del teorema 4.1 e, pertanto, quest'ultimo assorbe pure il teorema III^o, p. 98 di G. SANTAGATI [3].

Le funzioni $z_n(x, y)$ risultano continue in Δ , mentre le funzioni $v_n(x, y)$ ivi sommabili rispetto ad y per ogni x , continue rispetto ad x per ogni y e le funzioni $\tilde{w}_n(x, y)$ ivi sommabili rispetto ad x per ogni y continue rispetto ad y per ogni x .

Con procedimento analogo a quello seguito nel teorema 4.1, invocando, sempre, i teoremi di compattezza 1.8 e 1.10, si consegue, allora, l'asserto.

Con lo stesso metodo indicato per la dimostrazione del teorema 5.1, invocando, però, il teorema di compattezza 1.9 invece del teorema 1.8, si dimostra anche il seguente teorema di esistenza, relativo al problema (III) (II), che assorbe un teorema dimostrato altrove ⁽⁷⁶⁾:

TEOREMA 5.2. - *Se sono verificate le ipotesi del teorema 4.2, allora il problema (III) (II) ammette almeno una soluzione in Δ ⁽⁷⁷⁾.*

Oltre ai teoremi 5.1 e 5.2 si hanno, anche, altri teoremi di esistenza per il problema (III) (II), qualora si sostituisca il criterio di compattezza 1.10, utilizzato nella loro dimostrazione, col criterio 1.4.

Detto, infatti, C^* l'insieme delle funzioni di due variabili definite in Δ , ivi doppiamente assolutamente continue ed inoltre assolutamente continue rispetto alle variabili separatamente ⁽⁷⁸⁾ e, quindi, Γ l'insieme delle funzioni $\varphi(x, y) \in C^*$, soddisfacenti le relazioni:

$$\varphi(x, 0) = \sigma(x) \text{ in } \Delta_x, \quad \varphi(0, y) = \tau(y) \text{ in } \Delta_y,$$

$$|\varphi_\nu(x_1, y) - \varphi_\nu(x_2, y)| \leq \left| \int_{x_2}^{x_1} M(\xi, y) d\xi \right| \text{ per } x_1, x_2 \in \Delta_x, \text{ quasi ovunque in } \Delta_y,$$

cominciamo col dimostrare il teorema seguente:

TEOREMA 5.3. - *Le funzioni $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $F(x, y, z, v, w)$, $G(x, y, z, v, w)$ soddisfino le ipotesi $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ del teorema 4.1 unite alla seguente:*

$\delta')$ *Per quasi ogni $x \in \Delta_x$, comunque si assegni la funzione $\varphi(x, y) \in \Gamma$,*

⁽⁷⁶⁾ Cfr. G. SANTAGATI [3], teorema IV°, p. 114.

⁽⁷⁷⁾ Il teorema 5.2 si può riguardare, pure, come un corollario del teorema 5.1 e, pertanto, quest'ultimo assorbe anche il teorema IV° di G. SANTAGATI [3], p. 114.

⁽⁷⁸⁾ Ogni funzione dell'insieme C^* è una di quelle funzioni che C. CARATHÉODORY chiama « *totalstetig* »; ogni tale funzione ammette derivate prime e derivata seconda mista (unica) misurabili. Cfr. C. CARATHÉODORY [1], pp. 651-661 e, in particolare, p. 654.

il problema:

$$(5.1) \quad w(y) = \varphi(x) + \int_0^y G(x, \eta, \varphi(x, \eta), \varphi_v(x, \eta), w(\eta)) d\eta \quad \text{in } \Delta_v$$

non abbia più di una soluzione.

Allora, il problema (III) (II) ammette almeno una soluzione in Δ .

Detta X la parte di misura nulla di Δ_x per gli x della quale o $M(x, y)$ non è sommabile rispetto ad y o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (5.1) ovvero la funzione G non gode della proprietà (C'), proviamo preliminarmente che l'ipotesi δ' assicura l'unicità della soluzione per il problema:

$$(5.2) \quad w(y) = \varphi(x^*) + \int_0^y G(x^*, \eta, Z(\eta), Z'(\eta), w(\eta)) d\eta \quad \text{in } \Delta_v$$

per ogni $x^* \in \Delta_x - X$ e qualunque sia la funzione $Z(y)$ assolutamente continua in Δ_v e soddisfacente le relazioni:

$$Z(0) = \sigma(x^*), \quad |Z'(y) - \psi(y)| \leq \int_0^{x^*} M(t, y) dt \quad \text{per quasi ogni } y \in \Delta_v.$$

Per dimostrare ciò, essendo ovvio che il problema (5.2) ammette soluzione per ogni $x^* \in \Delta_x - X$, basta provarne l'unicità; occorre, all'uopo, distinguere due casi: (a) $0 \in X$, (b) $0 \notin X$.

Esaminiamo il caso (a). Poiché $x^* \in \Delta_x - X$, si avrà $x^* \neq 0$; tenendo, allora, presente detto in (σ'), posto:

$$\varphi(x, y) = Z(y) - \sigma(x^*) + \sigma(x) - \int_0^y d\eta \int_x^{x^*} \frac{M(\xi, \eta) [Z'(\eta) - \psi(\eta)]}{\int_0^{x^*} M(t, \eta) dt} d\xi,$$

è facile provare che $\varphi(x, y) \in \Gamma$.

Risultando, poi, $\varphi(x^*, y) = Z(y)$, resta dimostrato l'asserto.

Esaminiamo, ora, il caso (b). Poiché $x^* \in \Delta_x - X$, si avrà $x^* \geq 0$, $x^* \notin X$.

Il caso in cui $x^* > 0$, $x^* \notin X$ si esamina in maniera analoga al caso (a).

Resta, allora, da esaminare il caso in cui $x^* = 0$. All'uopo, osservato che si

ha, in questo caso:

$$Z'(y) = \psi(y) \text{ quasi ovunque in } \Delta_y,$$

e quindi:

$$Z(y) = z_0 + \int_0^y \psi(t) dt = \tau(y),$$

posto:

$$\varphi(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - z_0,$$

risulta, ovviamente, $\varphi(x, y) \in \Gamma$ e $\varphi(x^*, y) = \varphi(0, y) = Z(y)$ e, perciò, ancora l'asserto.

Ciò posto, mantenendo le notazioni introdotte nel teorema 4.1, salvo il diverso significato di X , definiamo, univocamente, in Δ , le funzioni delle successioni $(z_n(x, y))_{n \in N}$, $(\tilde{v}_n(x, y))_{n \in N}$, $(\tilde{w}_n(x, y))_{n \in N}$ mediante le (4.3), (4.4), (4.5) e ponendo, ancora, per ogni $n \in N$:

$$(5.3) \quad \tilde{w}_n(x, y) = \begin{cases} w_n(x, y) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y \\ \varphi(x) & \text{per } (x, y) \in X \times \Delta_y, \end{cases}$$

$w_n(x, y)$ essendo, per ogni $n \in N$ e per ogni $x \in \Delta_x - X$, la soluzione ⁽⁷⁹⁾ del problema:

$$(5.4) \quad w_n(x, y) = \varphi(x) + \int_0^y G(x, \eta, z_n(x, \eta), \tilde{v}_n(x, \eta), w_n(x, \eta)) d\eta \text{ in } \Delta_y.$$

Le (4.3), (4.4), (4.5) e (5.3) definiscono, effettivamente, in modo univoco, per ogni $n \in N$, in Δ , le funzioni $z_n(x, y)$, $\tilde{v}_n(x, y)$ e $\tilde{w}_n(x, y)$. Infatti, la prima delle (4.3) definisce $v_n(x, y)$ in $\Delta_x^{(1)} \times (\Delta_y - Y)$ risultando, ivi, $v_n(x, y)$ sommabile rispetto ad y per ogni x e continua rispetto ad x per ogni y ; la (4.5) definisce $\tilde{v}_n(x, y)$ in $\Delta_x^{(1)} \times \Delta_y$ risultando ivi sommabile rispetto ad y per ogni x e continua rispetto ad x per ogni y ; la (4.4) definisce, quindi, in $\Delta_x^{(2)} \times \Delta_y$, $z_n(x, y)$ che risulta ivi continua nonché assolutamente continua rispetto ad y .

⁽⁷⁹⁾ Tale soluzione esiste unica, come sarà provato, a norma di quanto sopra dimostrato.

Poiché:

$$z_n(x^*, 0) = \sigma(x^*), \quad x^* \in \Delta_x^{(1)} - X$$

$$|\tilde{v}_n(x^*, y) - \psi(y)| = 0 \leq \int_0^{x^*} M(\xi, y) d\xi,$$

per quanto rilevato all'inizio della dimostrazione, la (5.4) definisce univocamente $w_n(x, y)$ in $(\Delta_x^{(1)} - X) \times \Delta_y$, risultando $w_n(x, y)$, per ogni $y \in \Delta_y$, misurabile rispetto ad x ⁽⁸⁰⁾ e, per ogni $x \in \Delta_x^{(1)} - X$, continua rispetto ad y ; la (5.3) definisce, quindi, $\tilde{w}_n(x, y)$ in $\Delta_x^{(1)} \times \Delta_y$, risultando ivi misurabile rispetto ad x per ogni y e continua rispetto ad y per ogni x .

La funzione $F(x, y, z_n(x, y), v_n(x, y), \tilde{w}_n(x, y))$, per ogni $y \in \Delta_y - Y$ risulta, allora, misurabile in $\Delta_x^{(1)}$ e maggiorata, in valore assoluto, da una funzione sommabile; pertanto, la seconda delle (4.3) definisce $v_n(x, y)$ in $\Delta_x^{(2)} \times (\Delta_y - Y)$, risultando ivi sommabile rispetto ad y per ogni x e continua rispetto ad x per ogni y . Conseguentemente, la (4.5) definisce $\tilde{v}_n(x, y)$ in $\Delta_x^{(2)} \times \Delta_y$ risultando ivi sommabile rispetto ad y per ogni x e continua rispetto ad x per ogni y ; la (4.4) definisce $z_n(x, y)$ in $\Delta_x^{(2)} \times \Delta_y$, risultando ivi continua nonché assolutamente continua rispetto ad y ; poiché:

$$z_n(x^*, 0) = \sigma(x^*), \quad x^* \in \Delta_x^{(2)} - X$$

$$|\tilde{v}_n(x^*, y) - \psi(y)| \leq \int_0^{x^*} M(\xi, y) d\xi,$$

per quanto detto in precedenza, segue che la (5.4) definisce univocamente $w_n(x, y)$ in $(\Delta_x^{(2)} - X) \times \Delta_y$, risultando $w_n(x, y)$, per ogni $y \in \Delta_y$, misurabile rispetto ad x e, per ogni $x \in \Delta_x^{(2)} - X$, continua rispetto ad y ; la (5.3) definisce, allora, $\tilde{w}_n(x, y)$ in $\Delta_x^{(2)} \times \Delta_y$, risultando ivi misurabile rispetto ad x per ogni y e continua rispetto ad y per ogni x .

Ne discende, così, che le funzioni $\tilde{v}_n(x, y)$, $z_n(x, y)$ e $\tilde{w}_n(x, y)$ vengono ad essere definite in $(\Delta_x^{(1)} \cup \Delta_x^{(2)}) \times \Delta_y$ risultando ivi $\tilde{v}_n(x, y)$ sommabile rispetto ad y per ogni x e continua rispetto ad x per ogni y , $z_n(x, y)$ continua nonché assolutamente continua rispetto ad y , $\tilde{w}_n(x, y)$ misurabile rispetto ad x per ogni y e continua rispetto ad y per ogni x .

⁽⁸⁰⁾ Cfr. G. ARNESE [1], p. 161.

Così proseguendo si arriva a concludere che, per ogni $n \in N$, le funzioni $z_n(x, y)$, $\tilde{v}_n(x, y)$ e $\tilde{w}_n(x, y)$ sono univocamente definite in Δ , risultando ivi le $z_n(x, y)$ continue, le $\tilde{v}_n(x, y)$ sommabili rispetto ad y per ogni x e continue rispetto ad x per ogni y , le $\tilde{w}_n(x, y)$ misurabili rispetto ad x per ogni y e continue rispetto ad y per ogni x .

Con procedimento analogo a quello seguito nel teorema 4.1, si prova che la successione $(z_n(x, y))_{n \in N}$ è costituita da funzioni equicontinue ed equilimitate in Δ e pertanto è compatta rispetto alla convergenza uniforme avendosi, ancora, in particolare, la (4.9). La successione $(\tilde{w}_n(x, y))_{n \in N}$ è, poi, costituita da funzioni appartenenti all'insieme T' e godenti, inoltre, uniformemente delle proprietà B' ; si ha, infatti, per ogni $n \in N$:

$$|\tilde{w}_n(x, y') - \tilde{w}_n(x, y'')| \leq \left| \int_{y''}^{y'} M(x, \eta) d\eta \right| \text{ per } (x, y'), (x, y'') \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y$$

ed inoltre, per ogni coppia di numeri reali positivi ε ed ω esistono ⁽⁸¹⁾ una parte chiusa C_x^ε di Δ_x tale che $m(\Delta_x - C_x^\varepsilon) < \varepsilon$ ed un numero reale positivo δ in guisa tale che $\left| \int_{y''}^{y'} M(x, \eta) d\eta \right| < \omega$ per ogni coppia, y' ed y'' , di valori di y soddisfacenti alla limitazione $|y' - y''| < \delta$, uniformemente al variare di $x \in C_x^\varepsilon$ ⁽⁸²⁾.

Inoltre, per $y \in \Delta_y$ e quasi ovunque in Δ_x , le funzioni $\tilde{w}_n(x, y)$ verificano, anche qui, la (4.10); a norma del teorema 1.8, essendo verificata l'ipotesi γ , ne viene, allora, che la successione $(\tilde{w}_n(x, y))_{n \in N}$, costituita da funzioni dell'insieme T , è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x avendosi, inoltre, ancora la (4.12).

Dette $z^*(x, y)$ e $\tilde{v}^*(x, y)$ le funzioni limiti, rispetto ad x , di due successioni $(z_n(x, y))_{n \in N}$ e $(\tilde{v}_n(x, y))_{n \in N}$ estratte dalle successioni $(z_n(x, y))_{n \in N}$ e $(\tilde{v}_n(x, y))_{n \in N}$, dalla (4.4), in virtù della (4.12), si ha:

$$z^*(x, y) = \sigma(x) + \int_0^y \tilde{v}^*(x, t) dt, \quad (x, y) \in \Delta,$$

⁽⁸¹⁾ Cfr. G. ARNESE [2], p. 16.

⁽⁸²⁾ Basta, anche qui, assumere $e_x^{(n)} = (\Delta_x - C_x^\varepsilon) \cup X$ per essere verificate le condizioni della definizione 1.1.

da cui ⁽⁸³⁾:

$$z_y^*(x, y) = \tilde{v}^*(x, y) \text{ quasi ovunque in } \Delta.$$

Poiché, poi, come si deduce dalle (4.3), (4.4) e (4.5), $z^*(x, y) \in \Gamma$, si conclude, a norma dell'ipotesi δ' , che il problema (5.1), per quasi ogni $x \in \Delta_x$, non ha più di una soluzione quando vi si pone $\varphi(x, y) = z^*(x, y)$, $\varphi_y(x, y) = \tilde{v}^*(x, y)$. D'altra parte, per la costruzione fatta, $w_n(x, y)$ è, per quasi ogni $x \in \Delta_x$, l'unica soluzione del problema (5.4) e, quindi, l'unica soluzione del problema (5.1) quando vi si pone $\varphi(x, y) = z_n(x, y)$, $\varphi_y(x, y) = \tilde{v}_n(x, y)$.

In base a quanto sopra osservato, a norma del teorema 1.4, ne segue, allora, che la successione $(\tilde{w}_n(x, y))_{n \in N}$, di funzioni definite dalle (5.3), è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad y .

Dalle successioni $(z_n(x, y))_{n \in N}$, $(\tilde{v}_n(x, y))_{n \in N}$, $(\tilde{w}_n(x, y))_{n \in N}$ possono, pertanto, estrarsi delle successioni $(z_{n_k}(x, y))_{k \in N}$, $(\tilde{v}_{n_k}(x, y))_{k \in N}$ e $(\tilde{w}_{n_k}(x, y))_{k \in N}$, la prima uniformemente convergente in Δ , le altre due quasi uniformemente in Δ in modo semiregolare rispetto ad x e ad y rispettivamente.

Definite, allora, le funzioni $z(x, y)$, $\tilde{v}(x, y)$ e $\tilde{w}(x, y)$ mediante la prima delle (4.15) e le analoghe alle (4.13) e (4.14) si prova facilmente, analogamente a quanto fatto nel teorema 4.1, con le dovute modifiche formali, che le funzioni $\tilde{v}(x, y)$ e $\tilde{w}(x, y)$ costituiscono una soluzione del problema (III) (II) in Δ .

Il teorema è, così, dimostrato.

Con lo stesso metodo seguito per la dimostrazione del teorema 5.3, invocando, però, il teorema di compattezza 1.9 invece del teorema 1.8, si dimostra anche il seguente altro teorema di esistenza, relativo al problema (III) (II), che generalizza il teorema IV° di G. SANTAGATI [3]:

TEOREMA 5.4. - *Se sono verificate le ipotesi α), β), γ') del teorema 4.2 nonché l'ipotesi δ') del teorema 5.3, allora il problema (III) (II) ammette almeno una soluzione in Δ ⁽⁸⁴⁾.*

6. - Teoremi di esistenza per i problemi (I) (II) e (III) (II) casi particolari dei precedenti.

Dai teoremi 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 stabiliti nei nn. 4 e 5, si possono dedurre, per i problemi (I) (II) e (III) (II), facendo uso dei criteri di compattezza 3.1 e 3.2, altri teoremi di esistenza nei quali l'ipotesi γ) ovvero l'ipo-

⁽⁸³⁾ Cfr. L. M. GRAVES [1], pp. 252-253.

⁽⁸⁴⁾ Il teorema 5.4 si può riguardare, pure, come un corollario del teorema 5.3 e, pertanto, quest'ultimo assorbe anche il teorema IV° di G. SANTAGATI [3], p. 114.

tesi γ'), alquanto generali, vengono sostituite da ipotesi più restrittive ma di più facile verifica.

Si hanno, così, i seguenti teoremi:

TEOREMA 6.1. - *Le funzioni $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $F(x, y, z, v, w)$, $G(x, y, z, v, w)$ soddisfino le ipotesi $\alpha)$, $\beta)$, $\delta)$ del teorema 4.1 unite alla seguente:*

γ'') *La funzione $F(x, y, z, v, w)$ verifichi in S_0 la condizione (D) ⁽⁸⁵⁾ rispetto alla coppia (x, v) uniformemente rispetto a z e w .*

Allora il problema (I) (II) ammette almeno una soluzione in Δ .

TEOREMA 6.2. - *Le funzioni $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $F(x, y, z, v, w)$, $G(x, y, z, v, w)$ soddisfino le ipotesi $\alpha)$, $\beta)$, $\delta)$ del teorema 4.1 unite alla seguente:*

$\gamma''')$ *Per quasi ogni $y \in \Delta_y$ esistano due funzioni $\mu(x)$ ed $\omega(u)$, la prima definita quasi ovunque in Δ_x e sommabile in ogni intervallo $[\delta, a]$, $0 < \delta < a$, e la seconda definita per $u > 0$, continua e positiva, tali da aversi:*

$$c_1) \quad \int_{a_1}^a \mu(x) dx < P \quad (0 < a_1 < a_2 \leq a)$$

P essendo una costante;

$$c_2) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_{\tau}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \quad (u_0 > 0);$$

$c_3)$ *risulta:*

$$F(x, y, z, v_1, w) - F(x, y, z, v_2, w) \leq \mu(x)\omega(v_1 - v_2)$$

per quasi tutti gli x di Δ_x , per $v_2 < v_1$, $v_1 - v_2 \leq K$, essendo K un certo numero positivo, e qualunque siano z e w .

Allora il problema (I) (II) ammette almeno una soluzione in Δ .

TEOREMA 6.3. - *Se sono soddisfatte le ipotesi del teorema 6.1, il problema (III) (II) ammette almeno una soluzione in Δ .*

TEOREMA 6.4. - *Se sono soddisfatte le ipotesi del teorema 6.2, il problema (III) (II) ammette almeno una soluzione in Δ .*

TEOREMA 6.5. - *Se sono soddisfatte le ipotesi $\alpha)$, $\beta)$, $\delta')$ del teorema 5.3 nonché l'ipotesi γ'') del teorema 6.1, il problema (III) (II) ammette almeno una soluzione in Δ .*

⁽⁸⁵⁾ Cfr. la definizione 2.1 del presente lavoro.

TEOREMA 6.6. - *Se sono soddisfatte le ipotesi α), β), δ') del teorema 5.3 nonché l'ipotesi γ'') del teorema 6.2, il problema (III) (II) ammette almeno una soluzione in Δ ⁽⁸⁶⁾.*

7. - Due problemi iperbolici ausiliari.

Consideriamo, ora, i problemi seguenti:

$$(7.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = F(x, y, V, V_y, W_x) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = G(x, y, W, V_y, W_x) \end{cases}, \quad (x, y) \in \Delta$$

$$(7.2) \quad \begin{cases} V(x, 0) = \sigma(x) \\ W(x, 0) = \sigma(x) \end{cases}, \quad x \in \Delta_x$$

$$(7.3) \quad \begin{cases} V(0, y) = \tau(y) \\ W(0, y) = \tau(y) \end{cases}, \quad y \in \Delta_y$$

e:

$$(7.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = F(x, y, V, V_y, W) \\ \frac{\partial W}{\partial y} = G(x, y, V, V_y, W) \end{cases}, \quad (x, y) \in \Delta$$

$$(7.5) \quad \begin{cases} V(x, 0) = \sigma(x) \\ W(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}, \quad x \in \Delta_x$$

$$(7.6) \quad V(0, y) = \tau(y), \quad y \in \Delta_y,$$

$F(x, y, z, v, w)$, $G(x, y, z, v, w)$, $\sigma(x)$, $\tau(y)$ e $\varphi(x)$ essendo le medesime funzioni note introdotte nello studio dei problemi (I) (II) e (III) (II).

⁽⁸⁶⁾ I teoremi 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4 generalizzano, nell'ordine, i teoremi V°, VI°, VII° e VIII° di G. SANTAGATI [3]; i teoremi 6.5 e 6.6 generalizzano, anche essi, i teoremi VII° e VIII° sopra citati.

Con riferimento ai problemi (7.1) (7.2) (7.3) e (7.4) (7.5) (7.6), a norma, anche, dei risultati stabiliti nei nn. 4, 5 e 6, possiamo dimostrare dei teoremi di esistenza, intendendo per soluzione del primo una coppia di funzioni $V(x, y)$, $W(x, y)$ dell'insieme C^* ⁽⁸⁷⁾ verificanti le (7.2) (7.3) e, quasi ovunque in Δ , il sistema (7.1), e per soluzione del secondo una coppia di funzioni $V(x, y)$, $W(x, y)$, la prima dell'insieme C^* , la seconda dell'insieme S' ⁽⁸⁸⁾ verificanti le (7.5) (7.6) e, quasi ovunque in Δ , il sistema (7.4).

Valgono, infatti, i teoremi seguenti:

TEOREMA 7.1. - *Se sono soddisfatte le ipotesi α) e β) del teorema 4.1 e se per il problema (I) (II) vale un teorema di esistenza in Δ , allora il problema (7.1) (7.2) (7.3) ammette almeno una soluzione ivi.*

TEOREMA 7.2. - *Se sono soddisfatte le ipotesi α) e β) del teorema 4.1 e se per il problema (III) (II) vale un teorema di esistenza in Δ , allora il problema (7.4) (7.5) (7.6) ammette almeno una soluzione ivi ⁽⁸⁹⁾.*

La tesi del teorema 7.1 consegue osservando che se $v(x, y)$, $w(x, y)$ è una soluzione del problema (I) (II), esistente per ipotesi, posto:

$$V(x, y) = \sigma(x) + \int_0^y v(x, t) dt, \quad W(x, y) = \tau(y) + \int_0^x w(t, y) dt,$$

le funzioni $V(x, y)$, $W(x, y)$, ovviamente appartenenti a C^* , verificano le (7.2) (7.3) e, quasi ovunque in Δ , il sistema (7.1).

La tesi del teorema 7.2 consegue, invece, osservando che se $v(x, y)$, $w(x, y)$ è una soluzione del problema (III) (II), esistente per ipotesi, posto:

$$V(x, y) = \sigma(x) + \int_0^y v(x, t) dt, \quad W(x, y) = w(x, y)$$

le funzioni $V(x, y)$, $W(x, y)$, ovviamente la prima appartenente a C^* e la seconda appartenente ad S' , verificano le (7.5) (7.6) e, quasi ovunque in Δ , il sistema (7.4).

Dai teoremi 7.1 e 7.2, a norma dei teoremi stabiliti nei nn. 4, 5 e 6, discendono, allora, i seguenti altri teoremi di esistenza per i problemi (7.1) (7.2) (7.3) e (7.4) (7.5) (7.6):

⁽⁸⁷⁾ La definizione di C^* è stata posta al n. 5 del presente lavoro.

⁽⁸⁸⁾ L'insieme S' è stato definito nell'introduzione.

TEOREMA 7.3. - *Se sono soddisfatte le ipotesi di uno dei teoremi 4.1, 4.2, 6.1, 6.2, il problema (7.1) (7.2) (7.3) ammette almeno una soluzione in Δ .*

TEOREMA 7.4. - *Se sono soddisfatte le ipotesi di uno dei teoremi 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, il problema (7.4) (7.5) (7.6) ammette almeno una soluzione in Δ ⁽⁸⁰⁾.*

8. - Il problema di Darboux.

Notiamo, ora, che il problema (7.4) (7.5) (7.6), posto :

$$(8.1) \quad z(x, y) = V(x, y),$$

se, in particolare, si ha :

$$(8.2) \quad G(x, y, z, v, w) = F(x, y, z, v, w) = f(x, y, z, w, v),$$

si muta nel classico problema di DARBOUX :

$$(8.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, z_x, z_y), \quad (x, y) \in \Delta \end{array} \right.$$

$$(8.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} z(x, 0) = \sigma(x), \quad x \in \Delta_x, \quad z(0, y) = \tau(y), \quad y \in \Delta_y, \quad (\sigma(0) = \tau(0) = z_0). \end{array} \right.$$

Invero, essendo $V(x, y) \in C^*$, si ha ⁽⁸¹⁾, a norma della prima delle (7.4) nonché della prima delle (7.5) e della (7.6) :

$$V(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - z_0 + \int_0^x \int_0^y F(\xi, \eta, V(\xi, \eta), V_{\nu}(\xi, \eta), W(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad \text{in } \Delta$$

cioè in virtù della (8.1) :

$$z(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - z_0 + \int_0^x \int_0^y F(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z_{\nu}(\xi, \eta), W(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad \text{in } \Delta$$

⁽⁸⁰⁾ I teoremi 7.1 e 7.2 generalizzano, rispettivamente, i teoremi IX° e X° di G. SANTAGATI [3].

⁽⁸¹⁾ I teoremi 7.3 e 7.4 generalizzano, rispettivamente, i teoremi XI° e XII° di G. SANTAGATI [3].

⁽⁸²⁾ Cfr. C. CARATHÉODORY [1]. pp. 653-654.

e quindi ⁽⁹²⁾:

$$z_x(x, y) = \varphi(x) + \int_0^y F(x, \eta, z(x, \eta), z_v(x, \eta), W(x, \eta)) d\eta$$

per quasi tutti gli $x \in \Delta_x$.

Avendosi, poi, per la seconda delle (7.4) nonché per la seconda delle (7.5), per la (8.1) e la (8.2):

$$W(x, y) = \varphi(x) + \int_0^y F(x, \eta, z(x, \eta), z_v(x, \eta), W(x, \eta)) d\eta$$

per quasi tutti gli $x \in \Delta_x$, ne segue, infine:

$$W(x, y) = z_x(x, y)$$

quasi ovunque in Δ_x .

A norma, allora, dei teoremi 7.2 e 7.4, restano acquisiti, con riferimento al caso in cui vale la (8.2), altrettanti teoremi di esistenza per il problema (8.3) (8.4), intendendo per soluzione di tale problema una funzione $z(x, y) \in C^$ che verifica le (8.4) e quasi ovunque in Δ , la (8.3) ⁽⁹³⁾.*

È ovvio, poi, che fra tali risultati viene ritrovato il teorema di G. ARNESE [2] e, conseguentemente, vengono assorbiti il teorema di W. WALTER [1] nonché il teorema di A. ALEXIEWCZ e W. ORLICZ [1], i teoremi da noi stabiliti in [1] e in [3] e quindi i teoremi di R. CONTI [1] e [2], nonché, ancora, sotto certi aspetti, il risultato di J. KISYNSKI [1] ⁽⁹⁴⁾.

⁽⁹²⁾ Cfr. L. M. GRAVES [1], pp. 252-253.

⁽⁹³⁾ Anche qui, si hanno teoremi di esistenza per il problema (8.3) (8.4) corrispondenti ai criteri di unicità di L. TONELLI, in precedenza citati.

⁽⁹⁴⁾ Cfr. (4). Per una letteratura piuttosto completa riguardante lo studio del problema (8.3) (8.4), basta consultare C. CILIBERTO [2], R. CONTI [1] e [2], F. GUGLIELMINO [2]. Si noti, poi, che, con riferimento al problema (8.3) (8.4), nel caso in cui la funzione $f(x, y, z, v, w)$ non dipenda da v e w , un altro risultato, sempre in ipotesi di CARATHÉODORY, è dovuto a F. GUGLIELMINO. Cfr., in proposito, F. GUGLIELMINO [1].

Un recente risultato, ancora, in riferimento non al problema esistenziale ma bensì allo studio del fenomeno di PEANO per l'insieme delle soluzioni del problema (8.3) (8.4) in ipotesi di CARATHÉODORY, è dovuto a G. PULVIRENTI. Cfr., in proposito, G. PULVIRENTI [1].

9. - Applicazione del teorema del punto unico di J. SCHAUDER al problema (I) (II).

Nelle dimostrazioni dei teoremi di esistenza svolte nei numeri 4 e 5 non abbiamo fatto uso dei criteri di compattezza 1.5, 1.6 e 1.7.

L'utilità di questi si rivela, invece, qualora si vogliano dimostrare i medesimi teoremi di esistenza sfruttando i metodi dell'analisi funzionale ed in particolare il teorema del punto unico di J. SCHAUDER ⁽⁹⁵⁾.

In questo numero e nel successivo ridimostreremo, appunto, i teoremi di esistenza 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4, valendoci di tali metodi attraverso l'applicazione dei criteri di compattezza sopra detti.

Cominciamo a dimostrare il teorema 4.1.

Si consideri, a tale scopo, lo spazio $\mathcal{C}^0(\Delta)$ delle funzioni $z(x, y)$ definite e continue in Δ ; esso è uno spazio di BANACH ⁽⁹⁶⁾ con la norma:

$$\|z\|_{\mathcal{C}^0(\Delta)} = \max \{ |z(x, y)| : (x, y) \in \Delta \}.$$

Si consideri, inoltre, lo spazio $L^1(\Delta)$ delle funzioni $g(x, y)$ definite e sommabili in Δ ; esso è pure uno spazio di BANACH con la norma:

$$\|g\|_{L^1(\Delta)} = \iint_{\Delta} |g(x, y)| \, dx \, dy \quad (97).$$

Diciamo, quindi, Σ lo spazio i cui elementi sono le coppie ordinate $U \equiv (z, g)$, $z \equiv z(x, y) \in \mathcal{C}^0(\Delta)$ e $g \equiv g(x, y) \in L^1(\Delta)$; lo spazio:

$$\Sigma = \mathcal{C}^0(\Delta) \times L^1(\Delta),$$

è, pure esso, uno spazio di BANACH con la norma:

$$\|U\|_{\Sigma} = \|z\|_{\mathcal{C}^0(\Delta)} + \|g\|_{L^1(\Delta)}.$$

Sia, poi, I la parte di Σ costituita dagli elementi $U \equiv (z, g)$, per cui:

$$\|z\|_{\mathcal{C}^0(\Delta)} \leq M_1, \quad |g(x, y)| \leq M(x, y) \quad \text{quasi ovunque in } \Delta,$$

⁽⁹⁵⁾ Cfr. J. SCHAUDER [1], p. 173. Per i concetti di analisi funzionale adoperati in questo numero e nel successivo cfr., ad es., C. MIRANDA [1].

⁽⁹⁶⁾ Cioè lineare, normale e completo.

⁽⁹⁷⁾ Occorre, naturalmente, fare la convenzione che due funzioni sommabili in Δ ed equivalenti (la misura essendo quella di LEBESGUE) si considerano come un unico elemento di $L^1(\Delta)$. Cfr. G. FICHERA [1], p. 318.

$$|z(x', y) - z(x'', y)| \leq |\sigma(x') - \sigma(x'')| + \left| \int_0^b \int_{x''}^{x'} M(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| \text{ in } \Delta$$

$$|z(x, y') - z(x, y'')| \leq \left| \int_{y''}^{y'} |\psi(\eta)| d\eta \right| + \left| \int_{y''}^{y'} \int_0^a M(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| \text{ in } \Delta;$$

I é, ovviamente, non vuota, chiusa e convessa.

Definiamo, ora, in I una trasformazione funzionale:

$$(9.1) \quad U' = T(U)$$

nel seguente modo ⁽⁹⁸⁾:

Assegnato $U \equiv (z, g) \in I$, poniamo in Δ :

$$(9.2) \quad h(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - z_0 + \int_0^x \int_0^y g(\xi, \eta) d\xi d\eta;$$

la funzione $h(x, y)$ é continua in Δ ; inoltre, per l'ipotesi α), si ha ⁽⁹⁹⁾:

$$(9.3) \quad h_x(x, y) = \varphi(x) + \int_0^y g(x, \eta) d\eta,$$

fatta eventualmente eccezione per gli x di una parte X_y (dipendente in generale da $g(x, y)$) di misura nulla di Δ_x e qualunque sia $y \in \Delta_y$.

La funzione $h_x(x, y)$ risulta continua rispetto ad y per quasi tutti gli $x \in \Delta_x$, nonché misurabile rispetto ad x per ogni $y \in \Delta_y$, cioè $h_x(x, y) \in T'$.

Detta Y la parte di misura nulla di Δ_y per gli y della quale o $M(x, y)$ non é sommabile rispetto ad x o non vale l'ipotesi di unicitá per il problema (4.1) ovvero la funzione F non gode della proprietá (C) ⁽¹⁰⁰⁾, la funzione $F(x, y, z(x, y), v, h_x(x, y))$, per ogni $y \in \Delta_y - Y$, risulta misurabile rispetto ad x per ogni v e continua rispetto a v per quasi ogni x nonché, a norma dell'ipotesi β), maggiorata, in valore assoluto, da una funzione sommabile di x .

⁽⁹⁸⁾ Il metodo usato per definire tale trasformazione funzionale si ispira ad un procedimento introdotto da noi in un precedente lavoro. Cfr. G. SANTAGATI [3].

⁽⁹⁹⁾ Cfr., ad es., L. M. GRAVES [1], pp. 252-253. Avvertiamo che con $h_x(x, y)$ indichiamo la derivata parziale rispetto ad x della funzione $h(x, y)$ dove essa esiste finita (cioé quasi ovunque), lo zero nella parte (di misura nulla) restante.

⁽¹⁰⁰⁾ Per questa proprietá, cfr. la definizione 1.3.

Avendosi, poi, per ogni $y \in \Delta_y$:

$$(9.4) \quad |z(x, y)| \leq M_1 \text{ per } x \in \Delta_x,$$

$$(9.5) \quad |h_x(x, y)| \leq |\varphi(x)| + \int_0^b M(x, \eta) d\eta = \chi(x) \text{ quasi ovunque in } \Delta_x,$$

in virtù dell'ipotesi γ), ne viene che il problema:

$$(9.6) \quad v(x, y) = \psi(y) + \int_0^x F(\xi, y, z(\xi, y), v(\xi, y), h_x(\xi, y)) d\xi \text{ in } \Delta_x \times (\Delta_y - Y)$$

ammette soluzione unica, $v(x, y)$, continua rispetto ad x per ogni $y \in \Delta_y - Y$ e ⁽¹⁰¹⁾ misurabile rispetto ad y per ogni $x \in \Delta_x$. Essa risulta, ancora, a norma delle ipotesi α) e β), sommabile rispetto ad y per ogni x in quanto si ha, per ogni $x \in \Delta_x$:

$$(9.7) \quad |v(x, y)| \leq |\psi(y)| + \int_0^a M(\xi, y) d\xi = \eta(y) \text{ quasi ovunque in } \Delta_y.$$

Posto, allora:

$$(9.8) \quad \tilde{v}(x, y) = \begin{cases} v(x, y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times (\Delta_y - Y) \\ \psi(y) & \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times Y, \end{cases}$$

la funzione $\tilde{v}(x, y)$, così definita in Δ , risulta continua rispetto ad x per ogni $y \in \Delta_y$ e misurabile rispetto ad y per ogni $x \in \Delta_x$, cioè $\tilde{v}(x, y) \in T$; inoltre, essa, risulta sommabile rispetto ad y per ogni $x \in \Delta_x$, avendosi ancora:

$$(9.9) \quad |\tilde{v}(x, y)| \leq |\psi(y)| + \int_0^a M(\xi, y) d\xi = \eta(y) \text{ per } x \in \Delta_x \text{ e quasi ovunque in } \Delta_y.$$

Detta X la parte di misura nulla di Δ_x per gli x della quale o $M(x, y)$ non é sommabile rispetto ad y o non vale l'ipotesi di unicità per il problema (4.2) ovvero la funzione G non gode della proprietà (C') ⁽¹⁰²⁾, la funzione $G(x, y, h(x, y), \tilde{v}(x, y), w)$, per ogni $x \in \Delta_x - X$, risulta misurabile rispetto

⁽¹⁰¹⁾ Cfr. G. ARNESE [1], p. 161.

⁽¹⁰²⁾ Cfr. loco cit. in ⁽¹⁰⁰⁾.

ad y per ogni w e continua rispetto a w per quasi ogni y nonché, a norma dell'ipotesi β), maggiorata, in valore assoluto, da una funzione sommabile di y . Avendosi, poi, per ogni $x \in \Delta_x$, la (9.9) nonché:

$$|h(x, y)| \leq M_1 \quad \text{per } y \in \Delta_y,$$

in virtù dell'ipotesi δ), resta assicurato che il problema:

$$(9.10) \quad w(x, y) = \varphi(x) + \int_0^y G(x, \eta, h(x, \eta), \tilde{v}(x, \eta), w(x, \eta)) d\eta \quad \text{in } (\Delta_x - X) \times \Delta_y$$

ammette soluzione unica, $w(x, y)$, continua rispetto ad y per ogni $x \in \Delta_x - X$ e ⁽¹⁰³⁾ misurabile rispetto ad x per ogni $y \in \Delta_y$. Essa risulta, ancora, a norma delle ipotesi α) e β), sommabile rispetto ad x per ogni y in quanto si ha, per ogni $y \in \Delta_y$:

$$(9.11) \quad |w(x, y)| \leq |\varphi(x)| + \int_0^b M(x, \eta) d\eta = \chi(x) \quad \text{quasi ovunque in } \Delta_x.$$

Posto, quindi:

$$(9.12) \quad \tilde{w}(x, y) = \begin{cases} w(x, y) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y \\ \varphi(x) & \text{per } (x, y) \in X \times \Delta_y, \end{cases}$$

la funzione $\tilde{w}(x, y)$, così definita in Δ , risulta continua rispetto ad y per ogni $x \in \Delta_x$ e misurabile rispetto ad x per ogni $y \in \Delta_y$, cioè $\tilde{w}(x, y) \in T'$; inoltre essa è sommabile rispetto ad x per ogni $y \in \Delta_y$.

Poniamo, infine, in Δ :

$$(9.13) \quad z'(x, y) = \sigma(x) + \int_0^y \tilde{v}(x, \eta) d\eta = \sigma(x) + \int_0^y v(x, \eta) d\eta$$

$$(9.14) \quad g'(x, y) = G(x, y, h(x, y), \tilde{v}(x, y), \tilde{w}(x, y))$$

e ad $U \equiv (z, g) \in I$ facciamo corrispondere $U' \equiv (z', g')$ che, ovviamente, a

⁽¹⁰³⁾ Cfr. G. ARNESE [1], p. 161.

norma delle (9.13) e (9.14) nonché dell'ipotesi β), appartiene a Σ . Anzi $U' \in I$; si ha, infatti, dalle (9.13) e (9.14), a norma della (9.6), dell'ipotesi β) e della (9.7):

$$|z'(x, y)| \leq M_1 \quad \text{per } (x, y) \in \Delta$$

e quindi:

$$(9.15) \quad \|z'\|_{\mathcal{C}^0(\Delta)} \leq M_1$$

ed ancora, in Δ :

$$(9.16) \quad |g'(x, y)| \leq M(x, y),$$

$$(9.17) \quad |z'(x', y) - z'(x'', y)| \leq |\sigma(x') - \sigma(x'')| + \left| \int_0^b \int_{x''}^{x'} M(\xi, \eta) d\xi d\eta \right|$$

$$(9.18) \quad |z'(x, y') - z'(x, y'')| \leq \left| \int_{y''}^{y'} |\psi(\eta)| d\eta \right| + \left| \int_{y''}^{y'} \int_0^a M(\xi, \eta) d\xi d\eta \right|.$$

Conseguentemente la (9.1), trasforma I in se.

Dimostreremo, in seguito, che la trasformazione funzionale (9.1) è continua in I e che $T(I)$ è compatta. Resta, così, assicurata, in virtù di un noto teorema di J. SCHAUDER ⁽¹⁰⁴⁾, l'esistenza di un punto unito $U^* \equiv (z^*, g^*)$ della (9.1). In tal caso, posto:

$$(9.19) \quad h^*(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - z_0 + \int_0^x \int_0^y g^*(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \text{in } \Delta,$$

dette $v^*(x, y)$ e $w^*(x, y)$ le soluzioni dei problemi (9.6) e (9.10) ottenute in corrispondenza della coppia $z^*(x, y)$, $g^*(x, y)$ ed ancora $\tilde{v}^*(x, y)$ e $\tilde{w}^*(x, y)$ le corrispondenti funzioni definite, rispettivamente, dalla (9.8) e dalla (9.12), la coppia $\tilde{v}^*(x, y)$, $\tilde{w}^*(x, y)$ costituisce una soluzione del problema (I) (II) in Δ , come subito verifichiamo.

(104) Cfr. loco cit. in (95).

La (9.19) può, infatti, scriversi:

$$(9.20) \quad h^*(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - z_0 + \int_0^x \int_0^y G(\xi, \eta, h^*(\xi, \eta), \tilde{v}^*(\xi, \eta), \tilde{w}^*(\xi, \eta)) d\xi d\eta \text{ in } \Delta;$$

dalla (9.20) segue:

$$(9.21) \quad h_x^*(x, y) = \varphi(x) + \int_0^y G(x, \eta, h^*(x, \eta), \tilde{v}^*(x, \eta), \tilde{w}^*(x, \eta)) d\eta$$

per quasi tutti gli $x \in \Delta_x$.

Avendosi, poi, a norma della (9.12), $\tilde{w}^*(x, y) = w^*(x, y)$ quasi ovunque in Δ_x , in base alla definizione di $w^*(x, y)$, ne viene dalla (9.21):

$$h_x^*(x, y) = w^*(x, y) \text{ quasi ovunque in } \Delta_x.$$

In virtù di quanto osservato, dalla (9.6) e dalla (9.10), a norma della (9.8) e dalla (9.12), segue:

$$(9.22) \quad \tilde{v}^*(x, y) = \psi(y) + \int_0^x F(\xi, y, z^*(\xi, y), \tilde{v}^*(\xi, y), \tilde{w}^*(\xi, y)) d\xi \text{ in } \Delta_x \times (\Delta_y - Y)$$

e

$$(9.23) \quad \tilde{w}^*(x, y) = \varphi(x) + \int_0^y G(x, \eta, h^*(x, \eta), \tilde{v}^*(x, \eta), \tilde{w}^*(x, \eta)) d\eta \text{ in } (\Delta_x - X) \times \Delta_y;$$

avendosi, inoltre:

$$z^*(x, y) = \sigma(x) + \int_0^y \tilde{v}^*(x, \eta) d\eta$$

e

$$h^*(x, y) = \tau(y) + \int_0^x \tilde{w}^*(\xi, y) d\xi,$$

segue, dalle (9.22) e (9.23):

$$\frac{\partial \tilde{v}^*(x, y)}{\partial x} = F(x, y, \sigma(x) + \int_0^y \tilde{v}^*(x, \eta) d\eta, \tilde{v}^*(x, y), \tilde{w}^*(x, y))$$

$$\frac{\partial \tilde{w}^*(x, y)}{\partial y} = G(x, y, \tau(y) + \int_0^x \tilde{w}^*(\xi, y) d\xi, \tilde{v}^*(x, y), \tilde{w}^*(x, y))$$

quasi ovunque in Δ .

Poiché, poi:

$$\tilde{v}^*(0, y) = \psi(y), \quad \tilde{w}^*(x, 0) = \varphi(x)$$

e, ovviamente, $\tilde{v}^*(x, y) \in S$ e $\tilde{w}^*(x, y) \in S'$ ⁽¹⁰⁵⁾, segue l'asserto.

Per completare la dimostrazione del teorema resta, quindi, da provare che la (9.1) è continua in I e che $T(I)$ è compatta.

La continuità della trasformazione funzionale (9.1) acquisendosi, salvo ovvie modifiche formali, con un noto procedimento ⁽¹⁰⁶⁾, ci limitiamo, qui, per brevità, a provare che $T(I)$ è compatta.

A tale scopo basta dimostrare che al variare di $U \equiv (z, g)$ in I , detto $U' \equiv (z', g')$ il suo corrispondente per mezzo della T , z' e g' descrivono insiemi compatti, rispettivamente, in $\mathcal{C}^0(\Delta)$ ed in $L^1(\Delta)$.

Che l'insieme descritto da z' al variare di U in I è compatto in $\mathcal{C}^0(\Delta)$ segue dal fatto che le $z'(x, y)$ definite dalla (9.13) sono equilimitate ed equicontinue in Δ a norma della (9.15) e delle (9.17) e (9.18).

Dimostriamo, allora, che è compatto in $L^1(\Delta)$ l'insieme descritto da g' al variare di U in I .

Cominciamo con l'osservare che le funzioni $h(x, y)$ ottenute dalla (9.2) al variare di U in I sono equilimitate ed equicontinue in Δ .

Si ha, infatti, per $(x, y) \in \Delta$:

$$|h(x, y)| \leq M_1,$$

ed inoltre, qualunque sia la coppia di punti $(x', y'), (x'', y'') \in \Delta$:

$$\begin{aligned} & |h(x', y') - h(x'', y'')| \leq |h(x', y') - h(x', y'')| + |h(x', y'') - h(x'', y'')| \leq \\ & \leq |\tau(y') - \tau(y'')| + \left| \int_0^{\alpha} \int_{y''}^{y'} M(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| + |\sigma(x') - \sigma(x'')| + \left| \int_{x''}^{x'} \int_0^{\beta} M(\xi, \eta) d\xi d\eta \right|. \end{aligned}$$

⁽¹⁰⁵⁾ Cfr. ⁽⁷³⁾.

⁽¹⁰⁶⁾ Cfr. G. SANTAGATI [3], pp. 106-110.

Si ha, ancora, che al variare di U in I le funzioni $h_\omega(x, y)$, definite dalla (9.3), godono uniformemente della proprietà B' ; esse appartengono, infatti, come in precedenza osservato, all'insieme T' , si ha:

$$(9.24) \quad |h_\omega(x, y') - h_\omega(x, y'')| \leq \left| \int_{y''}^{y'} M(x, \eta) d\eta \right| \text{ per } y', y'' \in \Delta_y \text{ e quasi ovunque in } \Delta_x,$$

ed inoltre, per ogni coppia di numeri reali positivi ε ed ω esistono ⁽¹⁰⁷⁾ una parte chiusa C_x^ε di Δ_x tale che $m(\Delta_x - C_x^\varepsilon) < \varepsilon$ ed un numero reale positivo δ in guisa tale che $\left| \int_{y''}^{y'} M(x, \eta) d\eta \right| < \omega$ per ogni coppia, y' ed y'' , di valori y soddisfacenti alla limitazione $|y' - y''| < \delta$, uniformemente al variare di $x \in C_x^\varepsilon$ ⁽¹⁰⁸⁾.

Le funzioni $h_\omega(x, y)$ soddisfano, inoltre, alla (9.5); in virtù dell'ipotesi γ , ne viene, allora, a norma del teorema 1.5, che la famiglia delle funzioni $\tilde{v}(x, y)$ ottenute, ciascuna, dalla (9.8), in corrispondenza di un fissato $U \equiv (z, g) \in I$, è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x ed inoltre godente della proprietà $A^{(\omega)}$; per ogni numero reale $\sigma > 0$, esiste, pertanto, una parte chiusa C_y^σ di Δ_y , la cui misura differisce da b per meno di σ , e le funzioni $\tilde{v}(x, y)$ risultano equicontinue in $A_\sigma = \Delta_x \times C_y^\sigma$.

Si ha, poi, che le funzioni $\tilde{v}(x, y)$, che come prima osservato appartengono all'insieme T , verificano la (9.9), pertanto, a norma dell'ipotesi δ) e del teorema 1.7, segue che la famiglia delle funzioni $\tilde{w}(x, y)$ ottenute, ciascuna, dalla (9.12), in corrispondenza di un fissato $U \equiv (z, g) \in I$, è compatta rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad y ed inoltre gode della proprietà $A^{(\omega)}$; in corrispondenza del numero $\sigma > 0$, esiste, pertanto, una parte chiusa C_x^σ di Δ_x , la cui misura differisce da a per meno di σ , e le funzioni $\tilde{w}(x, y)$ risultano equicontinue in $B_\sigma = C_x^\sigma \times \Delta_y$.

Essendo la funzione $\eta(y) = |\psi(y)| + \int_0^a M(\xi, y) d\xi$ quasi continue in Δ_y e quindi tale pure in $\Delta_y - Y$, in corrispondenza del numero $\sigma > 0$, esiste una parte chiusa $C_{y,1}^\sigma$ di $\Delta_y - Y$ tale che $m(\Delta_y - C_{y,1}^\sigma) < \frac{\sigma}{4}$ e la restrizione di $\eta(y)$ a $C_{y,1}^\sigma$ è ivi continua; si ha allora:

$$\eta(y) \leq H \quad \text{per } y \in C_{y,1}^\sigma$$

⁽¹⁰⁷⁾ Cfr. G. ARNESE [2], p. 16.

⁽¹⁰⁸⁾ Detta \tilde{X} la parte di misura nulla di Δ_x per gli x della quale non vale la (9.24), basta assumere $e_x^{(h)} = (\Delta_x - C_x^\varepsilon) \cup \tilde{X}$, per essere verificate le condizioni della definizione 1.1.

con H costante non negativa, e quindi, in virtù della (9.7) e della (9.8):

$$(9.25) \quad |\tilde{v}(x, y)| \leq H \quad \text{per } (x, y) \in \Delta_x \times C_{y,1}^\sigma.$$

Osserviamo, ancora, che, in virtù della (9.11) e della (9.12), procedendo in maniera analoga a come fatto con riferimento alle $\tilde{v}(x, y)$, si ha che in corrispondenza del numero reale $\sigma > 0$, esiste una parte chiusa $C_{x,1}^\sigma$ di $\Delta_x - X$ tale che $m(\Delta_x - C_{x,1}^\sigma) < \frac{\sigma}{4}$ ed inoltre:

$$(9.26) \quad |\tilde{w}(x, y)| \leq K \quad \text{per } (x, y) \in C_{x,1}^\sigma \times \Delta_y,$$

K essendo una costante non negativa.

Le relazioni (9.25) e (9.26) sono, allora, vere anche in $A_\sigma \cap B_\sigma$ in quanto:

$$C_x^\sigma \subseteq C_{x,1}^\sigma \quad \text{e} \quad C_y^\sigma \subseteq C_{y,1}^\sigma \quad (109).$$

Ciò posto, consideriamo la funzione $G(x, y, z, v, w)$ nell'insieme:

$$E = \Delta \times [-M_1, M_1] \times [-H, H] \times [-K, K];$$

per un noto teorema ⁽¹¹⁰⁾, essa risulta quasi continua in E in modo semiregolare rispetto a (z, v, w) e quindi, in corrispondenza del numero reale $\sigma > 0$, esiste una parte chiusa C_σ di Δ tale che $m(\Delta - C_\sigma) < \sigma$ e la restrizione della funzione $G(x, y, z, v, w)$ all'insieme:

$$C_\sigma \times [-M_1, M_1] \times [-H, H] \times [-K, K]$$

è ivi continua.

Posto:

$$D_\sigma = C_\sigma \cap A_\sigma \cap B_\sigma,$$

proveremo che le funzioni $g'(x, y)$, ottenute dalla (9.14) al variare di U in I , sono equicontinue in D_σ .

Invero, avendosi, qualunque sia la coppia di punti $(x', y'), (x'', y'') \in D_\sigma$:

$$\begin{aligned} |g'(x', y') - g'(x'', y'')| = & |G(x', y', h(x', y'), \tilde{v}(x', y'), \tilde{w}(x', y')) - \\ & - G(x'', y'', h(x'', y''), \tilde{v}(x'', y''), \tilde{w}(x'', y''))|, \end{aligned}$$

⁽¹⁰⁹⁾ Ciò risulta dalla dimostrazione dei teoremi 1.5 e 1.7.

⁽¹¹⁰⁾ Cfr. G. STAMPACCHIA [2], p. 30.

per l'uniforme continuità della funzione $G(x, y, z, v, w)$ nell'insieme chiuso e limitato :

$$E_\sigma = D_\sigma \times [-M_1, M_1] \times [-H, H] \times [-K, K],$$

nonché a norma dell'equicontinuità delle funzioni $h(x, y)$, $\tilde{v}(x, y)$ e $\tilde{w}(x, y)$ in $D_\sigma \subseteq A_\sigma \cap B_\sigma$, segue l'asserto.

Avendosi poi :

$$m(\Delta - D_\sigma) \leq m(\Delta - C_\sigma) + m(\Delta - A_\sigma) + m(\Delta - B_\sigma) < (1 + a + b)\sigma,$$

le funzioni $g'(x, y)$ sono egualmente quasi continue in Δ .

Essendo $M(x, y)$ sommabile in Δ e quindi ivi quasi limitata, a norma dell'ipotesi β), le funzioni $g'(x, y)$ risultano, anche, egualmente quasi limitate in Δ ; risultando, inoltre, in virtù, sempre, dell'ipotesi β), le funzioni integrali delle $|g'(x, y)|$ equiassolutamente continue in Δ , per uno noto criterio di compattezza rispetto alla convergenza in media ⁽¹¹³⁾, resta provato che ϵ compatto in $L^1(\Delta)$ l'insieme descritto da g' al variare di U in I .

Il teorema 4.1 risulta, così, completamente dimostrato.

In maniera perfettamente analoga, invocando, però, il criterio di compattezza 1.6 in luogo del 1.5, si dimostra il teorema 4.2.

10. - Applicazione del teorema del punto unito di J. Schauder al problema (III) (II).

Dimostriamo, ora, sempre facendo uso dei metodi funzionali, il teorema 5.1.

A tale scopo, mantenendo le notazioni del n. 9, definiamo, nella già assegnata parte I di Σ , una trasformazione funzionale :

$$(10.1) \quad U' = \tilde{T}(U)$$

nel modo seguente ⁽¹¹²⁾ :

Assegnato $U \equiv (z, g) \in I$, determiniamo, con lo stesso procedimento seguito al n. 9, la funzione $\tilde{v}(x, y)$ data dalla (9.8). Considerata, allora, la funzione $G(x, y, \sigma(x) + \int_0^y \tilde{v}(x, t) dt, \tilde{v}(x, y), w)$, essa, per ogni $x \in \Delta_x - X$, risulta misurabile rispetto ad y per ogni w e continua rispetto a w per quasi ogni y nonché, a norma dell'ipotesi β), maggiorata, in valore assoluto, da una funzione som-

⁽¹¹³⁾ Cfr., ad es., F. CAFIERO [2], p. 375.

⁽¹¹²⁾ Tale metodo si ispira, pure, ad un procedimento introdotto in G. SANTAGATI [3].

mabile di y . Avendosi, poi, per ogni $x \in \Delta_x$, la (9.9) nonché:

$$|\sigma(x) + \int_0^y \tilde{v}(x, t) dt| \leq M_1 \quad \text{per } y \in \Delta_y,$$

in virtù dell'ipotesi δ), resta assicurato che il problema:

$$(10.2) \quad w(x, y) = \varphi(x) + \int_0^y G(x, \eta, \sigma(x) + \int_0^\eta \tilde{v}(x, t) dt, \tilde{v}(x, \eta), w(x, \eta)) d\eta$$

in $(\Delta_x - X) \times \Delta_y$

ammette soluzione unica, $w(x, y)$, continua rispetto ad y per ogni $x \in \Delta_x - X$ e ⁽¹¹³⁾ misurabile rispetto ad x per ogni $y \in \Delta_y$; essa risulta, ancora, in virtù delle ipotesi α) e β), sommabile rispetto ad x per ogni y in quanto vale, anche in questo caso, la (9.11). Conseguentemente, posto, anche qui:

$$(10.3) \quad \tilde{w}(x, y) = \begin{cases} w(x, y) & \text{per } (x, y) \in (\Delta_x - X) \times \Delta_y \\ \varphi(x) & \text{per } (x, y) \in X \times \Delta_y, \end{cases}$$

la funzione $\tilde{w}(x, y)$, così definita in Δ , risulta continua rispetto ad y per ogni $x \in \Delta_x$ e misurabile rispetto ad x per ogni $y \in \Delta_y$, cioè $\tilde{w}(x, y) \in T'$; essa è, inoltre, sommabile rispetto ad x per ogni $y \in \Delta_y$.

Posto, infine:

$$(10.4) \quad z'(x, y) = \sigma(x) + \int_0^y \tilde{v}(x, \eta) d\eta = \sigma(x) + \int_0^y v(x, \eta) d\eta$$

$$(10.5) \quad g'(x, y) = G(x, y, \sigma(x) + \int_0^y \tilde{v}(x, t) dt, \tilde{v}(x, y), \tilde{w}(x, y)),$$

ad $U \equiv (z, g) \in I$ facciamo corrispondere $U' \equiv (z', g')$ che, ovviamente, a norma delle (10.4) e (10.5) nonché dell'ipotesi β), appartiene a Σ . Se notiamo, ancora, che, anche qui, valgono la (9.15), la (9.16), la (9.17) e la (9.18), segue che $U' \in I$ e quindi la (10.1) trasforma I in se.

Con procedimento analogo a quello seguito nel n. 9, facendo uso dei criteri di compattezza 1.5 e 1.7, si dimostra, poi, che la trasformazione funzionale (10.1) è continua in I e che $T(I)$ è compatta.

⁽¹¹³⁾ Cfr. G. ARNESE [1], p. 161.

Resta, così, assicurata, a norma del già invocato teorema di J. SCHAUDER, l'esistenza di un punto unito $U^* \equiv (z^*, g^*)$ della (10.1).

Definita, allora, in Δ , la funzione $h^*(x, y)$ mediante la (9.19) e dette $v^*(x, y)$ e $w^*(x, y)$ le soluzioni dei problemi (9.6) e (10.2) ottenute in corrispondenza della coppia $z^*(x, y)$, $g^*(x, y)$, nonché $\tilde{v}^*(x, y)$ e $\tilde{w}^*(x, y)$ le corrispondenti funzioni definite, rispettivamente, dalla (9.8) e dalla (10.3), si dimostra, analogamente a quanto fatto nel. n. 9 con riferimento al teorema 4.1, con le dovute modifiche del caso, che la coppia $\tilde{v}^*(x, y)$ e $\tilde{w}^*(x, y)$ costituisce una soluzione del problema (III) (II) in Δ .

Il teorema 5.1 é, così, dimostrato.

In maniera analoga, invocando il criterio di compattezza 1.6 in luogo del 1.5, si dimostra il teorema 5.2. Così pure, se in luogo del criterio di compattezza 1.7, utilizzato nella dimostrazione dei teoremi 5.1 e 5.2, si fa uso del criterio di compattezza 1.4, con lo stesso procedimento, avendo cura di apportare delle lievi modifiche imposte dal caso in esame, si dimostrano i teoremi 5.3 e 5.4. Ci esimiamo, però, dal farlo esplicitamente per brevità.

BIBLIOGRAFIA

A. ALEXIEWICZ-W. ORLICZ:

- [1] *Some remarks on the existence and uniqueness of solutions of the hyperbolic equation* $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$, « *Studia Math.* », 15 (1956), 201-215.

G. ARNESE:

- [1] *Sulla dipendenza del parametro degli integrali di una equazione differenziale ordinaria del primo ordine*, « *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* », 33 (1963), 140-162.
 [2] *Sul problema di Darboux in ipotesi di Carathéodory*, « *Ricerche di Matematica* », 12 (1963), 13-31.

C. BAIOCCHI,

- [1] *Osservazioni sulla definizione di integrale di Bochner*, « *Ann. della Scuola Normale Superiore di Pisa, Sc. Fis. Mat.* », 17 (1963), 239-253.

F. CAFIERO:

- [1] *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile reale*, Liguori, Napoli (1954).
 [2] *Misura e integrazione*, Collezione « *Monografie Matematiche* » a cura del C. N. R., ed. Cremonese, Roma (1959).
 [3] *Sulle funzioni misurabili rispetto ad una ed assolutamente continue rispetto ad una altra variabile*, « *Ricerche di Matematica* », 1 (1952), 227-240.
 [4] *Sui teoremi di unicità relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine*, Memoria I, « *Gior. di Mat. di Battaglini* », 78 (1948-49), 10-41.

G. CARADONNA:

- [1] *Sull'esistenza delle soluzioni per alcuni sistemi di equazioni integrodifferenziali*, « *Boll. Un. Mat. Ital.* », (III), 16 (1961), 398-407.

C. CARATHÉODORY:

- [1] *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Teubner (1918).

C. CILIBERTO:

- [1] *Il problema di Darboux per un'equazione di tipo iperbolico in due variabili*, «Ricerche di Matematica», 4 (1955), 15-29.
 [2] *Sull'approssimazione delle soluzioni del problema di Darboux per l'equazione $s = f(x, y, z, p, q)$* , «Ricerche di Matematica», 10 (1961), 106-138.

R. CONTI:

- [1] *Sul problema di Darboux per l'equazione $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$* , «Ann. Univ. Ferrara», Sez. VII, 2 (1952-1953), 129-140.
 [2] *Sull'equazione integrodifferenziale di Darboux-Picard*, «Le Matematiche», 13 (1958), 30-39.

G. FICHERA:

- [1] *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, «Ist. Mat. Univ. Trieste», vol. I (1954).

L. M. GRAVES:

- [1] *The theory of functions of real variables*, Mc. Graw-Hill Book Company, inc. (1956).

F. GUGLIELMINO:

- [1] *Sul problema di Darboux per l'equazione $s = f(x, y, z)$* , «Boll. Un. Mat. Ital.», (III), 13, (1958), 301-318.
 [2] *Sull'esistenza delle soluzioni dei problemi relativi alle equazioni non lineari di tipo iperbolico in due variabili*, Le «Matematiche», 14 (1959), 67-78.

J. KISYNSKI:

- [1] *Solutions généralisées du problème de Cauchy-Darboux pour l'équation $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$* , «Ann. Univ. Mariae Curie, Sklodowska», sectio A, 14 (1960), 87-109.

L. MERLI:

- [1] *Un problema ai limiti per una classe di sistemi di equazioni integrali*, «Ann. Mat. Pura ed Appl.», (IV), 51 (1960), 139-146.

C. MIRANDA:

- [1] *Problemi di esistenza in analisi funzionale*. «Quaderni della Scuola Normale Superiore di Pisa» (1948-1949).

G. PULVIRENTI:

- [1] *Il fenomeno di Peano nel problema di Darboux per l'equazione $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$ in ipotesi di Carathéodory*, «Ricerche di Matematica», in corso di stampa.

G. SANTAGATI:

- [1] *Il problema di Darboux per una equazione del secondo ordine di tipo iperbolico*, «Le Matematiche», 14 (1959), 115-147.
 [2] *Su un problema al contorno per una classe di sistemi iperbolici di equazioni alle derivate parziali del primo ordine*, «Le Matematiche», 15 (1960), 1-14.
 [3] *Su alcuni sistemi di equazioni integrodifferenziali*, «Ann. Mat. Pura ed Appl.» (IV), 63 (1963), 71-122.

J. SCHAUDER:

- [1] *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, « *Studia Math.* », 2 (1930), 171-180.

G. SCORZA DRAGONI:

- [1] *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, « *Rend. Sem. Mat. di Padova* », 17 (1948), 102-106.
- [2] *Sugli integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$* , « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », (VI), 9 (1929), 378-382.

E. J. MC. SHANE:

- [1] *Integration*, Princeton University Press (1944).

G. STAMPACCHIA:

- [1] *Criteri di compattezza per gli insiemi di funzioni continue rispetto alle variabili separatamente*, « *Rend. Sem. di Padova* », 19 (1950), 201-213.
- [2] *Sopra una classe di funzioni in n variabili*, « *Ricerche di Matematica* », 1 (1952), 27-54,

L. TONELLI:

- [1] *Sull'unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria*, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », (VI), 1 (1925), 272-277.

F. TRIGOMI:

- [1] *Equazioni a derivate parziali*, Collezione « *Monografie Matematiche* » a cura del C. N. R., ed. Cremonese, Roma (1957).

G. VILLARI:

- [1] *Su un problema al contorno per una classe di sistemi di equazioni alle derivate parziali*, « *Boll. Un. Mat. Ital.* », (III), 13 (1958), 514-521.

A. ZITAROSA:

- [1] *Su alcuni sistemi iperbolici di equazioni a derivate parziali del primo ordine*, « *Ricerche di Matematica* », 8 (1959), 240-270.
- [2] *Alcune osservazioni su certi teoremi di compattezza e sul problema di Darboux*, « *Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli* », (IV), 27 (1960), 25-35.

W. WALTER:

- [1] *On the existence theorem of Carathéodory for ordinary and hyperbolic equations*, Technical note BN-172, AFOSR (1959).
-