L'equazione $y'' + 2\alpha[(x - a)y]' + 4\beta y(1 - x^2)^{-1} = 0$

di G. SANSONE e L. MERLI

Sunto. - Per l'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\alpha \frac{d}{dx} [(x - a)y] + \frac{4\beta y}{1 - x^2} = 0,$$

con le condizioni ai limiti $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$, si dimostra l'esistenza di infiniti autovalori e si indicano dei procedimenti di calcolo numerico per la determinazione del primo autovalore.

Summary. - It is proved the existence of infinite eigenvalues for the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\alpha \frac{d}{dx} [(x - a)y] + \frac{4\beta y}{1 - x^2} = 0,$$

with the conditions $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$. Two methods of numerical calculus for the evaluation of the least eigenvalue are also indicated.

In una recente nota G. F. MILLER ⁽¹⁾ ha studiato l'equazione

$$(I) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 2\alpha \frac{d}{dx} [(x - a)y] + \frac{4\beta y}{1 - x^2} = 0,$$

a , α , β costanti reali, che deve essere soddisfatta in $[-1, 1]$ da una funzione continua $y(x)$, non identicamente nulla, con le condizioni ai limiti

$$(II) \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Con metodi propri del calcolo numerico il MILLER ha fornito una tavola numerica che per i valori dei parametri $\alpha = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots, 12$; $a = 0, 0.2, 0.4, \dots, 1$, assegna il minimo valore del parametro β cui corrisponde una $y(x)$ che soddisfa il sistema (I), (II) e una seconda tavola numerica, per lo stesso problema, nei casi $\alpha = 1, \alpha = 2, 4, \dots, 16$.

⁽¹⁾ G. F. MILLER, *The evaluations of eigenvalues of a differential equation arising in a problem in genetics*, «Proc. of the Cambridge Phil. Soc.», 58 (1962), 588-593.

L'esistenza degli autovalori è ammessa; questa ammissione viene fatta anche da S. KIMURA ⁽²⁾ che per primo considerò questa equazione in alcuni suoi studi di genetica.

Nel § 1 di questa nota, dovuto a G. SANSONE, viene provato che fissati a, α esistono per il sistema (I), (II) infiniti autovalori β ; nel § 2, dovuto a L. MERLI, il problema viene ricondotto ad un'equazione integrale di FREDHOLM con nucleo discontinuo. Con una iterazione si ottiene un'equazione a nucleo continuo alla quale vengono applicati due opportuni procedimenti di calcolo numerico che consentono una valutazione del minimo autovalore che viene confrontata con quella data da G. F. MILLER nella sua prima tabella.

§ 1. - Esistenza di autovalori.

1. I due casi $\alpha = 0, \beta = 0$.

a) Nell'equazione (I) sia $\alpha = 0$; sia perciò da risolvere il sistema

$$(1,1) \quad (1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + 4\beta y = 0,$$

$$(1,2) \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

Si osservi che il polinomio $P_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) di LEGENDRE soddisfa l'equazione

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0$$

e si verifica subito che il polinomio

$$(1,3) \quad z = (1-x^2)P'_n(x), \quad [=nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)],$$

soddisfa l'equazione

$$(1,4) \quad (1-x^2)z'' + n(n+1)z = 0$$

⁽²⁾ S. KIMURA, a) *Stochastic processes and distributions of gene frequencies under natural selection*, « Cold Spring Harbor Symposies on Quantitative Biology », 29 (1955), 39-53; b) *Some problem of stochastic processes in genetics*, « Am. Math. Statist. », 28 (1957), 882-901.

e perciò il sistema (1,1), (1,2) ammette gli autovalori $\beta = n(n+1)/4$ e le corrispondenti autofunzioni sono $(1-x^2)P'_n(x)$, ($n = 1, 2, \dots$).

Vogliamo ora dimostrare che *gli unici autovalori del sistema* (1,1) (1,2) *sono* $\beta = n(n+1)/4$, ($n = 1, 2, \dots$).

Moltiplicando la (1,1) per z e la (1,4) per y e sottraendo otteniamo

$$[(1-x^2)(y'z - yz')] - [n(n+1) - 4\beta]yz = 0,$$

e integrando tra -1 e 1 , tenuto conto delle (1,2)

$$[n(n+1) - 4\beta] \int_{-1}^1 (1-x^2)P'_n(x)y(x)dx = 0.$$

Supposto $n(n+1) - 4\beta \neq 0$, si ha

$$(1,5) \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)P'_n(x)y(x)dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

e poichè

$$P'_{n-1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n,$$

$$(1,6) \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)P_n(x)y(x)dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Questa sussiste anche per $n=0$, perchè nella (1,5), facendo $n=1$, si ha

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)y(x)dx = 0.$$

Abbiamo quindi che $(1-x^2)y(x)$ è ortogonale in $[-1, 1]$ al sistema completo in $[-1, 1]$ $\{P_n(x)\}$ ed essendo $(1-x^2)y(x)$ continua, ne viene che se $\beta \neq n(n+1)/4$ la soluzione $y(x)$ del sistema (1,1), (1,2) è identicamente nulla in $[-1, 1]$.

b) L'equazione (I), quando sia $\beta = 0$, si riduce a

$$(1,7) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 2\alpha \frac{d}{dx} [(x-a)y(x)] = 0$$

e per i suoi integrali, che soddisfano la condizione $y(-1) = 0$, si ha

$$y'(x) + 2\alpha(x-a)y(x) = y'(-1),$$

e perciò

$$(1.8) \quad y(x) = e^{-\alpha(x-a)^2} y'(-1) \int_{-1}^x e^{\alpha(s-a)^2} ds.$$

Ne viene che qualsiasi integrale della (1,7), che si annulla per $x = -1$, ha l'espressione (1,8) e risulta quindi $y(x) \neq 0$ per $x \neq -1$.

Abbiamo quindi che *il sistema (I), (II), per $\beta = 0$, ha la sola soluzione $y(x) \equiv 0$.*

2. Proprietà generali degli integrali dell'equazione (I).

a) Supponiamo le costanti a, α, β reali o complesse, x variabile complessa e consideriamo gli integrali $y(x)$ della (I) nel campo complesso. Questa equazione ha i punti singolari $x = -1, x = 1, x = \infty$.

Il punto $x = -1$ [$x = 1$] è singolare regolare; la corrispondente equazione caratteristica (*)

$$\rho^2 - \rho = 0$$

ha le radici $\rho_1 = 1, \rho_2 = 0, (\rho_1 - \rho_2 = 1)$; essa possiede quindi internamente al cerchio con centro nel punto $x = -1$ [$x = 1$] e raggio 2 un integrale $y_1(x)$ [$\bar{y}_1(x)$] che appartiene all'esponente 1

$$y_1(x) = (x+1)[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n], \quad (\lim_{x \rightarrow -1} y_1(x) = 0),$$

$$[\bar{y}_1(x) = (x-1)[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n(x-1)^n], \quad (\lim_{x \rightarrow 1} \bar{y}_1(x) = 0),$$

e un secondo integrale $y_2(x)$ [$\bar{y}_2(x)$] della forma

$$y_2(x) = g_1 y_1(x) \log(x+1) + [-1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x+1)^n],$$

$$[\bar{y}_2(x) = \bar{g}_1 \bar{y}_1(x) \log(x-1) + [-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{h}_n(x-1)^n],$$

(*) Cfr. G. SANSONE, *Equazioni Differenziali nel Campo Reale*, I, Cap. III, § 3, nn. 3 e 4.

e poichè l'integrale generale della (I) in un intorno di $x = -1$ [$x = 1$] ha la forma $Ay_1(x) + By_2(x)$ [$A\bar{y}_1(x) + B\bar{y}_2(x)$], con A e B costanti arbitrarie, ne viene che gli unici integrali della (I) nulli in $x = -1$ [$x = 1$] hanno l'espressione $Ay_1(x)$ [$A\bar{y}_1(x)$] con A costante arbitraria.

Abbiamo quindi che se per un integrale della (I) si ha $y(-1) = 0$ [$y(1) = 0$], $x = -1$ [$x = 1$] è uno zero semplice di $y(x)$ ed esistono finiti $y'(-1)$, $y''(-1)$, [$y'(1)$, $y''(1)$].

b) Avendosi $\lim_{x \rightarrow \infty} 2\alpha(x-a)/x = 2\alpha$, ne viene che per $\alpha \neq 0$ il punto $x = \infty$ è singolare irregolare per l'equazione (I), ⁽⁴⁾.

3. Teorema di oscillazione per gli integrali per $\alpha > 0$, $\beta/\alpha \rightarrow \infty$.

a) Fissato $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 2$, vogliamo dimostrare che gli integrali (non identicamente nulli) dell'equazione (I) quando β/α è abbastanza grande, hanno in $[1 - \varepsilon, 1)$ degli zeri in numero superiore a qualunque intero prefissato e sono ivi uniformemente distribuiti ⁽⁵⁾.

La (I) può scriversi

$$(3.1) \quad \frac{d}{dx} \left[e^{\alpha(x-a)^2} \frac{dy}{dx} \right] + e^{\alpha(x-a)^2} \left[2\alpha + \frac{4\beta}{1-x^2} \right] y = 0$$

e, posto

$$2 + 4 \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{1 - (1 - \varepsilon)^2} = \lambda^2,$$

consideriamo, per x in $[1 - \varepsilon, 1)$, l'equazione

$$(3.2) \quad \frac{d}{dx} \left[e^{\alpha(x-a)^2} \frac{dz}{dx} \right] + e^{\alpha(x-a)^2} \alpha \lambda^2 z = 0.$$

Per il teorema di confronto, fra due zeri consecutivi di una soluzione della (3,2) in $[1 - \varepsilon, 1)$ è compreso almeno uno zero da (3,1); basterà quindi verificare la nostra affermazione per la (3,2) che si scrive

$$(3.3) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\alpha(x-a) \frac{dz}{dx} + \lambda^2 \alpha z = 0.$$

⁽⁴⁾ Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel Campo Reale*, I, Cap. III, § 3 n. 5.

⁽⁵⁾ È quasi superfluo notare che gli zeri di un integrale della (I) sono semplici; ciò vale per i punti interni a $[-1, 1]$ per le proprietà generali delle equazioni del secondo ordine e per i punti $x = -1$, $x = 1$ per le cose dette al n. 2.

Col cambiamento di variabile indipendente

$$(3,4) \quad x - a = \frac{v}{\sqrt{\alpha}},$$

posto

$$z = A(v)e^{-\frac{4}{2}v^2},$$

si ha per $A(v)$ l'equazione

$$A''(v) + [\lambda^2 - (v^2 + 1)]A(v) = 0.$$

Per la (3,4), quando x varia in $[1 - \varepsilon, 1)$, v varia in $[\sqrt{\alpha}(1 - \varepsilon - a), \sqrt{\alpha}(1 - a))$ e in questo intervallo, quando $\lambda \rightarrow \infty$, gli zeri di $A(v)$ si distribuiscono uniformemente e superano qualunque numero prefissato.

b) La stessa conclusione si ottiene per x variabile in $(-1, -1 + \varepsilon]$.

4. Equazione integrale di Volterra per il sistema differenziale (I), (II). Continuità delle soluzioni rispetto ai parametri α , α , e β .

a) Giova per il seguito premettere la costruzione di un sistema fondamentale di integrali dell'equazione

$$(4,1) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 z}{dx^2} + 4\beta z = 0.$$

Gli integrali di questa equazione, internamente a una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, sono olomorfi e poichè l'equazione si muta in sè stessa cambiando x in $-x$, essa avrà due integrali della forma

$$(4,2) \quad z_1(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_{2\nu} x^{2\nu} \quad , \quad (4,3) \quad z_2(x) = x + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_{2\nu+1} x^{2\nu+1}.$$

Sostituendo nella (4,1), per i coefficienti $d_{2\nu}$ della $z_1(x)$ si hanno le formule ricorrenti

$$(4,4) \quad d_2 = -\frac{4\beta}{1 \cdot 2}; \quad d_{2\nu+2} = \frac{(2\nu-1)(2\nu)-4\beta}{(2\nu+1)(2\nu+2)} d_{2\nu}, \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

e per i coefficienti $d_{2\nu+1}$ della $z_2(x)$ le formule ricorrenti

$$(4,5) \quad d_3 = -\frac{4\beta}{2 \cdot 3}; \quad d_{2\nu+3} = \frac{(2\nu)(2\nu+1)-4\beta}{(2\nu+2)(2\nu+3)} d_{2\nu+1}, \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

La $z_1(x)$ si riduce ad un polinomio [cfr. n. 2] quando $4\beta = (2m-1)(2m)$ con m intero positivo e la $z_2(x)$ è una serie e così pure $z_2(x)$ si riduce ad un polinomio quando $4\beta = (2m)(2m+1)$ e $z_1(x)$ è una serie.

Se $4\beta \neq n(n+1)$, per qualunque n intero positivo, le (4.2), (4.3) sono delle serie di potenze con raggio di convergenza unitario e, a causa delle (4.4), (4.5), con i coefficienti, da un certo momento in poi, tutti dello stesso segno.

Si verifica immediatamente che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{(n-1)n-4\beta} - 1 \right] = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + (2+4\beta)n}{n^2 - n - 4\beta} = 2$$

e perciò entrambe le serie (4.2), (4.3) risultano assolutamente convergenti per $x = \pm 1$ e in conseguenza le serie (4.2), (4.3) sono *totalmente* (e uniformemente) *convergenti per* $x \in [-1, 1]$.

Poichè i coefficienti $d_{2\nu}$, $d_{2\nu+1}$ della serie considerata sono funzioni continue di β , ne segue anche che $z_1(x)$, $z_2(x)$ sono *funzioni continue del parametro* β .

Osservato poi che

$$\begin{vmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1'(0) & z_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

le (4.2), (4.3) forniscono un sistema fondamentale di integrali dell'equazione (4.1) con il loro wronskiano uguale ad 1.

b) L'equazione (I), con il cambiamento della funzione incognita

$$(4.6) \quad y = e^{-\frac{\alpha(x-a)^2}{2}} u(x),$$

diventa

$$(III) \quad u'' + \left[-\alpha^2(x-a)^2 + \alpha + \frac{4\beta}{1-x^2} \right] u = 0$$

od anche

$$(III') \quad u'' + \frac{4\beta}{1-x^2} u = [\alpha^2(x-a)^2 - \alpha] u.$$

Per la formula di LAGRANGE l'integrale generale di questa equazione ha l'espressione

$$(4.7) \quad \begin{aligned} u(x) = & Az_1(x) + Bz_2(x) - z_1(x) \int_0^x z_2(s) [\alpha^2(s-a)^2 - \alpha] u(s) ds + \\ & + z_2(x) \int_0^x z_1(s) [\alpha^2(s-a)^2 - \alpha] u(s) ds, \end{aligned}$$

con A e B costanti arbitrarie.

La (4.7) è un'equazione integrale di seconda specie di VOLTERRA col nucleo $[z_2(x)z_1(s) - z_1(x)z_2(s)] [\alpha^2(s-a)^2 - \alpha]$ e da teoremi noti risulta che, fissate le costanti A e B , la $u(x)$ si può esprimere con una serie totalmente convergente quando $x \in [-1, 1]$, ⁽⁶⁾.

5. Teorema di esistenza di infiniti autovalori.

α) Il sistema differenziale (I), (II), a motivo della (4.6), si riduce alla determinazione degli integrali dell'equazione (III), non identicamente nulli, che soddisfano le condizioni

$$(5.1) \quad u(-1) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Supponiamo fissati a e α e consideriamo β come un parametro. Per le cose dette in 2, α) un integrale della (III), nullo in -1 , ha ivi uno zero del primo ordine e consideriamo gli integrali $u(x, \beta)$ della (III) che soddisfano le condizioni iniziali

$$u(-1, \beta) = 0, \quad u'(-1, \beta) = 1.$$

A causa delle (4.7) si ha

$$u(0, \beta) = Az_1(0) + Bz_2(0), \quad u'(0, \beta) = Az'_1(0) + Bz'_2(0),$$

da cui

$$\begin{aligned} A &= u(0, \beta)z'_2(0) - u'(0, \beta)z_2(0) \\ B &= -u(0, \beta)z'_1(0) + u'(0, \beta)z_1(0). \end{aligned}$$

Per la (4.6) e per 2, α), per $|1+x| < 2$, si ha

$$u(x, \beta) = e^{\frac{\alpha}{2}[(x-a)^2 - (1+a)^2]} y_1(x),$$

e siccome per 2, α), i coefficienti a_n della serie che rappresenta $y_1(x)$ (e che si ottengono con operazioni razionali sui coefficienti di (I)) sono funzioni continue di β , ne viene che $u(0, \beta)$ e $u'(0, \beta)$ sono funzioni continue di β ; A e B sono quindi funzioni continue di β e perciò la $u(x, \beta)$ che è soluzione della (4.7) nell'intervallo $[-1, 1]$, è una funzione continua di β in questo stesso intervallo.

⁽⁶⁾ Cfr. ad es. E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématiques*, T. III (3ième éd. (1927), 324).

b) Proviamo che se $u(x, \beta)$ ha m zeri nell'intervallo $(-1, 1]$,

$$-1 < x_1 < \dots < x_m \leq 1,$$

allora $u(x, \bar{\beta})$, con $\bar{\beta} > \beta$, ha almeno m zeri di cui uno almeno compreso tra -1 e x_1 .

Se $x_m < 1$ l'esistenza di almeno uno zero di $u(x, \bar{\beta})$ interno a ciascuno degli intervalli $[x_1, x_2], \dots, [x_{m-1}, x_m]$ consegue dal teorema di confronto; basterà allora provare che in ogni caso $u(x, \beta)$ ha uno zero interno a $[-1, x_1]$ e, se $x_m = 1$ esiste ancora uno zero di $u(x, \bar{\beta})$ interno a $[x_{m-1}, 1]$.

Senza ledere la generalità possiamo supporre $u = u(x, \beta) > 0$ per $-1 < x < x_1$ e supponiamo per assurdo $\bar{u} = u(x, \bar{\beta}) > 0$, per $-1 < x < x_1$.

Dalle due equazioni

$$u'' + \left[-\alpha^2(x-a)^2 + \alpha + \frac{4\beta}{1-x^2} \right] u = 0$$

$$\bar{u}'' + \left[-\alpha^2(x-a)^2 + \alpha + \frac{4\bar{\beta}}{1-x^2} \right] \bar{u} = 0,$$

moltiplicando la prima per $\bar{u}$, la seconda per u e sottraendo si ottiene

$$(5,3) \quad (\bar{u}u' - u\bar{u}')' = 4(\bar{\beta} - \beta) \frac{u\bar{u}}{1-x^2}$$

e integrando tra -1 ed x , $-1 < x \leq x_1$, poichè $u(-1) = \bar{u}(-1) = 0$

$$\bar{u}u' - u\bar{u}' = 4(\bar{\beta} - \beta) \int_{-1}^x \frac{u(s)\bar{u}(s)}{1-s^2} ds > 0,$$

perciò $\left(\frac{u}{\bar{u}}\right)' > 0$; il rapporto $\frac{u}{\bar{u}}$ è quindi crescente, ma $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{u}{\bar{u}} = \frac{u'(-1)}{\bar{u}'(-1)} = 1$

e allora ne risulta $u > \bar{u}$ che è assurda essendo $u(x_1) = 0$.

Analogamente se $u(1) = 0$ e supponiamo senza ledere la generalità che $u(x) > 0$ per $x_{m+1} < x < 1$, supposto ancora per assurdo $\bar{u}$ non nulla per $x_m < x < 1$ e senza ledere la generalità $\bar{u} > 0$, dalla (5,3) integrando tra x_{m-1} ed x , $x_{m-1} < x < 1$, si ha

$$(5,4) \quad \bar{u}u' - u\bar{u}' - \bar{u}(x_{m-1})u'(x_{m-1}) = 4(\bar{\beta} - \beta) \int_{x_{m-1}}^x \frac{u(s)\bar{u}(s)}{1-s^2} ds > 0$$

e poichè $\bar{u}(x_{m-1}) \geq 0$, $u'(x_{m-1}) > 0$, si ottiene ancora

$$\left(\frac{u}{\bar{u}}\right)' > 0,$$

e $u/\bar{u}$ è positiva crescente, il che porta $\bar{u}(1) = 0$ e per la (5,4)

$$-\bar{u}(x_{m-1})u'(x_{m-1}) = 4(\bar{\beta} - \beta) \int_{-1}^1 \frac{u(s)\bar{u}(s)}{1-s^2} ds > 0,$$

che è assurda.

Da quanto abbiamo ora dimostrato, tenuto conto della continuità degli integrali $u(x, \beta)$ rispetto a β , dal teorema di oscillazione, ripetendo i noti ragionamenti ⁽⁷⁾, si ottiene che *fissato a ed α (ad arbitrio) esistono infiniti autovalori β_m di β tali che gli integrali $u(x, \beta_m)$ si annullano per $x = -1$, $x = 1$ e per $m \geq m_0$ hanno m zeri tutti interni a $[-1, 1]$.*

Tali autovalori formano una successione β_m divergente a $+\infty$.

c) Possiamo completare questo risultato col provare che è $m_0 = 0$.

Infatti, per $\beta = 0$, l'equazione (III) diventa

$$u'' + [\alpha - \alpha^2(x-a)^2]u = 0;$$

per i risultati del n. 1, b) e per la (4,6) gli integrali di questa equazione, nulli per $x = -1$, sono dati da

$$u = ce^{-\frac{\alpha(x-a)^2}{2}} \int_{-1}^x e^{\alpha(x-a)^2} ds, \quad (c \neq 0, \text{ costante}),$$

perciò, per $\beta = 0$, gli integrali nulli per $x = -1$ non hanno altri zeri per $-1 < x \leq 1$.

Ripetendo allora noti ragionamenti ⁽⁸⁾ ne viene che, per β positivo crescente, la comparsa del primo zero di $u(x, \beta)$ deve cominciare per $x = 1$ ed è quindi $m_0 = 0$.

d) Conviene osservare quanto appresso.

La via seguita per dimostrare il teorema di esistenza di autovalori per il sistema differenziale (I), (II), in cui l'equazione (I), pur essendo lineare, ha singolarità in $x = -1$, $x = 1$, deriva dal fatto che si sono voluti adattare i metodi classici al nostro caso.

La riduzione del sistema (I), (II) ad un'equazione integrale di seconda specie a limiti fissi può conseguirsi per più vie; una sarà data da L. MERLI nel § 2; qui ne seguiremo un'altra per provare che il teorema di esistenza

⁽⁷⁾ Cfr. ad es. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel Campo Reale*, P. I (2^a ed.), Cap. 4, § 6, n. 3.

⁽⁸⁾ Cfr. G. SANSONE, op. cit., Cap. 4, § 6, n. 5 a).

degli autovalori non può ricavarsi immediatamente applicando i teoremi noti sulle equazioni integrali di seconda specie omogenee.

Invero, sia $4\beta \neq n(n+1)$, ($n = 1, 2, \dots$) e siano $z_1(x)$ e $z_2(x)$ i due integrali dell'equazione

$$(4,1) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{4\beta}{1-x^2} z = 0,$$

che soddisfano le condizioni $z_1(-1) = 0$, $z_2(1) = 0$.

Poichè β non è autovalore della (4,1), è $z_1(1) \neq 0$, $z_2(-1) \neq 0$ e senza alterare la generalità possiamo supporre $z_1(1) = 1$, $z_2(-1) = 1$.

Passando dalla (4,1) all'equazione (III') con la formula di LAGRANGE e prescrivendo che $u(x)$ soddisfi le condizioni $u(-1) = u(1) = 0$, si ricava per $u(x)$ l'equazione integrale

$$u(x) = \int_{-1}^1 k(x, s) [\alpha^2(s-a)^2 - \alpha] u(s) ds,$$

con

$$\begin{aligned} wk(x, s) &= z_2(x)z_1(s), & \text{per } -1 \leq s \leq x, \\ wk(x, s) &= z_2(s)z_1(x), & \text{per } x \leq s \leq 1, \end{aligned}$$

essendo w la costante uguale al wronskiano delle due funzioni $z_1(x)$, $z_2(x)$.

La presenza del fattore $\alpha^2(s-a)^2 - \alpha$ nel nucleo mostra la difficoltà di abbordare il problema dell'esistenza di autovalori per questa via.

§ 2. - Equazione integrale di Fredholm per il sistema (I), (II). Calcolo approssimato degli autovalori.

6. Equazione integrale di Fredholm per il sistema differenziale

$$(I) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\alpha(x-a) \frac{dy}{dx} + 2 \left[\alpha + \frac{\beta}{1+x} + \frac{\beta}{1-x} \right] y = 0,$$

$$(II) \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

Supponiamo che esista una soluzione $y(x)$ della (I) definita in $[-1, 1]$, ivi continua, che soddisfi le condizioni ai limiti (II).

Per quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente esistono e sono finiti $y'(-1)$, $y'(1)$, $y''(-1)$, $y''(1)$.

Dalla (I), moltiplicando per $(1-x)$, si ha

$$(1-x) + 2\alpha(x-a)(1-x) \frac{dy}{dx} + 2 \left[\alpha(1-x) + \frac{2\beta}{1+x} \right] y = 0$$

e integrando tra x e 1, $-1 < x < 1$, con semplici calcoli, tenuto conto che $y(1) = 0$, si ha

$$(1-x) \frac{dy}{dx} - [2\alpha(x-a)(1-x) + 1]y + 2 \int_x^1 \left[\alpha(s-a) + \frac{2\beta}{1+s} \right] y(s) ds = 0.$$

Con una nuova integrazione tra x e 1 [$-1 < x < 1$] si ottiene

$$\begin{aligned} (1-x)y(x) - \int_x^1 y(s) ds - \int_x^1 [2\alpha(s-a)(1-s) + 1]y(s) ds + \\ + 2 \int_x^1 dt \int_t^1 \left[\alpha(s-a) + \frac{2\beta}{1+s} \right] y(s) ds = 0, \end{aligned}$$

e applicando la formula di DIRICHLET all'ultimo integrale, troviamo

$$(6,1) \quad 0 = (1-x)y(x) + 2 \int_x^1 \left[\alpha(s-a)(-1-x+2s) - 1 + \frac{2\beta(s-x)}{1+s} \right] y(s) ds.$$

Analogamente, moltiplicando la (I) per $1+x$, con due successive integrazioni tra -1 ed x [$-1 \leq x < 1$], si ha

$$(6,2) \quad 0 = (1+x)y(x) + 2 \int_{-1}^x \left[\alpha(s-a)[1-x+2s] - 1 + \frac{2\beta(x-s)}{1-s} \right] y(s) ds.$$

Dalla (6,1), per $x \rightarrow -1+0$, si ha

$$(6,3) \quad \int_{-1}^1 [2\alpha s(s-a) - 1 + 2\beta] y(s) ds = 0$$

ed anche

$$(6,4) \quad -2 \int_{-1}^x [2\alpha s(s-a) - 1 + 2\beta] y(s) ds - 2 \int_x^1 [2\alpha s(s-a) - 1 + 2\beta] y(s) ds = 0$$

e sommando le (6,1), (6,2), (6,4) otteniamo che $y(x)$ soddisfa l'equazione integrale lineare

$$(6,5) \quad 0 = y(x) + (1-x) \int_{-1}^x \left[\alpha(s-a) - \frac{2\beta}{1-s} \right] y(s) ds + \\ + (1+x) \int_x^1 \left[\alpha(s-a) + \frac{2\beta}{1+s} \right] y(s) ds.$$

Si consideri ora la funzione $K(x, s)$ definita, nel quadrato Q : $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq s \leq 1$, con la seguente legge

$$K(-1, s) = 0, \quad K(1, s) = 0, \quad K(s, s) = 0 \quad (-1 \leq s \leq 1);$$

$$K(x, -1) = -(1-x)[- \alpha(1+a) - \beta], \quad \text{per } -1 < x < 1;$$

$$K(x, 1) = (1+x)[\alpha(1-a) + \beta], \quad \text{per } -1 < x < 1;$$

$$K(x, s) = -(1-x) \left[\alpha(s-a) - \frac{2\beta}{1-s} \right], \quad \text{per } -1 < s < x < 1;$$

$$K(x, s) = (1+x) \left[\alpha(s-a) + \frac{2\beta}{1+s} \right], \quad \text{per } -1 < x < s < 1.$$

Si ottiene allora per la funzione $y(x)$ l'equazione integrale lineare di seconda specie di FREDHOLM

$$(6,6) \quad y(x) = \int_{-1}^1 K(x, s) y(s) ds.$$

Il nucleo $K(x, s)$ di questa equazione integrale è limitato, ma discontinuo sulla diagonale (s, s) , $-1 \leq s \leq 1$, di Q .

7. Equazione integrale a nucleo continuo.

Consideriamo il secondo nucleo iterato $K_2(x, s)$

$$(7,1) \quad K_2(x, s) = \int_{-1}^1 K(x, t) k(t, s) dt.$$

Sarà

$$\begin{aligned}
 K_2(x, s) = & -(1-x) \left[\alpha(s-a) + \frac{2\beta}{1+s} \right] \int_{-1}^x \left[\alpha(t-a) - \frac{2\beta}{1-t} \right] (1+t) dt + \\
 & + (1+x) \left[\alpha(s-a) + \frac{2\beta}{1+s} \right] \int_x^s \left[\alpha(t-a) + \frac{2\beta}{1+t} \right] (1+t) dt - \\
 & - (1+x) \left[\alpha(s-a) - \frac{2\beta}{1-s} \right] \int_s^1 \left[\alpha(t-a) + \frac{2\beta}{1+t} \right] (1-t) dt, \\
 & \text{per } x \leq s,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_2(x, s) = & -(1-x) \left[\alpha(s-a) + \frac{2\beta}{1+s} \right] \int_{-1}^s \left[\alpha(t-a) - \frac{2\beta}{1-t} \right] (1+t) dt + \\
 & + (1-x) \left[\alpha(s-a) - \frac{2\beta}{1-s} \right] \int_s^x \left[\alpha(t-a) - \frac{2\beta}{1-t} \right] (1-t) dt - \\
 & - (1+x) \left[\alpha(s-a) - \frac{2\beta}{1-s} \right] \int_x^1 \left[\alpha(t-a) + \frac{2\beta}{1+t} \right] (1-t) dt, \\
 & \text{per } x \geq s,
 \end{aligned}$$

ossia, effettuando le integrazioni,

$$\begin{aligned}
 K_2(x, s) = & - \left[\alpha(s-a) + \frac{2\beta}{1+s} \right] \left\{ \alpha \left[\frac{x^2}{2} (1-a) - ax + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6} - \frac{a}{2} \right] - \right. \\
 & - 2\beta \left(2 \log \frac{2}{1-x} - x - 1 \right) \left. \right\} + (1+x) \left[\alpha(s-a) + \frac{2\beta}{1+s} \right] \cdot \\
 (7,2) \quad & \cdot \left[\alpha \left(\frac{s^2}{2} - as - \frac{as^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \frac{x^2}{2} + ax + a \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) + 2\beta(s-x) \right] - \\
 & - (1+x) \left[\alpha(s-a) - \frac{2\beta}{1-s} \right] \left\{ \alpha \left[\frac{1}{6} - \frac{a}{2} - \frac{s^2}{2} (1+a) + as + \frac{s^3}{3} \right] + \right. \\
 & + 2\beta \left(2 \log \frac{2}{1+s} - 1 + s \right) \left. \right\}, \quad \text{per } x \leq s;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_2(x, s) = & - (1-x) \left[\alpha(s-a) + \frac{2\beta}{1+s} \right] \left\{ \alpha \left[\frac{s^2}{2} (1-a) - as - \frac{s^3}{3} - \frac{1}{6} - \frac{a}{2} \right] - \right. \\
 & \left. - 2\beta \left[2 \log \frac{2}{1-s} - s - 1 \right] \right\} + (1-x) \left[\alpha(s-a) - \frac{2\beta}{1-s} \right] \cdot \\
 (7,3) \quad & \cdot \left[\alpha \left(\frac{x^2}{2} - ax - \frac{x^3}{3} + a \frac{x^2}{2} - \frac{s^2}{2} + as + \frac{s^3}{3} - a \frac{s^2}{2} \right) - 2\beta(x-s) \right] - \\
 & - (1+x) \left[\alpha(-a) - \frac{2\beta}{1-s} \right] \left\{ \alpha \left[\frac{1}{6} - \frac{a}{2} - \frac{x^2}{2} (1+a) + ax + \frac{x^3}{3} \right] + \right. \\
 & \left. + 2\beta \left(2 \log \frac{2}{1+x} - 1 + x \right) \right\}, \quad \text{per } x \geq s.
 \end{aligned}$$

Si ha così che $K_2(x, s)$ è un nucleo continuo nel quadrato Q e $y(x)$ soddisfa l'equazione integrale

$$(7.4) \quad y(x) = \int_{-1}^1 K_2(x, s) y(s) ds.$$

8. Procedimenti approssimati per il calcolo del primo autovalore.

a) Dalla teoria generale delle equazioni integrali risulta allora che ad ogni coppia di valori α, β per i quali, fissato a , risulta

$$(8,1) \quad 1 - \int_{-1}^1 K_2(s, s) ds + \dots + \frac{(-1)^p}{p!} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 K_2 \left(\begin{smallmatrix} s_1 \dots s_p \\ s_1 \dots s_p \end{smallmatrix} \right) ds_1 \dots ds_p + \dots = 0,$$

corrisponde una soluzione della (7,4) o della (6,5), ⁽⁹⁾.

Limitandosi a considerare i primi due termini della serie (8,1), con calcoli facili, ma un po' laboriosi, si ottiene

$$(8,2) \quad 1 - \frac{2}{45} (1 - 30a^2) \alpha^2 - \frac{16}{9} \alpha \beta - 16 \left(\frac{\pi^2}{3} - 3 \right) \beta^2 = 0,$$

che può essere assunta come equazione approssimata degli autovalori.

Con l'ausilio del calcolatore elettronico I.B.M. 1620, programmando la soluzione positiva della (8,2) come valore approssimato per il minimo auto-

⁽⁹⁾ Cfr. E. GOURSAT, Tr. d'An., T. III; 3^{ème} ed., Cap. XXXI, n° 575; [nota ⁽⁴⁾, p. 399].

valore β , per ogni coppia fissata di valori di a e α , abbiamo ottenuto la seguente tabella:

TABELLA I

	$a = 0,$	$a = 0.2,$	$a = 0.4,$	$a = 0.5,$	$a = 0.6,$	$a = 0.8,$	$a = 1$
$\alpha=0,$	$\beta=0.4643,$	$\beta=0.4643,$	$\beta=0.4643,$	$\beta=0.4643,$	$\beta=0.4643,$	$\beta=0.4643,$	$\beta=0.4643$
$\alpha=0.2,$	$\beta=0.4271,$	$\beta=0.4273,$	$\beta=0.4291,$	$\beta=0.4302,$	$\beta=0.4316,$	$\beta=0.4350,$	$\beta=0.4393$
$\alpha=0.4,$	$\beta=0.3923,$	$\beta=0.3928,$	$\beta=0.4001,$	$\beta=0.4044,$	$\beta=0.4096,$	$\beta=0.4227,$	$\beta=0.4390$
$\alpha=0.5,$	$\beta=0.3757,$	$\beta=0.3765,$	$\beta=0.3878,$	$\beta=0.3944,$	$\beta=0.4024,$	$\beta=0.4292,$	$\beta=0.4464$
$\alpha=0.6,$	$\beta=0.3597,$	$\beta=0.3608,$	$\beta=0.3768,$	$\beta=0.3862,$	$\beta=0.3974,$	$\beta=0.4250,$	$\beta=0.4584$
$\alpha=0.8,$	$\beta=0.3293,$	$\beta=0.3312,$	$\beta=0.3589,$	$\beta=0.3748,$	$\beta=0.3936,$	$\beta=0.4389,$	$\beta=0.4924$
$\alpha=1,$	$\beta=0.3010,$	$\beta=0.3039,$	$\beta=0.3457,$	$\beta=0.3692,$	$\beta=0.3967,$	$\beta=0.4616,$	$\beta=0.5365$
$\alpha=1.5,$	$\beta=0.2385,$	$\beta=0.2446,$	$\beta=0.3291,$	$\beta=0.3746,$	$\beta=0.4263,$	$\beta=0.5435,$	$\beta=0.6135$
$\alpha=2$	$\beta=0.1860,$	$\beta=0.1960,$	$\beta=0.3295,$	$\beta=0.3987,$	$\beta=0.4758,$	$\beta=0.6463,$	$\beta=0.7308$

b) Un altro metodo per ottenere una equazione approssimata degli autovalori può essere quello semplicissimo di operare direttamente sulla (7,4) nel seguente modo.

Fissati, nell'intervallo $[-1, 1]$, i punti di ascisse equidistanti $x_0 = -1$, $x_1, x_2, \dots, x_n = 1$, se $y(x)$ è soluzione della (7,4), con procedimento approssimato di calcolo, dovrà aversi

$$y(x_i) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n K_2(x_i, x_j) y(x_j), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e pertanto dovrà essere

$$(8.3) \quad \begin{vmatrix} K_2(x_1, x_1) - \frac{n}{2} & K_2(x_1, x_2) & \dots & K_2(x_1, x_n) \\ K_2(x_2, x_1) & K_2(x_2, x_2) - \frac{n}{2} & \dots & K_2(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_2(x_n, x_1) & K_2(x_n, x_2) & \dots & K_2(x_n, x_n) - \frac{n}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

che fornirà ancora una equazione approssimata per gli autovalori.

Noi abbiamo considerato il caso di quattro punti per i quali la (8,3) diventa

$$(8,4) \quad \begin{vmatrix} K_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - \frac{3}{2} & K_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) & K_2\left(-\frac{1}{3}, 1\right) \\ K_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) & K_2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - \frac{3}{2} & K_2\left(\frac{1}{3}, 1\right) \\ K_2\left(1, -\frac{1}{3}\right) & K_2\left(1, \frac{1}{3}\right) & K_2(1, 1) - \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Tenuto conto che è $K_2(1, s) = 0$, $-1 \leq s \leq 1$, la (8,4) si riduce all'equazione

$$(8,5) \quad \left[\frac{3}{2} - K_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right] \left[\frac{3}{2} - K_2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right] = K_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) K_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Limitandosi, per semplicità, al caso $\alpha = 0$, tenuto conto delle (7,2) e (7,3), si ottiene l'equazione

$$(8,6) \quad \frac{3}{2} - \left(\frac{8}{9} \log 2 + \frac{10}{9}\right) \alpha \beta - 4\beta^2(9 \log 3 - 8 \log 2 - 3) = 0.$$

Fissato α e programmando come abbiamo fatto nel caso precedente, abbiamo ottenuto per il minimo autovalore β la seguente tabella

TABELLA II

$\alpha = 0,$	$\alpha = 0,2,$	$\alpha = 0,4,$	$\alpha = 0,5,$
$\beta = 0,5282,$	$\beta = 0,4973,$	$\beta = 0,4681,$	$\beta = 0,4542,$

$\alpha = 0,6,$	$\alpha = 0,8,$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1,5,$	$\alpha = 2$
$\beta = 0,4407,$	$\beta = 0,4153,$	$\beta = 0,3916,$	$\beta = 0,3397,$	$\beta = 0,2970$

c) Sempre nel caso $\alpha = 0$, facendo la media dei valori dati dalla Tab. I e di quelli corrispondenti dati dalle Tab. II, per i seguenti valori di α , scelti come campione, abbiamo ottenuto

TABELLA III

$\alpha = 0$	$\alpha = 0,5,$	$\alpha = 1,$	$\alpha = 1,5,$	$\alpha = 2$
$\beta = 0,4960,$	$\beta = 0,4149,$	$\beta = 0,3463,$	$\beta = 0,2891,$	$\beta = 0,2415$

⁽¹⁰⁾.

⁽¹⁰⁾ Si osservi che nel caso $\alpha = 0$, $\alpha = 0$, ricordando che gli autovalori sono dati da $\beta = n(n+1)/4$ ($n = 1, 2, \dots$), si ha per il minimo autovalore esattamente $\beta = 0,5$, mentre noi

Osserveremo infine che confrontando questi valori con quelli dati dal MILLER ⁽¹¹⁾ per gli stessi casi e cioè:

$\alpha = 0,$	$\alpha = 0,5,$	$\alpha = 1,$	$\alpha = 1,5,$	$\alpha = 2$
$\beta = 0,5000,$	$\beta = 0,4068,$	$\beta = 0,3264,$	$\beta = 0,2586,$	$\beta = 0,2919$

le differenze sono dell'ordine di qualche centesimo.

abbiamo trovato $\beta = 0,4960$ con una differenza quindi di qualche millesimo. Anche se nei metodi approssimati che abbiamo indicato non è data una valutazione dell'errore, la buona approssimazione che ne risulta in tale caso particolare, conforta sulla bontà relativa di essi.

⁽¹¹⁾ Cfr. lav. cit in (4), p. 590.