Totalisations abstraites dans espaces vectoriels.

W. J. TRJITZINSKY (Urbana) (*)

Résumé. - *Un développement des théories de totalisations avec valeurs dans espace vectoriels; une extension de certaines parties des ouvrages [2], [3], [4] de l'auteur; il s'agit des totales de type-D (Denjoy) et type-S (symétrique).*

1. - Introduction.

Notre objet est de développer des théories, à la fois descriptives et constructives, de totalisations avec valeurs dans certains espaces vectoriels; ces totalisations seront des genres dites — D et — S (symétrique). Une totalisation s'appuie d'une façon fondamentale sur l'emploi d'une théorie convenable d'intégration vectorielle au genre essentiellement de LEBESGUE. Ayant cet objet en vue, nous utilisons la théorie d'intégration vectorielle au genre de LEBESGUE, esquissée dans la Note (D) [1] de DENJOY. À l'origine des méthodes totalisantes sont certains travaux, maintenant devenus classiques, de Denjoy. L'ouvrage actuel constitue une extension de certaines parties des mémoires (T) [2], (T^*) [3], (T^*) [4] de l'auteur; dans ces mémoires il s'agit des totales de type- D (DENJOY) et de type- S (symétrique), avec valeurs réelles. Nous établissons [sections (2)-(4)] des rapprochements, utiles par la suite, entre la théorie d'intégration vectorielle lebesgienne selon (D) et la théorie qui se trouve dans le mémoire (R) [5] de RICKART — ce qui réalise une théorie d'intégration vectorielle au genre de LEBESGUE, propre aux développements des diverses totalisations vectorielles [sections (5)-(10)]. Lorsque les valeurs d'une totale sont réelles, la théorie de totalisation qui s'applique réalise un rapport entre la totale indéfinie et sa dérivée, entendue au sens convenable. Or l'état actuel de la théorie de dérivation dans les espaces vectoriels ne suffit pas pour introduire, d'une façon satisfaisante, un rapport entre une totale indéfinie vectorielle et sa dérivée (au sens convenable); cette remarque s'applique même pour l'intégration vectorielle au genre de LEBESGUE. Pourtant la notion de l'équivalence différentielle, due à Kolmogoroff (K) [6] et qui est un concept plus faible que celui de la dérivation — cette notion a son application effective pour l'intégration vectorielle au genre de LEBESGUE [voir, par exemple, (R)]. Dans l'ouvrage actuel [sections (9), (10)] cette notion est adaptée aux totalisations vectorielles — D et — S . On utilise l'intégration, éventuellement totali-

(*) Entrata in Redazione il 25 settembre 1968.

sation, par rapport à une fonction bilinéaire convenable; en tant que l'intégration vectorielle au genre de LEBESGUE, cette idée fructueuse est originellement due à T. H. HILDEBRANDT [voir une remarque dans R ; p. 511)].

Dans la section 2 on introduit les designations: $\mathfrak{R}$ pour le corps de nombres réels, VN pour un espace vectoriel réel normé, VNC pour un espace VN complet (c'est-à-dire pour un espace de BANACH réel). Quelques notations surviennent dans (2.1)-(2.1c). si X et Y sont des ensembles dans un espace $\mathfrak{X}$ (VN), on envisage [selon (R ; p. 500-501)] la notion d'égalité à ε près de X , Y ; nous notons le rapport (2.4), (2.4') de cette notion avec l'écart mutuel (2.3) de deux ensembles. Dans (2.5)-(2.5') on spécifie les locutions: deux suites d'ensembles dans $\mathfrak{X}$ (VN) sont sommablement égales à ε près; une suite d'ensembles est s.i. (sommable inconditionnellement) à ε près vers un ensemble X . Le domaine d'intégration (de totalisation) est un espace $\mathfrak{A}$ muni d'une famille $\mathfrak{F} = (e)$ complètement additive d'ensembles (cf. 2.5''). On spécifie la locution: une fonction ponctuelle $[\cdot: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{X}(VN)]$ est absolument continue — μ , $\mu(e)$, ≥ 0 , étant une mesure-fonction définie pour les e de $\mathfrak{F}$ (2.5''). L'énoncé (2.6) est une adaptation de (R ; p. 501-502); (2.6) présente une condition pour qu'une fonction $x(e): \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{X}$ complètement additive dans $\mathfrak{F}$ soit absolument continue- μ ; aussi (2.6) présente des conditions pour que les éléments $x_n(e)$ ($n = 1, 2, \dots$) d'une suite de CAUCHY soient équicontinues- μ . D'une utilité capitale dans la suite est une fonction bilinéaire $\beta(y, e): \mathfrak{Y} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{X}$, où $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont des espaces VN , satisfaisant aux conditions (2.7) [voir (R ; p. 511)]. On suppose que $y(e)$ est un ensemble dans $\mathfrak{Y}$, pour tout e de $\mathfrak{F}$, tel que $e_1 \subset e_2$ entraîne $y(e_1) \subset y(e_2)$ [contractivité]. Dans (2.8) on introduit l'intégrabilité- β pour un e_0 de $\mathfrak{F}$ d'une fonction $y(e): \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{Y}$; on écrit $I_{\beta}(y, e_0) = \int_{e_0} \beta(y, de)$. On adapte (R ; définition 4.1) pour spécifier l'intégrabilité d'une $F(e)$ au sens- $\mathfrak{V}$; d'accord avec (2.9), pour un e_0 (de $\mathfrak{F}$), l'intégrale qui correspond s'écrit ainsi: $\int_{e_0} F(de) = \overline{I(F, e_0)}$; si $I(F, e_0)$ consiste d'un seul point, l'intégrale est dite au sens-s. On note (2.9): l'intégrabilité- β de $y(e)$ équivaut à l'intégrabilité-s de $F(e) = \beta(y(e), e)$. De plus (2.9'); l'intégrabilité- β de $y(e)$ pour tout e (de $\mathfrak{F}$) revient à ce que $\beta(y(e), e)$ soit intégrable-s uniformément en e . L'intégrabilité- β de $y(e)$ conditionnelle, pour un e_0 , est spécifiée dans (2.10). L'énoncé (2.11) présente des conditions pour que $\int_e \beta(y, de)$ soit complètement additive et absolument continue μ [$\mu \geq 0$, (2.5'')]. Les affirmations (2.12')-(2.16) sont sous l'hypothèse de continuité de $\beta(y, \mathfrak{A})$ (2.12). Dans (2.13) on constate l'équivalence des propriétés (a), (b), (c) au cas où, $\mathfrak{X}$ étant VNC et les $y_n(e)$ étant intégrables- β , la suite $y_n(e)$ converge approximativement- μ vers $y(e)$. La mesurabilité- $\mathfrak{F}$, la sommabilité- β et la notion de la presque séparabilité- β surviennent dans (2.14), (2.15); ces caractères sont admis dans l'énoncé (2.16), qui se rattache à l'existence de $\int_e \beta(y(e), e)$ pour tout e de $\mathfrak{F}$.

Dans le sections 3,4 nous rapprochons les idées et les résultats de DENJOY (D) et de RICKART (R), d'une façon qui nous sera utile pour les buts de nos totalisations des types $-D$ et $-S$. D'accord avec (3.1) on envisage l'espace $\mathfrak{A}$ et une famille $\mathfrak{F} = \{e\}$ d'ensembles (2.5''), un espace $\mathfrak{A}_f$ (VN) et une fonction ponctuelle $y[\cdot: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_f]$; $y(e)[\cdot: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{A}_f]$ est désormais l'image directe de e ($\in \mathfrak{F}$) par y ; la mesure vectorielle $m[\cdot: \mathfrak{F} \rightarrow Z(VN)]$ est complètement additive par rapport à $\mathfrak{F}$ (2.6); on introduit une fonction bilinéaire $p(y, m)$ (3.1a); $p(y, m)$ est assujettie à l'hypothèse 3.2. On observe qu'alors $\beta(y, e) = p(y, m(e))[\mathfrak{A}_f \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{X}]$ satisfait à (3.3). L'intégrabilité- m d'une fonction $y[\cdot: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_f]$ est spécifiée dans la définition 3.4; en posant $\beta(y, e) = p(y, m(e))$, on écrit (3.4a); nous notons la désignation $p(y, dm) = y \odot dm$; $\odot$ est le symbole du « produit » vectoriel. Quelques-unes des propriétés de l'intégrale- m sont signalées dans (3.5), (3.5'). Selon (3.7), si $\mathfrak{X}$ est VNC et si y est conditionnellement intégrable- m pour $\mathfrak{A}$ (3.6), il suit que y est intégrable- m pour tout e de $\mathfrak{F}$. D'après (3.9), si les conditions (3.1), (3.2), (3.8) ont lieu et si y est intégrable- m pour tout e de $\mathfrak{F}$, alors $\int_e y \odot dm$ est complètement additive (dans $\mathfrak{F}$) et absolument continue- μ [$\mu \geq 0$, (2.5'')]. L'énoncé (3.10) est analogue à (2.13). L'affirmation (3.14) est pour le cas où $\mathfrak{X}$ est VNC ; elle donne des conditions pour que $\int_e y \odot dm$ existe pour tout e de $\mathfrak{F}$ [on utilise les définitions (3.11)]. La mesure absolue ν (≥ 0), en rapport avec la mesure vectorielle m , est définie dans (3.15). D'après (3.17), (3.17') la fonction ν , construite selon (3.15'), est une mesure absolue relativement à m . On réalise une extension de la famille $\mathfrak{F}$ et des mesures m, ν d'accord avec (3.18). L'affirmation (3.19) est relativement à la complète additivité dans $\mathfrak{F}$ et à l'absolue continuité- ν de $\int_e y \odot dm$. Dans la définition 3.20 on admet (3.1) et on suppose que $\mathfrak{A}_f$ est VNC séparable; on spécifie le concept de la mesurabilité- D [e.g. au sens de DENJOY] d'une fonction ponctuelle $y[\cdot: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_f]$; nous constatons (3.21): la mesurabilité- D sur un e_0 de $\mathfrak{F}$ d'une y implique la mesurabilité- $\mathfrak{F}$ pour e_0 (3.11); on note (3.22): dans les conditions indiquées la mesurabilité- D sur un e_0 de $\mathfrak{F}$ d'une y entraîne sur e_0 la mesurabilité- $\mathfrak{F}$ de $\|y(u)\|$ au sens ordinaire. Si $\mathfrak{A}_f$ est VNC , séparable, et $y = y(u)[\cdot: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_f]$ est mesurable- D sur un e_0 de $\mathfrak{F}$, on spécifie l'intégrabilité- m de y sur e_0 , au sens de Denjoy, selon la définition (3.23). Puis nous constatons que, si $J(e_0)$ (3.23a) finie existe et $Z, \mathfrak{X}$ (3.1) sont VNC , il existe un élément unique $I(y, e_0)$ dans $\mathfrak{X}$, défini d'accord avec (3.24), (3.24b) [c'est essentiellement une affirmation dans (D)]. Dans les conditions (3.1), (3.2), les espaces $\mathfrak{A}_f, Z, \mathfrak{X}$ étant VNC et $\mathfrak{A}_f$ étant en plus séparable, si $y[\cdot: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_f]$ est intégrable- m (au sens de DENJOY) pour un e_0 , on dira que l'élément unique $I(y, e_0)$ (3.24b) est l'intégrale- m de y sur e_0 [sens de DENJOY; voir (3.25)]. Ensuite nous prouvons le théorème capital 3.26: en admettant (3.25), (3.16), si y est intégrable- m pour un e_0 (sens de DENJOY), y sera intégrable- m pour e_0 au sens de (3.4) et on aura $I(y, e_0) =$

$= \int_{e_0} y \odot dm = I_{\beta}(y, e_0)$, où $\beta(y(e), e) = p(y(e), m(e))$ (2.8). Cela établit un lien entre les intégrations au genre de LEBESGUE, selon (D) et selon (R). Dans la section 4 on établit (théorème 4.1) que, si l'on admet $v(e_0) < \infty$ pour un e_0 de $\mathcal{F}$ et si y est intégrable m (DENJOY) pour e_0 , y sera *conditionnellement intégrable- m pour e_0* . Ce résultat mène à l'énoncé (4.2). L'intégrale- m (DENJOY) jouit des propriétés (a) — (e), indiquées à la suite de (4.2), ainsi que (4.3). Ensuite nous démontrons le théorème 4.4: l'intégrabilité- m (DENJOY) sur un e_0 de $\mathcal{F}$ ($v(e_0) < \infty$) entraîne sur e_0 la sommabilité- m [selon (3.11), (2.14)]. L'intégrale- m est complètement additive dans $\mathcal{F}$ et absolument continue- v (4.5). L'énoncé (4.6) se rattache au cas où il y a une suite $y_n = y_n(u)$ ($n = 1, 2, \dots$) de fonctions intégrables- m qui converge approximativement- v . Quant à la mesurabilité- D (définition 3.20) on a les affirmations (4.6A)-(4.7). Dans le reste de la section 4 nous envisageons le concept d'équivalence différentielle en rapport avec l'intégrale- m (DENJOY) indéfinie.

Dans la section 5 on admet l'hypothèse (5.1); ainsi, en particulier, $\mathcal{Y}, Z, \mathcal{X}$ sont VNC, $\mathcal{Y}$ est séparable, $m[\mathcal{F} \rightarrow Z]$ est une mesure vectorielle, v (3.15) est la mesure absolue qui correspond, $v(\mathcal{A}) < \infty$; $\mathcal{A}$ est un espace séparé (HAUSDORFF), séparable et complet, distancié au sens de FRÉCHET, ρ étant la pseudo-distance qui correspond et qui définit la topologie de $\mathcal{A}$; on admet l'existence d'une famille $\mathcal{C}'$ d'ensembles ouverts (5.1b), (5.1c). Le théorème de CANTOR-BAIRE est valide dans $\mathcal{A}$. Nous notons (5.2) (5.3). Une famille $\mathfrak{N}$ d'ensembles ouverts, dits *fondamentaux*, est assujettie à l'hypothèse 5.4. On utilise les constatations et les notations (5.5)-(5.10a); elles se rattachent aux concepts d'un point isolé- s , d'un ensemble parfait- s , des familles $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, d'un ensemble (*), de la continuité intérieure [d'une fonction $\Psi[\mathfrak{N} \rightarrow \mathcal{X}]$, de l'additivité complète dans $\mathfrak{N}$ d'une Ψ ; la définition (5.10) spécifie une intégrale de BURKILL. Théorème 5.11 est relativement à quelques-unes des propriétés de l'intégrale de BURKILL. L'énoncé (5.13) présente une condition pour que $\Psi[\mathfrak{N} \rightarrow \mathcal{X}]$ complètement additive dans $\mathfrak{N}$ soit intérieurement continue. On utilise les lemmes 5.14, 5.15. Dans la définition 5.16 nous introduisons la notion d'une fonction ponctuelle $y[\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{Y}]$ (5.1) *totalisable- D* sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{N}$; cela fait intervenir l'intégration- m [au sens de DENJOY; sections 3, 4] et l'intégration au genre de BURKILL [sens actuel]; si la totale- D sur $\mathcal{R}$ de y existe et si l'on désigne la totale par Ψ , on écrit: $\Psi(\mathcal{R}) = (D) \int_{\mathcal{R}} y \odot dm$. La totale- D est unique (5.18). Les affirmations (5.19)-(5.19c)

présentent des propriétés de la totale. Au théorème 5.20 il est établi que *l'intégrabilité- m entraîne la totalisabilité- D et l'égalité de l'intégrale- m et de la totale- D* . Dans la section 6, à la suite des propositions (6.1) et (6.2) et en s'appuyant sur la définition (6.3) de Ψ^* , on est mené au théorème 6.4, où intervient la formule (6.4a), qui est essentielle pour le calcul effectif d'une totale- D . D'accord avec la définition 6.5 on introduit une classification de

fonctions $y[:\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q}]$ (sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{M}$); il s'agit des classes K_α (α des classes I, II); K_0 désigne la classe des fonctions, qui sur un ensemble donné de $\mathfrak{M}$, sont intégrables- m [au sens de DENJOY, e.g. au sens essentiellement lebesgien]. Selon le théorème 6.6 *toute fonction y totalisable- D appartient à une classe K_α* . Dans le reste de la section 6 on envisage une y totalisable- D sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{M}$. En posant $\Psi(r) = (D) \int_r y \odot dm$ pour r (de $\mathfrak{M}$) $\subset \mathcal{R}$. Nous

présentons les précédés du calcul effectif de Ψ à partir de y ; le calcul s'échelonne en suivant une suite transfinie d'opérations; cette suite se termine pour un indice (des classes I, II) de la première espèce; à la base de ce calcul on s'appuie, d'une façon convenable, sur l'intégration- m .

Dans les sections 7,8 nous envisageons la totale- S vectorielle symétrique. On procède en s'appuyant sur les conditions, les désignations et les développements qui se rattachent à (5.1)-(5.5), (7.1), (7.2), (7.3). Nous utilisons les familles $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}^s$, $\mathfrak{M}'^s$, $\mathfrak{M}''^s$, $\mathfrak{M}_0^s$ d'ensembles (définition 7.4); ν désignant la mesure absolue qui correspond à m , on admet la condition de continuité au sens de (7.4'). Pour $\Psi[:\mathfrak{M}^s \rightarrow \mathfrak{X}(VC)]$ s'annulant pour les sous-ensembles d'une frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}^s$ on spécifie le concept de *l'additivité complète dans $\mathfrak{M}^s$* (définition 7.5). $\mathfrak{M}^s$ est assujettie à (7.7). Nous procédons en faisant usage des définitions et des affirmations (7.7)-(7.11) [il s'agit d'ensembles (*), des décompositions finies dans $\mathfrak{M}^s$, des systèmes finis de sphères relativement à un ensemble fermé, des notations $M\{\dots\}$, $N(\dots)$]. Un espèce de l'intégrale de BURKILL (sphérique, symétrique) est spécifiée dans (7.12)-(7.12'). Dans (7.13) il s'agit des notions d'un point isolé- s , d'un ensemble parfait- s (au sens nouveau). L'intégrale de BURKILL (rel. à p), où p est ferme, jouit des propriétés (7.14). On utilise le concept «s.a. (rel. à p)» (7.15). Nous spécifions la *totalisation- S vectorielle symétrique* selon la définition 7.16; on totalise sur un $\mathcal{R}$ (de $\mathfrak{M}^s$) une fonction ponctuelle $y[:\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q}]$; si la totale- S Ψ existe, on écrit $\Psi(R) = (S) \int_R y \odot dm$. Cette totale est unique (théorème 7.17).

La totale- S possède les caractères (7.18), (7.19). Si l'intégrale- m , $\int_R y \odot dm$ existe pour un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{M}^s$, la totale- S existe et $\int_R y \odot dm = (S) \int_R y \odot dm$ (théorème 7.20). La notion A.S.G. est introduite dans (7.21); cette propriété survient au théorème 7.22, qui joue un rôle dans le calcul effectif de la totale- S ; concernant ce calcul voir la remarque (7.23). On définit les classes $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_\alpha$ ($\alpha > 0$, α des classes I, II) de fonctions $y[:\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q}]$ (7.24) et on montre que *toute y totalisable- S est dans une classe $\mathcal{K}_\alpha$* . Dans la section 8 il s'agit du cas où Ψ est une totale- S simplifiée; c'est le cas où les conditions de l'hypothèse 8.1 ont lieu. La simplification est réalisée en vertu du théorème 8.4.

Dans la section 9 on s'occupe de la totale- D . Ce qui mène aux énoncés (9.6), (9.7) constitue une adaptation de quelques-uns des développements de (K) à l'intégrale de BURKILL [de la sorte propre à la totalisation- D]. Nous

admettons (9.8): une fonction y totalisable- D sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{N}$, $\Psi(\tilde{r}) = (D) \int_{\tilde{r}} y \odot dm$ dans $\mathcal{R}$. On définit selon (9.28) les rangs de certaines intégrales de y . Moyennant l'induction transfinie nous démontrons l'additivité pour tout rang au sens du lemme 9.32. D'après le théorème fondamental 9.33 il exist un rang b , tel que $\Psi =$ une $\int_b y \odot dm$ dans $\mathcal{R}$. La portée de cette proposition, en tant que *l'équivalence différentielle (de rang b)* pour la totale- D , est indiquée dans la remarque (9.34) [voir aussi le texte à la suite de (9.34)]. Dans la section 10 il s'agit de la totale- S . Soit (10.1): une y totalisable- S sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{N}^s$ de $(\mathbb{R}^0 \neq 0)$, avec $\Psi = (S) \int y \odot dm$ dans $\mathcal{R}$. Les rangs (au sens symétrique) des certaines intégrales sont introduits dans le définition 10.19. L'additivité de ces intégrales, pour tout rang donné, a lieu d'accord avec le lemme 10.23. En s'appuyant sur l'induction transfinie on prouve le théorème fondamental 10.24, selon lesquels dans $\mathcal{R}$ Ψ est une intégrale $\int^{s:b} y \odot dm$, où b est un rang convenable. La remarque 10.25 se rattache à *l'équivalence différentielle (d'un rang b convenable)* pour la totale- S .

2. - Préliminaires sur l'intégration.

Désignons par $\mathcal{R}$ le corps de nombres réels. VN sera un espace vectoriel normé réel (e.g. sur $\mathcal{R}$). VNC est un espace VN complet (e.g. espace de BANACH réel). On muni un tel espace de la topologie provenant de la norme.

(2.1). - On utilisera au sens de la théorie d'ensembles les notations:

$+$ (union), $\dot{-}$ (soustraction), les inclusions $\subset, \supset, \in, \ni$;

$\dot{\Sigma}$ et Π , respectivement l'union et l'intersection des ensembles indiquées; AB dénotera l'intersection des ensembles A, B . Lorsque la signification est assez évidente, pour simplifier l'écriture on utilisera $+, -, \Sigma$ pour $\dot{+}, \dot{-}, \dot{\Sigma}$.

(2.1a). - Les notations $+, -$ (ou bien $\setminus$), Σ seront au sens vectoriel (sauf pour la remarque précédente); si x est un point (élément) dans un espace $\mathcal{M}$, VN , et $\alpha \in \mathcal{R}$, multiplication de x par α sera notée par $\alpha \cdot x$ (ou bien αx).

(2.1b). - Soient A, B des ensembles dans un espace quelconque $\mathcal{M}$. Le complément CA de A (relativement à $\mathcal{M}$) est $\mathcal{M} \dot{-} A$; $B \setminus A = B \dot{-} A = B \dot{-} BA = B[CA]$ (l'ensemble des points de B étrangers à A).

Comme une conséquence d'une remarque dans (R ; p. 500), si $\mathcal{X}$ est un espace VNC , $\mathcal{X}$ sera aussi complet au sens voisinages, comme il suit. Soit $\mathcal{R}^+$ l'ensemble de nombres réels positif. On dira que $\{x_r\}$ [$x_r \in \mathcal{X}$, r parcourant $\mathcal{R}^+$] est un ensemble de CAUCHY, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que

$$r_1 > \delta(\varepsilon), \quad r_2 < \delta(\varepsilon) \quad \text{entraîne} \quad \|x_{r_1} - x_{r_2}\| < \varepsilon.$$

On dit qu'un tel ensemble converge vers un α , si pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un r_ε ($\in \mathbb{R}^+$) tel que $r < r_\varepsilon$ implique $\|x - x_r\| < \varepsilon$. $\mathfrak{X}$ est complet au sens de voisinages veut dire que tout ensemble de CAUCHY converge.

(2.2). - Soit $\mathfrak{X}$ au moins VN. Désignons par $S(x, n)$ la *sphère ouverte* de centre x et de rayon r . On dénotera par π (ou par π avec des indices inférieurs et supérieurs) *un ensemble fini d'entiers positifs* (R ; p. 500-501); $\pi_1 \geq \pi^2$ veut dire π_1 contient π_2 . Si X, Y sont des ensembles dans $\mathfrak{X}$, on dira que

(2.2a). - X, Y sont *égaux à ε près*, si $X \subset Y + S(0, \varepsilon)$ et $Y \subset X + S(0, \varepsilon)$.

Les deux inclusions dans (2.2a) équivalent respectivement aux affirmations:

(2.2a'). - Tout point x de X est à distance moins de ε d'un point y_1 de Y ;

(2.2a''). - Tout point y de Y est à distance inférieure à ε d'un point x_1 de X .

Désignons par $d(x, y) = \|x - y\|$ la distance entre deux points de $\mathfrak{X}$ (VN); soient A, B des ensembles dans $\mathfrak{X}$; posons $d(x, B) = \inf(y \in B) d(x, y)$. Alors d'après définition:

(2.3). - Éc. (A, B) [l'écart de A à B] = $\sup(x \in A) d(x, B)$; éc. mut. (A, B) [l'écart mutuel] = le plus grand des écarts éc. (A, B) et éc. (B, A) .

On vérifie que (2.2a') entraîne que $d(x, Y) < \varepsilon$ pour tout x sur X , donc éc. $(X, Y) \leq \varepsilon$; de même (2.2a'') implique éc. $(Y, X) \leq \varepsilon$; par conséquent

(2.4). - X, Y , «sont égaux à ε près» entraîne éc. mut. $(X, Y) \leq \varepsilon$.

Supposons que éc. $(X, Y) < \varepsilon$, e.g. que $\sup(x \in X) d(x, Y) < \varepsilon$; alors $d(x, Y) < \varepsilon$ sur X ; or $d(x, Y) = \inf(y \in Y) d(x, y)$; donc pour tout x sur X il y a un $y_1 = y_1(x)$ tel que $d(x, y_1) < \varepsilon$, e.g. éc. $(X, Y) < \varepsilon$ implique (2.2a'), c'est à-dire $X \subset Y + S(0, \varepsilon)$. De même $Y \subset X + S(0, \varepsilon)$, si éc. $(Y, X) < \varepsilon$. Donc

(2.4'). - Éc. mut. $(X, Y) < \varepsilon$ entraîne X, Y «sont égaux à ε près».

(2.5). - $\{X_n\}, \{X'_n\}$ étant des suites d'ensembles dans $\mathfrak{X}$, VN, d'accord avec (R ; 2.1, 2.2) on dira que les deux suites sont *sommablement égales à ε près*, s'il existe un π' tel que $\Sigma_\pi X_n, \Sigma_\pi X'_n$ sont égaux à ε près (2.2a) pour tout $\pi \geq \pi'$; la suite $\{X_n\}$ est *s.i. [sommable inconditionnellement] à ε près vers un ensemble X* , s'il y a un $\pi' = \pi'(\varepsilon)$ tel que $X, \Sigma_\pi X_n$ sont égaux à ε près pour tout $\pi \geq \pi'$.

Selon le théorème 2.3 (R ; p. 501), dire que $\{X_n\}$ est *s.i. à ε près vers X* équivaut à ce que pour tout arrangement $n(r)$ de la suite $\{n\}$ il y a un k' tel que les ensembles $X, \sum_{i=1}^k X_{n(i)}$ sont égaux à ε près pour tout $k \geq k'$.

(2.5'). – Soient les x_n et x des points dans $\mathfrak{X}$. Dire que la suite $\{x_n\}$ est s.i. à ε près vers x revient à ce qu'il existe un $\pi' = \pi'(\varepsilon)$ tel que $\pi \geq \pi'$ entraîne $\|x - \sum_{\pi} x_n\| < \varepsilon$; si ceci a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, $\{x_n\}$ est s.i. vers x (e.g. inconditionnellement au sens ordinaire); la propriété « $\{x_n\}$ est s.i. à ε près vers x » équivaut à ceci: pour tout arrangement $n(i)$ de $\{n\}$ il y a un $k' = k'(\varepsilon)$ tel que $\|x - \sum_{i=1}^k x_{n(i)}\| < \varepsilon$ dès que $k \geq k'$.

(2.5''). – Le domaine d'intégration, éventuellement de totalisation, sera un espace $\mathfrak{A}$ muni d'une famille $\mathfrak{F} = \{e\}$ complètement additive d'ensembles [$\mathfrak{A}$ et $\emptyset \in \mathfrak{F}$; les compléments, relativement à $\mathfrak{A}$, des ensembles de $\mathfrak{F}$ sont dans $\mathfrak{F}$; $\sum e_n \in \mathfrak{F}$, si e_n ($n = 1, 2, \dots$) $\in \mathfrak{F}$]. Désignons par $\mu = \mu(e)$ une mesure-fonction non négative (finie), définie pour les e de $\mathfrak{F}$; par définition μ est complètement additive dans $\mathfrak{F}$ [on dit: les e de $\mathfrak{F}$ sont mesurables- μ]. Soit $x(e)$ une fonction ponctuelle: $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{X}$ (VN); on dira que $x(e)$ est absolument continue- μ , si pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\mu(e) < \delta$ implique $\|x(e)\| < \varepsilon$.

Nous seront utiles les adaptations suivantes des théorèmes 3.1, 3.2 dans (*R*; p. 501-502).

(2.6). – Soit $x(e)$ ($\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{X}$) complètement additive [e.g. « e_n ($n = 1, 2, \dots$), $\in \mathfrak{F}$, sont disjoints » entraîne « la série inconditionnellement convergente $\sum x(e_n)$ vaut $x(e_1 + e_2 + \dots)$ » – autrement dit la « la suite $\{x(e_n)\}$ est s.i. vers $x(e_1 + \dots)$ »]; si $x(e) = \theta$ lorsque $\mu(e) = 0$, $x(e)$ sera absolument continue- μ . Soit $\{x_n(e)\}$ une suite de CAUCHY pour tout e de $\mathfrak{F}$, chaque $x_n(e)$ étant complètement additive et absolument continue- μ ; alors la continuité- μ absolue des x_n est uniforme par rapport à n [e.g. les x_n sont « équicontinues- μ » au sens indiqué]. $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{A}$ étant des espaces VN, envisageons une fonction bilinéaire $\beta(y, e)$, assujettie aux conditions suivantes, qui se trouvent dans (*R*; p. 511).

(2.7). – (1°) $\beta(y, e) : \mathfrak{A} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{X}$; pour tout y de $\mathfrak{A}$ et e de $\mathfrak{F}$, $\beta(y, e)$ est un point dans $\mathfrak{X}$.

(2°) $\beta(y, e)$ est linéaire en y pour tout e de $\mathfrak{F}$.

(3°) $\beta(y, e)$ est complètement additive en e , pour tout y (de $\mathfrak{A}$).

(4°) Pour un $c \geq 1$ on a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \beta(Y_i, e_j^i) \subset cS(0, \varepsilon), \text{ lorsque } \sum_{j=1}^m \beta(Y_i, e_i) \subset S(0, \varepsilon),$$

$Y_j \in \mathfrak{A}$, les e_i étant disjoints, $e_i = \sum_{j=1}^{n_i} e_j^i$, les e_j^i étant disjoints pour i fixe; $\beta(Y, e) = \{\beta(y, e); y \in Y\}$.

Dans la suite $y(e)$ est un ensemble dans $\mathfrak{A}$, défini pour tout e de $\mathfrak{F}$; comme dans (R), on suppose que $y(e)$ est contractive $[y(e_1) \subset y(e_2)]$ quand $e_1 \subset e_2$.

Désignons par Δ , ou par Δ avec des indices supérieurs ou inférieurs, une partition $\{e_i\}$ de $\mathfrak{A}$ [les e_i ($\in \mathfrak{F}$) étant disjoints et $\sum e_i = \mathfrak{A}$]; si Δ_1 est plus fine que Δ_2 , on écrira $\Delta_1 \geq \Delta_2$. D'accord avec (R; 10.1) nous utiliserons la définition suivante de l'intégrale- β .

(2.8). - $y(e) : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{A}$ est intégrable- β pour un e_0 de $\mathfrak{F}$, s'il existe un point $I_\beta(y, e_0)$ dans l'espace $\mathfrak{X}$, VN , de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a une partition $\Delta = \{e_i\} = \{e_i(\varepsilon)\}$ pour laquelle la suite $\{\beta(y(e_0 e_i), e_0 e_i)\}$ est s.i. à ε près vers $I_\beta(y, e_0)$ (voir (2.5)); on écrira $I_\beta(y, e_0) = \int_{e_0} \beta(y, de)$, si l'intégrale- β existe.

(2.9). - Nous dirons que $F(e)$ est intégrable [sous-entendu au sens — $\mathfrak{Q}$ (R; définition 4.1)] pour un e_0 de $\mathfrak{F}$, s'il existe un ensemble $I(F, e_0) \subset \mathfrak{X}$ (VN) tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il y a une partition $\Delta' = \{e'_i(\varepsilon)\}$ de sorte que $\Delta = \{e_i\} \geq \Delta'$ entraîne que la suite $\{F(e_0 e_i)\}$ est s.i. à ε près vers $I(F, e_0)$ (2.5); dans ce cas on écrit $\int_e F(de) = \overline{I(F, e_0)}$. Nous dirons que $F(e)$ est intégrable- s [sous-entendu au sens- $\mathfrak{S}\mathfrak{Q}$ de (R; définition 4.1)] pour un e_0 , si $F(e)$ est intégrable, au sens qu'on vient d'indiquer, pour e_0 , l'ensemble $I(F, e_0)$ étant formé d'un seul point dans $\mathfrak{X}$. Selon (R; théorème 10.4), l'intégrabilité- β de $y(e)$ (au sens de (2.8)) équivaut à l'intégrabilité- s de $F(e) = \beta(y(e), e)$; on en dérive des conséquences immédiates pour l'intégration- β , en s'appuyant sur les définitions et les énoncés qui se trouvent dans (R; p. 503-509).

(2.9'). - D'après (R; p. 509), on dira que $F(e)$ est intégrable- s uniformément en e (e.g. par rapport à e), si l'intégrale- s de F existe pour tout e (de $\mathfrak{F}$) et si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une Δ' , indépendante de e , de sorte que $\Delta = \{e_i\} \geq \Delta'$ implique que la suite $\{F(e e_i)\}$ est s.i. à ε près vers $\int_e F$, uniformément en e . Selon (R; théorème 10.6), l'intégrabilité- β de $y(e)$ pour tout e (de $\mathfrak{F}$) équivaut à l'intégrabilité- s de $F(e) = \beta(y(e), e)$ uniformément en e .

(2.10). - D'accord avec (R; définition 11.1) nous disons que $y(e)$ est conditionnellement intégrable- β pour un e_0 , si pour tout $\varepsilon > 0$ il y a une $\Delta' = \{e_i\}$ et un π' tels que $\pi_j \geq \pi'$ ($j = 1, 2$) entraîne

$$\Sigma_{\pi_1} \beta(y(e_0 e_i), e_0 e_i) - \Sigma_{\pi_2} \beta(y(e_0 e_1), e_0 e_1) \subset S(0, \varepsilon).$$

Selon (R; théorème 11.3), si $\mathfrak{X}$ est VNC et $y(e)$ est conditionnellement intégrable- β pour $\mathfrak{A}$, $y(e)$ sera intégrable- β pour tout e (de $\mathfrak{F}$).

(2.11). - Soit $\mu, \geq 0$, une mesure-fonction définie dans $\mathfrak{F}$ (2.5'') et supposons que $\beta(y, e) = \theta$ pour tout $y \in \mathfrak{A}$, dès que $\mu(e) = 0$; on admet cette condi-

tion ci-après jusqu'à (2.13). Alors $(R; 12.1)$, si $y(e)$ est intégrable- β pour tout $e \in \mathcal{E}$, $\int \beta(y, de)$ sera complètement additive et absolument continue- μ .

On a admis que $\mathcal{M}$ est un espace VN (avec la topologie provenant de la norme); dans le reste de cette section on utilisera la cinquième condition $(R; B 5; p. 516)$ pour la fonction bilinéaire β , comme il suit.

(2.12). - $\beta(y, \mathcal{M})$ est continue : $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}$ [$y \in \mathcal{M}$, $\|y\| < \delta(\varepsilon)$ entraîne $\|\beta(y, \mathcal{M})\| < \varepsilon$].

(2.12'). - D'après $(R; \text{théorème } 12.2)$, β satisfaisant aux conditions (2.7), (2.12), $\beta(y, e)$ sera continue pour tout e , uniformément par rapport à e (de $\mathcal{F}$).

(2.13). - D'accord avec $(R; 12.3)$, on dira qu'une suite $\{y_n(e)\}$ converge approximativement- μ vers $y(e)$, si pour tout n et tout $\varepsilon > 0$, il y a un $e(n, \varepsilon)$ (de $\mathcal{F}$) de sorte que $\lim_n \mu(e(n, \varepsilon)) = 0$ et que les ensembles $y_n(e)$, $y(e)$ sont égaux à ε près (2.2a), dès que $e \subset \mathcal{M} \setminus e(n, \varepsilon)$. De plus $(R; p. 517)$: si $\mathcal{X}$ est VNC et les $y_n(e)$ sont intégrables- β pour tout e (de $\mathcal{F}$) et si $\{y_n(e)\}$ converge approximativement- μ vers $y(e)$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes.

(a) $y(e)$ est intégrable- β (tout e) et $\int \beta(y_n, de) \rightarrow \int \beta(y, de)$ uniformément en e ;

(b) $\lim_n \int \beta(y_n, de)$ existe (tout e);

(c) la continuité- μ absolue de $\int \beta(y_n, de)$ est uniforme par rapport à n .

(2.14). - D'accord avec $(R; p. 517)$, on dira que $y(e)$ est mesurable- $\mathcal{F}$ sur un e_0 , si pour tout Y partout dense sur $y(e_0)$ et tout $\varepsilon > 0$ on peut associer avec tout point y de Y un ensemble $e_y = e_{y, \varepsilon}$, de sorte que $\|\eta - y\| < \varepsilon$, pour $\eta \in y(e_y)$, et $e_0 = \bigcup (y \in Y) e_y$ [on a $e_y \subset e_0$, donc $y(e_y) \subset y(e_0)$]; $y(e_y) \subset S(y, \varepsilon)$. On dit que $y(e)$ est sommable- β , si pour tout $\varepsilon > 0$ il y a une partition Δ_ε telle qu'avec toute $\Delta = \{e_i\} \supseteq \Delta_\varepsilon$ on peut associer un π' , de sorte que $\sum_\pi \beta(y(e_i), e_i) \subset S(0, \varepsilon)$ pour tout π disjoint de π' [alors $\{\beta(y(e_i), e_i)\}$ est s.i. à ε près vers $\sum_{\pi'} \beta(y(e_i), e_i)$].

Voici plusieurs définitions d'accord avec $(R; p. 518)$.

(2.15). - (1°) Un ensemble e_0 est de mesure- β zéro, si $\beta(y, e_0) = 0$ pour tout $y \in \mathcal{M}$;

(2°) on dira qu'une fonction $y(e)$ est séparable, si l'ensemble $y[\mathcal{M}]$ l'est;

(3°) $y(e)$ est presque séparable- β , s'il y a un e_0 de mesure- β zéro, tel que $y(\mathcal{M} \setminus e_0)$ est séparable.

(2.16). - Selon $(R; \text{théorèmes } 13.3, 13.4)$: si $\mathcal{X}$ est VNC et si $y(e)$ sommable- β est presque séparable- β et est mesurable- $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{M} \setminus e_0$, e_0 ayant mesure- β

zéro et $y(\mathfrak{A} \dot{-} e_0)$ étant séparable - alors $\int_e \beta(y(e), de)$ existe pour tout e (de $\mathfrak{F}$).
 Soit la complète additivité de $\beta(y, e)$ uniforme par rapport à y ; soit la fonction $y(e)$ bornée [e.g. soit l'ensemble $y(\mathfrak{A})$ borné], presque séparable- β , mesurable- $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{A} \dot{-} e_0$ [e_0 étant comme indiqué plus haut]; alors $y(e)$ sera intégrable- β pour tout e .

3. - L'intégration vectorielle au genre de Lebesgue.

L'objet de la section présente est de réaliser un rapport entre les développements qui précèdent et les idées générales sur l'intégration vectorielle (au genre de LEBESGUE) dues à DENJOY (D). D'abord il sera nécessaire d'introduire d'une façon explicite une fonction-mesure vectorielle m d'une telle manière qu'on puisse établir un lieu entre (D) et les développements dans (R).

(3.1). - Soient $\mathfrak{A}$ l'espace et $\mathfrak{F} = \{e\}$ une famille complètement additive d'ensembles, d'accord avec (2.5'); $\mathfrak{A}$ désignant un espace VN , $y[: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}]$ sera une fonction ponctuelle, $y = y(u) \in \mathfrak{A}$ pour $u \in \mathfrak{A}$; la fonction $y(e)[: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{A}]$, l'image directe de $e(\in \mathfrak{F})$ pas y , est contractive. L'espace Z étant VN , on envisage une mesure m vectorielle: $\mathfrak{F} \rightarrow Z$; m est définie pour tout e de $\mathfrak{F}$ et est complètement additive relativement à $\mathfrak{F}$ (au sens de (2.6)). Nous supposons que $\|m(\mathfrak{A})\| < \infty$. On considère une fonction bilinéaire bornée

(3.1a). - $p(y, m)[: \mathfrak{A} \times Z \rightarrow \mathfrak{X}]$, l'espace $\mathfrak{X}$ étant VN ; $\|p(y, m)\| \leq A \|y\| \|m\|$.

HYPOTHÈSES 3.2. - Il existe un $c \geq 1$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$, les relations

(a) les e_i de $\mathfrak{F}$ ($i = 1, \dots, m$) sont disjoints, $e_i = \sum_{j=1}^{n_i} e_i^j$, les e_i^j de $\mathfrak{F}$ sont disjoints, $\sum_{i=1}^m p(Y_i m(e_i)) \subset S(0, \epsilon)$ [où $p, Y(m, e) = \{p(y, m(e_i)); y \in Y\}$] entraînent

(b) $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} p(Y_i, m(e_i^j)) \subset cS(0, \epsilon)$.

On peut exprimer la propriété (b) comme il suit. Si $\left\| \sum_{i=1}^m p(y_i, m(e_i)) \right\| < \epsilon$, des que $y_i \in Y_i$, il vient $\left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} p(\widehat{y}_i^j, m(e_i^j)) \right\| < c\epsilon$ lorsque $\widehat{y}_i^j \in Y_i$.

(3.3). - Dans les conditions indiquées plus haut la fonction $\beta(y, e) = p(y, m(e))$ $[: \mathfrak{A} \times \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{X}]$ jouit des caractères (2.7, 1°), (2.7, 2°), (2.7, 3°), (2.7, 4°), (2.12).

En effet (2.7, 1°) s'ensuit d'après (3.1a) et puisque $m = m(e): \mathfrak{F} \rightarrow Z$; (2.7, 2°) a lieu en tant que $p(y, m)$ est linéaire en y ; (2.7, 4°) résulte de l'hypothèse 3.2; la propriété (2.12) suit de l'inégalité $\|p(y, m(\mathfrak{A}))\| \leq A \|m(\mathfrak{A})\| \|y\|$, où $\|m(\mathfrak{A})\|$ est finie. Pour établir (2.7, 3°) démontrons d'abord la proposition.

(3.3'). - Si $z_u \in Z$ et $z = \sum_1^\infty z_n$ au sens de la convergence inconditionnelle [e.g. la suite $\{z_n\}$ est s.i. vers z] alors $p(y, z) = \sum_1^\infty p(y, z_n)$ dans le même sens.

En effet, si $n(i)$ ($i = 1, 2, \dots$) est un arrangement quelconque de la suite $\{n\}$, on aura

$$\left\| z - \sum_{i=1}^k z_{n(i)} \right\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geq k'(\varepsilon).$$

où $k'(\varepsilon)$ dépend de l'arrangement. Alors

$$\left\| p(y, z) - p\left(y, \sum_1^k z_{n(i)}\right) \right\| \leq A \|y\| \left\| z - \sum_1^k z_{n(i)} \right\| < A \|y\| \varepsilon \quad (k \geq k'(\varepsilon)),$$

ainsi

$$p\left(y, \sum_1^k z_{n(i)}\right) = \sum p(y, z_{n(i)}) \rightarrow p(y, z) \quad (\text{au sens de la norme})$$

pour $k \rightarrow \infty$; e.g. $\sum_1^\infty p(y, z_{n(i)}) = p(y, z)$, cela étant pour tout arrangement $n(i)$; donc la suite $\{p(y, z_n)\}$ est s.i. vers $p(y, z)$; (3.3'), ainsi que le reste de (3.3), est vérifié.

Envisageons maintenant une suite d'ensembles e_n (de $\mathcal{F}$) disjoints $e = \dot{\sum} e_n$. Alors $m(e) = \sum_1^\infty m(e_n)$ au sens de la convergence inconditionnelle. L'énoncé (3.3'), avec $z = m(e)$ et $z_n = m(e_n)$, s'applique; par conséquent $p(y, m(e)) = \sum_1^\infty p(y, m(e_n))$, e.g. $\{m(e_n)\}$ est s.i. vers le premier membre. Cela démontre (2.7, 3°) pour $\beta(y, e) = p(y, m(e))$.

DÉFINITION 3.4. - Admettons au moins les conditions et les notations qui se trouvent dans (3.1), (3.2). On dira que $y: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ [ou bien, $y(e): \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}'$] est *intégrable- m pour un e de $\mathcal{F}$* , si $\beta(y, e) = p(y, m(e))$ est intégrable- β pour e_0 au sens de (2.8). Au cas d'intégrabilité- m de y pour e_0 on écrira

(3.4a). - $[I_\beta y, e_0] = \int p(y, dm) = \int y \odot dm = \int y(u) \odot dm(u)$; ici u désigne le point variable sur e_0 ($\subset \mathcal{A}$), par rapport auquel l'intégration est réalisée.

Dans (3.4a) $\odot$ est le symbole du « produit » vectoriel, spécifié au sens $y \odot m = p(y, m)$.

En tenant compte de (2.9) on conclut que l'intégration- m possède beaucoup des propriétés indiquées dans (R ; p. 503-509) pour l'intégrale- $\mathcal{S}\mathcal{A}$ [l'intégrale- s , de (2.9)]. Ainsi il y a

(3.5). - *Unicité* de l'intégrale- m (R ; théorème 4.2), *linéarité* en y (R ; corollaire 5.2), *l'additivité finie* dans $\mathcal{F}$ (R ; corollaire 5.4), *la complète additivité*

de l'intégrale- m (R ; corollaire 5.6); en plus, on pourra utiliser pour l'intégration- m la notion de *l'équivalence différentielle* (R ; corollaire 6.1).

(3.5'). - L'intégrabilité- m de y (de $y(e)$) pour tout e (de $\mathcal{F}$) équivaut à l'intégrabilité- s de $F(e) = p(y(e), m(e))$ uniformément en e [conséquence de (2.9), (2.9')].

Nous dirons que y est *conditionnellement intégrable- m* pour un e_0 (de $\mathcal{F}$), si $y(e)$ est conditionnellement intégrable- β pour e_0 au sens (2.10), $\beta(y, e) = p(y, m(e))$. En tenant compte du fait qu'à présent $y(e)$ est l'image directe d'ensemble e ($\subset \mathcal{U}$) par la fonction ponctuelle $y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$, il vient que la propriété de *l'intégrabilité- m conditionnelle de y pour un e_0* équivaut à ce que, pour tout $\varepsilon > 0$, il y a une partition $\Delta' = \{e_i\}$ (de $\mathcal{U}$) et un π' , de sorte que les relations $\pi_1 \geq \pi'$, $\pi_2 \geq \pi'$ entraînent

$$(3.6) \quad \|\Sigma_{\pi_1} p(y(u_i^1), m(e_0 e_1)) - \Sigma_{\pi_2} p(y(u_i^2), m(e_0 e_i))\| < \varepsilon,$$

pour tout choix des points u_i^j sur $e_0 e_i$ [$j = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots$].

(3.7). - Au cas $\mathcal{X}$ est VNC et si y est conditionnellement intégrable- m pour $\mathcal{U}$, y sera *intégrable- m pour tout e* (de $\mathcal{F}$) [conséquence de (2.10)].

Soit, $\mu, \geq 0$, une mesure-fonction (finie) définie dans $\mathcal{F}$, d'accord avec (2.5''). À certaines reprises on admettra pour la mesure vectorielle m , introduite plus haut, la condition suivante.

(3.8). - Les relations $e \in \mathcal{F}$, $\mu(e) = 0$, entraînent $m(e) = \theta$.

En raison de (2.6) $m(e)$ sera alors *absolument continue- μ* , au sens que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de sorte que $\|m(e)\| < \varepsilon$, dès que $\mu(e) < \delta(\varepsilon)$.

(3.8'). - La condition (3.8) implique

$$p(y, m(e)) = \theta, \text{ dès que } \mu(e) = 0,$$

cela étant pour tout $y \in \mathcal{Y}$.

Ainsi l'hypothèse (3.8) entraîne la *propriété* (2.11) pour la fonction $\beta(y, e) = p(y, m(e))$. Par conséquent on obtient la conclusion suivante.

(3.9). - Admettons (3.1), (3.2), (3.8). Si y est *intégrable- m pour tout e* (de $\mathcal{F}$), $\int y \odot dm$ sera *complètement additive et absolument continue- μ* .

Selon (2.12'), la continuité de $p(y, m(e))$ en y pour tout e de $\mathcal{F}$ est uniforme par rapport à e .

(3.10). - Soit $\mathcal{X}$ un espace VNC et admettons (3.1), (3.2), (3.8); supposons que les y_n ($n = 1, 2, \dots$) sont *intégrables- m pour tout e* (de $\mathcal{F}$) et la suite

$\{y_n(e)\}$ converge *approximativement*- μ vers $y(e)$ (au sens de (2.13)). Alors les trois constatations (2.13a, b, c) sont équivalentes, en remplaçant l'intégrabilité- β par l'intégrabilité- m et $\beta(y, e)$ par $p(y, m(e))$.

(3.11). - On dira qu'une fonction ponctuelle $y[: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}]$ est *mesurable*- $\mathfrak{F}$ pour un e_0 (de $\mathfrak{F}$), si la fonction $y(e)$ l'est au sens de (2.14); y est *sommable*- m , si $y(e)$ est *sommable*- β , avec $\beta(y, e) = p(y, m(e))$, au sens de (2.14). On dira que y est *presque séparable*- m , si $y(e)$ est *presque séparable*- β .

Notons que $m(e_0) = 0$ implique que e_0 est de mesure- β zéro [e.g. on aura $p(y, m(e_0)) = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{B}$]; pourtant la réciproque n'est pas vraie.

(3.12). - Nous dirons que y est *presque séparable*- m au sens resreint, si pour un ensemble e_0 , avec $m(e_0) = 0$, $y(\mathfrak{A} \dot{-} e_0)$ est séparable.

A certaines reprises on procède dans l'hypothèse:

(3.13). - La complète additivité de $p(y, m(e))$ est *uniforme* par rapport à y .

Cela revient à ce que les relations $(1_0) e = \sum e_n$, les e_n disjoints, entraînent que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un $\pi' = \pi'(\varepsilon)$, *indépendant de y* , tel que

$$(2_0) \quad \|p(y, m(e)) - \sum_{\pi} p(y, m(e_n))\| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad \pi \geq \pi'.$$

On conclut comme il suit.

(3.13'). - La propriété (3.13) a lieu, si $\sup(y \in \mathfrak{B}) \|y\| = B$ est fini.

En effet, m est complètement additive; donc (1_0) entraîne que la suite $\{m(e_n)\}$ est s.i. vers $m(e)$; e.g. pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un $\pi' = \pi'(\varepsilon)$ tel que $\|m(e) - \sum_{\pi} m(e_n)\| < \varepsilon/(AB)$, lorsque $\pi \geq \pi'$. Donc

$$\|p(y, m(e)) - \sum_{\pi} p(y, m(e_n))\| = \|p(y, m(e) - \sum_{\pi} m(e_n))\| \leq AB \|m(e) - \sum_{\pi} m(e_n)\| < \varepsilon,$$

dès que $\pi \geq \pi'$, ce qui démontre (3.13').

En s'appuyant sur (2.16) on conclut ainsi.

(3.14). - Soit $\mathfrak{X}$ un espace VNC. Supposons que la fonction y est sommable m , presque séparable- m [ainsi $y(\mathfrak{A} \dot{-} e_0)$ est séparable, où e_0 est un ensemble de mesure- β zéro, avec $\beta(y, e) = p(y, m(e))$] et mesurable- $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{A} \dot{-} e_0$ (3.11); alors $\int_e y \odot dm$ existe pour tout e de $\mathfrak{F}$. La conclusion est la même, si l'hypothèse (3.13) a lieu, tandis que la fonction y est bornée, presque séparable- m et mesurable- $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{A} \dot{-} e_0$.

D'une manière plutôt différente de celle utilisée pour un but analogue dans (D), introduisons la *mesure absolue* $v, \geq 0$, qui correspond à la mesure vectorielle m .

(3.15). - On dira que ν est une *mesure absolue*, relativement, à la famille $\mathcal{F}$ (2.5'') d'ensembles, pour la mesure vectorielle $m[: \mathcal{F} \rightarrow Z]$ (3.1), si ν possède les propriétés suivantes:

- (a) $\nu = \nu(e)$ est définie, ≥ 0 , pour tout e de $\mathcal{F}$;
- (b) $\nu(e) \geq \|m(e)\|$ (tout e de $\mathcal{F}$);
- (c) ν est complètement additive dans $\mathcal{F}$;
- (d) ν , satisfaisant à (a), (b), (c), est minimale.

Démontrons qu'une telle mesure ν existe, en posant

(3.15'). - $\nu(e) = \sup \sum_1^k \|m(e_i)\|$, $\delta = \{e_i\}$ ($i = 1, \dots, k$) désignant des *décompositions* (finies) dans $\mathcal{F}$ de e [e.g. les $e_i \in \mathcal{F}$ et sont disjoints, $e = e_1 \dot{+} \dots \dot{+} e_n$]. Pour le présent nous supposons que

$$(3.16) \quad \sup \sum \|m(e_j)\| < \infty \quad (\text{décompositions } \{e_j\} \text{ de } \mathcal{Q}).$$

Les caractères (a), (b) pour ν (3.15') sont immédiates. On vérifie que $\nu(\emptyset) = 0$ et que $e \subset e'$ entraîne $\nu(e) \leq \nu(e')$.

Soient α et β dans $\mathcal{F}$, $\alpha\beta = 0$. On a

$$(1_0) \quad \nu(\alpha \dot{+} \beta) = \sup_{\delta} \sum_1^k \|m(e_j)\|, \quad \delta = \{e_i\} \quad (j = 1, \dots, k)$$

dénotant des décompositions de $\alpha + \beta$. En posant $\alpha_j = \alpha e_j$, $\beta_j = \beta e_j$, considérons la suite e'_j formée de la réunion des suites $\{\alpha_j\}$, $\{\beta_j\}$; $\delta' = \{e'_j\}$ est une décompositions de $\alpha + \beta$, donc

$$(2_0) \quad \nu(\alpha \dot{+} \beta) \geq \sum_1^k \|m(\alpha_j)\| + \sum_1^k \|m(\beta_j)\|.$$

Réciproquement, si $\{\alpha_j\}$ ($j = 1, \dots, k$) et $\{\beta_j\}$ ($j = 1, \dots, k'$) sont des décompositions *quelconques* respectivement de α et de β , on peut supposer que $k = k'$ [ce qu'on peut réaliser en définissant, s'il est nécessaire, certains des α_j , ou bien des β_j , comme l'ensemble vide]; puis on peut poser $e_j = \alpha_j \dot{+} \beta_j$ ($j = 1, \dots, k$); $\{e_j\}$ sera une décomposition de e et les relations $\alpha_j = \alpha e_j$, $\beta_j = \beta e_j$ auront lieu, ce qui mène à l'inégalité (2₀). Par conséquent

$$(3_0) \quad \nu(\alpha \dot{+} \beta) \geq \nu(\alpha) + \nu(\beta), \text{ lorsque } \alpha \text{ et } \beta \in \mathcal{F} \text{ et } \alpha\beta = 0.$$

Étant donné un $\varepsilon > 0$, il existe une décompositions $\{e'_j\}$ ($j = 1, \dots, k'$) de $\alpha \dot{+} \beta$, telle que

$$(4_0) \quad \nu(\alpha \dot{+} \beta) < \sum_1^{k'} \|m(e'_j)\| + \varepsilon;$$

posons $\alpha' = \alpha e'_j$, $\beta_j = \beta e'_j$; alors $\alpha'_j + \beta'_j = e'_j$ et les suites $\{\alpha'_j\}$, $\{\beta'_j\}$ représentent des décompositions respectivement de α et de β ; en notant que

$$\|m(e'_j)\| = \|m(\alpha'_j) + m(\beta'_j)\| \leq \|m(\alpha'_j)\| + \|m(\beta'_j)\|,$$

il résulte que

$$(5_0) \quad v(\alpha + \beta) < \sum_1^{k'} \|m(\alpha'_j)\| + \sum_1^{k'} \|m(\beta'_j)\| + \varepsilon \leq v(\alpha) + v(\beta) + \varepsilon;$$

donc $v(\alpha + \beta) \leq v(\alpha) + v(\beta)$. Ainsi, d'après (3₀)

$$(6_0) \quad v(\alpha + \beta) = v(\alpha) + v(\beta),$$

dès que α et β disjoints sont dans $\mathcal{F}$.

Soient $e^i \in \mathcal{F}$ ($i = 1, 2, \dots$) disjoints, $e = e^1 + e^2 + \dots$; en raison de (6₀)

$$(7_0) \quad v(e) \geq v(e^1 + e^2 + \dots + e^n) = \sum_1^n v(e^i), \quad \text{d'où} \quad v(e) \geq \sum_1^\infty v(e^i).$$

Si $\varepsilon > 0$, il y a une décomposition $\{e_j\}$ ($j = 1, \dots, k$) de $e = \sum_1^\infty e^n$, telle que

$$(8_0) \quad v(e) < \sum_1^k \|m(e_j)\| + \varepsilon.$$

Posons $e_j^n = e^n e_j$; alors $e_j^1 + e_j^2 + \dots = e_j$ et $\{e_j^n\}$ (n fixe) constitue une décomposition de e^n ; en outre

$$\|m(e_j)\| = \left\| m\left(\sum_{n=1}^\infty e_j^n\right) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^\infty m(e_j^n) \right\| \leq \sum_{n=1}^\infty \|m(e_j^n)\|;$$

par là

$$\begin{aligned} v(e) &< \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty \|m(e_j^n)\| + \varepsilon = \sum_{n=1}^\infty \left[\sum_{j=1}^k \|m(e_j^n)\| \right] + \varepsilon \leq \\ &\leq \sum_1^\infty v(e^n) + \varepsilon, \quad \text{d'où} \quad v(\varepsilon) \leq \sum_1^\infty v(e^n). \end{aligned}$$

En vertu de (7₀)

$$(9_0) \quad v(e^1 + e^2 + \dots) = v(e^1) + v(e^2) + \dots,$$

lorsque les e^n ($n = 1, 2, \dots$) de $\mathcal{F}$ sont disjoints.

Ainsi pour la fonction $v(e)$ (3.15') la propriété (3.15c) est vérifiée.

Démontrons que v (3.15') est minimale. Sinon il y a une fonction v^0 , qui satisfait à (3.15; a, b, c), et un ensemble e de $\mathcal{F}$ de sorte que $v^0(e) < v(e)$. D'après (3.15a), pour v^0 , on a $v^0(e) \geq \|m(e)\|$, e.g.

$$(10_0) \quad \|m(e)\| \leq v^0(e) < v(e) = \sup_{\delta} \sum_1^k \|m(e_i)\|,$$

$\delta = \{e_i\}$ ($i = 1, \dots, k$) désignant des décompositions de e .

Prenons un $0 < \varepsilon < v(e) - v^0(e)$; soit $\{e'_i\}$ ($i = 1, \dots, k'$) une décomposition de e pour laquelle $v(e) - \varepsilon < \sum_1^{k'} \|m(e'_i)\|$, e.g.

$$(11_0) \quad v(e) = \sum_1^{k'} \|m(e'_i)\| + \lambda \varepsilon, \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

En raison de (3.15b), pour v^0 , $\|m(e'_i)\| \leq v^0(e'_i)$; or v^0 est complètement additive dans $\mathcal{F}$, donc en vertu de (10₀), (11₀)

$$\sum_1^{k'} \|m(e'_i)\| \leq \sum_1^{k'} v^0(e'_i) = v^0(e) < v(e) = \sum_1^{k'} \|m(e'_i)\| + \lambda \varepsilon;$$

d'où $v(e) - v^0(e) \leq \lambda \varepsilon < \varepsilon$, ce qui contredit le choix de ε . Ainsi v (3.15') est minimale (propriété (3.15d); tous les caractères (3.15; a, b, c, d) sont satisfaits. Conséquemment on conclut comme il suit.

(3.17). — *La fonction v (3.15') est une mesure absolue, d'accord avec la définition (3.15), correspondant à la mesure vectorielle m (3.1), si $v(\mathcal{Q})$ est finie.*

Comme une conséquence de la propriété (3.15d) il est immédiat que cette mesure absolue est unique.

Laissons de côté l'hypothèse (3.16). Procédons avec $v(\mathcal{Q})(3.15') = \infty$. Si α et β sont dans $\mathcal{F}$ et sont disjoints et si $v(\alpha \dot{+} \beta)$ est finie, les développements (1₀)–(6₀) s'appliquent sans modification. Supposons que $v(\alpha \dot{+} \beta) = \infty$. Pour $\varepsilon > 0$ il y a une décomposition finie $\{e'_j\}$ ($j = 1, \dots, k'$) de $\alpha \dot{+} \beta$, telle que

$$(4_0) \quad \sum_1^{k'} \|m(e'_j)\| > \frac{1}{\varepsilon}$$

(ce qui correspond à (4₀)).

Soient les α'_j et β'_j comme à la suite de (4₀); l'inégalité qui précède (5₀) survient; ainsi

$$(5_0) \quad \sum_1^{k'} \|m(\alpha'_j)\| + \sum_1^{k'} \|m(\beta'_j)\| \left(\geq \sum_1^{k'} \|m(e_j)\| \right) > \frac{1}{\varepsilon};$$

par conséquent $v(\alpha) + v(\beta) > \frac{1}{\varepsilon}$, d'où $v(\alpha) + v(\beta) = \infty = v(\alpha + \beta)$, e.g. la relation (6₀) reste vraie au cas considéré. Même avec $v(\mathcal{Q}) = \infty$, si $v(e)$ est finie, les développements (7₀)-(9₀) s'appliquent sans rien à changer. Soit $v(e) = \infty$ [$e = e^1 + e^2 + \dots$, $e^n \in \mathcal{F}$, les e^n étant disjoints]. À $\varepsilon > 0$ il correspond une décomposition $\{e_j\}$ ($j = 1, \dots, k$) de e , telle que

$$(8'_0) \quad \sum_1^k \|m(e_j)\| > \frac{1}{\varepsilon}$$

(ce qui remplace (8₀)).

Comme à la suite de (8₀) il vient

$$\|m(e_j)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|m(e_j^n)\| \quad (e_j^n = e^n e_j);$$

done, d'après (8₀'),

$$\sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \|m(e_j^n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^k \|m(e_j^n)\| \right] \geq \sum_1^k \|m(e_j)\| > \frac{1}{\varepsilon};$$

or $v(e^n) \geq \sum_{j=1}^k \|m(e_j^n)\|$, d'où

$$\sum_1^{\infty} v(e^n) > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \sum_1^{\infty} v(e^n) = \infty = v(e).$$

Ainsi l'affirmation (9₀) est vérifiée au cas $v(e) = \infty$. Par conséquent la propriété (3.15c), ainsi que (3.15; a, b), reste valide que $v(\mathcal{Q}) = \infty$.

Examinons les développements à la suite de (9₀), qui mènent à (3.17). Si v (3.15') n'est pas minimale, il y a une v^0 , assujettie à (3.15; a, b, c), et un e de $\mathcal{F}$ tels que $v^0(e) < v(e)$. Si $v(e)$ est finie, on choisit $0 < \varepsilon < v(e) - v^0(e)$ et on obtient encore une fois la relation (11₀), ce qui mène à une contradiction. Au cas $v(e) = \infty$ prenons un $\varepsilon > 0$ et choisissons une décomposition $\{e'_i\}$ ($i = 1, \dots, k'$) de e , telle que $\sum_1^{k'} \|m(e'_i)\| > \frac{1}{\varepsilon}$; d'après (3.15; b, c), pour v^0 , il vient

$$\infty = v(e) > v^0(e) = \sum_1^{k'} v^0(e'_i) \geq \sum_1^{k'} \|m(e'_i)\| > \frac{1}{\varepsilon};$$

en laissant $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient que $v^0(e)$ est infinie, ce qui est une contradiction. Donc v (3.15') est minimale dans tous les cas.

(3.17'). - La proposition (3.17) reste valide sans condition que $v(\mathcal{Q})$ (3.15') soit finie [dans ce cas on admet la possibilité que $\|m(\mathcal{Q})\| = \infty$].

(3.18). – Dès lors nous supposons la famille $\mathcal{F}$ d'ensembles et les mesures étendues, de sorte que $\mathcal{F}$ contienne tout sous-ensemble e' d'un ensemble e , pour lequel la mesure absolue ν originelle est nulle, de façon que l'extension de ν originelle constitue la mesure absolue de l'extension de la mesure vectorielle m originelle. Nous retenons les désignations originelles pour les extensions de $\mathcal{F}$, ν , m . Évidemment $\nu(e) = 0$ équivaut à $m(e) = 0$.

Si l'on prend ν pour la fonction μ introduite dans (2.5''), il suit que la condition (3.8) a lieu. L'énoncé (3.9) devient

(3.19). – Dans les hypothèses (3.1), (3.2), si y est intégrable- m pour tout e (de $\mathcal{F}$), l'intégrale $\int_e y \odot dm$ sera complètement additive dans $\mathcal{F}$ et absolument continue- ν .

La proposition (3.10), au cas $\mu = \nu$, aura lieu sans l'hypothèse (3.8).

DÉFINITION 3.20. – Admettons (3.1). Au cas où $\mathcal{A}$ est un espace VNC séparable, on dira qu'une fonction ponctuelle $y[:\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}]$ est mesurable- D [mesurable au sens de DENJOY, e.g. à la manière de LEBESGUE] sur un ensemble e_0 de $\mathcal{F}$, si y est mesurable d'accord avec la note (D) – c'est-à-dire, si l'ensemble

$$E(y_0, r) = \{u; u \in e_0 \text{ et } y(u) \in S(y_0, r)\}$$

appartient à $\mathcal{F}$ pour tout point $y_0 \in \mathcal{A}$ et tout nombre $r > 0$.

Nous allons établir le résultat suivant.

(3.21). – $\mathcal{A}$ étant VNC séparable, la mesurabilité- D (3.20) sur une e_0 de $\mathcal{F}$ d'une fonction $y = y(u)[:\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}]$ entraîne la mesurabilité- $\mathcal{F}$ pour e_0 au sens de (3.11).

Soit un $\varepsilon > 0$; envisageons un ensemble Y , $\subset y(e_0)$, partout dense sur $y(e_0)$. On veut montrer qu'avec tout point y de Y on peut associer un $e_y \in \mathcal{F}$ de sorte que

$$(1') \quad y(e_y) \subset y(e_0)S(y, \varepsilon), \quad \dot{\Sigma}(y \in Y)e_y = e_0.$$

Soient y_i ($i = 1, 2, \dots$) situés et partout denses sur $y(e_0)$. Toute sphère ouverte $S(y_i, \frac{\varepsilon}{4})$ contient des points de Y ; donc pour tout y de Y il y a un entier $i' = i'(y) > 0$, qu'on peut choisir uniquement, de sorte que $\|y - y_i\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Posons

$$e_y = \left[u; u \in e_0 \text{ et } y(u) \in S\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \right];$$

on a $e_y \in \mathcal{F}$ pour tout y de Y ; de plus

$$(2') \quad e_y \subset e_0, \quad y(e_y) \subset y(e_0), \quad y(e_y) \subset S\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset S\left(y, \frac{3}{4}\varepsilon\right) \subset S(y, \varepsilon);$$

ainsi la première inclusion (1') est vérifiée. Soient un point u_0 sur e_0 ; on obtient un point $y(u_0) \in y(e_0)$. Or $y(u_0)$ est point d'accumulation de Y , donc il existe un y^0 de Y , tel que $\|y^0 - y(u_0)\| < \frac{\varepsilon}{4}$. D'après une remarque qui précède il y a un entier $i^0 = i'(y^0) > 0$, tel que $\|y^0 - y_{i^0}\| < \frac{\varepsilon}{4}$; il suit

$$e_{y^0} = \left[u; u \in e_0 \text{ et } y(u) \in S\left(y_{i^0}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \right] \in \mathcal{F}, \quad e_{y^0} \subset e_0.$$

On observe que

$$\|y(u_0) - y_{i^0}\| \leq \|y(u_0) - y^0\| + \|y^0 - y_{i^0}\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{d'où } y(u_0) \in S\left(y_{i^0}, \frac{\varepsilon}{2}\right);$$

ainsi $u_0 \in e_{y^0}$, e.g. tout point u_0 de e_0 est dans un e_{y^0} pour un y^0 de Y . Par conséquent, en tenant compte de (2'), on vérifie les deux relations (1'), ainsi que l'énoncé (3.21).

On peut vérifier le fait suivant.

(3.22). - $\mathcal{Y}$ étant VNC, séparable, et $y = y(u)[:, \mathcal{Y}]$ étant mesurable- D (3.20) sur un e_0 de $\mathcal{F}$, il suit que $\|y(u)\|$ est mesurable- $\mathcal{F}$ au sens ordinaire sur e_0 .

Adoptons la définition suivante, qui est d'accord avec (D).

(3.23). - Soit $\mathcal{Y}$, VNC, séparable. Supposons que $y = y(u)[:, \mathcal{Y}]$ est mesurable- D sur un e_0 de $\mathcal{F}$. On dira que y est *intégrable- m* pour e_0 , au sens de Denjoy, si l'intégrale ordinaire de LEBESGUE

$$(3.23a) \quad J(e_0) = \int_{e_0} \|y(u)\| \, d\nu(u)$$

[la mesure absolue ν pour m (3.15)] existe (est finie).

Selon les indications dans (D), si $J(e_0)$ finie existe et les espaces Z , $\mathcal{X}$ (3.1) sont VNC, on peut définir un élément unique $I(y, e_0)$ dans $\mathcal{X}$ comme il suit.

(3.24). - Soient les y_i ($i \geq 0$) partout denses dans $\mathcal{Y}$. Posons $S_i(r) = S(y_i, r)$ (sphère ouverte), $r > 0$, et

$$S'_0(r) = S_0(r), \quad S'_i(r) = S_i(r) \dot{-} S_{i-1}(r) \sum_{k=0}^{i-1} S_k(r) \quad (i > 0);$$

les $S'_i(r)$, $\subset S_i(r)$, sont disjoints, $\mathcal{O}f = \dot{\Sigma} S'_i(r)$ (pour tout $r > 0$); puisque $y = y(u)$ est mesurable- D sur e_0 (3.20), l'ensemble

$$(3.24a) \quad e_n(r) = [u; u \in e_0 \text{ et } y(u) \in S'_n(r)]$$

appartient à $\mathcal{F}$; soit η_n un élément arbitraire sur $y(e_0)S'_n(r)$; alors

$$s(r) = \Sigma_{\ast} p[\eta_n, m(e_n(r))] = \Sigma \eta_n \odot m(e_n(r))$$

(notation de (3.4)), où la série converge inconditionnellement pour tout $r > 0$; de plus la limite

$$(3.24b) \quad I(y, e_0) = \lim_{r \rightarrow 0} s(r)$$

existe. Cette limite est indépendante du choix des y_i et des η_n .

DÉFINITION 3.25. - Admettons (3.1), (3.2), les espaces $\mathcal{O}f$, Z , $\mathcal{X}$ étant VNC et $\mathcal{O}f$ étant en plus séparable. Supposons que $y = y(u) : \mathcal{O}f \rightarrow \mathcal{O}f$ est mesurable- D (3.20) sur un e_0 de $\mathcal{F}$ et que y est intégrable- m pour e_0 au sens de Denjoy, e.g. que $J(e_0) < \infty$ (3.23a). Alors l'intégrale- m de y sur e_0 , au sens de Denjoy, est l'élément $I(y, e_0)$ (3.24b).

THÉORÈME 3.26. - Dans les conditions de (3.25), (3.16), si $y = y(u)$ est intégrable- m pour e_0 (de $\mathcal{F}$) au sens de Denjoy (la mesurabilité- D de y étant donc sous-entendue), alors y est intégrable- m pour e_0 au sens de la définition 3.4; de plus (3.24b):

$$(3.26a) \quad I(y, e_0) = \int_{e_0} y \odot dm = I_{\beta}(y, e_0) \text{ avec } \beta(y(e), e) = p(y(e), m(e)) \quad (2.8).$$

D'abord montrons le fait suivant.

(3.27). - Soit ν la mesure absolue (3.15) qui correspond à m . Alors pour tout e_0 de $\mathcal{F}$ et pour toute décomposition, dans $\mathcal{F}$, $\{e_n\}$, qui peut être dénombrablement infinie, de l'ensemble e_0 l'inégalité $\Sigma \|m(e_n)\| \leq \nu(e_0)$ aura lieu.

On a $e_n \in \mathcal{F}$, $\dot{\Sigma}_1^{\infty} e_n = e_0$, les e_n étant disjoints. Si $\nu(e_0) = \infty$, l'inégalité est évidente. Supposons que $\nu(e_0)$ est finie. Posons $s = \dot{\Sigma}_1^{\infty} \|m(e_n)\|$. Notons que la suite $\{e_n\}$ ($n = 1, \dots, k$) est une décomposition finie de l'ensemble $E_k = e_1 + e_2 + \dots + e_k$, $\in \mathcal{F}$; donc, d'après la relation (3.15') (pour E_k), il vient

$$s_k = \dot{\Sigma}_1^k \|m(e_n)\| \leq \nu(E_k) \leq \nu(e_0).$$

En laissant $k \rightarrow \infty$, on obtient $\text{Lim } s_k = s \leq v(e_0)$; (3.27) est vérifié.

Selon les conditions du théorème, que nous allons démontrer, une situation suivante survient. Des points y_i ($i \geq 0$) sont partout denses dans l'espace (VNC) $\mathcal{Q}_f$; avec un $r > 0$, on pose

$$(1^0) \quad S_i(r) = S(y_i, r), \quad S_0(r) = S_0(r), \quad S'_i(r) = S_i(r) \dot{-} S_i(r) \dot{\sum}_0^{i-1} S_k(r) \quad (i > 0),$$

alors $\mathcal{Q}_f = \dot{\sum} S'_i(r)$;

$$(2^0) \quad e_n(r) = [u; u \in e_0 \text{ et } y(u) \in S'_n(r)] \in \mathcal{F};$$

η_n est un point quelconque sur $y(e_0)S'_n(r)$; les $e_n(r)$ sont disjoints et $\dot{\sum} e_n(r) = e_0$;

$$(3^0) \quad s(r) = \sum p[\eta_n, m(e_n(r))] = \sum \eta_n \odot m(e_n(r))$$

converge inconditionnellement;

$$(4^0) \quad I(y, e_0) = \lim (r \rightarrow 0) s(r).$$

On veut démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition $\Delta = \{e_i\}$ [$e_i \in \mathcal{F}$; $i = 1, 2, \dots$] de $\mathcal{Q}_f$, telle que la suite (d'ensembles) $\{y(e_0 e_i) \odot m(e e_i)\}$ est s.i. à ε près vers $I(y, e_0)$; e.g. que pour tout arrangement $n(i)$ de la suite d'entiers $\{n\}$ il existe un k' , dépendant de ε et de l'arrangement, tel que $k \geq k'$ entraîne

$$(5^0) \quad \begin{aligned} I(y, e_i) &\subset \sum_{i=1}^k y(e_0 e_{n(i)}) \odot m(e_0 e_{n(i)}) + S(0, \varepsilon) \\ \sum_{i=1}^k y(e_0 e_{n(i)}) \odot m(e_0 e_{n(i)}) &\subset I(y, e_0) + S(0, \varepsilon). \end{aligned}$$

Soient les $e'_n \in \mathcal{F}$ ($i = 1, 2, \dots$) des ensembles quelconques disjoints, tels que $\dot{\sum} e_n = \mathcal{Q}_f \dot{-} e_0$. Posons $e_n = e_n[r] = e_n(r) \dot{+} e'_n$, où les $e_n(r)$ sont définis selon (2⁰); $r > 0$. On a

$$(6^0) \quad \text{les } e_n \text{ disjoints, } e_n \in \mathcal{F}, \quad \dot{\sum}_1^\infty e_n = \mathcal{Q}_f, \quad e_0 e_0 = e_n(r), \quad (\mathcal{Q}_f \dot{-} e_n) e_n = e'_n;$$

e.g. $\{e_n\}$ est une partition dans $\mathcal{F}$ de $\mathcal{Q}_f$. Pour n fixe, désignons par η_n les points de l'ensemble $y(e_0)S'_n(r)$; ainsi tout point η_n est représenté par $y(u)$ pour un u , tel que $u \in e_0$ et $y(u) \in S'_n(y)$. On dira que η_n est *admissible* (relativement à r). Avec un choix quelconque des η_n admissibles, la série (3⁰) converge inconditionnellement,

$$(7^0) \quad s(r, \eta) = \sum_n \eta_n \odot m(e_n(r)) \rightarrow I(y, e_0) \quad \text{pour } r(> 0) \rightarrow 0;$$

ici η désigne la suite $\{\eta_n\}$. Démontrons la proposition suivante.

(3.28). - Il existe un nombre $r_\varepsilon > 0$, tel que $0 < r \leq r_\varepsilon$ entraîne l'inégalité

$$(8^0) \quad \|s(r, \eta) - I(y, e_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour toute suite $\eta = \{\eta_n\}$ de η_n admissibles relativement à r .

Soit $\eta^0 = \{\eta_n^0\}$ une suite particulière de η_n^0 admissible relativement à r ; $s(r, \eta^0) \rightarrow I(y, e_0)$ pour $r \rightarrow 0$; donc il y a un $r'_\varepsilon > 0$, tel que

$$(9^0) \quad \|s(r, \eta^0) - I(y, e_0)\| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour tout } 0 < r \leq r'_\varepsilon.$$

À cause de (3.16) $\nu(e_0)$ est fini. Soit r_ε le moindre des deux nombres r'_ε , $[8A\nu(e_0)]^{-1}\varepsilon$; sans perte de généralité on suppose que $\nu(e_0) > 0$, (A survenant dans (3.1a)). Les points η_n , η_n^0 sont dans $y(e_0)S'_n(r) \subset S_n(r)$; d'où $\|\eta_n - \eta_n^0\| < 2r$; ainsi

$$(10^0) \quad s(r, \eta) = \sum_n [\eta_n^0 + (\eta_n - \eta_n^0)] \odot m(e_n(r)) = s(r, \eta^0) + \delta(r, \eta, \eta^0),$$

avec (3.1a):

$$\|\delta(r, \eta, \eta^0)\| < 2Ar \sum \|m(e_n(r))\|;$$

la suite de $e_n(r)$ (2^0) constitue une partition dans $\mathcal{F}$ de e_0 , par conséquent l'énoncé (3.27) s'applique, de sorte que

$$(11^0) \quad \|\delta(r, \eta, \eta^0)\| < 2Ar\nu(e_0) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

pour tout $0 < r \leq r_\varepsilon$ et pour toute suite $\eta = \{\eta_n\}$ de la sorte indiquée. Enfin [(10⁰), (9⁰)];

$$\|s(r, \eta) - I(y, e_0)\| \leq \|s(r, \eta^0) - I(y, e_0)\| + \|\delta(r, \eta, \eta^0)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e.g. la conclusion dans l'énoncé (3.28) est vérifiée.

(3.28'). - Soit $\{n(i)\}$ un arrangement quelconque de $\{n\}$. Alors (7⁰)

$$s(r, \eta') = s(r, \eta) = \sum_i \eta'_i \odot m(e_{n(i)}(r)),$$

où $\eta' = \{\eta'_i\} = \{\eta_{n(i)}\}$ et η'_i est un élément quelconque de $y(e_0)S'_{n(i)}(r)$ [on dira que la suite η' est admissible relativement à r pour l'arrangement $\{n(i)\}$]. De plus, r_ε désignant le nombre survenant dans (3.28), on aura

$$(12^0) \quad \|s(r, \eta') - I(y, e_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{lorsque } 0 < r \leq r_\varepsilon.$$

Cette remarque suit de l'énoncé (3.28), en tenant compte de la convergence inconditionnelle de la série $s(r, \eta)$ (7°).

(3.29). – Soit un r fixe $0 < r \leq r_\varepsilon$, comme dans (3.28'), $\{n(i)\}$ étant un arrangement quelconque de $\{n\}$. Posons

$$(13^0) \quad \rho_k(r, \eta') = \sum_{i=k+1}^{\infty} \eta'_i \odot m(e_{n(i)}(r)),$$

η' quelconque sur $y(e_0)S'_{n(i)}(r)$. Il existe un k' , dépendant de ε et de l'arrangement, mais indépendant de $\eta' = \{\eta'_n\}$, de sorte que

$$(14^0) \quad \|\rho_k(r, \eta')\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } k \geq k'.$$

Soit $\eta'' = \{\eta''_i\}$ une suite fixe, avec $\eta''_i \in y(e_0)S'_{n(i)}(r)$ ($i = 1, 2, \dots$); alors $\|\eta'_i - \eta''_i\| < 2r \leq 2r_\varepsilon$. Il existe un k_k tel que $k \geq k_1$ entraîne $\|\rho(r, \eta'')\| < \frac{\varepsilon}{4}$. On obtient (3.1a):

$$(15^0) \quad \begin{aligned} \rho_k(r, \eta') &= \rho_k(r, \eta'') + \rho_k(r, \eta' - \eta''); \\ \|\rho_k(r, \eta' - \eta'')\| &\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \|\eta'_i - \eta''_i\| \odot m(e_{n(i)}(r)) \leq A \sum_{i=k+1}^{\infty} \|\eta'_i - \eta''_i\| \|m(e_{n(i)}(r))\| \\ &< 2Ar_\varepsilon \sum_{i=k+1}^{\infty} \|m(e_{n(i)}(r))\|. \end{aligned}$$

Or $\{e_{n(i)}(r)\}$ ($i \geq k+1$) constitue une décomposition (dans $\mathcal{F}$) dénombrable de l'ensemble $\sum_{i=k+1}^{\infty} e_{n(i)}(r) = E_k(r)$ (de $\mathcal{F}$); donc (3.27) s'applique et, en tenant compte de (11°), on obtient

$$(16^0) \quad \|\rho_k(r, \eta' - \eta'')\| < 2Ar_\varepsilon \nu(E_k(r)) \leq 2Ar_\varepsilon \nu(e_0) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

D'où (15°):

$$\|\rho_k(r, \eta')\| \leq \|\rho_k(r, \eta'')\| + \|\rho_k(r, \eta' - \eta'')\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui établit la proposition (3.29).

Avec r , $0 < r \leq r_\varepsilon$, toujours fixe, envisageons (3°)

$$(17^0) \quad s(r, \eta') = s_k(r, \eta') + \rho_k(r, \eta), \quad s_k(r, \eta') = \sum_{i=1}^k \eta'_i \odot m(e_{n(i)}(r));$$

il vient [(3.28'), (3.29)]:

$$(3.30) \quad \|s_k(r, \eta') - I(y, e_0)\| \leq \|s(r, \eta') - I(y, e_0)\| + \|\rho_k(r, \eta')\| < \varepsilon$$

pour tout $k \geq k'$ et toute suite $\eta' = \{\eta'_i\}$, telle que $\eta'_i \in y(e_0)S'_{n(i)}(r)$ ($i = 1, 2, \dots$). Cette affirmation équivaut à dire que

$$(3.30') \quad \left\| \sum_{i=1}^k y(u_i) \odot m(e_{n(i)}(r)) - I(y, e_0) \right\| < \varepsilon$$

pour tout $k \geq k'$ et pour tout choix des $u_i \in e_{n(i)}(r)$ { d'après (6°) et (2°)

$$e_0 e_{n(i)} = e_{n(i)}(r) = [u; u \in e_0 \text{ et } y(u) \in S'_{n(i)}(r)];$$

donc $\eta'_i = y(u_i)$, u_i parcourant $e_{n(i)}(r)$, décrit l'ensemble $y(e_0)S'_{n(i)}(r)$. Mais l'inégalité (3.30') équivaut aux inclusions (5°) – pourvu qu'on y prenne e_i d'accord avec (6°), tandis que r est fixe et tel que $0 < r \leq r_\varepsilon$, r_ε étant spécifié à la suite de (9°). Nous avons vérifié la constatation par rapport à (5°). *Le théorème 3.26 est démontré.*

4. – L'intégration vectorielle au genre de Lebesgue (suite).

Dans la section précédente on a constaté l'importance dans la théorie d'intégration de la notion de *l'intégrabilité- m conditionnelle* (3.6) d'une fonction $y: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, pour un e_0 de $\mathcal{F}$. En rapport avec cette notion on établira le résultat suivant.

THÉOREME 4.1. – Soit un e_0 de $\mathcal{F}$, $v(e_0) < \infty$; supposons que $y = y(u): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est intégrable- m pour e_0 au sens de Denjoy. Alors y est conditionnellement intégrable- m pour e_0 (3.6).

On peut supposer que $v(e_0) > 0$. Nous utilisons les notations (3.1°, 2°, ...) à la suite de (3.27). Étant donné un $\varepsilon > 0$, envisageons une partition (infinie) $\Delta' = \{e_i\}$ de $\mathcal{A}$, où

$$e_i = e_i(r) + e'_i \quad (\text{d'accord avec (3.6°), (3.2°)}),$$

le nombre fixe $r > 0$ étant choisi quelconque, tel que $r < r_\varepsilon = \varepsilon[8Av(e_0)]^{-1}$. Posons

$$(1_0) \quad \alpha_n(r) = Av(e_n(r)) + A \int_{e_n(r)} \|y(u)\| dv(u),$$

En tant que les $e_n(r)$ ($\in \mathcal{F}$) sont disjoints et $\sum e_n(r) = e_0$ et puisque $J(e_0)$ (3.23a) est finie, on a

$$\sum_n \alpha_n(r) = Av(e_0) + AJ(e_0);$$

il existe un $k' = k'(\varepsilon)$ tel que

$$(2_0) \quad \sum_{k'+1}^{\infty} \alpha_n(r) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Désignons par π' la suite finie $(1, \dots, k')$, où $k' = k'(\varepsilon)$. Avec $\pi_1 \geq \pi'$, $\pi_2 \geq \pi'$ quelconques, envisageons l'expression

$$\Gamma = \sum_{\pi_1} y(u_i^1) \odot m(e_0 e_i) - \sum_{\pi_2} y(u_i^2) \odot m(e_0 e_i),$$

où les points u_i^1 et u_i^2 sont *variables* (pour i fixe) sur l'ensemble $e_0 e_i = e_i(r)$; ceci revient à ce que $\eta_i^j = y(u_i^j)$ ($j = 1, 2, \dots$) $\in y(e_0) S_i'(r)$ (3.1⁰). Le théorème est démontré, si l'on montre que $\|\Gamma\| < \varepsilon$. Il vient

$$(3_0) \quad \Gamma = \Gamma^0 + \Gamma^1 - \Gamma^2, \quad \Gamma^0 = \sum_1^{k'} (y(u_i^1) - y(u_i^2)) \odot m(e_i(r)),$$

$$\Gamma^1 = \sum_{\pi_1 - \pi'} y(u_i^1) \odot m(e_i(r)), \quad \Gamma^2 = \sum_{\pi_2 - \pi'} y(u_i^2) \odot m(e_i(r)),$$

Parce que η_i^1 et η_i^2 (i fixe) sont contenus dans $S_i(r)$, il résulte

$$\|\eta_i^1 - \eta_i^2\| < 2r \leq 2r_\varepsilon = \varepsilon[4A\nu(e_0)]^{-1};$$

donc, en tenant compte de la définition (3.15') de ν ,

$$(4_0) \quad \|\Gamma^0\| < 4\varepsilon[4A\nu(e_0)]^{-1} \cdot \sum_1^{k'} \|m(e_i(r))\| \leq \varepsilon[4\nu(e_0)]^{-1} \nu(\sum_1^{k'} e_i(r)) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

On note que $\pi_1 - \pi$ est une suite finie arbitraire croissante d'entiers $j(n)$ ($n = 1, \dots, m$), avec $j(n) > k'$. Posons

$$(5_0) \quad m_n = \inf (u_n \in e_n(r)) \|y(u_n)\|.$$

Il existe un $\bar{u}_n$ sur $e_n(r)$ tel que $(m_n \leq) \|y(\bar{u}_n)\| < m_n + 1$. On obtient (1₀):

$$\begin{aligned} \|y(\bar{u}_n) \odot m(e_n(r))\| &\leq A \|y(\bar{u}_n)\| \|m(e_n(r))\| < A(m_n + 1)\nu(e_n(r)) \\ &\leq A\nu(e_n(r)) + A \int_{e_n(r)} \|y(u)\| d\nu(u) = \alpha_n(r). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(6_0) \quad \left\| \sum_{\pi_1 - \pi'} y(\bar{u}_i) \odot m(e_i(r)) \right\| \leq \sum_{\pi_1 - \pi'} \alpha_i(r) = \sum_{n=1}^m \alpha_{j(n)}(r) \leq \sum_{i=k'+1}^{\infty} \alpha_i(r) < \frac{\varepsilon}{8} \quad (\text{d'après } (2_0)).$$

On peut exprimer $\Gamma^1(\mathfrak{Z}^0)$ dans la forme

$$\Gamma^1 = \Gamma^1(u^1) = \Gamma^1(\bar{u}) + \Gamma^1(u^1 - \bar{u}), \quad u^1 = \{u_i^1\}, \quad \bar{u} = \{\bar{u}_i\},$$

l'entier i décrivant $\pi_1 - \pi'$. D'après (6₀) $\|\Gamma^1(\bar{u})\| < \frac{\varepsilon}{8}$; en plus

$$\begin{aligned} \|\Gamma^1(u^1 - \bar{u})\| &\leq A \sum_{\pi_1 - \pi'} \|y(u_i^1) - y(\bar{u}_i)\| \|m(e_i(r))\| < \\ &< 2Ar_\varepsilon \sum_{\pi_1 - \pi'} \|m(e_i(r))\| \leq \frac{\varepsilon}{4\nu(e_0)} \nu \left[\sum_{\pi_1 - \pi'} e_i(r) \right] \leq \frac{\varepsilon}{4}; \end{aligned}$$

ainsi

$$(7_0) \quad \|\Gamma^1(u^1)\| < \frac{3}{8} \varepsilon$$

pour toute suite $\{u_i^1\}$, avec $u_i^1 \in e_i(r)$, $i \in \pi_1 - \pi'$, pour tout $\pi_1 \geq \pi$. De même (3₀): $\|\Gamma^2(u^2)\| < \frac{3}{8} \varepsilon$, lorsque $u_i^2 \in e_i(r)$, $i \in \pi_2 - \pi'$, $\pi_2 \geq \pi'$. Par conséquent de (3₀), (4₀) et (7₀) il suit que $\|\Gamma\| \leq \|\Gamma_0\| + \|\Gamma^1\| + \|\Gamma^2\| < \varepsilon$. *Le théorème est vérifié.*

En tenant compte (3.7) et des théorèmes 3.26, 4.1 on conclut comme il suit.

(4.2). – Soit un $e_0 \in \mathfrak{F}$; $\nu(e_0) < \infty$. Si $y = y(u)$ est intégrable pour e_0 au sens de Denjoy, y sera intégrable au même sens pour tout e (de $\mathfrak{F}$) $\subset e_0$. Correspondamment on est justifié de dire que y est intégrable- m au sens de DENJOY sur e_0 .

Dans le reste de la section actuelle on admet que $y = y(u)[; \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}]$ est intégrable au sens de Denjoy sur un e_0 de $\mathfrak{F}$ (ou bien sur $\mathfrak{A}$) et que $\nu(e_0) < \infty$ (ou bien $\nu(\mathfrak{A}) < \infty$). Par implication y est mesurable- m pour, en effet sur, e_0 (ou bien sur $\mathfrak{A}$) au sens de la définition 3.20; ainsi les conditions (3.1), (3.2) sont admises, ce qui mène à la conséquence (3.3) [comprenant (2.7, 1^o 4^o) et (2.12) pour $\beta(y, e) = p(y, m(e)) = y \odot m(e)$]; on sait (3.21) que y est mesurable- $\mathfrak{F}$ pour (en effet, sur) e_0 au sens de (3.11). L'important est que, selon le théorème 3.26, y est intégrable- β pour (aussi sur) e_0 au sens de (2.8) [ici $y(e)[; \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{B}]$ est l'image directe de e par la fonction ponctuelle $y(u)[; \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}]$]. D'après (3.5) l'intégrale- m (DENJOY) possède les propriétés suivantes:

- (a) l'unicité (R ; théorème 4.2);
- (b) linéarité en y (R ; corollaire 5.2);
- (c) l'additivité finie dans $\mathfrak{F}$ (R ; corollaire 5.4);
- (d) la complète additivité- $\mathfrak{F}$ au sens de (R ; corollaire 5.6);

(e) en plus, en rapport avec l'intégrale- m (DENJOY) on pourra utiliser la notion de *l'équivalence différentielle* [voir (R; définition 6.1)] ce que nous allons préciser vers la fin de cette section.

(4.3). - *L'intégrabilité- m au sens de Denjoy de y pour, donc sur, un e_0 entraîne que l'intégrabilité- s (définition dans (2.9)) de $F(e) = p(y(e), m(e))$ est uniforme (voir (2.9') en e (de $\mathcal{F}$), $\subset e_0$.*

Cela suit du théorème 3.26, de (4.2) et de (3.5').

THÉOREME 4.4. - *Soit $y = y(u)$ intégrable- m au sens de Denjoy sur un e_0 de $\mathcal{F}$; $\nu(e_0) < \infty$. Alors y est sommable- m pour (sur $\mathcal{F}$) e_0 au sens de (3.11), (2.14).*

On doit montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition $\Delta_\varepsilon = \{E_i\}$ dans $\mathcal{F}$ de e_0 , telle que pour toute partition $\Delta = \{e_i\} \geq \Delta_\varepsilon$ de e_0 il y a un π' , de sorte que

$$(1_1) \quad \left\| \sum_{\pi} y(u_i) \odot m(e_i) \right\| < \varepsilon,$$

pour tout $u_i \in e_i$ ($i = 1, 2, \dots$) et pour tout π disjoint de π' .

On peut supposer que $\nu(e_0) > 0$. Choisissons pour les E_i les ensembles

$$(2_1) \quad E_i = e_i(r) = [u; u \in e_0 \text{ et } y(u) \in S_i(r)],$$

d'accord avec (3.1⁰, 2⁰) (à la suite de (3.27)). On choisit un r fixe tel que $0 < r \leq r_\varepsilon = \varepsilon[4A\nu(e_0)]^{-1}$. Les e_i étant les composants d'une partition $\Delta (\geq \Delta_\varepsilon)$ de e_0 , posons

$$(3_1) \quad \alpha_i = A\nu(e_i) + A \int_{e_i} \|y(u)\| d\nu(u),$$

Soit $k' = k'(\Delta, \varepsilon)$ tel que

$$(4_1) \quad \sum_{n=k'+1}^{\infty} \alpha_n = A\nu(e') + A \int_{e'} \|y(u)\| d\nu(u) < \frac{\varepsilon}{4} \quad e' = \sum_{n=k'+1}^{\infty} e_n.$$

Désignons par π' l'ensemble $(1, 2, \dots, k')$. Dire que π est disjoint de π' équivaut à ce que $\pi = (j(1), j(2), \dots, j(m))$, où $k' < j(1) < j(2) < \dots < j(m)$. Il existe un $\bar{u}_n \in e_n$ tel que

$$[m_n = \inf (u_n \in e_n) \|y(u_n)\| \leq] \|y(\bar{u}_n)\| < m_n + 1;$$

il vient

$$(5_1) \quad \|y(\bar{u}_n) \odot m(e_n)\| \leq A(m_n + 1)\nu(e_n) \leq A\nu(e_n) + A \int_{e_n} \|y(u)\| d\nu(u) = \alpha_n \quad (3_1).$$

Posons $\gamma(u) = \sum_{\pi} y(u_i) \odot m(e_i)$, $u = \{u_i\}$; il résulte [(5₁), (4₁)]:

$$(6_1) \quad \|\gamma(\bar{u})\| = \left\| \sum_{i=1}^m y(\bar{u}_{j(i)}) \odot m(e_{j(i)}) \right\| \leq \sum_{i=1}^m \alpha_{j(i)} \leq \sum_{h=k'+1}^{\infty} \alpha_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tout ensemble e_n de Δ est contenu dans un $e_q(r) = E_q$ (2₁), $q = q(n)$; pour $u_n \in e_n$ on a

$$y(u_n) \in y(e_i) S'_q(r) \subset S_q(r)$$

(une sphère ouverte de rayon r); de même $y(\bar{u}_n) \in S_q(r)$; donc $\|y(u_n) - y(\bar{u}_n)\| < 2r$. Par conséquent

$$(7_1) \quad \|\gamma(u) - \gamma(\bar{u})\| = \left\| \sum_{i=1}^m [y(u_{j(i)}) - y(\bar{u}_{j(i)})] \odot m(e_{j(i)}) \right\| \leq A 2r \sum_{i=1}^m v(e_{j(i)}) \leq A 2r v(e_i) = \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $u_n \in e_n$ ($n = 1, 2, \dots$). En vertu de (6₁), (7₁) il suit que

$$\|\gamma(u)\| \leq \|\gamma(\bar{u})\| + \|\gamma(u) - \gamma(\bar{u})\| < \varepsilon$$

pour les u_n spécifiés. On a vérifié (1₁), ce qui démontre le théorème.

(4.5). - Si $y = y(u)$ est intégrable- m au sens de Denjoy pour (donc sur) un e_0 de $\mathcal{F}$ ($v(e_0) < \infty$), la fonction $\Psi(e) = \int_e y \odot dm$ sera complètement additive dans $\mathcal{F}$ et absolument continue- v sur e_0 .

En effet, en raison du théorème 3.26 y est intégrable- m pour e_0 au sens de la définition 3.4; d'après (4.2) cela a lieu pour tout e (de $\mathcal{F}$) $\subset e_0$; l'énoncé (4.5) suit de (3.19).

(4.6). - Soit $v(\mathcal{Q}) < \infty$ et soient les $y_n = y_n(u)$ ($n = 1, 2, \dots$) intégrables- m au sens de DENJOY pour (donc sur) $\mathcal{Q}$ et supposons que la suite $\{y_n(u)\}$ converge approximativement- v vers $y(u)$. Alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes.

(A) $y(u)$ est intégrable- m au sens de DENJOY sur $\mathcal{Q}$ et $\Psi_n(e) = \int_e y_n(u) \odot dm(u) \rightarrow \int_e y(u) \odot dm(u)$ uniformément en e (de $\mathcal{F}$), $\subset \mathcal{Q}$;

(B) $\lim_n \int_e y_n(u) \odot dm(u)$ existe pour tout e de $\mathcal{F}$;

(C) la continuité- v absolue de $\Psi_n(e)$ est uniforme par rapport à n .

Cette proposition suit en posant $\mu = v$ et en utilisant (3.10), (2.13); on note que la condition (3.8) n'est pas nécessaire, puisque d'après la définition de v il résulte que

$$v(e) = 0 \quad \text{entraîne} \quad m(e) = 0;$$

la convergence approximative- ν de la suite de fonctions ponctuelles $y_n(u)$ vers $y(u)$ veut dire que pour tout n et tout $\varepsilon > 0$ il y a un ensemble $e(n, \varepsilon)$ de $\mathcal{F}$, avec $\lim_n \nu(e(n, \varepsilon)) = 0$, de sorte que les ensembles $y_n(e)$, $y(e)$ sont égaux à ε près (2.2a), lorsque $e \subset \mathcal{O} - e(n, \varepsilon)$.

Si $y = y(u) : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ est mesurable- D (définition 3.20) sur un e_0 (de $\mathcal{F}$), il est immédiat que cy , où c est un nombre réel, possède le même caractère. Selon la note (D) de DENJOY les propriétés suivantes ont lieu.

(4.6A). - y_1 et y_2 mesurable- D sur un e_0 , entraîne la même propriété pour $y_1 + y_2$;

(4.6B). - y_n mesurables- D ($n = 1, 2, \dots$) et $y_n \rightarrow y$ sur e_0 , implique que y est mesurable- D sur e_0 .

Soit B la famille minimale complètement additive, contenant les sphères ouvertes $S(\eta, r)$ (η décrivant $\mathcal{O}$, $r > 0$); selon (D), si $y(u)$ est mesurable- D sur un e_0 (de $\mathcal{F}$), il suit que

$$(4.7) \quad \beta \in B \text{ entraîne } E(\beta) = [u; u \in e_0 \text{ et } y(u) \in \beta] \in \mathcal{F}.$$

On peut vérifier que B contient les ensembles ouverts de l'espace $\mathcal{O}$ — soit par une démonstration directe, soit comme une conséquence de la preuve dans (D) de la proposition (4.6A). En effet, dans celle-ci il est établi que, si O est ouvert (dans $\mathcal{O}$), on a

$$[u; u \in e_0 \text{ et } y_1(u) + y_2(u) \in O] \in \mathcal{F};$$

en particulier donc « $y(u)$ mesurable- D sur e_0 » implique que $E(O)$ (4.7) $\in \mathcal{F}$; en tenant compte de la définition de la mesurabilité- D il suit que $B \ni O$.

L'auteur n'a pas pu vérifier la démonstration de (4.6B), qui se trouve dans (D). Par conséquent nous présentons ci-après une modification de la preuve.

Soit O un ensemble ouvert de $\mathcal{O}$; si $\eta = \eta(u)$ est une fonction quelconque, définie sur e_0 , posons

$$E'\eta, 0 = [u; u \in e_0 \text{ et } \eta(u) \in O].$$

Soient les O_q ($q = 1, 2, \dots$) ouverts, tels que

$$(1') \quad \bar{O}_q \subset O, \quad O_q \uparrow O \quad (\text{donc } \bar{O}_q \uparrow O).$$

Montrons que

$$(2') \quad (\alpha =) E(y, O) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{n > p} E(y_n, O_q) (= \beta),$$

Si $u_0 \in \alpha$, il résulte $y(u_0) \in O$; d'où $y(u_0) \in O_{q'}$ pour on q' . Or $y_n(u_0) \in O_{q'}$ pour tout $n > p' = p(u_0)$; par conséquent $u_0 \in E(y_n, O_{q'})$ ($n > p'$) et $u_0 \in \Pi(n > p')E(y_n, O_{q'})$; par là $u_0 \in \beta$, e.g. $\alpha \subset \beta$. Soit $u_0 \in \beta$; il y a un p' et un q' , tels que

$$u_0 \in E(y_n, O_{q'}) \text{ pour tout } n > p';$$

ainsi $y_n(u_0) \in O_{q'}(n > p')$; donc $y(u_0) = \lim_n y_n(u_0) \in \bar{O}_{q'} \subset O$, ce qui signifie que $u_0 \in E(y, O)$; d'où $\beta \subset \alpha$. La relation (2') est vérifiée. Pourtant les $E(y_n, O_{q'})$ sont dans $\mathcal{F}$ et le même sera vrai pour $E(y, O)$. La conclusion dans l'énoncé (4.7) en résulte.

En rapport avec la notion de l'équivalence différentielle (R ; section 6) on a la proposition suivante.

(4.8). - Soit $y = y(u) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ intégrable au sens de Denjoy sur un e_0 de $\mathcal{F}$ ($v(e_0) < \infty$); soit $I(e) = I(y, e) (= \int_e y \odot dm)$ l'intégrale $[I(e)]$ est définie pour tout e (de $\mathcal{F}$) $\subset e_0$. Pour e (de $\mathcal{F}$) $\subset e_0$ posons

$$(4.8a) \quad F(e) = y(e) \odot m(e) = \{y(u) \odot m(e); u \in e\}.$$

Il suit que $I(e)$ (qui consiste d'un seul point) et $F(e)$ sont différentiellement équivalentes sur e_0 ; c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition Δ_ε de $\mathcal{A}$, telle que $\Delta = \{e_i\} \geq \Delta_\varepsilon$ entraîne l'existence d'un ensemble π' (d'entiers positifs) de sorte que pour tout $\pi \geq \pi'$ on ait

$$(4.8b) \quad \left\| \sum_{\pi} [y(u_n) \odot m(e_0 e_n)] - \sum_{\pi} I(e_0 e_n) \right\| < \varepsilon \text{ pour tout } u_n \in e_0 e_n,$$

En effet, d'après le théorème 3.26 $I(e) = I_\beta(y, e)$, avec $\beta(y(e), e) = y(e) \odot m(e) = F(e)$ [(2.8), (4.8a)]; $I_\beta(y, e)$ étant l'intégrale indéfinie sur e_0 au sens de (R), avec $y = y(e)$ désignant l'image directe de e par la fonction ponctuelle $y(u)$, il suit que (R ; section 6) s'applique; en particulier, la partie nécessaire de (R ; corollaire 6.6) est valable au cas actuel, ce qui mène à la conclusion de l'énoncé.

Puisque l'intégrale $I(e)$ est au sens plus restreint que l'intégrale $I_\beta(y, e)$, la partie suffisante de (R ; corollaire 6.6) ne s'applique pas. La question survient de remplacer la notion de l'équivalence différentielle par un caractère convenable plus spécial, qui serait à la fois nécessaire et suffisante (en combinaison avec la propriété de la complète additivité) pour qu'une fonction $I(e)$ soit l'intégrale indéfinie, au sens de Denjoy, d'une fonction $y = y(u) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ponctuelle. A présent nous laissons cette question à côté.

5. - La définition de la totale- D et quelques de ses propriétés.

Dans la suite nous procédons dans les conditions suivantes.

(5.1). - Les hypothèses (3.1), (3.2) sont admises; les espaces $\mathcal{Q}$, Z , $\mathcal{X}$ sont VNC et $\mathcal{Q}$ est en plus séparable; $\mathcal{F} = \{e\}$ est une famille complètement additive, avec $e \subset \mathcal{Q}$, selon (2.5'); $m[\mathcal{F} \rightarrow Z]$ est une mesure vectorielle, complètement additive relativement à $\mathcal{F}$ (2.6); soit v la mesure absolue (3.15), correspondant à m ; la mesure et $\mathcal{F}$ sont étendues au sens de (3.18); on suppose que $v(\mathcal{Q}) < \infty$.

(5.1a). - $\mathcal{Q}$ est un espace topologique, séparé (e.g. HAUSDORFF), séparable et complet; $\mathcal{Q}$ est distancié au sens de Fréchet [e.g. il y a une fonction $\rho(x, y)$, ≥ 0 , définie pour x, y dans $\mathcal{Q}$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\rho(x, y) > 0$ si $x \neq y$, $\rho(x, x) = 0$; l'inégalité triangulaire peut être en défaut; ρ est une pseudo-distance]; la topologie de $\mathcal{Q}$ et la pseudo-distance sont compatibles. On admet l'existence d'une famille dénombrable G' d'ensembles ouverts de mesure- v positive, jouissant des propriétés suivantes:

(5.1b). - Pour tout point x de $\mathcal{Q}$ il existe une suite O_n de G' ($n = 1, 2, \dots$), de sorte que $O_n \ni x$ et $v(O_n) \rightarrow 0$;

(5.1c). - Si un point x est dans un ensemble ouvert O , il existe un $\eta = \eta(x, O) > 0$ tel que $O' \in G'$, $O' \ni x$, $v(O') < \eta$ entraînent $\bar{O}' \subset O$.

Si O est ouvert, non vide, il y a une suite d'ensembles de G' dont la réunion est O ; e.g. G' est un système complet de voisinages ($\mathcal{Q}$ satisfait au second axiome de dénombrabilité). Tout $F (\subset \mathcal{Q})$ fermé est l'intersection d'une suite non croissante d'ensembles ouverts. Le théorème de Cantor-Baire a lieu [ainsi, toute suite bien ordonnée non croissante d'ensembles fermés se stabilise pour un transfini des classes I, II].

Si $A \subset \mathcal{Q}$, on définit

$$(5.2) \quad \rho(A) = \sup \rho(x_1, x_2) (x_1, x_2 \in A);$$

c'est un pseudo-diamètre de A . En raison des conditions introduites plus haut il suit que

$$(5.3) \quad F_n, \subset \mathcal{Q}, \text{ fermés non vides } (n = 1, 2, \dots), \quad F_1 \supset F_2 \supset \dots, \quad \rho(F_n) \rightarrow 0$$

entraînent que l'ensemble $\cap F$ est non vide (et consiste d'un seul point).

Introduisons une famille $\mathcal{N}$ d'ensembles ouverts ($\subset \mathcal{Q}$) fondamentaux, désignés (sauf l'indication contraire) par $\mathcal{R}$, r , ρ , avec ou sans indices. $\mathcal{N}$ possède les caractères indiqués dans (T; hypothèse 7.4), où l'on pose $\varphi = v$;

d'autre part la propriété $(T; (7.4, 8^o))$ est omise. L'hypothèse pour $\mathfrak{N}$ est la suivante.

HYPOTHÈSE 5.4. -

1°. $G' \subset \mathfrak{N}$; $v(r) > 0$; $v(\bar{r} - r) = 0$

2°. $r \subset \mathfrak{R}$ entraîne l'existence d'une *décomposition-f* dans $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{R}$, avec r pour un des composants.

3°. $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \neq 0$, $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2$ possède une *décomposition-f* dans $\mathfrak{N}$.

4°. Toute *décomposition* dans $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{R}$ est une *décomposition-f*; pour un $\mathfrak{R}$ donné et pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathfrak{R}$ a une *décomposition-f* dans $\mathfrak{N}$, dont les composants sont de mesure- v inférieure à ε .

5°. « $\{r_j\}$ est une *décomposition-f* dans $\mathfrak{N}$ de r et $r_j \subset \mathfrak{R}$, entraîne $r \subset \mathfrak{R}$.

6°. Si $\mathfrak{R}$ et $\varepsilon > 0$ sont donnés, il y a un r et un ρ tels que

$$\bar{r} \subset \mathfrak{R}, \quad \bar{\mathfrak{R}} \subset \rho, \quad v(\mathfrak{R} - r) < \varepsilon, \quad v(\rho - \mathfrak{R}) < \varepsilon.$$

7°. Pour tout ensemble $F(\subset \mathfrak{M})$ fermé et tout $\varepsilon > 0$ il correspondent un O ouvert et un $\delta = \delta(\varepsilon, F, O) > 0$, tels que $O \supset F$. $v(O - F) < \varepsilon$, de sorte que $\bar{r}F \neq 0$, $v(r) < \delta$ impliquent $r \subset O$. Soit y un point dans un r ; on peut alors trouver un $r_0 \ni y$, $\bar{r}_0 \subset r$, et un $\sigma = \sigma(r, r_0, y) > 0$ de sorte que « $\bar{r}r_0 \neq 0$ et $v(\rho) < \sigma$ » implique $\rho \subset r$.

8°. Pour que $v(r) \rightarrow 0$ il faut et il suffit que $\rho(r)$ (le pseudo-diamètre) $\rightarrow 0$.

Une *décomposition* dans $\mathfrak{N}$ d'un ensemble E est, par définition, une *décomposition*

$$(5.4') \quad E = E_0 + \mathfrak{R}_1 + \dots + \mathfrak{R}_m,$$

les ensembles $\mathfrak{R}_j$ (de $\mathfrak{N}$), E_0 étant disjoints, $v(E_0) = 0$; si dans (5.4') E_0 est contenu dans les frontières des $\mathfrak{R}_j$ intervenant au second membre, on dira que la *décomposition* de E est une *décomposition-f* dans $\mathfrak{N}$; si E_0 est contenu dans une réunion finie des frontières d'ensembles quelconques de $\mathfrak{N}$, nous dirons que la *décomposition* (5.4') est une *décomposition- $\tilde{f}$* dans $\mathfrak{N}$.

(5.5). - La famille $\mathcal{F}$ (des ensembles mesurables- m , donc $-v$) contient les ensembles ouverts, ainsi que les fermés.

Les ensembles de G' sont dans $\mathfrak{N}$, ils sont mesurables- v (5.4, 1°). Tout $O (\neq 0)$ ouvert est la réunion, nécessairement dénombrable, d'ensembles de G' ; par là O est mesurable- v [si O ouvert est non vide, $v(O) > 0$], donc $O \in \mathcal{F}$.

(5.6). - Un point $x \in E (\subset \mathfrak{M})$ est *isolé-s* (sens spécial) dans E , si pour un O ouvert on a $O \ni x$ et $OE \subset \bar{r} - r$ pour un r de $\mathfrak{N}$; p est *parfait-s* (sens spécial), si p est fermé et s'il n'y a pas de points isolés- s dans p .

(5.7). - $\mathfrak{N}'$ est la famille des ensembles $r + e$, où $r \in \mathfrak{N}$ et $e \subset r - r$; $\tilde{\mathfrak{N}}$ est la famille minimale contenant $\mathfrak{N}'$, telle que $\tilde{r}_i \in \tilde{\mathfrak{N}}$ ($i = 1, 2$) entraîne que les ensembles $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2$, $\tilde{r}_1 \tilde{r}_2$, $\tilde{r}_1 - \tilde{r}_1 \tilde{r}_2$ appartiennent à $\tilde{\mathfrak{N}}$ (cf. T; (7.7)).

(5.7a). - On désignera par (*) tout ensemble contenu dans une réunion finie de frontières d'ensembles de $\mathfrak{N}$.

(5.7b). - Tout $\tilde{r}$ de $\tilde{\mathfrak{N}}$ a une décomposition- $\tilde{f}$, e.g. $\tilde{r} = \sum_1^k q_i + e_0$, où les q_i (de $\mathfrak{N}$) sont disjoints et $e_0 \in (*)$.

DÉFINITION 5.8. - Soit $\Psi: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{X}$. On dira que Ψ est *intérieurement continue pour un r* (de $\mathfrak{N}$), si pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ existe tel que

$$r' \subset r, \quad v(r - r') < \eta \quad \text{implique} \quad \|\Psi(r) - \Psi(r')\| < \varepsilon;$$

Ψ est *intérieurement continue sur un $\mathfrak{R}$* , si Ψ est intérieurement continue pour tout $r \in \mathfrak{R}$. Soit une fonction $\Psi: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{X}$ s'annulant pour tout ensemble (*) (5.7a); on dira alors que Ψ est *complètement additive dans $\mathfrak{N}$* , si $H \in \mathfrak{N}$, $H_n \in \mathfrak{N}$ ($n = 1, 2, \dots$) étant disjoints, $H = \sum_n H_n$, entraînent que $\Psi(H) = \sum \Psi(H_n)$ au sens de la convergence inconditionnelle; e.g. $\tilde{r}_n$ (de $\tilde{\mathfrak{N}}$) $\uparrow$ un $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{N}}$) implique $\Psi(\tilde{r}_n) \rightarrow \Psi(\tilde{r})$.

NOTATION 5.9. - Soit $S = \{r_i\}$ ($i = 1, \dots, k$) un *système fini* d'ensembles disjoints de $\mathfrak{N}$; on écrira $M(S) = \max v(r_i)$, $v(S) = \sum v(r_i) [= v(\sum r_i)]$; plus généralement, si $\Psi: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{X}$, on posera $\Psi(S) = \sum \Psi(r_i)$.

On admettra toujours que $\Psi = 0$ pour les ensembles de (*).

DÉFINITION 5.10. - Soit $\Psi: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{X}$; on dira que *l'intégrale de Burkill* (au sens étendu) de Ψ pour un r (de $\mathfrak{N}$) existe et vaut

$$\int_r \Psi = \lim \Psi(S),$$

si la limite indiquée au second membre existe, lorsque $M(S) \rightarrow 0$, $S = \{r_i\}$ étant une décomposition variable dans $\mathfrak{N}$ de r , $\Psi(S) = \sum \Psi(r_i)$.

(5.10a). - Si $\Psi: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{X}$; on dira que Ψ est *additive dans $\mathfrak{N}$* , si pour toute décomposition $S = \{r_i\}$ dans $\mathfrak{N}$ d'un r (de $\mathfrak{N}$) on a $\Psi(S) [= \sum \Psi(r_i)] = \Psi(r)$; par conséquent *pour une fonction de cette sorte l'intégrale de Burkill $\int_r \Psi = \Psi(r)$ existe*.

THÉORÈME 5.11. - Soit une fonction $\Psi: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{X}$. Si l'intégrale $\int_r \Psi$ existe pour un r de $\mathfrak{N}$, elle existe pour tout r' (de $\mathfrak{N}$) $\subset r$ et est additive dans $\mathfrak{N}$,

dans r ; de plus, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, tel que

$$(5.11a) \quad \sigma = \{r_i\} \quad (i = 1, \dots, k),$$

r_i (de $\mathfrak{N}$) $\subset r$, r_i étant disjoints, $M(\sigma)$ (5.9) $< \eta$, entraînent

$$(5.11b) \quad \|\Psi(\sigma) - \int_{\sigma} \Psi\| < \varepsilon.$$

Cela se démontre au moyen des adaptations convenables des procédés utilisés dans la preuve de (T' ; théorème 4.5); le fait que l'espace est *VNC*, donc complet, intervient d'une façon essentielle pour démontrer que l'existence de $\int_r \Psi$ pour un r de $\mathfrak{N}$ implique l'existence de $\int_{r'} \Psi$ pour tout r' (de $\mathfrak{N}$) $\subset r$.

À quelques reprises on admettra la condition suivante.

HYPOTHÈSE 5.12. – Pour tout r de $\mathfrak{N}$ les relations

$$(5.12a) \quad r_n \in \mathfrak{N}, \quad r_n \subset r \quad (n = 1, 2, \dots), \quad v(r - r_n) \rightarrow 0$$

entraînent l'existence d'une suite partielle r_{n_i} ($n_1 < n_2 < \dots$), telle que

$$(5.12b) \quad r_{n_i} \uparrow r - e_0,$$

où e_0 est un ensemble (*) (5.7a).

Démontrons la proposition suivante.

(5.13). – Admettons l'hypothèse 5.12; soit une fonction $\Psi[: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{E}]$ complètement additive dans $\mathfrak{N}$ [cf. (5.8), ainsi $\Psi(e) = 0$ pour $e \in (*)$]. Alors Ψ sera intérieurement continue pour tout r de $\mathfrak{N}$.

Si l'énoncé est en défaut, il y a un r (de $\mathfrak{N}$) et un $\varepsilon > 0$, tel que des r^n ($n = 1, 2, \dots$) existent de sorte que

$$(1') \quad r^n \in \mathfrak{N}, \quad r^n \subset r, \quad v(r - r^n) < \frac{1}{n};$$

$$(2') \quad \|\Psi(r) - \Psi(r^n)\| = \|\Psi(r - r^n)\| \geq \varepsilon.$$

En raison de (1') et de l'hypothèse (5.12) $\{r^n\}$ contient une suite partielle $\{r_{n_i}\}$, telle que

$$(3') \quad r_{n_i}(de\mathfrak{N}) \uparrow r - e_0, \quad e_0 \in (*).$$

On a $r = \Sigma r_n + e_0$, $\Psi(r) = \Psi(\Sigma r_n) + \Psi(e_0) = \Psi(\Sigma r_n)$; ainsi $\Psi(r - r_n) = 0$, ce qui est contraire à (2'). (5.13) est établi.

Les lemmes 7.10, 7.11 dans (*T*; p. 38-40) s'appliquent dans les conditions actuelles, avec $\varphi = \nu$. En tant que par la suite nous en aurons besoin, nous les présentons ci-après (les lemmes 5.14, 5.15).

LEMME 5.14. - Supposons qu'un $\tilde{r}$ de $\tilde{\mathfrak{N}}$ est couvert par la réunion des ρ d'une famille $\mathfrak{N} \subset \tilde{\mathfrak{N}}$. Il y aura des r_ν ($\in \mathfrak{N}$), des $\tilde{\rho}_\nu$ ($\in \tilde{\mathfrak{N}}$) disjoints et des $q_{\nu,i}$ ($i = 1, \dots, k_\nu$) $\in \mathfrak{N}$, tels que

$$(5.14a) \quad \tilde{\rho}_\nu \subset \tilde{r} r_\nu, \quad \tilde{r} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu; \quad \tilde{\rho}_\nu \sum_{i=1}^{k_\nu} \rho_{\nu,i} + e_\nu.$$

décomposition- $\tilde{f}$ dans $\tilde{\mathfrak{N}}$, $e_\nu \in (*)$.

On note que dans ces conditions, si $\Psi: \tilde{\mathfrak{N}} \rightarrow \mathfrak{X}$ (s'annulant pour les ensembles $(*)$) est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{N}}$ (5.8), on aura

$$(5.14b) \quad \Psi(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Psi(\tilde{\rho}_\nu), \quad \Psi(\tilde{\rho}_\nu) = \sum_{i=1}^{k_\nu} \Psi(q_{\nu,i}),$$

la série étant inconditionnellement convergente.

LEMME 5.15. - Soit $\mathfrak{N} = \{\rho\} \subset \mathfrak{N}$, avec les ρ contenus dans un même $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{N}$. On aura $\mathfrak{R} \in \mathfrak{N}$, si les propriétés (1₀)-(4₀) suivantes ont lieu:

(1₀) si r ($\in \mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$ et si r^n (de $\tilde{\mathfrak{N}}$) épaiss- ν a une décomposition- f dans $\mathfrak{N}$ avec composants dans $\mathfrak{N}$, tandis que $r^n \subset r^{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) et $\lim r^n = r$, alors $r \in \mathfrak{N}$;

(2₀) r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}'$ (de $\mathfrak{N}$) implique $r \in \mathfrak{N}$;

(3₀) si tout r de $\mathfrak{N}$, avec $\tilde{r} \subset$ un $\mathfrak{R}'$ de $\mathfrak{N}$, est dans $\mathfrak{N}$, on a $\mathfrak{R}' \in \mathfrak{N}$;

(4₀) « $\mathfrak{N}_1$ ($\subset \mathfrak{N}$) ne couvre pas $\mathfrak{R}$ » entraîne l'existence d'un $\mathfrak{R}'$ de $\mathfrak{N}$ non couvert par $\mathfrak{N}_1$.

Nous sommes prêts maintenant d'aborder la définition d'une totale, désignée par la suite par (*D*)f...

DÉFINITION 5.16. - Soient un $\mathfrak{R} \in \mathfrak{N}$ et une fonction ponctuelle $y = y(u): \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{Y}$ (5.1). On dira que y est totalisable-*D* sur $\mathfrak{R}$, s'il existe une fonction $\Psi[: \tilde{\mathfrak{N}} \text{ (sur } \mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{X}]$ complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{N}}$ (5.8) [donc $\Psi(e) = 0$ pour $e \in (*)$] et intérieurement continue dans $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{R}$ (5.8), de sorte que les relations

p parfait-s (5.6), r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$, $rp \neq 0$,

impliquent l'existence d'un r' (de $\mathfrak{N}$) $\subset r$, $r'p \neq 0$, tel que pour tout r_1 (de $\mathfrak{N}$) contenu dans r' on a

$$(5.16a) \quad \int_{r_1} \Psi_p = \int_{r,p} y(u) \odot dm(u), \quad \text{avec} \quad \Psi_p(\rho) = \begin{cases} \Psi(\rho) & (\text{si } \tilde{\rho}p \neq 0) \\ 0 & (\text{si } \tilde{\rho}p = 0) \end{cases}, \quad \text{où } \rho \in \mathfrak{N}$$

L'intégrale au premier membre est celle de BURKILL au sens de (5.10), tandis qu'au second membre l'intégrale est au sens de DENJOY, e.g. au genre essentiellement de LEBESGUE. Dans ce cas on écrira pour la totale- D de y sur $\mathcal{R}$;

$$(5.16b) \quad \Psi(\mathcal{R}) = (D) \int_{\mathcal{R}} y(u) \odot dm(u).$$

REMARQUE 5.17. - Dans la suite nous présenterons un calcul effectif de la totale- D à partir de la fonction y supposée totalisable- D , ce qui justifiera l'appellation « totale » pour $(D)\int \dots$.

THÉOREME 5.18. - La totale- D , selon la définition 5.16, est unique.

Soit une fonction y totalisable- D sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{N}$. Supposons, s'il est possible, que deux fonctions distinctes $\Psi_1, \Psi_2[: \mathfrak{N}(\text{sur } \mathcal{R}) \rightarrow \mathfrak{X}]$ existent, chacune jouissant des propriétés, relativement à y , spécifiées au théorème pour Ψ ; posons $\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$. Désignons par $\mathfrak{N} = \{\rho\}$ la famille des ρ , tels que $\rho \in \mathfrak{N}$, $\rho \subset \mathcal{R}$, $\Psi \equiv 0$, dans $\mathfrak{N}$ sur ρ . On note tout d'abord que la condition (5.15, 2₀) est vérifiée. Or soit un $\mathcal{R}'$ de $\mathfrak{N}$ tel que tout r de $\mathfrak{N}$, avec $r \subset \mathcal{R}'$, est dans $\mathfrak{N}$; si un r' (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathcal{R}'$, d'après (5.4, 6⁰) des r_n (de $\mathfrak{N}$) existent de sorte que $r_n \subset r'$, $\forall (r' - r_n) < \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$); $r_n \in \mathfrak{N}$ et $\Psi(r_n) = 0$, en plus $\|\Psi(r')\| = \|\Psi(r') - \Psi(r_n)\| < \epsilon$, dès que $n > n(\epsilon)$ (assez grand); donc $\Psi(r') = 0$, et $\mathcal{R}' \in \mathfrak{N}$; (5.15, 3₀) a lieu. Soient r^n (de $\mathfrak{N}$) $= \sum_{i=1}^{k_n} q_i^n + e^n$ ($n = 1, 2, \dots$), $e^n \in (*)$, les q_i^n (pour n fixe) étant disjoints, $q_i^n \in \mathfrak{N}$, tandis que $r^n \uparrow r$ (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathcal{R}$. Si r_1 (de $\mathfrak{N}$) $\subset r$, on aura $r_1 r^n \uparrow r_1$. On note que $r_1 r^n = \sum r_1 q_i^n + (*)$, où d'après (5.4, 3⁰) $r_1 q_i^n$ possède une décomposition- f dans $\mathfrak{N}$, dont les composants sont des ensembles (de $\mathfrak{N}$) contenus dans q_i^n (de $\mathfrak{N}$); par là ces composants sont dans $\mathfrak{N}$; il suit que $\Psi(r_1 q_i^n) = 0$, donc $\Psi(r_1 r^n) = 0$ et $\Psi(r_1) = \Psi(\lim r_1 r^n) = \lim \Psi(r_1 r^n) = 0$, e.g. $r \in \mathfrak{N}$, ce qui établit (5.15, 1₀).

Ayant en vue la démonstration de (5.15, 4₀) pour la famille $\mathfrak{N}$ introduite plus haut, envisageons une sous-famille $\mathfrak{N}_1$ de $\mathfrak{N}$ ne couvrant pas $\mathcal{R}$. Alors $F = \mathfrak{N} - \sum \{\mathfrak{N}_1\} \rho_1$ non vide est fermé; $FR \neq 0$.

(a) Si FR a un point isolé- s , un r_0 de $\mathfrak{N}$ sera non couvert par $\mathfrak{N}_1$.

On vérifie cet énoncé en procédant comme on l'a fait pour un but analogue dans (T ; p. 42), en utilisant le lemme 5.14, les propriétés (5.15, 1₀, 2₀) déjà établies et en tenant compte que, d'après (5.4, 1⁰), la mesure absolue ν s'annule pour tout ensemble $(*)$ (5.7a).

Soit $F\mathcal{R} (\neq 0)$ parfait- s dans $\mathcal{R}$. Puisque Ψ_1 et Ψ_2 possèdent la propriété spécifiée en rapport avec (5.16a) il suit qu'il existe un r' (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathcal{R}$, $r'F \neq 0$, tel que

$$\int_r \Psi_F = 0 \quad \text{pour tout } r \text{ (de } \mathfrak{N}) \subset r',$$

où $\Psi_F(\rho) = \Psi(\rho)$ (si $\bar{\rho}F \neq 0$), $= 0$, (si $\bar{\rho}F = 0$), avec ρ (de $\mathfrak{N}$) $\subset r'$; il vient

$$(1_1) \quad \lim_{j=1}^n \Psi_F(q_j) = \lim \Sigma' (\bar{q}_j F \neq 0) \Psi(q_j) = 0 \quad \text{lorsque} \quad M(S) \rightarrow 0,$$

$S = \{q_j\}$ ($j = 1, \dots, n$) désignant une décomposition (finie et variable) dans $\mathfrak{N}$ de r , e.g. $r = \sum_1^n q_j + (*)$. Or Ψ s'annule pour tout ensemble $(*)$ (ce qui est sous-entendue dans la définition de la complète additivité dans $\mathfrak{N}$), donc $\Psi(r) = \sum_1^n \Psi(q_j)$. Si $\bar{q}_k$ est disjoint de F , c'est que $\bar{q}_k$ est couvert par $\mathfrak{N}_1$; en raison du lemme 5.14 il y a des $r_v \in \mathfrak{N}_1$, des $\tilde{\rho}_v$ (de $\mathfrak{N}$) disjoints, $\tilde{\rho}_v \subset r_v$, de sorte que $\bar{\rho}_k = \sum_1^\infty \tilde{\rho}_v$; $\tilde{\rho}_v$ possède une décomposition- f dans $\mathfrak{N}$, soit $\{q_{v,i}\}$ ($i = 1, \dots, k_v$); il résulte que

$$(2_1) \quad \Psi(q_k) = \sum_1^\infty \Psi(\tilde{\rho}_v), \quad \Psi(\tilde{\rho}_v) = \sum_1^{k_v} \Psi(q_{v,i}).$$

D'après (5.15, 2₀) les $q_{v,i}$ ($\subset r_v$) sont dans $\mathfrak{N}$; en raison de (2₁) $\Psi(\bar{q}_v) = 0$ (lorsque $\bar{q}_v F = 0$), d'où $\Psi(r)$ est la somme des $\Psi(q_j)$ qui correspondent aux q_j , avec $\bar{q}_j F \neq 0$. Pourtant $\Psi(r)$ est indépendante du choix de la décomposition S dans $\mathfrak{N}$ de r ; par conséquent il suit de (1₁) que $\Psi(r) = 0$ [pour tout r (de $\mathfrak{N}$) $\subset r'$], ce qui signifie que r' est dans $\mathfrak{N}$. Puisque $r'F \neq 0$, r' n'est pas couvert par $\mathfrak{N}_1$. En tenant compte de (a) il résulte que la propriété (5.15, 4₀) a lieu. Le lemme 5.15 s'applique et on obtient que $\mathfrak{R}$ est dans $\mathfrak{N}$, e.g. que $\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$ s'annule identiquement dans $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{R}$. Le théorème 5.18 est vérifié.

(5.19a). – La totalisabilité- D de y sur un $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{N}$ entraîne la même propriété sur tout r de $\mathfrak{N}$ contenu dans $\mathfrak{R}$; $(D) \int y(u) \odot dm(u)$ est intérieurement continue dans $\mathfrak{N}$ et complètement additive dans $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{R}$; de plus la totale- D s'annule pour les ensembles $(*)$ (5.7a). La classe des fonctions totalisables- D est linéaire, e.g.

c_1, c_2 des constantes, y_i ($i = 1, 2$) totalisables- D sur $\mathfrak{R}$
entraînent la totalisabilité- D de $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ sur $\mathfrak{R}$ et la relation

$$(D) \int y \odot dm = c_1 (D) \int y_1 \odot dm + c_2 (D) \int y_2 \odot dm \quad \text{sur} \quad \mathfrak{R}.$$

Cette constatation est assez immédiate.

(5.19b). – Si $\{q_i\}$ est une décomposition dans $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{R}$, si y est totalisable- D sur chacun q_i et $\Gamma(r) = \sum_i (D) \int_{r q_i} y \odot dm$ est intérieurement continue sur $\mathfrak{R}$, il suit que y est totalisable- D sur $\mathfrak{R}$.

La preuve est à la façon de celle d'énoncé (T; (7.13b)), en tenant compte de la définition 5.16.

(5.19c). – Si y totalisable- D sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{N}$ s'annule sur une plénitude- ν $\mathcal{R}^*$ de $\mathcal{R}[\nu(\mathcal{R} - \mathcal{R}^*) = 0]$, on aura $(D) \int_{\mathcal{R}} y \odot dm = 0$.

Posons $\Psi(r) = (D) \int_r y \odot dm$ pour tout r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathcal{R}$. Désignons par $\mathcal{R} = \{\rho\}$ la famille des ensembles ρ de $\mathfrak{N}$, tels que $\Psi = 0$ dans $\mathfrak{N}$ sur ρ . En procédant comme on l'a fait au commencement de la preuve du théorème 5.18, on montre que la famille satisfait aux propriétés (5.15, 1₀, 2₀, 3₀). Soit $\mathfrak{N}_1, \subset \mathfrak{N}$, ne couvrant pas $\mathcal{R}$. Si l'ensemble $F = \mathfrak{N} - \Sigma(\mathfrak{N}_1)$ ρ_1 (qui est fermé et joint à $\mathcal{R}$) possède un point isolé- s , $\mathfrak{N}_1$ ne couvre pas un r_0 de $\mathfrak{N}$; ceci est analogue à l'énoncé (a) qui intervient dans la démonstration du théorème 5.18. Si $F\mathcal{R}$ est parfait- s dans $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ contient un r' de $\mathfrak{N}$ joint à F , tel que les intégrales (de BURKILL et au genre de LEBESGUE)

$$\int_r \Psi_F, \quad I(rF) = \int_{rF} y \odot dm$$

existent et sont égales pour tout r de $\mathfrak{N}$ contenu dans r' . Or

$$I(rF) = I(rF\mathcal{R}^*) + I(rF, (\mathcal{R} - \mathcal{R}^*));$$

$I(rF\mathcal{R}^*) = 0$ car $y = 0$ sur $\mathcal{R}^*$; $I(rF, (\mathcal{R} - \mathcal{R}^*)) = 0$, puisque $\nu(rF, (\mathcal{R} - \mathcal{R}^*)) = 0$ et l'intégrale $\int y \odot dm$ est absolument continue- ν (4.5). Ainsi $\int_r \Psi_F = 0$ dans $\mathfrak{N}$ sur r' . Des lors nous procédons comme dans le texte qui se rattache à (1₁), (2₁) dans la preuve du théorème 5.18. Il suit que r' est dans $\mathfrak{N}$ et que r' est non couvert par $\mathfrak{N}_1$ (au cas de $F\mathcal{R}$ parfaits- s dans $\mathcal{R}$). Ainsi la propriété (5.15, 4₀) est valide. En raison du lemme 5.15 $\mathcal{R} \subset \mathfrak{N}$, ce qui vérifie l'énoncé (5.19c).

THÉORÈME 5.20. – Si y est intégrable- m au sens de Denjoy (e.g. au genre de LEBESGUE) sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{N}$, il suit que y est totalisable- D sur $\mathcal{R}$ et

$$(5.20a) \quad \int_{\mathcal{R}} y \odot dm = (D) \int_{\mathcal{R}} y \odot dm.$$

Posons $I(e) = \int_e y \odot dm$ pour e (de $\mathcal{F}$) $\subset \mathcal{R}$. Soit $\Psi(\tilde{r})$ la restriction de I à la famille $\mathfrak{N}(\tilde{r}) (\subset \mathcal{F})$. D'après (5.4, 1⁰) tout ensemble e de (*) est de mesure- ν zéro [donc $m(e) = 0$, lorsque $e \in (*)$]. En raison de (4.5) I est absolument continue- ν et Ψ s'annule pour les ensembles (*); de plus Ψ est complètement

additive dans $\mathfrak{N}$ (5.8) sur $\mathfrak{R}$ [car I est complètement additive dans $\mathfrak{F}$]. Puisque I est absolument continue- ν , il suit que les relations r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$, $\varepsilon > 0$ impliquent l'existence d'un $\eta(\varepsilon) > 0$, de sorte que

$$\|\Psi(r) - \Psi(r')\| = \|\Psi(r - r')\| = \left\| \int_{r-r'} y \odot dm \right\| < \varepsilon,$$

dès que r' (de $\mathfrak{N}$) $\subset r$ et $\nu(r - r') < \eta(\varepsilon)$; e.g. Ψ est *intérieurement continue* (5.8) sur $\mathfrak{R}$. Soient un p parfait- s , un r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$ avec $rp \neq 0$. Le théorème est établi, si l'on vérifie que

$$(b) \quad (\gamma) \int_{r_1} \Psi_p = \int_{r_1 p} y \odot dm \quad \text{lorsque } r_1 \in \mathfrak{N} \text{ et } r_1 \subset r.$$

$S = \{\rho_j\}$ désignant une décomposition dans $\mathfrak{N}$ de r_1 , e.g.

$$r_1 = \sum_1^k \rho_j + e_0 \quad [\rho_j \text{ (de } \mathfrak{N}) \text{ disjoints, } e_0 \text{ dans les frontières des } \rho_j],$$

il vient $\Psi_p(S) = \Sigma' (\bar{\rho} \neq p \neq 0) \Psi(\rho_j) = \int_h y \odot dm$ ($h = \Sigma' \rho_k \rightarrow \gamma$, lorsque $M(S) (= \max \nu(e_j)) \rightarrow 0$). Au cas $r_1 p = 0$, on voit que (b) a lieu. Supposons que $r_1 p \neq 0$. En utilisant la première partie de (5.4, 7°) et en procédant comme on la fait pour un but analogue dans (T ; p. 46), on conclut comme il suit. $h_0 = r_1 p - hp (= pe_0)$ est de mesure- ν nulle; $h + h_0 \supset r_1 p$. Pour $n = 1, 2, \dots$ il existe un $\delta_n > 0$, tel que $M(S) < \delta_n$ entraîne $\nu(h + h_0 - r_1 p) < \frac{1}{n}$, e.g. $\nu(\dots) \rightarrow 0$ avec $M(S)$. En outre, en posant $h' = h + h_0 - r_1 p$,

$$\Psi_p(S) - \int_{r_1 p} y \odot dm = \int_{h'} y \odot dm \rightarrow 0 \quad \text{pour } M(S) \rightarrow 0,$$

puisque $\int y \odot dm$ est absolument continue- ν et $\nu(h') \rightarrow 0$. Mais $\lim \Psi_p(S) = \int_{r_1} \Psi_p$; on a établi (b), ce qui vérifie le théorème.

REMARQUE 5.21. - Si l'on admet l'hypothèse 5.12, on peut omettre dans la définition 5.16 de la totale- D le caractère de la continuité intérieure dans $\mathfrak{N}$ [conséquence de (5.13)].

6. - Une classification des fonctions totalisables- D et le calcul de la totale- D .

Notons d'abord le fait suivant.

(6.1). - Si p est parfait- s et un r_0 (de $\mathfrak{N}$) est joint à p , il existe un r (de $\mathfrak{N}$) tel que $r \subset r_0$ et $rp \neq 0$.

En effet, soit x_0 un point $r_0 p$; selon (5.1b) il y a des ensembles de G contenant x_0 et de mesure- ν arbitrairement petite; d'après (5.1c) parmi ces ensembles il en existe un, soit r , tel que $x_0 \subset r$ (donc $rp \neq 0$) et $r \subset r_0$. En tenant compte de cet énoncé et de la définition 5.16 on conclut comme il suit.

(6.2). - Supposons que y est totalisable- D sur tout r de $\mathfrak{N}$, avec r contenu dans un $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{N}$, et qu'une fonction Ψ existe complètement additive dans $\mathfrak{N}$ et intérieurement continue dans $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{R}$, avec $\Psi^*(r) = (D) \int_r y \odot dm$ pour tout r de $\mathfrak{N}$ ayant $r \subset \mathfrak{R}$. Il suit que y est totalisable- D sur $\mathfrak{R}$ et $\Psi^*(\mathfrak{R}) = (D) \int_{\mathfrak{R}} y \odot dm$.

(6.3). - Si e ($\subset \mathfrak{N}$) est un ensemble quelconque et un $\mathfrak{R} \in \mathfrak{N}$, posons $\Psi = \Psi - \Psi_e$, où Ψ_e est définie selon (5.16a) [$\Psi_e(r) = \Psi(r)(re = 0)$, $= 0(re \neq 0)$]; lorsque r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$].

THÉOREME 6.4. - Soit e ferme, $\mathfrak{R}e \neq 0$; supposons que y , définie sur $\mathfrak{R}$, est intégrable- m sur $\mathfrak{R}e$, que la totale $\Psi(r) = (D) \int_r y \odot dm$ existe pour tout r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$, avec $re = 0$, et que la fonction $\Gamma(\rho - \rho e) = \int \Psi_e$ est définie dans $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{R}$ et y possède les caractères de la complète additivité dans $\mathfrak{N}$ et de la continuité intérieure dans $\mathfrak{N}$. Alors

$$(6.4a) \quad (D) \int_{\mathfrak{R}} y \odot dm = \int_{\mathfrak{R}e} y \odot dm + \Gamma(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}e).$$

L'intégrale $\int y \odot dm$ est complètement additive dans $\mathfrak{N}$ et intérieurement continue dans $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{R}$, donc $\Phi(\rho) = \int_{\rho e} y \odot dm + \Gamma(\rho - \rho e)$ jouit des mêmes propriétés. D'après la proposition (5.5) $e \in \mathcal{F}$, donc e est mesurable- m (ainsi que $-\nu$). Soit $y' = y$ (sur $\mathfrak{R}e$), $= 0$ (sur $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}e$); la fonction y' est intégrable- m sur $\mathfrak{R}$; $y - y'$ est nulle sur $\mathfrak{R}e$ et vaut y sur $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}e$; par conséquent, en retenant la désignation originelle, on peut supposer que $y = 0$ sur $\mathfrak{R}e$. Le théorème sera démontré, si l'on établit que les relations

$$(1_0) \quad p \text{ parfait-}s, \quad r \text{ (de } \mathfrak{N}) \subset \mathfrak{R}, \quad rp \neq 0,$$

impliquent l'existence d'un r' (de $\mathfrak{N}$) $\subset r$, $r'p \neq 0$, tel que pour tout r_1 (de $\mathfrak{N}$) $\subset r'$ on a

$$(2_0) \quad \int_{r_1} \Phi_p = \int_{r_1 p} y \odot dm, \quad \text{où} \quad \Phi(\rho) = \Gamma(\rho - \rho e) \left[= \int_{\rho} \Psi_e \right].$$

Si $rp \subset e$, soit un r' (de $\mathfrak{M}$) joint à p , avec $r' \subset r$ [voir (6.1)]. Soit $S = \{\rho_j\}$ une décomposition dans $\mathfrak{M}$ de $r_1, \subset r'$; notons par $\rho_{i(v)}$ les ensembles de S , tels que $p\rho_{i(v)} \neq 0$; $\sigma = \{\rho_{i(v)}\} \subset S$. Il vient $e\rho_{i(v)} \neq 0$, $\Psi^e(\rho_{i(v)}) = 0$ (6.3), $\Psi^e(\sigma) = 0$, d'où en raison du théorème 5.11

$$(3_0) \quad \Phi(\sigma) = \int_{\sigma} \Psi^e - \Psi^e(\sigma) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad M(S) \rightarrow 0;$$

or $\Phi(\sigma) = \Phi_p(S)$, donc (3₀): $\int_{r_1} \Phi_p = 0$; e.g. (2₀) s'ensuit, en tant que $y = 0$ sur $r_1 p \subset e$. Soit $rp \setminus e \neq 0$; e étant fermé, il y a un r_2 de (de $\mathfrak{M}$) $\subset r$, $r_2 e = 0$, $r_2 p \neq 0$ [en effet, on réalise ceci en prenant un r_2 (de $\mathfrak{M}$), contenant un point particulier de $rp \setminus e$ et tel que la pseudo-diamètre $\rho(r_2)$ de r_2 soit suffisamment petit]; $\Psi(r_2) = (D) \int_{r_2} y \odot dm$; par là il existe un $r' \subset r_2 (\subset r)$, $r' p \neq 0$, tel que

$$(4_0) \quad \int_{r_1} \Psi_p = \int_{r_1 p} y \odot dm \quad \text{pour tout} \quad r_1 \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset r';$$

or Ψ vaut $\Phi [= \int \Psi^e]$ dans $\mathfrak{M}$ sur r_1 , d'où (4₀) implique (2₀). *La preuve du théorème est achevée.* Sauf pour quelques modifications, la démonstration qu'on vient de présenter est pareille à celle d'un théorème analogue dans la section 17 d'un ouvrage de P. ROMANOVSKI [voir la bibliographie dans (T)].

La définition suivante est une adaptation aux conditions actuelles de (T; (10.12)).

DÉFINITION 6.5. – Soit y totalisable- D sur $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{M}$ (donc sur tout r (de $\mathfrak{M}$) $\subset \mathfrak{R}$). Les indices ci-après pour spécifier les diverses classes sont finis ou transfinis (des classes I, II). On dira que $y \in K_0$ sur un $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{M}$) $\subset \mathfrak{R}$, si l'intégrale- $m \int_{\tilde{r}} y \odot dm$ existe; $y \in K_\alpha$ ($\alpha > 0$) sur un $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{M}$) $\subset \mathfrak{R}$, si l'une des conditions (a)-(e) est remplie:

(a) il y a une décomposition- $\tilde{f} \{q_i\}$ (5.7b) de $\tilde{r}$ telle que $y \in K_{\beta_i}$ ($\beta_i < \alpha$) sur q_i ;

(b) il y a des ρ^n (de $\mathfrak{M}$) $\uparrow \tilde{r}$, de sorte que $y \in K_{\beta_n}$ ($\beta_n < \alpha$) sur ρ^n ($n = 1, 2, \dots$);

(c) lorsque $\tilde{r} \in \mathfrak{M}$, il existe un r (de $\mathfrak{M}$) $\supset \tilde{r}$, tel que $y \in K_\beta$ ($\beta < \alpha$) sur r ;

(d) lorsque $\tilde{r} \in \mathfrak{M}$, on a $y \in K_\beta$ ($\beta < \alpha$) pour tout r (de $\mathfrak{M}$), avec $r \subset \tilde{r}$;

(e) lorsque $\tilde{r} \in \mathfrak{M}$, l'intégrale $\int_{re} y \odot dm$ existe pour un e fermé, tandis

que $f \in K_\beta$ ($\beta < \alpha$) sur tout r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \tilde{r}$, avec $\tilde{r}e = 0$, et $\Gamma(\rho - \rho e)$ (6.4) jouit sur $\tilde{r}$ des caractères de la complète additivité dans $\mathfrak{N}$ et de la continuité intérieure dans $\mathfrak{N}$.

THÉOREME 6.6. - Si y est totalisable- D (5.16) sur un $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{N}$, $y \in K_\alpha$ sur $\mathfrak{R}$ pour un α des classes I, II.

On établit cette proposition en utilisant des modifications convenables des procédés dans (T; p. 63-66), au moyen de (6.1) et des lemmes 5.14, 5.15.

Soit une fonction y totalisable- D sur un $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{N}$; posons $\Psi(\tilde{r}) = (D) \int_{\tilde{r}} y \odot dm$ pour tout $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$. Nous procédons avec le calcul effectif de Ψ à partir de y .

Si p est parfaits- s et $\mathfrak{R}p \neq 0$, tout r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$, joint à p , contient un r' (de $\mathfrak{N}$), $r'p \neq 0$, sur lequel (5.16a) a lieu; or $\Psi_p = \Psi - \Psi^p$ (6.3), donc

$$(6.7) \quad \Psi(r_1) = \int_{r_1 p} y \odot dm + \int_{r_1} \Psi^p \quad [\text{tout } r_1 \text{ (de } \mathfrak{N}) \subset r'];$$

$\int_{r_1} \Psi^p = \Gamma(r_1 - r_1 p)$ est connue à partir des valeurs $\Psi(\rho)$ pour ρ de $\mathfrak{N}$ tels que $\bar{\rho} \subset r_1 - r_1 p$. En particulier, si un r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$, il existe un r' (de $\mathfrak{N}$) $\subset r$, tel que

$$(6.7a) \quad \Psi(r_1) = \int_{r_1} y \odot dm \quad \text{pour tout } r_1 \text{ (de } \mathfrak{N}) \subset r'.$$

(6.8). - On dira que le problème du calcul de Ψ sur $\mathfrak{R}$ a été résolu, contiguement à un e fermé, si l'on sait d'obtenir $\Psi(\rho)$ pour tout ρ (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$ disjoint de e . D'après (5.4, 6°) et la continuité intérieure dans $\mathfrak{N}$ de Ψ , il suit que Ψ est calculable sur $\mathfrak{R}$ contiguement à e , lorsque $\Psi(\rho)$ est connue pour tout ρ (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$, avec $\bar{\rho}e = 0$.

Soit p l'ensemble parfait- s introduit en rapport avec (6.7); soit $\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) la famille des ensembles de G' (5.1a-c) tels que

$$(6.9) \quad \rho_i \subset \mathfrak{R}, \quad \rho_i p \neq 0, \quad \Psi(\rho) = \int_{\rho p} y \odot dm + \int_{\rho} \Psi^p \quad [\rho, \in \mathfrak{N}, \subset \rho_i];$$

on suppose pour le présent que Ψ est connue pour tout r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$, avec $\tilde{r}p = 0$, donc Ψ est connue sur $\mathfrak{R}$ contiguement à p ; alors les intégrales $\int \Psi_p$ dans (6.9) sont calculables:

$$(6.9a) \quad p_1 = \mathfrak{R}p - \sum \rho_i p \quad \text{fermé dans } \mathfrak{R} \text{ est non dense sur } \mathfrak{R}_p.$$

(6.10). - Dans les circonstances indiquées le problème peut être résolu sur $\mathcal{R}$ contiguëment à p_1 .

En effet, $\mathcal{N}' = \{\rho^k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) désignant la famille des ensembles de G' contenus dans $\mathcal{R} - \mathcal{R}p$, les totales $\Psi(\rho^k)$ sont connues selon l'hypothèse actuelle. $\mathcal{R}p - p_1$ et $\mathcal{R} - \mathcal{R}p$ sont couverts respectivement par $\mathcal{N}$ et par $\mathcal{N}'$, d'où $\mathcal{N} + \mathcal{N}'$ couvre $\mathcal{R} - p_1$. D'après le lemme 5.14, si un $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathcal{N}}$) $\subset \mathcal{R} - p_1$, on peut trouver des r_v ($v = 1, 2, \dots$) $\in \mathcal{N} + \mathcal{N}'$ et des $\tilde{\rho}_v$ (de $\tilde{\mathcal{N}}$) disjoints, tel que

$$(6.10') \quad \tilde{r} = \Sigma \tilde{\rho}_v, \quad \tilde{\rho}_v \subset r_v, \quad \tilde{\rho}_v = \sum_1^{k_v} r_{v,i} + e_v, \quad e_v \in (*), \text{ les } r_{v,i} (\in \mathcal{N}) \text{ disjoints};$$

$\Psi(\tilde{r}) = \sum_{v=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{k_v} \Psi(r_{v,i}) \right]$ (convergente inconditionnellement); ici $r_{v,i} \in r_v$ (de $\mathcal{N} + \mathcal{N}'$), donc les $\Psi(r_{v,i})$ sont connues soit selon l'hypothèse, soit d'accord avec (6.9); en plus $\Psi(\tilde{r}) = \Psi(\tilde{r})$, car $e = \tilde{r} - \tilde{r} \in (*)$ et $\Psi(e) = 0$. Si p_1 (6.9a) n'est pas parfait-s dans $\mathcal{R}$, introduisons la famille $\mathcal{N} = \{\rho_i\}$ des ensembles de G' , tels que $\rho_i \in \mathcal{R}$, $\rho_i p_1 \neq 0$ et que $\rho_i p_1$ est dans la frontière d'un ensemble de $\mathcal{N}$; $\mathcal{N}$ couvre l'ensemble e^1 des points isolé-s dans p_1 ; les totales $\Psi(\rho_i) = \Psi(\rho_i - \rho_i p) + \Psi(\rho_i p) = \Psi(\rho_i - \rho_i p)$ sont connues; on a $e^1 = \Sigma \rho_i p_i$; $p_2 = p_1 - e^1$ est fermé dans $\mathcal{R}$. $\mathcal{N}' = \{\rho^k\}$ désignant la famille des ensembles de G' contenus dans $\mathcal{R} - p_1$, il suit que $\mathcal{N} + \mathcal{N}'$ couvre $\mathcal{R} - p_2$. Les totales $\Psi(\rho^k)$ sont connues, car le problème sur $\mathcal{R}$ contigu à p_1 est supposé résolu. Pour un $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathcal{N}}$) $\subset \mathcal{R} - p_2$, à la manière de (6.10') on obtient

$$(6.11) \quad \Psi(\tilde{r}) = \sum_{v=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{k_v} \Psi(r_{v,i}) \right]; \quad \text{les } r_{v,i} \text{ (disjoints)} \in \mathcal{N};$$

tout $r_{v,i}$ est dans un ensemble de $\mathcal{N} + \mathcal{N}'$;

ainsi on a résolu le problème sur $\mathcal{R}$ contigu à p_2 .

(6.12). - Soit β un nombre fini ou transfini des classes, I, II, tandis que la totale Ψ a été calculée sur $\mathcal{R}$ contiguëment à p_α pour tout $\alpha < \beta$.

Si β est de seconde espèce, on pose $p_\beta = \Pi (\alpha < \beta) p_\alpha$. Soit $\mathcal{N} = \{\rho_i\}$ la famille des ensembles de G' , tels que $\rho_i \subset \mathcal{R} - p_\alpha$ pour un $\alpha < \beta$. On montre (comme dans (T^s ; p. 17)) que $\mathcal{N}$ couvre l'ensemble $\mathcal{R} - p_\beta$. Par conséquent, l'affirmation (6.12) entraîne la calculabilité de la totale sur $\mathcal{R}$ contiguëment à p_β à la façon de (6.11), avec $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathcal{N}}$) $\subset \mathcal{R} - p_\beta$, la famille $\mathcal{N}$ qu'on vient d'introduire jouant le rôle de la famille $\mathcal{N} + \mathcal{N}'$, dont il s'agit dans (6.11).

Si β est de première espèce, on pose $p_\beta = p_{\beta-1} - e^{\beta-1}$, $e^{\beta-1}$ étant l'ensemble des points isolé-s dans $p_{\beta-1}$. On connaît $\Psi(\tilde{r})$ pour tout r (de $\tilde{\mathcal{N}}$) $\subset \mathcal{R} - p_{\beta-1}$. Si un $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathcal{N}}$) $\subset \mathcal{R} - p_\beta$, on procède comme à la suite de (6.10) jusqu'à

(6.11), avec $p_{\beta-1}$, $e^{\beta-1}$, p_{β} au lieu de p_1 , e^1 , p_2 ; le problème sur $\mathcal{R}$ contigu à p_{β} est ainsi résolu.

(6.13). - En résumé: p étant parfait-s et Ψ étant supposée connue sur $\mathcal{R}$ contiguement à p , on calcule Ψ successivement dans $\mathcal{R} - p_{\alpha}$ ($\alpha \geq 1$), où $\mathcal{R}p \supset \supset p_1 \supset p_2 \supset \dots p_{\alpha} \supset \dots$ est une suite transfinie d'ensembles fermés dans $\mathcal{R}$ [p_1 étant non dense sur $\mathcal{R}p$]. D'après le théorème de CANTOR-BAIRE, qui dans la théorie actuelle s'applique, il y a un α_0 (des classes I, II) minimal, tel que $p_{\alpha_0} = p_{\sigma}$ pour tout $\gamma > \alpha_0$; l'ensemble $p^* = p_{\alpha_0}$ est parfait-s dans $\mathcal{R} - p^*$ c'est le noyau parfait-s dans $\mathcal{R}$ de p_1 (6.9a). On écrira $p^* = (\mathcal{R}p)^*$, $p^* = (p_1)^*$. L'essentiel est que le problème est résolu sur $\mathcal{R}$ contiguement à p^* ; $\mathcal{R}p - p^*$ est non vide, car p^* est non dense sur $\mathcal{R}p$.

En tenant compte de (6.7a) et en désignant par $\{\rho_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) la sous-famille de G' telle que $\rho_i \subset \mathcal{R}$, $\Psi(\rho) = \int y \odot dm$ [tout ρ (de $\mathfrak{N}$) $\subset \rho_i$], on note que $p_{0,1} = \mathcal{R} - \Sigma \rho_i$ est fermé dans $\mathcal{R}$ et non dense sur $\mathcal{R}$, tandis que pour tout $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathcal{R} - p_{0,1}$, il vient

$$(6.14) \quad \Psi(\tilde{r}) = \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_v} \Psi(r_{v,i}) \quad (\text{convergente inconditionnellement}),$$

où les $r_{v,i}$ ($\in \mathfrak{N}$) sont disjoints, tout $r_{v,i}$ est dans un ρ_j et $\Psi(r_{v,i}) = \int y \odot dm$.

Ainsi, pour commencer le calcul de la totale $\Psi(\mathcal{R})$, on a résolu le problème sur $\mathcal{R}$ contiguement à $p_{0,1}$. D'accord avec (6.13) on fait une suite (possiblement transfinie) de calculs pour obtenir la résolution sur $\mathcal{R}$ du problème contigu à $P_1 = (p_{0,1})^* [= \mathcal{R}^*]$, où P_1 est parfait-s dans $\mathcal{R}$ et est non dense sur $\mathcal{R}$; P_1 est le noyau parfait-s (dans $\mathcal{R}$) de $p_{0,1}$. Désignons par $p_{1,1}$ l'ensemble (6.9a), où $\mathcal{R}p = P_1$; $p_{1,1}$ ($\subset \mathcal{R}$) est fermé dans $\mathcal{R}$, non dense sur P_1 . On obtient une suite transfinie d'ensembles:

$$(6.15) \quad \mathcal{R} > p_{0,1} \geq P_1 > p_{1,1} \geq P_2 > p_{2,1} \geq \dots > p_{\alpha,1} \geq P_{\alpha+1} > p_{\alpha+1,1} \geq \dots$$

Les P_{α} ($\alpha > 0$) sont définis seulement pour les α de première espèce; $P_{\alpha+1}$ est le noyau parfait-s dans $\mathcal{R}$ de $p_{\alpha,1}$; $P_{\beta+1} = P_{\beta}^*$ pour β de la première espèce. Au cas de β de seconde espèce

$$(6.15') \quad p_{\beta,1} = \Pi(\alpha < \beta)p_{\alpha,1} = \Pi(\alpha < \beta)P_{\alpha}, \quad P_{\beta+1} = p_{\beta,1}^* \quad (6.13).$$

Si β est de la première espèce, $p_{\beta,1}$ est défini d'accord avec (6.9a), (6.9), où l'on pose $\mathcal{R}p = P_{\beta}$; dans ce cas encore $P_{\beta+1} = p_{\beta,1}^*$ (6.13); $p_{\alpha+1,1}$ est fermé dans $\mathcal{R}$, non dense sur $P_{\alpha+1}$; La suite transfinie $p_{\alpha,1}$ ($\alpha > 0$) est décroissante au sens strict; d'après le théorème de CANTOR-BAIRE il y a un α' minimal (de première espèce) tel que $p_{\alpha',1} = 0$.

Or, si β est de *première espèce* est Ψ est connue dans $\mathcal{R} - p_{\beta-1,1}$. on observe que le problème du calcul de Ψ se résout contiguëment à P_β (le noyau parfait — s de $p_{\beta-1,1}$) par des opérations traduisant l'additivité complète dans $\mathfrak{N}$ de la totale; il suit que Ψ est calculable dans $\mathcal{R} - p_{\beta,1}$, d'accord avec (6.9)-(6.10'), où l'on pose $p = P_\beta$, $p_1 = p_{\beta,1}$. En outre, si β est de *seconde espèce*, et Ψ est connue dans $\mathcal{R}$ contiguëment à tout $p_{\alpha,1}$ ($\alpha < \beta$), nous introduisons la sous-famille $\mathfrak{N}_0 = \{\rho_i\}$ de G' , de sorte que tout ρ_i est dans $\mathcal{R} - p_{\alpha,1}$ pour un $\alpha < \beta$; en procédant comme dans (T' ; p. 22) on montre que *cette famille couvre* $\mathcal{R} - p_{\beta,1}$; par conséquent le problème dans $\mathcal{R}$ contigu à $p_{\beta,1}$ est résolu d'accord avec (6.11), en y remplaçant $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ par $\mathfrak{N}_0$ et p_2 par $p_{\beta,1}$.

En procédant comme on l'a indiqué à partir de (6.14) on résout successivement le problème de la totalisation dans $\mathcal{R}$ contiguëment à $p_{\alpha,1}$ ($\alpha > 0$); pour $\alpha = \alpha'$ (des classes I, II), *e.g.* dès que $p_{\alpha,1}$ est vide, le calcul de la totale $\Psi = (D) \int y \odot dm$ dans $\mathcal{R}$ est terminé.

7. - La totalisation- S vectorielle symétrique.

Nous procédons en admettant les conditions et en notant les développements qui se trouvent dans le texte en rapport avec (5.1)-(5.5), —sauf pour quelques modifications. Pour la pseudo-distance $\rho(x, y)$ (5.1a) on admet la condition suivante.

(7.1). - Si le point x_2 et le nombre $\sigma > 0$ sont fixes tandis que x_3 possiblement variable est assujetti à la relation $\rho(x_2, x_3) = \sigma$, il suit que $\rho(x_1, x_2) \rightarrow 0$ entraîne $\rho(x_1, x_3) \rightarrow \sigma$.

(7.2). - On désigne respectivement par

$$s(x, r) = [z; \rho(x, z) \leq r], \quad s^0(x, r) = [z; \rho(x, z) < r], \quad c(x, r) = [z; \rho(x, z) = r]$$

la sphère fermée, la sphère ouverte, la surface de sphère — de centre x et de « rayon » $r (\geq 0)$; on admet que v désignant la mesure absolue qui correspond à la mesure vectorielle m :

$$(7.3) \quad v(c(x, r)) = 0; \quad v(s(x, r)) > 0 \quad \text{pour } r > 0; \quad v(s(x, m)) \rightarrow 0 \quad \text{pour } r \rightarrow 0;$$

$$v(s(x, r)) \quad (x \text{ fixe}) \rightarrow 0 \quad \text{entraîne} \quad r \rightarrow 0.$$

DÉFINITION 7.4. - $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, $\tilde{\mathfrak{N}}$ sont toujours les familles d'ensembles d'accord avec l'hypothèse 5.4 et (5.7). Les familles $\mathfrak{N}^s$, $\mathfrak{N}'^s$, $\tilde{\mathfrak{N}}^s$, $\tilde{\mathfrak{N}}_0^s$ sont spécifiées comme il suit. $\mathfrak{N}^s$ consiste de $\mathfrak{N}$ et des sphères ouvertes; $\mathfrak{N}'^s$ est formée d'ensembles $m' = m + e$, où $m \in \mathfrak{N}^s$ et $e \subset \bar{m} - m$; $\tilde{\mathfrak{N}}^s$ est la

famille minimale, contenant $\mathfrak{N}'^s$, de la sorte que

$$r_i \in \mathfrak{N}'^s \ (i = 1, 2) \text{ implique que } r_1 + r_2, r_1 r_2, r_1 - r_1 r_2 \text{ sont dans } \mathfrak{N}'^s$$

$\mathfrak{N}'_0^s$ est formée des ensembles ouverts de $\mathfrak{N}'^s$.

Les frontières des ensembles de $\mathfrak{N}'^s$ étant de mesure- ν zéro, il suit que tout ensemble contenu dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{N}'^s$ est de mesure- ν (donc aussi de mesure- m) zéro.

(7.4'). - On suppose que pour x fixe $\nu(s(x, r))$ est continue par rapport au rayon r de la sphère $s(x, r)$.

DÉFINITION 7.5 - Soit une fonction $\Psi: \mathfrak{N}' \rightarrow \mathfrak{X}$ (VNC), s'annulant sur tout sous-ensemble d'une frontière d'un ensemble de $\mathfrak{N}'^s$. On dira que Ψ est complètement additive dans $\mathfrak{N}'^s$, si

$$q \in \mathfrak{N}'^s, \quad q_n \in \mathfrak{N}'^s \ (n = 1, 2, \dots), \text{ les } q_n \text{ disjoints,} \quad q = \sum_1^\infty q_n$$

impliquent $\Psi(q) = \sum_1^\infty \Psi(q_n)$ au sens de la convergence inconditionnelle.

D'après (7.4') et (5.4, 6°) il suit que pour tout r de $\mathfrak{N}'^s$ et $\varepsilon > 0$ des ensembles $r_\varepsilon, \rho_\varepsilon$ dans $\mathfrak{N}'^s$ correspondent de sorte que

$$(7.6) \quad r_\varepsilon \subset r, \quad \bar{r} \subset \rho_\varepsilon, \quad \nu(r - r_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \nu(\rho_\varepsilon - r) < \varepsilon.$$

(7.7). - Les conditions (5.4, 7°) sont à présent admises avec $\mathfrak{N}$ remplacée par $\mathfrak{N}'^s$.

NOTATION 7.8. - Tout ensemble contenu dans une réunion finie de frontières d'ensembles de $\mathfrak{N}'^s$ sera désigné par $(*)$ [voir (5.7a) pour $(*)$].

(7.9). - Si $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'_0^s$, on dira qu'un r de $\mathfrak{N}'^s$ a une décomposition finie dans $\mathfrak{N}'^s$ avec composants dans $\mathfrak{N}$ au cas où $r = \sum_1^v q_i + e$, q_i (disjoints) $\in \mathfrak{N}$, $e \in (*)$; si, en outre, $r \in \mathfrak{N}'_0^s$ et $\mathfrak{N}$ courbe r , des r_ν (de $\mathfrak{N}$) et des ρ_ν (de $\mathfrak{N}'^s$) ($\nu = 1, 2, \dots$) existent tels que $r = \sum \rho_\nu$, ρ_ν (disjoints) $\subset r_\nu$.

(7.10). - D'importance dans la suite sera le lemme (T; 13.6), qui reste valide dans les conditions actuelles.

(7.11). - Soit Ψ une fonction définie pour les sphères fermées $s \subset \mathfrak{M}$ et ayant ses valeurs dans $\mathfrak{X}$ (VNC); si $p \subset \mathfrak{M}$ est fermé, on posera $\Psi_{(p)}(s) = \Psi(s)$ (si le centre de s est sur p), $\Psi_{(p)}(s) = 0$ (autrement). Si r est dans

$\mathfrak{N}^s$ et $pr^0 \neq 0$, on dira que $S = \{s_i\}$ ($i = 1, \dots, v$) est un *système fini* de sphères, rel. (relativement) à p , dans r , au cas où les s_i sont des sphères fermées disjointes, $s_i \subset r^0$, telles que s_i est disjointe de p dès que le centre de s_i est étranger à p . Nous adoptons le théorème de DENJOY-VITALI pour les sphères [A. DENJOY, *Un demi-siècle de Notes...*, t. II; *Observations*, p. 68, 69] dans la forme $(T^*; (4.13))$, où $F = \mathfrak{N}$, $\varphi = v$ et $M\{S_i\} = \sup_i v(S_i)$. On peut choisir des systèmes finis $S = \{s_i\}$ de sphères (rel. à p , dans r) de sorte que $M\{s_i\} = \sup_i v(s_i) < \varepsilon$, $v(r - \Sigma s_i) < \varepsilon$; on écrira $N(S) = N\{s_i\} = N(r, S) = \sup(M\{s_i\}, v(r - \Sigma s_i))$.

DÉFINITION 7.12. — Soit Ψ et ρ comme dans (7.11); supposons qu'un $r \in \mathfrak{N}^s$, $v(r) > 0$. Nous définissons *l'intégrale de Burkill, sphérique symétrique*, de Ψ sur r , rel. à p , comme la limite (si elle existe)

$$(7.12') \quad \int_r^s \Psi \quad (\text{rel. à } p) = \lim \Sigma \Psi(s_i) [= \lim \Psi(S)].$$

où $S = \{s_i\}$ désigne les systèmes finis, rel. à p , dans r^0 , $N(S)$ (7.11) tendant vers zéro;

$$(7.12') \quad \int_r^s \Psi_{(p)} \text{ (rel. à } p) = \int_r^s \Psi_{(p)} \text{ (rel. à } p) = \lim \Sigma (s_i p \neq 0) \Psi(s_i) = \\ = \mathfrak{N}^s(\Psi, rp) \text{ [si la limite existe].}$$

(7.13). — Soit un p ($\subset \mathfrak{N}$) fermé. x_0 est un point *isolé-s* de p , si un r_0 de $\mathfrak{N}^s$ existe tel que $r_0 \ni x_0$ et $r_0 p \in (*)$ (7.8); p est *parfait-s*, si p fermé n'a pas de points isolés-s.

(7.14). — Soient p fermé, $r \in \mathfrak{N}^s$, $v(r) > 0$. Supposons que Ψ est comme dans (7.11) et que $\Gamma(r) = \int_r^s \Psi$ (rel. à p) existe. Alors:

(I). $\Gamma(\rho)$ existe pour tout ρ (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset r$;

(II). pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un $\eta(\varepsilon) > 0$ de sorte que $\|\Psi(S) - \Gamma(S)\| < \varepsilon$ dès que $S = \{s_i\}$ est un système fini (de sphères fermées), rel. à p dans r^0 , avec $M(S) = \sup v(s_i) < \eta(\varepsilon)$ [$\Psi(S) = \Sigma \Psi(s_i), \dots$];

(III). si en outre p est parfait-s, $\Gamma(\rho) = \int_\rho^s \Psi$ (rel. à p) sera complètement additive dans $\mathfrak{N}^s$ pour ρ dans r .

La partie (I) se démontre à la façon de la preuve de la proposition $(T^*; (9.1))$ en s'appuyant d'une manière essentielle sur le fait que l'espace $\mathfrak{X}$

(VNC) est complet. La partie (II) est établie moyennant des procédés du genre survenant dans la preuve de (T; (13.8')). Enfin la démonstration de (III) est réalisée à la manière de celle de la proposition (T*; (9.2)).

(7.15). – On dira qu'une fonction Ψ , définie dans $\mathfrak{N}^s$ sur un r de $\mathfrak{N}^s$, est s.a. (additive au sens spérique) *relativement à un p fermé, pour r , si* $\Psi(r) = \int_r^s \Psi$ (real. à p); si Ψ s'annule pour les ensembles (*), Ψ est s.a., relativement à tout p fermé, pour tout r avec $v(r) = 0$; Ψ est dite s.a. (rel. à p) *sur un r de $\mathfrak{N}^s$, si Ψ est s.a. (rel. à p) pour tout ρ (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset r$.*

Nous introduisons la *totalisation-S vectorielle symétrique* ainsi.

DÉFINITION 7.16. – Supposons qu'une fonction $y(u)[:] \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ est définie une plénitude- v d'un ensemble $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{N}^s$. On dira que y est *totalisable-S sur $\mathfrak{R}$* , s'il y a une fonction $\Psi [: \mathfrak{N}^s \rightarrow \mathfrak{A}]$, nulle sur les ensembles (*), complètement additive dans $\mathfrak{N}^s$ (7.5) sur $\mathfrak{R}$, jouissant de la propriété suivante: « *p parfait-s dans $\mathfrak{R}^0$ (si $v(\mathfrak{R}^0) > 0$) et r (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset \mathfrak{R}$, $rp \neq 0$ » entraîne l'existence d'un r' de $\mathfrak{N}^s$, $r' \subset r$, $r'p \neq 0$, tel que*

(I) Ψ est s.a. (rel. à p) sur r' [$\Psi = \int^s \Psi$ (rel. à p) dans r'],

(II) $\int_{\rho}^s \Psi_{(\rho)}$ (rel. à p) $= \int_{\rho p}^s y \odot dm$, lorsque ρ (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset r'$.

NOTATION 7.16'. – Pour la totale-S de y sur $\mathfrak{R}$ on écrira $\Psi(\mathfrak{R}) = (S) \int_{\mathfrak{R}} y \odot dm$

THÉORÈME 7.17. – La totale-S (7.16) est unique.

Il suffit de considérer le cas où $\mathfrak{R} \in \mathfrak{N}_0^s$ donc $v(\mathfrak{R}) > 0$. Si la totale-S d'une y sur $\mathfrak{R}$ n'est pas unique, il y aura des fonctions Ψ_i ($i = 1, 2$) distinctes sur $\mathfrak{R}$, chacune satisfaisant aux conditions de la définition 7.16 (relativement à la même y); $\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$ s'annule pour les ensembles (*) et elle est complètement additive dans $\mathfrak{N}^s$ sur $\mathfrak{R}$. Désignons par $\mathfrak{N}$ la famille des ensembles ρ de $\mathfrak{N}^s$, tels que $\rho \subset \mathfrak{R}$, $\Psi(\rho_1) = 0$ pour tout ρ_1 (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset \rho$. Nous allons utiliser la remarque (7.11).

En procédant comme au cas analogue, dans (T; p. 92-93), on démontre que la famille $\mathfrak{N}$ remplit aux conditions (13.6, 3₀), (13.6, 1₀), (13.6, 2₀) du lemme (T; 13.6) [on y pose $H = \mathfrak{R}$ et remplace (*) par (*₁)].

Entreprendons la vérification de (T; 13.6, 4₀). Soit une famille $\mathfrak{N}_1, \subset \mathfrak{N}$, qui ne couvre pas $\mathfrak{R}$. Alors l'ensemble non vide $p = \mathfrak{R} - \sum (\mathfrak{N}_1)\rho$ est fermé dans $\mathfrak{R}$. Si p possède un point isolé-s (7.13), en procédant comme dans (T; p. 93) et en utilisant (T; 13.6, 3₀) et (T; 13.6, 1₀) on établit qu'il existe un r_0 de $\mathfrak{N}$ non couvert par $\mathfrak{N}_1$. Le cas alternatif est celui où p ($\neq 0$) est parfait-s (7.13) dans $\mathfrak{R}$. Soit un r (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset \mathfrak{R}$, $rp \neq 0$. Or $\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$; on fait usage des propriétés (7.16, I, II) d'abord pour Ψ_1 , ensuite pour Ψ_2 ,

et on déduit l'existence d'un ensemble ρ' de $\mathfrak{N}^s$, $\rho' \subset r$, $\rho'p \neq 0$, de sorte que

$$(1^0) \quad \Psi = \int_{\rho}^s \Psi \text{ (rel. à } p) \text{ dans } \rho', \quad \int_{\rho}^s \Psi_{(\rho)} \text{ (rel. à } p) = 0 \text{ pour tout } \rho \text{ (de } \mathfrak{N}_0^s) \subset \rho'.$$

Soit $S = \{s_i\}$ un système fini de sphères disjointes, relativement à p , dans ρ [ainsi $s_i p \neq 0$ entraîne que le centre x_j de s_j est sur p ; $s_j p = 0$, lorsque x_j est étranger à p], de sorte que

$$v(s_j) < \varepsilon \quad \text{et} \quad v(\rho_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \text{où} \quad \rho_\varepsilon = \rho - \Sigma s_j.$$

Il vient $\Psi(\rho) = \Psi(S) + \Psi(\rho_\varepsilon)$. Désignons par s_k les sphères disjointes de ρ ; d'où $x_j \in p$ pour $j \neq k$. Tout s_k est couvert par $\mathfrak{N}_1$ ($\subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_0^s$). D'après (7.9) il y a des h_ν de $\mathfrak{N}^s$ ($\nu = 1, 2, \dots$) disjointes, $h_\nu \subset$ un r_ν de $\mathfrak{N}_1$, tels que $s_k^0 = \Sigma h_\nu$; $h^\nu = h_1 + \dots + h_\nu$ [$\in \mathfrak{N}_0^s$] possède une décomposition dans $\mathfrak{N}^s$, dont les composants h_i^0 ($i = 1, \dots, \nu$) sont dans $\mathfrak{N}$ [d'après (T; 13.6, 3₀)]; d'où (T; 13.6, 1₀, 2₀): $s_k^0 \in \mathfrak{N}$. Par conséquent (1⁰): pour tout ρ (de $\mathfrak{N}_0^s$) $\subset \rho'$, on a

$$(2^0) \quad \Psi(\rho) = \Sigma (j \neq k) \Psi(s_j) + \Psi(\rho_\varepsilon) = \Sigma' (s_j p \neq 0) \Psi(s_j) + \Psi(\rho_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon} \Psi(\rho_\varepsilon),$$

en tant que $\lim_{\varepsilon} \Sigma' \dots = \int_{\rho}^s \Psi_{(\rho)} \text{ (rel. à } p) = 0$. Il vient que

$$\lim \Psi(\rho_\varepsilon) = \Psi(\rho) - \int_{\rho}^s \Psi \text{ (rel. à } p);$$

d'après (1⁰) cette limite vaut 0, pour tout ρ (de $\mathfrak{N}_0^s$) $\subset \rho'$; d'où (2⁰): $\rho' \in \mathfrak{N}$; ρ' , joint à p , est non couvert par $\mathfrak{N}_1$. Ainsi, dans tous les cas il y a un ensemble de $\mathfrak{N}$ non couvert par $\mathfrak{N}_1$ [si $\mathfrak{N}_1$ ($\subset \mathfrak{N}$) ne couvre pas $\mathbb{R}$]. La propriété (T; 13.6, 4₀) est vérifiée. D'après le lemme (T; 13.6) $\mathbb{R} \in \mathfrak{N}$, $\Psi_1 = \Psi_2$ dans $\mathfrak{N}^s$ sur $\mathbb{R}$ et l'unicité de la totale-S est démontrée.

Il suit de la définition de la totale-S que la totalisabilité-S d'une y sur un $\mathbb{R}$ de $\mathfrak{N}^s$ entraîne la même propriété sur tout r ($\in \mathfrak{N}^s$) $\subset \mathbb{R}$.

(7.18). Soit un $\mathbb{R}$ de $\mathfrak{N}^s$, tel que $\mathbb{R} = \sum_{i=1}^k q_i + (*)$, les q_i (de $\mathfrak{N}_0^s$) étant disjointes. Si y est totalisable-S sur chacun des q_i , y le sera sur $\mathbb{R}$, tandis que $(S) \int_r y \odot dm = \Sigma (S) \int_{r q_i} y \odot dm$ pour tout r (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset \mathbb{R}$.

Cela se démontre comme dans (T; p. 95, 96), sans l'intervention des difficultés additionnelles. Notons que la classe des fonctions totalisables-S (sur un même ensemble) est linéaire.

(7.19). - Si y est totalisable- S sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{M}^s$, tandis que $y = 0$ sur une plénitude- v de $\mathcal{R}$, il s'ensuit que $(S) \int y \odot dm = 0$ sur $\mathcal{R}$.

On peut supposer que $\mathcal{R} \in \mathfrak{M}_0^s$. Soit Ψ la totale de y ; désignons par $\mathfrak{N}$ ($\subset \mathfrak{M}_0^s$) la famille des ensembles ρ , $\subset \mathcal{R}$, tels que $\Psi(\rho) = 0$ pour tout ρ_1 (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset \rho$. On vérifie que $\mathfrak{N}$ satisfait aux conditions (T; 13.6, 3₀, 1₀, 2₀). Soit $\mathfrak{N}_1$ une sous-famille de $\mathfrak{N}$ qui ne couvre pas $\mathcal{R}$. On observe que $p = \mathcal{R} - \Sigma(\mathfrak{N}_1)\rho$ est fermé dans $\mathcal{R}$.

Envisageons le cas où p possède un point isolé- s ; e.g. il existe un r_0 (de $\mathfrak{N}$) contenu dans $\mathcal{R}$ et contenant ce point, tel que $r_0 p \in (*)$; $r' = r_0 - r_0 p$ est dans $\mathfrak{M}_0^s$ et est couvert par $\mathfrak{N}_1$. D'après (7.9) (avec r' et $\mathfrak{N}_1$ au lieu de r et de $\mathfrak{N}$) il vient $r' = \sum_1^\infty \rho_\nu$, ρ_ν (de $\mathfrak{M}^s$) étant disjoints, $\rho_\nu \subset$ un r_ν (de $\mathfrak{N}_1$, $\subset \mathfrak{N}$); $\rho^\nu = \rho_1 + \dots + \rho_\nu$ (dans $\mathfrak{M}^s$) $= \sum_1^\nu \rho_i^0 + e_\nu$, $e_\nu \in (*)$. Vu (T; 13.6, 3^o) $\rho_i^0 \in \mathfrak{N}$; $\rho^\nu \uparrow r'$, d'où $r' \in \mathfrak{N}$; or $r_0 = r' + (*)$, avec r' dans $\mathfrak{N}$, donc $r_0 \in \mathfrak{N}$; mais r_0 est non couvert par $\mathfrak{N}_1$. Reste le cas où p est parfait- s dans $\mathcal{R}$. Soit un r (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset \mathcal{R}$, $r p \neq 0$. D'après (7.16; (I), (II)) il y a un r' (de $\mathfrak{M}^s$), $r' \subset r$, $r' p \neq 0$, de sorte que pour tout ρ (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset r'$:

$$(1') \quad \Psi(\rho) = \int_\rho^s \Psi(\text{rel. à } p), \quad (2') \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Sigma(s_j p \neq 0) \Psi(s_j) = \int_{\rho p}^s y \odot dm = 0,$$

où $S = \{s_i\}$ est un système fini de sphères fermées (de centre x_i) disjointes, dans l'intérieur de ρ , telles que $v(s_i) < \varepsilon$, $v(\rho - \Sigma s_i) < \varepsilon$, tandis que $x_i \in p$; $\rho_\varepsilon = \rho^0 - \Sigma s_i \in \mathfrak{M}_0^s$ et $v(\rho_\varepsilon) < \varepsilon$. Désignons par s_k les sphères, parmi les s_i contenues dans $\rho^0 - \rho^0 p$. Toute s_k est couverte par $\mathfrak{N}_1$; donc $s_k^0 = \sum_1^\infty h_\nu$, h_ν disjoints, $h_\nu \in \mathfrak{M}^s$, $h_\nu \subset$ un r_ν (de $\mathfrak{N}_1$);

$$h^\nu = h_1 + \dots + h_\nu (\text{de } \mathfrak{M}_0^s) = h_1^0 + \dots + h_\nu^0 + (*); \text{ ici } h_i^0 \in \mathfrak{N} \text{ [cf. (T; 13.6, 3}_0\text{)],}$$

de plus $h^\nu \in \mathfrak{N}$ et enfin (T; 13.6, 2₀): $s_k^0 \in \mathfrak{N}$. Il vient que $\Psi(s_k) = 0$, donc à cause de (2'):

$$\Psi(\rho) = \Sigma_{i \neq k} (\text{centre de } s_i \text{ sur } p) \quad \Psi(s_i) + \Psi(\rho_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon} \Psi(\rho_\varepsilon) \quad \text{pour } \rho \text{ (de } \mathfrak{M}_0^s) \subset r';$$

pourtant $\Psi(\rho_\varepsilon) = \Psi(\rho) - \Sigma \Psi(s_i) \rightarrow \Psi(\rho) - \int_\rho^s \Psi(\text{rel. à } p) = 0$ (d'après (1')). Ainsi $\Psi = 0$ dans $\mathfrak{M}_0^s$ [aussi dans $\mathfrak{M}^s$] sur r' ; par conséquent $r' \in \mathfrak{N}$; en outre r' est non couvert par $\mathfrak{N}_1$ (car $r' p \neq 0$). Ainsi la propriété (T; 13.6, 4₀) est satisfaite dans les deux cas. Le lemme (T; 13.6) s'applique et on a $\mathcal{R} \in \mathfrak{N}$, ce qui vérifie l'énoncé (7.19).

THÉOREME 7.20. - Si l'intégrale $\int_{\mathcal{R}} y \odot dm$ existe pour un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{N}^s$, la totale- S de y sur $\mathcal{R}$ existe et on a $\int_{\mathcal{R}} y \odot dm = (S) \int_{\mathcal{R}} y \odot dm$,

Il suffira de supposer que $\mathcal{R} \in \mathfrak{N}_0^s$; désignons $\int y \odot dm$ par Ψ dans $\mathfrak{N}^s$ sur $\mathcal{R}$. D'après la remarque qui précède (7.4') et la Notation 7.8 il suit que $v(e) = 0$ pour tout $e \in (*)$. Ψ est complètement additive dans $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{R}$; de plus Ψ est absolument continue- v sur $\mathcal{R}$; on a $\Psi(e) = 0$ pour tout $e (\subset \mathcal{R}) \in (*)$. En particulier Ψ est complètement additive dans $\mathfrak{N}^s$ sur $\mathcal{R}$ (7.5). p désignant un ensemble parfait- s quelconque ($p\mathcal{R} \neq 0$), soit un r' (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset \mathcal{R}$, $r'p \neq 0$. Le théorème sera démontré, si l'on établit (7.16, I), (7.16, II). Soit $S = \{s_i\}$ un système fini de sphères fermées disjointes [x_i étant le centre de s_i], relativement à p , situées dans ρ^0 , où ρ dénote un ensemble de (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset r'$; on peut supposer que $\rho^0 \neq 0$. Posons $\rho_\varepsilon = \rho - \sum s_i$ et envisageons S , tel que $v(s_i) < \varepsilon$, $v(\rho_\varepsilon) < \varepsilon$. Or $\Psi(S) = \int_k y \odot dm$, $k = \sum s_i$; puisque $v(\rho_\varepsilon) \rightarrow 0$, il vient $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_k y \odot dm = \Psi(\rho)$; ainsi, selon la définition 7.12, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi(S) = \int_{\rho}^s \Psi$ (rel. à p) $= \Psi(\rho)$ pour tout ρ (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset r'$, ce qui vérifie la propriété (7.16, I). S étant un système, rel. à p , comme indiqué en haut, il suit que

$$\int_{\rho}^s \Psi_{(p)} = \lim_{\varepsilon} \Psi_{(p)}(S), \text{ où } \Psi_{(p)}(S) = \sum' \Psi(s_k)(x_k \in p) = \int_{\alpha} y \odot dm; \alpha = \sum' s_k = \sum(s_i p \neq 0)s_i;$$

on peut supposer que $\rho^0 p \neq 0$ [ρ (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset r'$]. Posons $\alpha_0 = \rho p - \rho p$; il vient $\alpha_0 \subset \rho - \sum s_i$, $\alpha + \alpha_0 \supset \rho p$; de plus (1°) $\lim_{\varepsilon} v(\alpha_0) = 0$. D'après (7.7) il y a un O_n ouvert et un $\delta_n = \delta\left(\frac{1}{n}, \bar{\rho}p, O_n\right)$, de sorte que $O_n \supset \bar{\rho}p$, $v(O_n - \bar{\rho}p) < \frac{1}{n}$ et que les relations « s = une sphère fermée, jointe à $\bar{\rho}p$, $v(s) > \delta_n$ » impliquent $s \subset O_n$. Ainsi, pour $v(s_i) < \delta_n$, les s_k qui interviennent dans $\sum'$ (donc $x_k \in p$) sont contenues dans O_n ; alors $\alpha \subset O_n$; $\alpha_0 \subset \rho p \subset O_n$; il suit que $v(\alpha + \alpha_0 - \rho p) < \frac{1}{n}$ si $\varepsilon \leq \delta$; donc (2°) $\lim_{\varepsilon} v(\alpha + \alpha_0 - \rho p) = 0$. Ensuite on obtient

$$\left\| \Psi_{(p)}(S) - \int_{\rho p} y \odot dm \right\| = \left\| \int_{\alpha} y \odot dm - \int_{\rho p} y \odot dm \right\| \leq \left\| \int_{\alpha + \alpha_0 - \rho p} \dots \right\| + \left\| \int_{\alpha_0} \dots \right\|;$$

en raison de (1°), (2°) et de la continuité- v absolue de $\int y \odot dm$ il suit que

$$\lim_{\varepsilon} \left[\Psi_{(p)}(S) - \int_{\rho p} y \odot dm \right] = \int_{\rho}^s \Psi_{(p)} \text{ (rel. à } p) - \int_{\rho p} y \odot dm = 0,$$

dès que ρ (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset r'$. Par conséquent la propriété (7.16, II) est remplie, ce qui établit le théorème.

(7.21). — On dira qu'une fonction $\Psi[: \mathfrak{N}^s \rightarrow \mathfrak{X}]$ est *A.S.G. (additive au sens sphérique généralisé)* sur un $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{N}^s$, si pour tout p parfait- s joint à $\mathfrak{R}^0$ (en supposant $\mathfrak{R}^0 \neq 0$) et tout r (de $\mathfrak{N}^s$), $\subset \mathfrak{R}$ et joint à p , il y a un r_1 (de $\mathfrak{N}^s$), $\subset r$ et joint à p , tel que $\Psi = \int^s \Psi$ (rel. à p) sur r_1 [e.g. c'est la propriété en rapport avec (I) dans la définition 7.16].

THÉOREME 7.22. — Soient e fermé, $\mathfrak{R} \in \mathfrak{N}^s$, $\mathfrak{R}^0 \neq 0$, $y[: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}]$ définie sur $\mathfrak{R}$ telle que l'intégrale $\int y \odot dm$ existe. Supposons que $\Psi(r) = (S) \int y \odot dm$ existe pour tout $r(\in \mathfrak{N}^s_0) \subset \mathfrak{R}^0$, avec $re = 0$, et que l'intégrale de BURKILL

$$\Gamma(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}e) = \int_{\mathfrak{R}}^s \Psi^{(e)} \text{ (rel. à } e), \text{ avec } \Psi^{(e)} = \Psi - \Psi_{(e)} \quad (7.11),$$

existe, tandis que la fonction $\alpha(p) = \Gamma(p - pe)$ est (10) *complètement additive dans $\mathfrak{N}^s$ sur $\mathfrak{R}$* , ainsi que (2₀) *A.S.G. (7.21) sur $\mathfrak{R}$* . Alors y est totalisable- S sur $\mathfrak{R}$ et la valeur de cette totale sur $\mathfrak{R}$ vaut $\int_{\mathfrak{R}e} y \odot dm + \Gamma(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}e)$.

On observe que $\alpha = 0$ pour les ensembles (*). Il suffira de procéder avec $y = 0$ sur e . La preuve est réalisée dès que on montre que « p est parfait- s dans $\mathfrak{R}^0$ et un r ($\in \mathfrak{N}^s$), $\subset \mathfrak{R}$, est joint à p » entraîne l'existence d'un r' ($\in \mathfrak{N}^s$), $\subset r$, joint à p , de sorte que

$$(I) \quad \alpha = \int^s \alpha \text{ (rel. à } p) \text{ sur } r';$$

$$(II) \quad \int_p^s \alpha_{(p)} \text{ (rel. à } p) = \int_{r'p} y \odot dm \text{ dans } \mathfrak{N}^s \text{ sur } r'.$$

D'après (2₀) il y a un $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{N}^s$), $\subset r$, joint à p , tel que

(I') $\alpha = \int^s \alpha$ (rel. à p) sur $\tilde{r}$. Si l'on a (A) $p\tilde{r} \not\sqsubset e$, en procédant comme dans (I; p. 126) nous déduisons qu'il existe un r' (de $\mathfrak{N}^s$), $\subset \tilde{r}$, $r'p \neq 0$, tel que pour tout r_1 ($\in \mathfrak{N}^s$) $\subset r'$:

$$(1_1) \quad \int_{r_1}^s \Psi_{(p)} \text{ (rel. à } p) = \int_{r_1p} y \odot m, \quad (2_1) \quad \int_{r_1}^s \Psi \text{ (rel. à } p) = \Psi(r_1);$$

ici Ψ dénote la totale- S de y (où elle existe); enfin on vérifie que dans le cas (A) les relations (I), (II) sont valides. Considérons le cas (B): $p\tilde{r} \subset e$; soit un r' (de $\mathfrak{N}^s$), $r' \subset \tilde{r}$, $r'p \neq 0$; soit $S = \{q(i)\}$ un système fini relativement à p , dans un r_1 (de $\mathfrak{N}^s$), $r_1^0 \neq 0$, $r_1 \subset r'$, avec $N(r_1, S) [(7.11); s_i = q(i)] < \varepsilon$; nous suivons la démonstration dans (I; p. 127) et en tenant compte de la

proposition (7.14, II); il vient

$$\int_{r_1}^s \alpha_{(p)}(\text{real. à } p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_{(p)}(S) = \lim [\Sigma (i \neq i_k) \alpha_{(p)}(q(i)) + \Sigma \alpha_{(p)}(q(i_k))] = 0$$

[on désigne par $q(i_k)$ les $q(i)$ dont les centres sont sur p]; ici $r_1 p \subset \tilde{r}p \subset e$; or $y = 0$ sur e , d'où (II) est vérifié, ainsi pur (I). *Le théorème est établi.*

(7.23). - *Le théorème 7.22 suggère des procédés effectifs du calcul de la totale-S à partir de la fonction $y: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, supposé totalisable-S sur un $\mathcal{R}$ (de $\mathfrak{N}^s$). En effet, on réalise ce calcul à la manière de la section 8 dans le mémoire (T^*) de l'auteur [où ce problème est résolu pour la totale-S dont les valeurs sont réelles]. Une suite transfinie d'opérations survient, qui s'arrête pour un indice des classes, I, II. Il faut utiliser des modifications, d'ailleurs assez évidentes, des développements qui se trouvent dans (T^* ; section 8). On omettra les détails.*

(7.24). - *Soit une fonction $y: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ totalisable-S sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{N}^s$, $\mathcal{R}^0 \neq 0$. On dira que y est sur $\mathcal{R}$ dans la classe K_0 , si l'intégrale $\int_{\mathcal{R}} y \odot dm$ existe. On dira que y est sur $\mathcal{R}$ d'une classe K_α , pour un α des classes I, II, si une au moins des conditions (T ; 15.15, (1^0) , (2^0) , (3^0) , (4^0)) est remplie [avec $(*)$ au lieu de $(*)$].*

En utilisant (7.10) [e.g. le lemme (T ; 13.6)] et la proposition (7.9) en suivant les procédés dans (T ; p. 128-130) on vérifie le résultat suivant.

THÉORÈME 7.25. - *Toute y totalisable-S sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{N}^s$, $\mathcal{R}^0 \neq 0$, appartient à K_α pour un α des classes I, II.*

8. - Une forme simplifiée de la totale-S vectorielle.

On dira que Ψ est une totale-S simplifiée, sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{N}_0^s$, si Ψ est une totale-S d'accord avec la définition 7.16, tandis que les conditions de l'hypothèse suivante sont remplies.

HYPOTHÈSE 8.1.

(I) Si γ est la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{N}^s$, joint à $\mathcal{R}$, et $S = \{\sigma_i\}$ est un système fini de sphères fermées (disjointes) dans $\mathcal{R}$, jointes à γ , alors $M(S)$ (7.11) $\rightarrow 0$ implique $\Psi(S) = \Sigma_i \Psi(\sigma_i) \rightarrow 0$. On admet que la mesure absolue ν jouit de cette propriété.

(II). Soient ρ^n (de $\mathfrak{N}_0^s$) $\subset \mathcal{R}$ ($n = 1, 2, \dots$), $\rho^n \downarrow 0$ (l'ensemble vide). On suppose que pour tout $\xi > 0$ des $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\xi) > 0$ et un entier $n_1 = n(\xi) > 0$ existent,

de sorte que

$$(8.1a) \quad \sup(\widehat{S}^n \in \widehat{\mathfrak{U}}^n) \|\Psi(\widehat{S}^n)\| < \xi \quad \text{pour tout } n \geq n(\xi);$$

ici $\widehat{\mathfrak{U}}^n$ est la famille des *systèmes finis* $\widehat{S}^n = \{\sigma_i^n\}$ de sphères fermées disjointes, situées dans ρ^n , telles que (7.11):

$$(8.1b) \quad N(\rho^n, \widehat{S}^n) = \sup(\nu(\sigma_j^n), \nu(\rho^n - \Sigma_i \sigma_i^n)) < \varepsilon_n(\xi).$$

REMARQUE (8.2). - On pourrait envisager ces conditions au cas où Ψ est seulement définie pour les sphères fermées dans $\mathfrak{R}$. Désignons par $\widehat{\mathfrak{U}}^n$ la famille des *systèmes finis* $\widehat{S}^n = \{\sigma_i^n\}$ dans $\mathfrak{U}^n$, sous la restriction que tout $\widehat{S}^n$ soit relativement à un p parfait-s (7.11) dans ρ^n . Ainsi $\widehat{\mathfrak{U}}^n \subset \mathfrak{U}^n$ et on a

$$(8.2a) \quad \sup(\tilde{S}^n \in \tilde{\mathfrak{U}}^n) \|\Psi(\tilde{S}^n)\| < \xi \quad \text{pour tout } n \geq n(\xi).$$

(8.3). - La mesure absolue ν satisfait à (8.1, (II)) (même si seulement $\rho^n \downarrow \rho_0$, avec $\nu(\rho_0) = 0$).

On a déjà remarqué la famille $\mathfrak{F}$ complètement additive contient les ensembles boréliens. Donc la fonction ν , qui est complètement additive dans $\mathfrak{F}$, est définie pour les σ_j^n ($i = 1, \dots, k_n$) intervenant dans le système $\widehat{S}^n$, tandis que $\nu(\widehat{S}^n) = \Sigma_i \nu(\sigma_i^n) = \nu(\Sigma_i \sigma_i^n)$; en posant $\eta_n = \rho^n - \Sigma_i \sigma_i^n$, il vient

$$\nu(\widehat{S}^n) = \nu(\rho^n) - \nu(\eta_n) \leq \nu(\rho^n),$$

Or $\lim \nu(\rho^n) = \nu(\lim \rho^n) = 0$, d'où pour tout $\xi > 0$ il correspond un entier $n_1 = n(\xi) > 0$ tel que $\nu(\widehat{S}^n) < \xi/2$ pour tout $n \geq n(\xi)$; ainsi

$$\sup(\widehat{S}^n \in \widehat{\mathfrak{U}}^n) \nu(\widehat{S}^n) < \xi, \quad \text{lorsque } n \geq n(\xi),$$

$\widehat{\mathfrak{U}}^n$ désignant la famille des systèmes finis $\widehat{S}^n = \{\sigma_i^n\}$, dans ρ^n , sans intervention d'une condition comme (8.1b). Il est à noter que, d'après le théorème de DENJOY-VITALI pour les sphères fermées, pour n fixe on peut rendre le nombre $N(\rho^n, \widehat{S}^n)$ (8.1b) arbitrairement petit, au moyen du choix convenable de $\widehat{S}^n$. Dans tout cas $N(\rho^n, \widehat{S}^n) \leq \nu(\rho^n) < \xi$ pour tout $n \geq n(\xi)$. L'énoncé (8.3) est vérifié.

La simplification de la totale- S , l'hypothèse 8.1 étant admise, provient de la proposition suivante.

THÉORÈME 8.4. - Soit $\Psi[: \mathfrak{U}^s \rightarrow \mathfrak{X}]$ complètement additive dans $\mathfrak{U}^s$ sur un $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{U}_0^s$, $\Psi(e) = 0$ pour tout $e \in (*)$ (7.8), A S.G. (7.21) sur $\mathfrak{R}$. On suppose que Ψ jouit sur $\mathfrak{R}$ des propriétés (8.1, (I), (II)), tandis que ν satisfait à (8.1,

(I)). Alors pour un ensemble $p = p(\mathcal{R})$ parfait-s dans $\mathcal{R}$ on a

$$(8.4a) \quad \Psi(\rho) = \int_{\rho}^s \Psi \text{ (rel à } p), \text{ lorsque } \rho \text{ (de } \mathfrak{N}_0^s) \subset \mathcal{R}.$$

La démonstration suit les lignes de la preuve d'un énoncé analogue dans (T^*) , à savoir $(T^*; \text{théorème 4.42})$. Pourtant, à présent la condition (8.1, II), qui remplace la propriété $(T^*; (4.41, \text{II}))$, est essentiellement différente; pour cette raison nous présentons ce qu'il faut des détails.

Soit $\mathfrak{N}$ la famille des ρ (de $\mathfrak{N}_0^s$), contenus dans $\mathcal{R}$, tels que

$$(1a) \quad \Psi(q) = \int_q^s \Psi \text{ (rel. à } p(\rho)) \text{ pour tout } q \text{ (de } \mathfrak{N}_0^s) \subset \rho,$$

$p(\rho)$ désignant un ensemble parfait-s dans ρ . Le théorème est établi dès qu'on montre que $\mathcal{R} \in \mathfrak{N}$.

Si un $r' \in \mathfrak{N}$ et un r (de $\mathfrak{N}_0^s$) $\subset r'$, on note qu'il y a un $p' = p(r')$ (parfait-s dans r'), tel que

$$\Psi(q) = \int_q^s \Psi \text{ (rel. à } p') \text{ pour tout } q \text{ (de } \mathfrak{N}_0^s) \subset r';$$

ainsi $r \in \mathfrak{N}$, avec $p(r) = p'$. $\mathfrak{N}$ possède la propriété $(T; (13.6, 3_0))$.

$$(2a) \quad r_1 + r_2 \text{ est dans } \mathfrak{N}, \text{ dès que } r_1 \in \mathfrak{N}, r_2 \in \mathfrak{N}.$$

Cette propriété de la famille $\mathfrak{N}$ est vérifiée en suivant la démonstration de l'énoncé (2^0) dans $(T^*; \text{section 4})$, avec v pour φ .

Soit un r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathcal{R}$, $r = \sum_1^v q_i + e$, les q_i (de $\mathfrak{N}$) et e (de $(*)$) étant disjoints; en tenant compte de la propriété $(T; (13.6, 3_0))$, déjà établie pour $\mathfrak{N}$, et de la condition (8.1, I) admise pour v , nous suivons les procédés indiqués à la suite de $(T^*; (3^0))$, avec v pour φ ; on conclut que $r \in \mathfrak{N}$, e.g. $\mathfrak{N}$ satisfait à $(T; (13.6, 1_0))$.

La preuve de $(T; (13.6, 2_0))$. - Soient r (de $\mathfrak{N}_0^s$) $\subset \mathcal{R}$, des r^n (de $\mathfrak{N}$) $\uparrow r$ (pour $n \rightarrow \infty$). D'après la définition de $\mathfrak{N}$, pour tout $n > 0$, il existe un $p(r^n)$ parfait-s dans r^n ; $p(r^n) \uparrow$. On trouve un p parfait-s dans r , tel qu'on peut arranger que $p(r^n) = p$ ($n = 1, 2, \dots$). Soit un λ (de $\mathfrak{N}_0^s$) $\subset r$: $\lambda^n = \lambda r^n$, $\rho^n = (\lambda - \lambda^n)^0$; on a $\lambda^n \in \mathfrak{N}$ [voir $(T; (13.6, 3_0))$], avec $p(\rho^n) = p$. Il vient

$$(3a) \quad \lambda = \lambda^n + \rho^n + e^n \quad [\lambda^n, \rho^n, e^n \text{ étant disjoints}], \quad e^n \in (*);$$

$$\Psi(\lambda) = \Psi(\lambda^n) + \Psi(\rho^n), \quad \Psi(\lambda^n) = \int_{\lambda^n}^s \Psi \text{ (rel. à } p), \quad \lim_n \Psi(\lambda^n) = \Psi(\lambda)$$

[car Ψ est complètement additive dans $\mathfrak{N}^s$ et $\lambda^n \uparrow \lambda$]. Soient $S = \{s_k\}$ un système fini (rel. à p) dans λ , S^n le système fini formé des s_k dans λ^n , $\tilde{S}^n$ le système fini formé des s_k dans ρ^n , $\tilde{S}^n$ le système fini formé des s_k jointes à e^n ; les systèmes S^n , $\tilde{S}^n$ sont relativement à p , un dans λ^n , l'autre dans ρ^n . Lorsque $N(\lambda, S) \rightarrow 0$, pour tout $n > 0$ fixe on obtient

$$(4_0) \quad \nu(\tilde{S}^n) \rightarrow 0, \quad \Psi(\tilde{S}^n) \rightarrow 0, \quad N(\lambda^n, S^n) \rightarrow 0, \quad N(\rho^n, \tilde{S}^n) \rightarrow 0,$$

$$(5_0) \quad \lim_{\lambda^n} \Psi(S^n) = \int_{\lambda^n}^s \Psi \text{ (rel. à } p) = \Psi(\lambda^n).$$

On note que $\Psi(S) = \Psi(S^n) + \Psi(\tilde{S}^n) + \Psi(\tilde{S}^n)$. Or (3₀):

$$(6_0) \quad \begin{aligned} \Psi(S) - \Psi(\lambda) &= [\Psi(S^n) - \Psi(\lambda^n)] + \Psi(\tilde{S}^n) + \delta_n, \\ \delta_n &= \Psi(\tilde{S}^n) + [\Psi(\lambda^n) - \Psi(\lambda)]. \end{aligned}$$

Étant donné un $\xi > 0$, il existe un entier $n'(\xi)$ tel que

$$(7_0) \quad \|\Psi(\lambda^n) - \Psi(\lambda)\| < \xi \text{ pour tout } n \geq n'(\xi),$$

ce qui est une conséquence de (3₀). Les $\rho^n \in \mathfrak{N}^s_0$, $\rho^n \subset \mathfrak{R}$ et $\rho^n \downarrow 0$; (8.1, (II)) et la Remarque (8.2) s'appliquent; donc, dès que $\tilde{S}^n \in \mathfrak{N}^s$, il vient

$$(8_0) \quad \|\Psi(\tilde{S}^n)\| (\leq \sup (\tilde{S}^n \in \mathfrak{N}^s) \|\Psi(\tilde{S}^n)\|) < \xi,$$

cela étant pour tout $n \geq n(\xi)$; nous prenons $n(\xi) \geq n'(\xi)$ (7₀); pour $\tilde{S}^n = \{s_i^n\}$ dans $\mathfrak{N}^s$, $\tilde{S}^n$ est un système fini (rel. à p) dans ρ^n , tel que [pour $n, \geq n(\xi)$, fixe]

$$N(\rho^n, \tilde{S}^n) = \sup_j \{ \nu(\sigma_j^n), \nu(\rho^n - \sum_i \sigma_i^n) \} < \varepsilon_n(\xi);$$

les $\varepsilon_n(\xi)$ sont les nombres ainsi désignés dans (8.1, (II)). D'après (6₀), (7₀), (8₀) il suit que

$$(9_0) \quad \|\delta_{n(\xi)}\| < 2\xi, \text{ lorsque } \tilde{S}^{n(\xi)} \in \mathfrak{N}^s.$$

Des systèmes S , de la sorte indiquée, existent avec $N(\lambda, S)$ suffisamment petit afin que:

(α) $N(\rho^{n(\xi)}, \tilde{S}^{n(\xi)}) < \varepsilon_{n(\xi)}(\xi)$ [on note que $N(\lambda, S) \rightarrow 0$ entraîne $N(\rho^{n(\xi)}, \tilde{S}^{n(\xi)}) \rightarrow 0$]; de plus, on prendra $S = \{s_i\}$ tel que le nombre

$$(\beta) \sup_i \nu(s_i) [= M(S) \leq N(\lambda, S)]$$

soit suffisamment petit, de sorte que $\|\Psi(\check{S}^{n(\xi)})\| < \xi$, ce qui est possible à réaliser puisque Ψ est assujettie à (8.1, (I)). Enfin nous prenons S tel que pour le système correspondant $S^{n(\xi)}$ [rel. à p , dans $\lambda^{n(\xi)}$] on ait $N(\lambda^{n(\xi)}, S^{n(\xi)})$ suffisamment petit afin que

$$(\gamma) \quad \|\Psi(S^{n(\xi)}) - \Psi(\lambda^{n(\xi)})\| < \xi;$$

la possibilité de ceci résulte de (5₀) et du fait que

$$N(\lambda, S) \rightarrow 0 \quad \text{implique} \quad N(\lambda^{n(\xi)}, S^{n(\xi)}) \rightarrow 0.$$

Dans (6₀) on pose $n = n(\xi)$; en tenant compte de (9₀), (α), (β), (γ) il résulte

$$\|\Psi(S) - \Psi(\lambda)\| < 4\xi, \text{ dès que } N(\lambda, S) \text{ est suffisamment petit.}$$

Par conséquent $\lim \Psi(S) = \int \Psi$ (rel. à p) = $\Psi(\lambda)$ pour tout λ (de $\mathfrak{N}_0^s$) $\subset r$; donc $r \in \mathfrak{N}$, avec $p(r) = p$. La propriété (T; (13.6, 2₀)) est vérifiée.

La preuve de (T; (13.6, 4₀)). — Supposons qu'une sous-famille $\mathfrak{N}_1$ de $\mathfrak{N}$ ne couvre pas $\mathfrak{R}$. Alors l'ensemble

$$(10_0) \quad q = \mathfrak{R} - \Sigma(\mathfrak{N}_1)\rho$$

sera non vide, fermé dans $\mathfrak{R}$. Si q est parfait-s dans $\mathfrak{R}$, il existe un ρ' (de $\mathfrak{N}$) non couvert par $\mathfrak{N}_1$; on obtient ceci comme on l'a fait dans le texte en rapport avec (T*; (4.7⁰)). Considérons maintenant le cas où il y a un point x_0 isolé-s dans q . Il existe un r_0 (de $\mathfrak{N}_0^s$) $\ni x_0$, tel que $r_0 \subset \mathfrak{R}$ et $r_0 q \subset \gamma$, γ étant la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{N}^s$. Considérons un λ (de $\mathfrak{N}_0^s$) $\subset r_0$. Aux développements de (8⁰) jusqu'à (10⁰), dans (T*; section 4), nous empruntons les faits suivants [(11₀)-(12₀), ci-après]:

$$(11_0) \quad \lambda' = \lambda - \lambda\gamma \text{ (de } \mathfrak{N}_0^s) \subset \Sigma(\mathfrak{N}_1)\rho;$$

des r_ν , ρ_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) existent tels que $\lambda' = \sum_1^\infty \rho_\nu$, les ρ_ν (de $\mathfrak{N}^s$) sont disjoints, $\rho_\nu \subset r_\nu \in \mathfrak{N}_1$ ($\subset \mathfrak{N}$); on fait en sorte que $\rho^\nu = \rho_1 + \dots + \rho_\nu$ [= $\lambda'(r_1 + \dots + r_\nu)$] ($\in \mathfrak{N}_0^s$) $\uparrow \lambda'$; $r^\nu = r_1 + \dots + r_\nu \in \mathfrak{N}$ (d'après (2₀)), d'où $\rho^\nu \subset r^\nu \in \mathfrak{N}$; pour un p parfait-s dans r_0 on a $p(\rho^\nu) = p$ ($\nu = 1, 2, \dots$); soit $\tau^\nu = (\lambda' - \rho^\nu)^0$; on a une décomposition $\lambda' = \rho^\nu + \tau^\nu + e'_\nu$ avec $e'_\nu \in (*)$, aussi une décomposition $\lambda = \rho^\nu + \tau^\nu + e_\nu$, $e_\nu \in (*)$; enfin

$$(12_0) \quad \Psi(\lambda) = \Psi(\lambda') = \Psi(\rho^\nu) + \Psi(\tau^\nu), \quad \Psi(\rho^\nu) = \int_{\rho^\nu}^s \Psi \text{ (rel. à } p).$$

Soit $S = \{s_k\}$ un système fini (de sphères fermées disjointes), relativement

à p , dans λ ; alors

$$(13_0) \quad S = S^\nu + \tilde{S}^\nu + \tilde{S}^{\nu*}, \quad S^\nu \text{ formé des } s_k \subset \rho^\nu, \quad \tilde{S}^\nu \text{ formé des } s_k \subset \tau^\nu;$$

$\tilde{S}^{\nu*}$ consiste des s_k jointes à e_ν , tandis que les systèmes S^ν , $\tilde{S}^\nu$ sont relativement à p . On note que pour ν fixe:

$$(14_0) \quad N(\lambda, S)\rho \rightarrow 0 \text{ entraîne } N(\rho^\nu, S^\nu) \rightarrow 0, \quad N(\tau^\nu, \tilde{S}^\nu) \rightarrow 0,$$

$$\Psi(S^\nu) \rightarrow 0, \quad \lim_{\rho^\nu} \Psi(S^\nu) = \int_{\rho^\nu}^s \Psi \text{ (rel. à } p) = \Psi(\rho^\nu) \text{ (12}_0).$$

On observe que

$$(15_0) \quad \Psi(S) = \Psi(S^\nu) + \Psi(\tilde{S}^\nu) + \Psi(\tilde{S}^{\nu*}), \quad \tau^\nu(\in \mathfrak{N}\mathcal{C}_0^s) \downarrow 0 \quad (\text{pour } \nu \rightarrow \infty);$$

$$\Psi(S) - \Psi(\lambda) = [\Psi(S^\nu) - \Psi(\rho^\nu)] + \Psi(\tilde{S}^\nu) + \delta_\nu, \quad \delta_\nu = \Psi(\tilde{S}^\nu) + [\Psi(\rho^\nu) - \Psi(\lambda)],$$

En tant que ρ^ν [de $\mathfrak{N}\mathcal{C} \subset \mathfrak{N}\mathcal{C}_0^s$] $\uparrow \lambda'$ (de $\mathfrak{N}\mathcal{C}_0^s$) et $\Psi(\lambda') = \Psi(\lambda)$, d'après la complète additivité de Ψ dans $\mathfrak{N}\mathcal{C}^s$ il suit que $\lim_{\nu} [\Psi(\rho^\nu) - \Psi(\lambda)] = 0$. Soit un $\xi > 0$. Il existe un $\nu' = \nu'(\xi)$ tel que

$$(16_0) \quad \|\Psi(\rho^\nu) - \Psi(\lambda)\| < \xi \text{ pour tout } \nu \geq \nu'.$$

En raison de (8.1, (II)) (avec τ^n pour ρ^n) et d'après la seconde relation (15₀) il existe un $\nu_0 = \nu_0(\xi) \geq \nu'$ tel que, pour tout $\nu \geq \nu_0$, $\|\Psi(\tilde{S}^\nu)\| < \varepsilon$, lorsque $N(\tau^\nu, \tilde{S}^\nu) < \varepsilon_\nu(\xi)$. Ainsi [(15₀), (16₀)]:

$$(17_0) \quad \tilde{S}^{\nu_0} \in \mathfrak{N}\mathcal{C}^{\nu_0} \text{ [e.g. } N(\tau^{\nu_0}, \tilde{S}^{\nu_0}) < \varepsilon_{\nu_0}(\xi)] \text{ entraîne } \|\delta_{\nu_0}\| < 2\xi.$$

Choisissons un $\varepsilon = \varepsilon(\xi)$, tel que

$$(18_0) \quad N(\lambda, S) < \varepsilon$$

implique (1), (2), (3) ci-après:

$$(1) \quad N(\tau^{\nu_0}, \tilde{S}^{\nu_0}) < \varepsilon_{\nu_0}(\xi);$$

$$(2) \quad \|\Psi(\tilde{S}^{\nu_0})\| < \xi;$$

$$(3) \quad \|\Psi(S^{\nu_0}) - \Psi(\rho^{\nu_0})\| < \xi,$$

Un tel $\varepsilon(\xi)$ existe parce que $N(\tau^{\nu_0}, \tilde{S}^{\nu_0}) \rightarrow 0$ avec $N(\lambda, S)$, tandis que $M(S)$ est arbitrairement petit avec $N(\lambda, S)$ et Ψ satisfait à (8.1, (I)); en plus, $N(\lambda, S) \rightarrow 0$ implique $N(\rho^{\nu_0}, S^{\nu_0}) \rightarrow 0$, de sorte que (3) est réalisable d'après la seconde

relation (12₀). Par conséquent [(15₀), avec $v = v_0 = v_0(\xi)$, (17₀)]:

$$\|\Psi(S) - \Psi(\lambda)\| < 4\xi \quad \text{dès que} \quad N(\lambda, S) < \varepsilon(\xi).$$

Cela veut dire que $\int_{\lambda}^s \Psi$ (rel. à p) = $\Psi(\lambda)$, lorsque λ (de $\mathfrak{N}_0^s$) $\subset r_0$. Ainsi r_0 (de $\mathfrak{N}^s$) $\in \mathfrak{N}$, avec $p(r_0) = p$. Mais r_0 contient le point (isolé-s) de q (10₀), donc r_0 n'est pas couvert par $\mathfrak{N}_1$. On conclut que la famille $\mathfrak{N}$ satisfait à la propriété (T; (13.6, 4₀)). Le lemme (T; (13.6)) s'applique; conséquemment $\mathfrak{R} \in \mathfrak{N}$, ce qui démontre le théorème 8.4.

9. - L'équivalence différentielle pour la totale-D.

Nous revenons à la considération de la totale-D [sections 5.6]. Nous procédons dans les conditions et en utilisant les notations qui interviennent de (5.1) jusqu'à (5.16). Ci-après on admettra toujours que la fonction $\Psi: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{X}$ s'annule pour les ensembles (*) (5.7a).

(9.1). - On dira que $S = \{r_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, v$) est une *décomposition* (finie) dans $\mathfrak{N}$ d'un r de $\mathfrak{N}$, si les r_i ($\in \mathfrak{N}$) sont disjoints, $r_i \subset r$ et l'ensemble $e_0 = r - \Sigma r_i$ est de mesure v zéro [nécessairement $e_0 \in (*)$] et, en effet, e_0 est contenu dans $\Sigma(r_i - r_i)$.

Introduisons une définition nouvelle d'une intégrale au genre de BURKILL.

DÉFINITION 9.2. - Ψ étant une fonction: $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{X}$, on dira que l'intégrale de Burkill [*] de pour un $r \in \mathfrak{N}$ existe et possède la valeur

(9.2a) $l = \int_r^* \Psi = \lim \Psi(S)$ [S désignant les décompositions (finies) dans $\mathfrak{N}$ de r], si la limite existe au sens suivant. Pour tout ε il y a une décomposition $S_\varepsilon = \{e_j\}$ ($j = 1, \dots, v$) dans $\mathfrak{N}$ de r , de sorte que pour toute décomposition $S = \{r_i\}$ [dans $\mathfrak{N}$ de r] plus fine que S_ε , e.g. telle que $S \supseteq S_\varepsilon$ [tout r_i étant contenu dans un ρ_j], on ait $\|l - \Psi(S)\| < \varepsilon$.

(9.3). - Si pour une fonction $\Psi: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{X}$ l'intégrale de Burkill $l = \int_r \Psi$ au sens de (5.10) existe pour un r de $\mathfrak{N}$, il s'ensuivra que l'intégrale $\int_r^* \Psi$ existe et vaut $\int_r \Psi$.

En effet, selon (5.10) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta(\varepsilon) > 0$, tel que les relations

$$S' = \text{décomposition dans } \mathfrak{N} \text{ de } r, M(S') < \eta(\varepsilon) \quad (5.9),$$

entraînent (1₀) $\|l - \Psi(S')\| < \varepsilon$. Soit S_ε une décomposition particulière, avec $M(S_\varepsilon) < \eta(\varepsilon)$; il vient $\|l - \Psi(S_\varepsilon)\| < \varepsilon$. Pour toute décomposition (dans $\mathfrak{N}$ de

$r) S \geq S_\varepsilon$ on aura $M(S) \leq M(S_\varepsilon) < \eta(\varepsilon)$ et, d'après (1₀), $\|l - \Psi(S)\| < \varepsilon$. Par conséquent $l = \int_r^* \Psi$, ce qui vérifie (9.3).

Pour l'intégrale de BURKILL [*] (définition 9.2) on peut adapter les développements de *la théorie de A. Kolmogoroff* (K) - à savoir la partie de (K) qui se rattache aux intégrales basées sur les décompositions *finies*; (K; p. 682-692). L'extension de cette théorie aux intégrales dont les valeurs sont dans l'espace $\mathfrak{X}$ (VNC) est assez évidente. En plus, le fait que la famille actuelle $\mathfrak{N}$ d'ensembles n'est pas strictement multiplicative, e.g. que $r_i \in \mathfrak{N}$ ($i = 1, 2$), $r_1 r_2 \neq 0$, n'entraîne pas $r_1 r_2 \in \mathfrak{N}$ - ce fait n'importe pas, puisqu'on a la propriété (5.4, 3^o) et que la fonction $\Psi: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{X}$, à intégrer au sens [*], s'annule pour les ensembles (*) (5.7a). Considérons à présent la notion de *l'équivalence différentielle* pour les intégrales $\int_r^*$.

Aux énoncés I, II, III, IV, VI, (K; p. 664-665) correspondent les caractères suivants pour l'intégrale [*] [on suppose toujours que les fonctions sous le signe $\int_r^*$ s'annulent pour les ensembles de (*)].

(9.4). - (1^o). Si pour un $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{N}$ l'intégrale $\int_{\mathfrak{R}}^* \Psi$ existe, l'intégrale $\int_r^* \Psi$ existe pour tout r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$.

(2^o). Si $\int_{\mathfrak{R}}^* \Psi$ existe, on aura

(9.4') $\int_{\mathfrak{R}}^* \Psi = \sum_{i=1}^v \int_{\mathfrak{R}_i}^* \Psi$, lorsque $S = \{r_i\}$ ($i = 1, \dots, v$) est une décomposition (finie) dans $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{R}$; réciproquement, si S est de la sorte indiquée et les intégrales $\int_{r_i}^* \Psi$ existent, alors $\int_{\mathfrak{R}}^* \Psi$ existe et on a l'égalité (9.4').

(3^o). Si $\int_{\mathfrak{R}}^* \Psi_i$ ($i = 1, 2$) existent, il vient $\int_{r_i}^* [c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2] = c_1 \int_{\mathfrak{R}}^* \Psi_1 + c_2 \int_{\mathfrak{R}}^* \Psi_2$ (c_i constantes).

(4^o). Si Ψ est additive (au sens fini) dans $\mathfrak{N}$ sur un $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{N}$, on a

$$\Psi(r) = \int_r^* \Psi \text{ pour tout } r \text{ (de } \mathfrak{N}) \subset \mathfrak{R}.$$

Les développements relatifs à l'équivalence différentielle (K; p. 666-669) prennent actuellement la forme suivante.

DÉFINITION 9.5. - Soient Φ et Ψ deux fonctions: $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{X}$, définies sur un $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{N}$. On dira que Φ et Ψ sont *d.é.* (différentiellement équivalentes) sur $\mathfrak{R}$, si pour tout r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une décomposition (finie) $S_\varepsilon = \{r_i\}$ dans $\mathfrak{N}$ de r , de sorte que $S = \{r_j\} \geq S_\varepsilon$ implique

$$(9.5a) \quad \|\Sigma (\Phi(r_j) - \Psi(r_j))\| < \varepsilon,$$

ce qui veut dire (définition 9.2) que $\Phi - \Psi$ est intégrable [*] et que

$$(9.5a') \quad \int_r^* [\Phi - \Psi] = 0 \quad \text{pour tout } r \text{ (de } \mathfrak{N}) \subset \mathfrak{R}.$$

(9.6). - Soit Ψ intégrable [*] sur un $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{N}$. La fonction $\Phi(r) = \int_r^* \Psi$, définie pour tout r (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}$, et la fonction Ψ sont d.é. (définition 9.5) sur $\mathfrak{R}$.

(9.7). - Soit Ψ d.é. sur un $\mathfrak{R}$ (de $\mathfrak{N}$) à une fonction Φ , additive (au sens fini) dans $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{R}$; alors

$$(9.7a) \quad \int_r^* \Psi = \int_r^* \Phi = \Phi(r) \quad \text{pour tout } r \text{ (de } \mathfrak{N}) \subset \mathfrak{R}.$$

(9.8). - Soit une fonction y totalisable- D sur un $\mathfrak{R} \in \mathfrak{N}$; $\Psi(\tilde{r}) = (D) \int_{\tilde{r}} y \odot dm$ dans $\mathfrak{R}$. Par la suite les notations $\tilde{r}$, $\tilde{\rho}$, ... (avec le tilde) seront pour désigner des ensembles de $\mathfrak{N}$.

Ayant en vue l'éventuelle définition de l'équivalence différentielle pour la totale- D indéfinie, nous allons transformer d'une façon convenable les procédés du calcul de la totale- D , qui se trouvent de (6.7) jusqu'à la fin de la section; ces procédés ont été présentés dans (T^s ; sections 3) avec plus de détails, quoique pour le cas de la totale- D ayant les valeurs réelles (plutôt que dans un espace vectoriel).

(9.9). - Si y est intégrable m au sens de DENJOY (e.g. essentiellement au sens de LEBESGUE), on écrira $\int y \odot dm = \int_0^0 y \odot dm$; par définition c'est une intégrale de rang 0.

$\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) étant la sous-famille de G' ($\subset \mathfrak{N}$), telle que

$$(a_1) \quad \rho_i \subset \mathfrak{R} \text{ et les } \int_{\rho_i}^0 y \odot dm \text{ existent,}$$

l'ensemble $p_{0,1} = \mathfrak{R} - \sum_i \rho_i$ sera fermé dans $\mathfrak{R}$ et non dense dans $\mathfrak{R}$; $\mathfrak{R} > p_{0,1}$. Si un $\tilde{r} \subset \mathfrak{R} - p_{0,1}$ ($= \sum \rho_i$), on conclut que

$$(a_2) \quad \Psi(\tilde{r}) = \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_v} \Psi(r_{v,i}), \text{ les } r_{v,i} \text{ (de } \mathfrak{N}) \text{ sont disjoints, } r_{v,i} \subset \tilde{r};$$

d'une façon plus détaillée: $\tilde{r} = \sum_1 \tilde{\rho}_v$, $\tilde{\rho} \sum_{i=1}^{k_v} r_{v,i} + e_v$, $e_v \in (*)$, les $\tilde{\rho}_v$ sont disjoints, $\tilde{\rho}_v \subset$ un ensemble de $\mathfrak{N}$; en posant $\tilde{\rho}^v = \tilde{\rho}_1 + \dots + \tilde{\rho}_v$, il suit que $\tilde{\rho}^v \uparrow \tilde{r}$; de

plus (d'après (a₁))

$$(a_3) \quad \Psi(\tilde{r}) = \lim_{\nu} \Psi(\tilde{\rho}^{\nu}), \quad \text{où} \quad \Psi(\tilde{\rho}^{\nu}) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{k_{\nu}} \int_{\tilde{r}_{\nu,i}}^0 y \odot dm = \int_{\tilde{\rho}^{\nu}}^0 y \odot dm.$$

On est mené à la

DÉFINITION 9.10. - Soit f un ensemble fermé dans $\mathcal{R}$, $f \in \mathcal{R}$, On dira qu'une *intégrale* $\int_{\tilde{r}}^1 y \odot dm$ *de rang 1 existe dans* $\mathcal{R} - f$, si pour tout $\tilde{r} \subset \mathcal{R} - f$ il y a un ensemble $e \in (*)$ (5.7a), $e \subset \tilde{r}$, et une suite $\tilde{h}^{\nu} \uparrow \tilde{r} - e$, telle que

$$(9.10a) \quad \text{les intégrales } \int_{\tilde{h}^{\nu}}^0 y \odot dm \quad \text{et} \quad \lim_{\nu} \int_{\tilde{h}^{\nu}}^0 y \odot dm = I \quad \text{existent;}$$

alors on écrira

$$(9.10b) \quad I = \text{une } \int_{\tilde{r}}^1 y \odot dm = \text{une } \int_{\tilde{r}-e}^1 y \odot dm \quad (\text{dans } \mathcal{R} - f).$$

Comme une conséquence de (a₃) on a

$$(9.11) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une intégrale } \int_{\tilde{r}}^1 x \odot dm \quad (\text{dans } \mathcal{R} - p_{0,1}).$$

Soit $\mathfrak{N} = \{\rho_{0,i}\} + \{\rho^{0,k}\}$, où les $\rho^{0,k}$ sont les ensembles de $G' (\subset \mathfrak{N})$ contenus dans $\mathcal{R} - p_{0,k}$, tandis que les $\rho_{0,i}$ sont les ensembles de G' tels que

$$(b_1) \quad \rho_{0,i} \subset \mathcal{R}, \quad \rho_{0,i} p_{0,1} \subset g_i = \text{la frontière d'un ensemble de } \mathfrak{N};$$

alors $e_{0,1} = \sum p_{0,i} p_{0,1}$ est l'ensemble des points isolés- s dans $p_{0,1}$; on pose $p_{0,2} = p_{0,1} - e_{0,1}$. Or $\rho_{0,i}^- = \rho_{0,i} - \rho_{0,i} p_{0,1}$ est dans $\mathfrak{N}$ et cet ensemble est contenu dans $\mathcal{R} - p_{0,1}$. Donc (9.11):

$$(b_2) \quad \Psi(\rho_{0,i}) = \Psi(\rho_{0,i}^-) = \text{une } \int_{\rho_{0,i}^-}^1 y \odot dm = \text{une } \int_{\rho_{0,i}}^1 y \odot dm;$$

si $\tilde{r} \subset$ un $\rho_{0,i}$, en posant $\tilde{r}^- = \tilde{r} - \tilde{r} p_{0,1}$ [où $\tilde{r} p_{0,1} (\subset \rho_{0,i} p_{0,1} \subset g_i) \in (*)$ (5.7a)] il vient

$$(b_3) \quad \Psi(\tilde{r}) = \Psi(\tilde{r}^-) = \text{une } \int_{\tilde{r}^-}^1 y \odot dm = \text{une } \int_{\tilde{r}}^1 y \odot dm,$$

En tant que $\rho^{0,k} \subset \mathcal{R} - p_{0,1}$, d'après (9.11) il suit que

$$(b_4) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une } \int_{\tilde{r}}^1 y \odot dm \quad (\text{dans } \rho^{0,k}).$$

La famille dénombrable $\mathfrak{N}$ couvre $\mathfrak{R} - p_{0,2}$. En procédant comme en rapport avec (a₂), (a₃), si $\tilde{r} \subset \mathfrak{R} - p_{0,2}$, on obtient des ensembles $\tilde{\rho}_\nu$ disjoints, tels que

$$\tilde{r} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu, \quad \tilde{\rho}_j \subset \text{un } \rho_{0,i}, \quad \text{ou bien } \tilde{\rho}_j \subset \text{un } \rho_{0,k};$$

$$(b_5) \quad \Psi(\tilde{r}) = \lim_{\nu} \Psi(\tilde{\rho}^\nu), \quad \text{où } \tilde{\rho}^\nu = \tilde{\rho}_1 + \dots + \tilde{\rho}_\nu, \quad \tilde{r} \subset \mathfrak{R} - p_{0,2}.$$

Or [(b₃), (b₄)]:

$$(b_6) \quad \Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \sum_{j=1}^{\nu} \Psi(\tilde{\rho}_j) = \sum_{j=1}^{\nu} \text{une } \int_{\tilde{\rho}_j}^1 y \odot dm \quad \text{pour tout } \tilde{r} \subset \mathfrak{R} - p_{0,2}.$$

(9.12). - *L'intégrale de rang 1 est additive au sens fini comme il suit. Si $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ (de $\mathfrak{N}$) sont disjoints et $I(\tilde{\alpha}) = \text{une } \int_{\tilde{\alpha}}^1 y \odot dm$ et $I(\tilde{\beta}) = \text{une } \int_{\tilde{\beta}}^1 y \odot dm$ existent, on aura $I(\tilde{\alpha}) + I(\tilde{\beta}) = \text{une } \int_{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}^1 y \odot dm$ ($\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$).*

En effet il y a des ensembles appartenant à (*) (5.7a) $e \subset \tilde{\alpha}, \xi \subset \tilde{\beta}$ et deux suites $\tilde{\alpha}^\nu \uparrow \tilde{\alpha} - e, \tilde{\beta}^\nu \uparrow \tilde{\beta} - e$, tels que les intégrales $\int_{\tilde{\alpha}^\nu}^0 y \odot dm, \int_{\tilde{\beta}^\nu}^0 y \odot dm$ et les limites $\lim_{\nu} \int_{\tilde{\alpha}^\nu}^0 y \odot dm = I(\tilde{\alpha}), \lim_{\nu} \int_{\tilde{\beta}^\nu}^0 y \odot dm = I(\tilde{\beta})$ existent. Or

$$\tilde{\alpha}^\nu + \tilde{\beta}^\nu \in \mathfrak{N} \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}^\nu + \tilde{\beta}^\nu \uparrow \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} - \delta, \quad \delta = e + \xi \in (*);$$

done

$$I(\tilde{\alpha}) + I(\tilde{\beta}) = \lim_{\nu} \left[\int_{\tilde{\alpha}^\nu}^0 \dots + \int_{\tilde{\beta}^\nu}^0 \dots \right] = \lim_{\nu} \int_{\tilde{\alpha}^\nu + \tilde{\beta}^\nu}^0 \dots = \text{une } \int_{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}^1 \dots$$

En tenant compte de cet énoncé, il suit de (b₆) que

$$(b_7) \quad \Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \text{une } \int_{\tilde{\rho}^\nu}^1 y \odot dm \quad \text{dans } \mathfrak{R} - p_{0,2}.$$

DÉFINITION 9.13 - Soient un $f(\subset \mathfrak{R})$ fermé dans $\mathfrak{R}$ et $\alpha(>0)$ un nombre de première espèce des classes I, II. On dira que $I(\tilde{r})$ est une intégrale de rang α pour $\tilde{r} \subset \mathfrak{R} - f$, désignée par $\int_{\tilde{r}}^{\alpha} y \odot dm$, s'il y a un $e(\subset \tilde{r})$ de (*) et des ensembles $\tilde{h}^\nu \uparrow \tilde{r} - e$, de sorte que

$$(9.13a) \quad I(\tilde{h}^\nu) = \text{une } \int_{\tilde{h}^\nu}^{\alpha-1} y \odot dm \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

tandis que $I(\tilde{r}) = \lim_{\nu} I(\tilde{h}^\nu) [= \text{une } \int_{\tilde{r}}^{\alpha} y \odot dm]$ dans $\mathfrak{R} - f$. Si α est de seconde

espèce, $I(\tilde{r})$ sera une intégrale de rang α , désignée par $\int_{\tilde{r}}^{\alpha} y \odot dm$, pourvu qu'il existent

des nombres $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$, $\alpha_\nu < \alpha$, un ensemble $e(\subset \tilde{r})$ de (*), des $\tilde{h}^\nu \uparrow \tilde{r} - e$ ($\nu = 1, 2, \dots$), tels que

$$(9.13b) \quad I(\tilde{h}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{h}^\nu}^{\alpha_\nu} y \odot dm (\nu = 1, 2, \dots) \text{ et } I(\tilde{r}) = \lim_{\nu} I(\tilde{h}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{\alpha} y \odot dm,$$

Cette définition fournit une hiérarchie d'intégrales $\int \dots$ [cf. (9.9) et (9.10) pour les rangs 0,1]. Le point de départ est l'intégrale- m de DENJOY $\int_0^{\alpha} \dots$ [e.g. essentiellement au sens de LEBESGUE].

Or dans (b₅) $\tilde{p}^\nu \uparrow \tilde{r} (\subset \mathcal{R} - p_{0,2})$; ainsi en raison de (b₇) et d'après la définition (9.13) on a

$$(9.14) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^2 y \odot dm \text{ dans } \mathcal{R} - p_{0,2}.$$

Pour l'intégrale de rang α il y a de l'additivité au sens fini comme il suit.

(9.15). - Si $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta} = 0$ et $I(\tilde{\alpha}) = \text{une} \int_{\tilde{\alpha}}^{\alpha} y \odot dm$, $I(\tilde{\beta}) = \text{une} \int_{\tilde{\beta}}^{\alpha} y \odot dm$ existent, il suit

$$I(\tilde{\alpha}) + I(\tilde{\beta}) = \text{une} \int_{\tilde{\gamma}}^{\alpha} y \odot dm \quad (\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}).$$

Si α est de la première espèce, la conclusion est obtenue à la façon de l'épreuve de l'énoncé (9.12) et en s'appuyant sur la définition (9.13) et en supposant l'énoncé établi pour $\alpha - 1$. Soit α de la seconde espèce et admettons que la proposition est vraie pour tout rang $\gamma < \alpha$. Dans (*) il y un ensemble $e, \subset \tilde{\alpha}$, et un ensemble $\xi, \subset \tilde{\beta}$, et il existent deux suites transfinies de nombres

$$(c_1) \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots (\alpha_\nu < \alpha), \quad \alpha'_1 \leq \alpha'_2 \leq \dots (\alpha'_\nu < \alpha)$$

et deux suites d'ensembles

$$(c_2) \quad \tilde{h}^\nu \uparrow \tilde{\alpha} - e, \quad \tilde{q}^\nu \uparrow \tilde{\beta} - \xi,$$

de sorte que pour $v = 1, 2, \dots$ des éléments

$$(c_3) \quad I(\tilde{h}^v) = \text{une} \int_{\tilde{h}^v}^{\alpha_v} y \odot dm, \quad I(\tilde{q}^v) = \text{une} \int_{\tilde{q}^v}^{\alpha'_v} y \odot dm$$

existent, tandis que

$$I(\tilde{\alpha}) = \lim_v I(\tilde{h}^v), \quad I(\tilde{\beta}) = \lim_v I(\tilde{q}^v),$$

Soit γ_v le plus grand de α_v, α'_v ; alors $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$, $\gamma_v < \alpha$ et on obtient

$$(c_4) \quad I(\tilde{\alpha}) + I(\tilde{\beta}) = \lim_v \left[\text{une} \int_{\tilde{h}^v}^{\alpha_v} \dots + \text{une} \int_{\tilde{q}^v}^{\alpha'_v} \dots \right] = \lim_v \left[\text{une} \int_{\tilde{h}^v}^{\gamma_v} \dots + \text{une} \int_{\tilde{q}^v}^{\gamma_v} \dots \right];$$

en tenant compte de la supposition de l'additivité pour tout rang $\gamma < \alpha$, on déduit que

$$(c_5) \quad I(\tilde{\alpha}) + I(\tilde{\beta}) = \lim_v \left[\text{une} \int_{\tilde{h}^v + \tilde{q}^v}^{\gamma_v} y \odot dm \right],$$

Or

$$\tilde{h}^v + \tilde{q}^v \in \mathfrak{D}\tilde{\mathcal{U}}, \quad \tilde{h}^v + \tilde{q}^v \uparrow \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} - \delta, \quad \delta = e + \xi \in (*) \quad \text{et} \quad \gamma_v < \alpha;$$

d'après l'égalité précédente et la définition 9.13, la conclusion dans l'énoncé (9.15) en découle.

Il y a une suite d'ensembles $p_{1,\alpha}$ fermés dans $\mathfrak{R}$:

$$(9.16) \quad \mathfrak{R}(= P_0) > p_{0,1} \supset p_{0,2} \supset \dots p_{0,\alpha} \supset \dots \quad (\alpha \text{ des classes } I, II);$$

$p_{0,1}$ (défini à la suite de (a_1)) est non dense dans $\mathfrak{R}$; $p_{0,2}$ survient en rapport avec (b_1) . Si α est de la première espèce, $p_{0,\alpha} = p_{0,\alpha-1} - e_{0,\alpha-1}$, où $e_{0,\alpha-1}$ est l'ensemble des points isolés s dans $p_{0,\alpha-1}$; pour α de la seconde espèce on pose $p_{0,\alpha} = \Pi(\gamma < \alpha)p_{0,\gamma}$. La suite (9.16) se stabilise pour un β_1 minimal de première espèce; on note que

$$(9.16a) \quad P_1 = p_{0,\beta_1}(< \mathfrak{R}) \text{ est parfait-}s \text{ dans } \mathfrak{R}, \text{ non dense dans } \mathfrak{R}.$$

LEMME 9.17. - Admettons (9.8). En tenant compte de la définition 9.13 et de (9.16-16a) on a

$$(9.17a) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{\alpha} y \odot dm \text{ dans } \mathfrak{R} - p_{0,\alpha}(1 \leq \alpha \leq \beta_1); \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{\beta_1} y \odot dm \text{ dans } \mathfrak{R} - P_1.$$

Pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ cela a été affirmé dans (9.11), (9.14). Si $\alpha (> 1)$ est de la première espèce et (9.17a) a lieu pour le rangs antérieurs à α , nous procédons comme à la suite de (9.11) jusqu'à (9.14). Ainsi soit $\mathfrak{N} = \{\rho_i\} + \{\rho^k\}$ la famille des ensembles de $G'(\subset \mathfrak{N})$ tels que les $\rho^k \subset \mathfrak{R} - p_{0,\alpha-1}$ et que les ρ_i soient les ensembles (de G') pour lesquels

$$(d_1) \quad \rho_i \subset \mathfrak{R}, \quad \rho_i p_{0,\alpha-1} \neq 0, \quad \rho_i p_{0,\alpha-1} \subset g_i$$

[la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{N}$]; il vient que $e_{0,\alpha-1} = \sum_i \rho_i p_{0,\alpha-1}$ [l'ensemble des points isolés-s dans $p_{0,\alpha-1}$]; $p_{0,\alpha} = p_{0,\alpha-1} - e_{0,\alpha-1}$. En procédant comme dans (b₂) — (b₆) on conclut comme il suit. Si $\tilde{r} \subset \mathfrak{R} - p_{0,\alpha}$, des $\tilde{\rho}_\nu$ disjoints existent de sorte que $\tilde{r} = \sum_1^\infty \tilde{\rho}_\nu$ et

$$\Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \sum_{j=1}^\nu \Psi(\tilde{\rho}_j) = \sum_{j=1}^\nu \text{une} \int_{\tilde{\rho}_j}^{\alpha-1} y \odot dm, \quad \text{où } \tilde{\rho}^\nu = \tilde{\rho}_1 + \dots + \tilde{\rho}_\nu.$$

D'après l'additivité au sens de (9.15) il vient $\Psi_{\tilde{\rho}^\nu} = \text{une} \int_{\tilde{\rho}^\nu}^{\alpha-1} \dots$.
Par suite

$$(d_2) \quad \Psi(\tilde{r}) = \lim_\nu \Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^\alpha y \odot dm \quad \text{dans } \mathfrak{R} - p_{0,\alpha}.$$

Supposons maintenant que α est de la seconde espèce, tandis que (9.17a) a lieu pour les rangs antérieurs à α ; alors $p_{0,\alpha} = \Pi(\gamma < \alpha)p_{0,\gamma}$. Désignons par $\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ la famille des ensembles de G' , tels que $\rho_i \subset \mathfrak{R} - p_{0,\gamma}$ pour un $\gamma = \gamma(i) < \alpha$ ($i = 1, 2, \dots$). Par un raisonnement déjà utilisé il résulte que la famille $\mathfrak{N}$ couvre l'ensemble $\mathfrak{R} - p_{0,\alpha}$. Par conséquent, si un $\tilde{r} \subset \mathfrak{R} - p_{0,\alpha}$, en procédant comme dans (a₁), (a₃) (avec la nouvelle définition de $\mathfrak{N}$ et avec $p_{0,\alpha}$ pour $p_{0,1}$) on déduit que des $\tilde{\rho}_\nu$ disjoints existent de sorte que $\tilde{r} = \sum_1^\infty \tilde{\rho}_k$, tout $\tilde{\rho}_k$ étant contenu dans un $\rho_{i_k} (\in \mathfrak{N})$; en posant $\tilde{\rho}^\nu = \tilde{\rho}_1 + \dots + \tilde{\rho}_\nu$ et en notant que

$$(e_1) \quad \Psi(\tilde{\rho}_k) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}_k}^{\gamma_k} y \odot dm, \quad \text{où } \gamma_k = \gamma(i_k) < \alpha,$$

on obtient

$$(e_2) \quad \Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \sum_{k=1}^\nu \Psi(\tilde{\rho}_k) = \sum_{k=1}^\nu \text{une} \int_{\tilde{\rho}_k}^{\alpha'_\nu} y \odot dm, \\ \alpha'_\nu = \sup(1 \leq k \leq \nu) \gamma_k, \quad \alpha'_\nu < \alpha, \quad \alpha'_\nu \uparrow.$$

D'après l'additivité (9.15) et la définition 9.13 il vient

$$(e_3) \quad \Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}^\nu}^{\alpha'_\nu} y \odot dm, \quad \Psi(\tilde{r}) = \lim_{\nu} \Psi(\rho^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{\alpha} y \odot dm \text{ dans } \mathfrak{R} - p_{0,\alpha}$$

(α de seconde espèce). *Le lemme est vérifié.*

(9.18). - En tenant compte de (9.16), (9.16a), (6.15), (6.15') et en procédant transfiniment on observe qu'il y a des nombres transfinis $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\lambda, \dots$ (λ des classes *I, II*) de première espèce, tels que

$$(9.18') \quad \mathfrak{R} = P_0 > p_{0,1}[\supset p_{0,2} \supset \dots \supset p_{0,\beta_1}] = P_1 > p_{1,1}[\supset p_{1,2} \supset \dots \supset p_{1,\beta_2}] = P_2 > \dots \\ P_\alpha > p_{\alpha,1}[\supset p_{\alpha,2} \supset \dots \supset p_{\alpha,\beta_{\alpha+1}}] = P_{\alpha+1} > p_{\alpha+1,1}[\supset \dots] \dots;$$

P_α n'est pas défini pour α de la seconde espèce; les P_α qui surviennent sont parfaits-s dans $\mathfrak{R}$; tous les ensembles dans (9.18') sont fermés dans $\mathfrak{R}$;

$$(9.18'') \quad p_{\alpha,1} = \Pi(\gamma < \alpha) p_{\gamma,1} = \Pi(\gamma < \alpha) P_\gamma \quad (\text{si } \alpha \text{ est de seconde espèce}).$$

(9.18*). - Les β_λ ne sont pas définis pour les λ de seconde espèce; en plus, les $\beta_{\lambda+1}$ ne sont pas définis pour les λ de la classe (E^*), qui consiste des nombres λ , tels que

(E^*) λ est de seconde espèce, tandis que $p_{\lambda,1}$ est parfait-s dans $\mathfrak{R}$ (e.g. $p_{\lambda,1} = P_{\lambda+1}$).

Soit $\{\rho_i\}$ la famille des ensembles de G' tels que

$$(f_1) \quad \rho_i \subset \mathfrak{R}, \quad \rho_i P_1 \neq 0, \quad \Psi(\rho) = \int_{\rho P_1}^0 y \odot dm + \int_{\rho} \Psi^{P_1} \quad [\text{pour tout } \rho \text{ (de } \mathfrak{N}) \subset \rho_i];$$

ici (6.3): pour $r \in \mathfrak{N}$ on a

$$(f_2) \quad \Psi^{P_1}(r) = \Psi(r) \quad (\text{si } r P_1 = 0), \quad \Psi^{P_1}(r) = 0 \quad (\text{si } r P_1 \neq 0);$$

on pose $p_{1,1} = P_1 - \Sigma \rho_i P_1$. Désignons par $\{\rho^k\}$ la famille des ensembles de G' tels que $\rho^k \subset \mathfrak{R} - P_1$. La famille $\{\rho_i\}$ couvre $P_1 - p_{1,1}$, tandis que

$$(f_3) \quad \text{la famille } \mathfrak{N} = \{\rho_i\} + \{\rho^k\} \text{ couvre } \mathfrak{R} - p_{1,1}.$$

Si un $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R} - p_{1,1}$, des $\tilde{\rho}_\nu$ disjoints et des $r_{\nu,i}$ (de $\mathfrak{N}$) disjoints

existent de sorte que

$$(f_4) \quad \tilde{r} = \sum_1^\infty \tilde{\rho}_\nu, \quad \tilde{\rho}_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} r_{\nu,i} + e_\nu, \quad e_\nu \in (*), \quad \tilde{\rho}_\nu \subset \text{un } \rho_j \text{ ou un } \rho^k;$$

en posant $\tilde{\rho}^\nu = \tilde{\rho}_1 + \dots + \tilde{\rho}_\nu$, on obtient dans $\mathfrak{R} - p_{1,1}$

$$(f_5) \quad \Psi(\tilde{r}) = \lim_\nu \Psi(\tilde{\rho}^\nu), \quad \text{où } \Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \Psi(\tilde{\rho}_1) + \dots + \Psi(\tilde{\rho}_\nu).$$

Si $\tilde{\rho}_\nu \subset \text{un } \subset \rho_k [\mathfrak{R} - P_1]$, d'après le lemme 9.17 il suit que $\Psi(\tilde{\rho}_\nu) = \text{un } \int_{\tilde{\rho}_\nu}^{\beta_1} y \odot dm$.

Il faut examiner assez soigneusement le cas où $\tilde{\rho}_\nu \subset \text{un } \rho_j$; selon (f₁) alors on aura

$$(f_6) \quad \Psi(\tilde{\rho}_\nu) = \int_{\tilde{\rho}_\nu P_1}^0 y \odot dm + \int_{\rho^\nu} \Psi^{P_1}.$$

D'après (9.3), lorsque l'intégrale de BURKILL $\int \Psi^{P_1}$ existe au sens (5.10), de sorte que le théorème 5.11 s'applique, on a $\int \dots = \int^* \dots$ au sens (9.3) (donc l'énoncé (9.4) s'applique). Pour ν, i fixes on a

$$(f_7) \quad \int_{r_{\nu,i}} \Psi^{P_1} = \int_{r_{\nu,i}}^* \Psi^{P_1} = \lim \Psi^{P_1}(S_{\nu,i}),$$

la limite au dernier membre étant au sens de (9.2); $S_{\nu,i} = \{r_s^{\nu,i}\}$ est une décomposition finie dans $\mathfrak{M}$ de $r_{\nu,i}$; $S_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} S_{\nu,i} = \{r_s^{\nu,i}\}$ (ν fixe) est une décomposition finie dans $\mathfrak{M}$ de $\tilde{\rho}_\nu$, e.g. de $(\tilde{\rho}_\nu)^0$; tout composant de S_ν est dans un $r_{\nu,i}$ ainsi S_ν est plus fine que le système fini $\{r_{\nu,i}\}$ ($i = 1, \dots, k_\nu$). Il vient

$$(f_8) \quad \int_{\tilde{\rho}_\nu} \Psi^{P_1} = \sum_{i=1}^{k_\nu} \text{un } \int_{r_{\nu,i}} \Psi^{P_1} = \sum_{i=1}^{k_\nu} \lim \Psi^{P_1}(S_{\nu,i}) = \lim \Psi^{P_1}(S_\nu),$$

avec les limites au sens de (9.2). Or, en désignant par $r^s(\nu)$ ($s = 1, \dots, l_\nu$) les composants de S_ν , il suit que

$$(f_9) \quad \Psi^{P_1}(S_\nu) = \sum_s \Psi^{P_1}(r^s(\nu)) = \sum_s (r^s(\nu) P_1 = 0) \Psi(r^s(\nu));$$

on observe qu'ici tout $r^s(\nu) \subset \text{un } r_{\nu,i} \subset \tilde{\rho}_\nu$ et $\tilde{\rho}_\nu \subset \text{un } \rho_j$. De plus il est à noter que dans la union $\sum' \dots$ tout $r^s(\nu)$ est disjoint de P_1 , de sorte que $r^s(\nu)$

y intervenant est contenu dans $\mathfrak{R}-P_1$; donc d'après (f₉) et la proposition (9.15) il résulte que

$$(f_{10}) \quad \Psi^{P_1}(S_v) = \sum_s' (...) \quad \text{une} \quad \int_{r^s(v)}^{P_1} y \odot dm = \quad \text{une} \quad \int_{\tilde{\rho}_v'}^{P_1} y \odot dm,$$

où $\tilde{\rho}_v' = \sum_s'(r^s(v)P_1 = 0)r^s(v)$ [= l'union des $r^s(v)$ (v fixe) dont la fermeture est disjointe de P_1]; $\tilde{\rho}_v' \in \mathfrak{M} \subset \mathfrak{R} - P_1$, $\tilde{\rho}_v' \subset \tilde{\rho}_v$ [cas de $\tilde{\rho}_v \subset$ un ρ_j]. Pour v fixe, l'ensemble $\tilde{\rho}_v'$ varie avec la décomposition finie (dans $\mathfrak{M}$) S_v de $\tilde{\rho}_v$. Posons

$$(f_{11}) \quad \tilde{\rho}_v'' = \sum''(r^s(v)P_1 \neq 0)r^s(v); \text{ alors } \tilde{\rho}_v'' = (\tilde{\rho}_v - \tilde{\rho}_v') - e_v', \quad e_v' \in (*); \quad \tilde{\rho}_v'' + e_v' \supset \tilde{\rho}_v P_1.$$

En raison de l'existence de la limite dans (f₈) il y a une suite S_v^m ($m = 1, 2, \dots$) de décompositions finie dans $\mathfrak{M}$ de $\tilde{\rho}_v$ (v fixe), de sorte qu'avec $\leq$ au sens de (9.2) on a

$$(f_{12}) \quad \{r_{v,i}\} \leq S_v^1 \leq S_v^2 \leq \dots (v \text{ fixe}), \quad \lim_m M(S_v^m) = 0 \text{ [cf (5.9)],} \quad \int_{\tilde{\rho}_v} \Psi^{P_1} = \lim_m \Psi^{P_1}(S_v^m).$$

Soient $\tilde{\rho}_v'(m)$, $\tilde{\rho}_v''(m)$ respectivement les ensembles $\tilde{\rho}_v'$, $\tilde{\rho}_v''$ [(f₁₀), (f₁₁)], lorsque $S_v = S_v^m$; ainsi, si pour v, m fixes les $r^\sigma(v, m)$ sont les composants de S_v^m , on aura

$$\tilde{\rho}_v'(m) = \sum_\sigma' [r^\sigma(v, m)P_1 = 0]r^\sigma(v, m), \quad \tilde{\rho}_v''(m) = \sum_\sigma'' [r^\sigma(v, m)P_1 \neq 0]r^\sigma(v, m);$$

$$\tilde{\rho}_v'(m) \subset \mathfrak{R} - P_1, \quad \tilde{\rho}_v - \tilde{\rho}_v'(m) = \tilde{\rho}_v''(m) + e_v''(m) \supset \tilde{\rho}_v P_1, \quad \text{où } e_v''(m) \in (*).$$

Correspondant à (f₁₀) il résulte

$$(f_{13}) \quad \Psi^{P_1}(S_v^m) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}_v'(m)}^{P_1} y \odot dm \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Pour tout $m > 0$ il existe un ensemble $\delta_v'(m)$ de (*) tel que $\tilde{\rho}_v'(m+1) + \delta_v'(m) \supset \tilde{\rho}_v'(m)$. En posant $\tilde{r}_v'(m) = \tilde{\rho}_v'(1) + \dots + \tilde{\rho}_v'(m)$ [lorsque $\tilde{\rho}_v \subset$ un ρ_j], il suit que

$$(f_{14}) \quad \tilde{r}_v'(m) \supset \tilde{\rho}_v'(m), \quad \tilde{r}_v'(m) \subset \tilde{r}_v'(m+1), \quad \tilde{r}_v'(m) - \tilde{\rho}_v'(m) = \varepsilon_v'(m) \in (*);$$

$$\tilde{r}_v(m) \uparrow q_v \quad (\text{pour } m \uparrow \infty), \quad q_v = \sum_m r_v'(m) = \sum_m \tilde{\rho}_v'(m) \subset \tilde{\rho}_v - P_1 \tilde{\rho}_v;$$

puisque S_v^{m+1} est plus fine que S_v^m et $\lim_m M(S_v^m) = 0$, en raison de la propriété (5.4, (8°)) pour $\mathfrak{M}$ il suit que l'ensemble $\tilde{\rho}_v - P_1 \tilde{\rho}_v - q_v$ est dépourvu de points intérieurs.

REMARQUE 9.19. — En tenant compte de la définition 9.13, on conclut ainsi. Soit α un nombre des classes *I*, *II*. Si pour un $\tilde{r}$ ($\in \mathfrak{N}$) $I(\tilde{r})$ est une intégrale $\int_{\tilde{r}}^{\alpha} y \odot dm$ et $\tilde{r}^* = \tilde{r} + e$ avec $e \in (*)$, $I(\tilde{r})$ sera aussi une intégrale $\int_{\tilde{r}^*}^{\alpha} y \odot dm$ [au sens indiqué $\int_{\tilde{r}}^{\alpha} \dots = \int_{\tilde{r}^*}^{\alpha} \dots$].

Par conséquent la troisième relation (f₁₄) et (f₁₃) mènent à l'égalité

$$\Psi^{P_1}(S_v^m) = \text{une} \int_{\tilde{r}_v'(m)}^{\beta_1} y \odot dm \quad [\text{lorsque } \tilde{\rho}_v \subset \text{un } \rho_j \text{ (f}_1)];$$

donc d'après (f₁₂)

$$(f_{15}) \quad \int_{\tilde{\rho}_v} \Psi^{P_1} = \lim_m \int_{\tilde{r}_v'(m)}^{\beta_1} y \odot dm.$$

En notant ce qui est essentiel dans cette formule, on est mené à la définition suivante.

(9.20). — Soient p un ensemble parfait- s et un $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{N}$) joint à p . On dira que I est sur $\tilde{r} - p\tilde{r}$ une *intégrale de rang* $(\beta_1, 0)$, et on écrira

$$I = \text{une} \int_{\tilde{r} - p\tilde{r}}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm,$$

s'il y a une suite $\tilde{r}(m) \uparrow q$ (pour $m \uparrow \infty$), de sorte que $q \subset \tilde{r} - p\tilde{r}$, l'ensemble $(\tilde{r} - p\tilde{r}) - q$ étant sans points intérieurs, tandis que des éléments $I_m = \text{une} \int_{\tilde{r}(m)}^{\beta_1} y \odot dm$ ($m = 1, 2, \dots$) existent, tels que $I = \lim_m I_m$; au sens indiqué

$$(9.20a) \quad \int_{\tilde{r} - p\tilde{r}}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm = \lim_m \int_{\tilde{r}(m)}^{\beta_1} y \odot dm.$$

En vertu de (f₁₅), de (f₁₄) et l'affirmation à la suite de (f₁₄) on obtient

$$(9.21) \quad \int_{\tilde{\rho}_v} \Psi^{P_1} = \text{une} \int_{\tilde{\rho}_v - P_1 \tilde{\rho}_v}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm, \quad \text{lorsque } \tilde{\rho}_v \subset \text{un } \rho_j \text{ (f}_1);$$

donc (f₆):

$$(9.21a) \quad \Psi(\tilde{\rho}_v) = \int_{\tilde{\rho}_v P_1}^0 y \odot dm + \text{une} \int_{\tilde{\rho}_v - P_1 \tilde{\rho}_v}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm \quad (\text{si } \tilde{\rho}_v \subset \text{un } \rho_i).$$

Posons

$$(g_1) \quad \tilde{\rho}'(v) = \Sigma'_i [1 \leq i \leq v; \tilde{\rho}_i \subset \text{un } \rho^k] \tilde{\rho}_i, \quad \tilde{\rho}''(v) = \Sigma'_i [1 \leq i \leq v; \tilde{\rho}_i \subset \text{un } \rho_j] \tilde{\rho}_i;$$

alors $\tilde{\rho}'(v) \tilde{\rho}''(v) = 0$ et $\tilde{\rho}^v = \tilde{\rho}'(v) + \tilde{\rho}''(v)$. D'après la formule à suite de (f₅)

$$(g_2) \quad \Psi(\tilde{\rho}'(v)) = \Sigma'_i \Psi(\tilde{\rho}_i) = \Sigma'_i \text{une} \int_{\tilde{\rho}_i}^{\beta_1} y \odot dm = \text{une} \int_{\tilde{\rho}'(v)}^{\beta_1} y \odot dm;$$

ici on a utilisé la propriété de l'additivité au sens de (9.14). En raison de (9.20) il suit que

$$(g_3) \quad \Psi(\tilde{\rho}''(v)) = \Sigma''_i \Psi(\tilde{\rho}_i) = \int_{\tilde{\rho}''(v) P_1}^0 y \odot dm + \Sigma''_i \text{une} \int_{\tilde{\rho}_i - P_1 \tilde{\rho}_i}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm.$$

Or pour l'intégrale de rang $(\beta_1, 0)$ (9.20) il y a de l'additivité au sens suivant.

(9.22). – Soient un ensemble p parfait- s et des ensembles $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ disjoints. Supposons que

$$I_1 = \text{une intégrale} \int_{\tilde{\alpha} - p\tilde{\alpha}}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm, \quad I_2 = \text{une intégrale} \int_{\tilde{\beta} - p\tilde{\beta}}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm.$$

Alors $I_1 + I_2$ vaut une intégrale $\int_{\tilde{\gamma} - p\tilde{\gamma}}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm$, où $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$.

En effet, en vertu de la définition (9.20) il y a deux suites

$$\tilde{\alpha}(m) \uparrow q_1, \quad \tilde{\beta}(m) \uparrow q_2 \quad (\text{pour } m \uparrow \infty),$$

de sorte que

$q_1 \subset \tilde{\alpha} - p\tilde{\alpha}$, $q_2 \subset \tilde{\beta} - p\tilde{\beta}$, les ensembles $\tilde{\alpha} - p\tilde{\alpha} - q_1$ et $\tilde{\beta} - p\tilde{\beta} - q_2$ étant sans points intérieurs, tandis que des éléments $I_{1,m} = \text{une} \int_{\tilde{\alpha}(m)}^{\beta_1} y \odot dm$,

$I_{2,m} = \text{une } \int_{\tilde{\beta}(m)}^{\beta_1} y \odot dm$ ($m = 1, 2, \dots$) existent, tels que $I_i = \lim_m I_{i,m}$ ($i = 1, 2$). Alors on aura $\tilde{\gamma}(m) = \tilde{\alpha}(m) + \tilde{\beta}(m)$ (de $\mathfrak{N}\mathfrak{L}$) $\uparrow q = q_1 + q_2$, $q \subset \tilde{\gamma} - p\tilde{\gamma}$; l'ensemble

$$\tilde{\gamma} - p\tilde{\gamma} - q = [\tilde{\alpha} - p\tilde{\alpha} - q_1] + [\tilde{\beta} - p\tilde{\beta} - q_2]$$

est sans points intérieurs; en plus, pour $m \uparrow \infty$,

$$I_{1,m} + I_{2,m} = \text{une intégrale } \int_{\tilde{\alpha}(m) + \tilde{\beta}(m)}^{\beta_1} \dots = \text{une } \int_{\tilde{\gamma}(m)}^{\beta_1} y \odot dm \rightarrow I_1 + I_2.$$

En tenant compte de (9.20) on obtient la conclusion dans l'énoncé (9.22).

Revenons à (g₃); il vient

$$(g_4) \quad \Psi(\tilde{\rho}''(\nu)) = \int_{\tilde{\rho}''(\nu)P_1}^0 y \odot dm + \text{une } \int_{\delta(\nu)}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm, \quad \delta(\nu) = \tilde{\rho}''(\nu) - P_1\tilde{\rho}''(\nu).$$

Puisque $\rho^k \subset \mathfrak{R} - F_1$ et d'après (g₁), on obtient

$$(g_5) \quad \tilde{\rho}'(\nu) \subset \mathfrak{R} - P_1, \quad \tilde{\rho}'(\nu) \uparrow \rho', \quad \tilde{\rho}''(\nu) \uparrow \rho'', \quad \rho' + \rho'' = \lim_{\nu} \tilde{\rho}' = \tilde{r}[\subset \mathfrak{R} - p_{1,1}];$$

$\rho'\rho'' = 0$; $\rho' \subset \mathfrak{R} - P_1$; il se peut que ρ' , ρ'' n'appartiennent pas à $\mathfrak{N}\mathfrak{L}$. De (g₁), (g₂), (g₄) il suit que

$$(g_6) \quad \Psi(\tilde{\rho}') = \Psi(\tilde{\rho}'(\nu)) + \Psi(\tilde{\rho}''(\nu)) = \left[\int_{\tilde{\rho}''(\nu)P_1}^0 + \text{une } \int_{\tilde{\rho}'(\nu)}^{\beta_1} + \text{une } \int_{\delta(\nu)}^{(\beta_1, 0)} \right] y \odot dm.$$

Il convient d'introduire la notion d'une *intégrale de rang* $(\beta_1, 0)$ sur un ensemble de $\mathfrak{N}\mathfrak{L}$.

(9.23). - Soient p un ensemble parfait-s et un $\tilde{\rho}$ ($\subset \mathfrak{R}$); $\tilde{\rho}'\tilde{\rho}'' = 0$, $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}' + \tilde{\rho}''$; $\tilde{\rho}' \subset \mathfrak{R} - p\mathfrak{R}$, $\tilde{\rho}'' \subset \mathfrak{R}$. Supposons que y est intégrable-m sur $\tilde{\rho}''p$; en plus admettons l'existence de deux éléments:

$$\tau' = \text{une intégrale } \int_{\tilde{\rho}'}^{\beta_1} y \odot dm, \quad \tau = \text{une intégrale } \int_{\delta}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm,$$

où $\delta = \tilde{\rho}'' - p\tilde{\rho}'$ et la seconde intégrale est sur δ au sens de (9.20). Alors on dira que sur $\tilde{\rho}$ une intégrale de y de rang $(\beta_1, 0)$ existe et vaut

$$(9.23a) \quad \int_{\tilde{\rho}''p}^0 y \odot dm + \tau' + \tau = \text{une } \int_{\tilde{\rho}}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm.$$

On observe que $\tilde{\rho}''p + \tilde{\rho} + \delta = \tilde{\rho}' + \tilde{\rho}'' = \tilde{\rho}$, ce qui justifie la désignation dans (9.23a). En s'appuyant sur la définition (9.23), introduisons la suivante.

(9.24). - Soient un p parfait-s, un $\tilde{r} (\subset \mathfrak{R})$, des $\tilde{\rho}^\nu \uparrow \tilde{r}$; supposons qu'une suite d'éléments λ_ν existe, de sorte que

$$\lambda_\nu = \text{une integrale } \int_{\tilde{\rho}^\nu}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm, \text{ la limite } \lambda = \lim_\nu \lambda_\nu \text{ existe.}$$

Selon (9.23) on associe avec $\tilde{\rho}^\nu$ des ensembles $\tilde{\rho}'(\nu)$, $\tilde{\rho}''(\nu)$, tels que

$$\tilde{\rho}'(\nu)\tilde{\rho}''(\nu) = 0, \quad \tilde{\rho}^\nu = \tilde{\rho}'(\nu) + \tilde{\rho}''(\nu), \quad \tilde{\rho}'(\nu) \subset \mathfrak{R} - p\mathfrak{R}, \quad \tilde{\rho}''(\nu) \subset \mathfrak{R},$$

de sorte que (9.23a) ait lieu, avec $\tilde{\rho}' = \tilde{\rho}'(\nu)$, $\tilde{\rho}'' = \tilde{\rho}''(\nu)$, $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^\nu$ et λ_ν au second membre. Nous exigeons que $\tilde{\rho}'(\nu) \uparrow$ et $\tilde{\rho}''(\nu) \uparrow$ (pour $\nu \uparrow$). On dira alors qu'une intégrale de y de rang $(\beta_1, 1)$ sur $\tilde{r}$ existe et que

$$(9.24a) \quad \lambda = \text{une integrale } \int_{\tilde{r}}^{(\beta_1, 1)} y \odot dm,$$

cette intégrale étant en rapport avec p .

En revenant à (g_6) on conclut que

$$\Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \text{une integrale } \int_{\tilde{\rho}^\nu}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm.$$

Ensuite on se rappelle que $\tilde{\rho}^\nu \uparrow \tilde{r} \subset \mathfrak{R} - p_{1,1}$ et $\Psi(\tilde{r}) = \lim_\nu \Psi(\tilde{\rho}^\nu)$, en sorte qu'en s'appuyant sur la définition (9.24) on obtient la proposition suivante.

LEMME 9.25. - Admettons (9.8) et notons les désignations (9.16), (9.16a), (9.18), (9.18'). On a

$$(9.25a) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une } \int_{\tilde{r}}^{(\beta_1, 1)} y \odot dm \quad \text{dans } \mathfrak{R} - p_{1,1},$$

le rang $(\beta_1, 1)$ (9.24) correspondant à l'ensemble parfait-s $p = P_1$.

(9.26). - Soient un p parfait-s, $\tilde{\alpha}(\subset \mathfrak{R})$, $\tilde{\beta}(\subset \mathfrak{R})$; $\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = 0$. Si, avec les intégrations en rapport avec p , les éléments

$$\Gamma_1 = \text{une } \int_{\tilde{\alpha}}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm, \quad \Gamma_2 = \text{une } \int_{\tilde{\beta}}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm$$

existent, il suit que

$$(9.26a) \quad \Gamma_1 + \Gamma_2 = \text{une intégrale} \int_{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm \quad (\text{relativement à } p).$$

En effet, d'après (9.23) des ensembles $\tilde{\alpha}'$, $\tilde{\alpha}''$, $\tilde{\beta}'$, $\tilde{\beta}''$ existent, tels que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'\tilde{\alpha}'' &= 0, & \tilde{\alpha} &= \tilde{\alpha}' + \tilde{\alpha}'', & \tilde{\alpha}' &\subset \mathfrak{R} - p\mathfrak{R}, & \tilde{\alpha}'' &\subset \mathfrak{R}; \\ \tilde{\beta}'\tilde{\beta}'' &= 0, & \tilde{\beta} &= \tilde{\beta}' + \tilde{\beta}'', & \tilde{\beta}' &\subset \mathfrak{R} - p\mathfrak{R}, & \tilde{\beta}'' &\subset \mathfrak{R}; \end{aligned}$$

y est intégrable- m sur $\tilde{\alpha}'' p$ et sur $\tilde{\beta}'' p$. En plus, des éléments suivants existent:

$$\begin{aligned} \tau' &= \text{une} \int_{\tilde{\alpha}'}^{\beta_1} y \odot dm, & \tau &= \text{une} \int_{\delta}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm & (\delta &= \tilde{\alpha}'' - p\tilde{\alpha}'), \\ \omega' &= \text{une} \int_{\tilde{\beta}'}^{\beta_1} y \odot dm, & \omega &= \text{une} \int_{\sigma}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm & (\sigma &= \tilde{\beta}'' - p\tilde{\beta}''), \end{aligned}$$

les intégrales pour τ , ω étant relativement à p , de sorte que

$$\Gamma_1 = \int_{\tilde{\alpha}''p}^0 y \odot dm + \tau' + \tau, \quad \Gamma_2 = \int_{\tilde{\alpha}''p}^0 y \odot dm + \omega' + \omega.$$

Posons $\tilde{\rho} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$, $\tilde{\rho}' = \tilde{\alpha}' + \tilde{\beta}'$, $\tilde{\rho}'' = \tilde{\alpha}'' + \tilde{\beta}''$; alors

$$\tilde{\rho}'\tilde{\rho}'' = 0, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}' + \tilde{\rho}'', \quad \tilde{\rho}' \subset \mathfrak{R} - p\mathfrak{R}, \quad \tilde{\rho}'' \subset \mathfrak{R},$$

En tenant compte de (9.15) et de (9.22) on déduit

$$\tau' + \omega' = \text{une} \int_{\tilde{\rho}'}^{\beta_1} y \odot dm, \quad \tau + \omega = \text{une} \int_{\tilde{\rho}'' - p\tilde{\rho}''}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm \quad (\text{relativement à } p).$$

Donc d'après la définition (9.23)

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \int_{\tilde{\rho}''p}^0 y \odot dm + (\tau' + \omega') + (\tau + \omega) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm,$$

ce qui vérifie la proposition (9.26).

(9.27). - Soient un ρ parfait-s $\tilde{\alpha} (\subset \mathcal{R})$, $\tilde{\beta} (\subset \mathcal{R})$, $\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = 0$; admettons que

$$\Gamma_1 = \text{une} \int_{\tilde{\alpha}}^{(\beta_1, 1)} y \odot dm, \quad \Gamma_2 = \text{une} \int_{\tilde{\beta}}^{(\beta_1, 1)} y \odot dm,$$

les intégrales de rang $(\beta_1, 1)$ étant en rapport avec p . Alors

$$(9.27a) \quad \Gamma_1 + \Gamma_2 = \text{une integrale} \int_{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}^{(\beta_1, 1)} y \odot dm \quad (\text{relativement à } p).$$

En raison de la définition (9.24) il y a des $\tilde{\alpha}^\nu$ et des $\tilde{\beta}^\nu (\nu = 1, 2, \dots)$, tels que $\tilde{\alpha}^\nu \uparrow \alpha$, $\tilde{\beta}^\nu \uparrow \beta$; aussi des éléments λ_ν , e_ν existent, de sorte que

$$(h_1) \quad \lambda_\nu = \text{une} \int_{\tilde{\alpha}^\nu}^{(\beta_1, 0)} \rightarrow \Gamma_1, \quad l_\nu = \text{une} \int_{\tilde{\beta}^\nu}^{(\beta_1, 0)} \rightarrow \Gamma_2;$$

on peut réaliser cette situation en associant avec $\tilde{\alpha}^\nu$, $\tilde{\beta}^\nu$ des ensembles $\tilde{\alpha}'(\nu)$, $\tilde{\alpha}''(\nu)$, $\tilde{\beta}'(\nu)$, $\tilde{\beta}''(\nu)$, tels que

$$(h_2) \quad \begin{aligned} \tilde{\alpha}'(\nu)\tilde{\alpha}''(\nu) &= 0, & \tilde{\alpha}^\nu &= \tilde{\alpha}'(\nu) + \tilde{\alpha}''(\nu), & \tilde{\alpha}'(\nu) &\subset \mathcal{R} - p\mathcal{R}; \\ \tilde{\beta}'(\nu)\tilde{\beta}''(\nu) &= 0, & \tilde{\beta}^\nu &= \tilde{\beta}'(\nu) + \tilde{\beta}''(\nu), & \tilde{\beta}'(\nu) &\subset \mathcal{R} - p\mathcal{R}; \\ \tilde{\alpha}'(\nu) \uparrow, & \tilde{\alpha}''(\nu) \uparrow, & \tilde{\beta}'(\nu) \uparrow, & \tilde{\beta}''(\nu) \uparrow & (\text{pour } \nu \uparrow), \end{aligned}$$

de sorte que

$$(h_3) \quad \begin{aligned} \lambda_\nu &= \int_{\tilde{\alpha}''(\nu)p}^0 y \odot dm + \text{une} \int_{\tilde{\alpha}'(\nu)}^{\beta_1} \dots + \text{une} \int_{\tilde{\alpha}''(\nu) - p\tilde{\alpha}''(\nu)}^{(\beta_1, 0)} \dots, \\ l_\nu &= \int_{\tilde{\beta}''(\nu)p}^0 y \odot dm + \text{une} \int_{\tilde{\beta}'(\nu)}^{\beta_1} \dots + \text{une} \int_{\tilde{\beta}''(\nu) - p\tilde{\beta}''(\nu)}^{(\beta_1, 0)} \dots. \end{aligned}$$

Posons

$$(h_4) \quad \tilde{r} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}, \quad \tilde{\rho}^\nu = \tilde{\alpha}^\nu + \tilde{\beta}^\nu, \quad \Lambda_\nu = \lambda_\nu + e_\nu,$$

Alors $\tilde{\rho}^\nu \uparrow \tilde{r}$ et $\Lambda_\nu = \text{une} \int_{\tilde{\rho}^\nu}^{(\beta_1, 0)} \dots$ (9.26) tandis que la $\lim_{\nu} \Lambda_\nu = \Gamma_1 + \Gamma_2$ existe.

De plus associés avec $\tilde{\rho}^\nu$ on a les ensembles

$$\tilde{\rho}'(\nu) = \tilde{\alpha}'(\nu) + \tilde{\beta}'(\nu), \quad \tilde{\rho}''(\nu) = \tilde{\alpha}''(\nu) + \tilde{\beta}''(\nu),$$

tels que

$$\tilde{\rho}'(\nu)\tilde{\rho}''(\nu) = 0, \quad \tilde{\rho}^\nu = \tilde{\rho}'(\nu) + \tilde{\rho}''(\nu), \quad \tilde{\rho}'(\nu) \subset \mathfrak{R} - p\mathfrak{R}, \quad \tilde{\rho}'(\nu) \uparrow, \quad \tilde{\rho}''(\nu) \uparrow,$$

tandis que

$$(h_5) \quad \Lambda_\nu = \int_{\tilde{\rho}''(\nu)p}^0 \dots + \text{une} \int_{\tilde{\rho}'(\nu)}^{\beta_1} \dots + \text{une} \int_{\tilde{\rho}''(\nu)-p\tilde{\rho}'(\nu)}^{(\beta_1, 0)} \dots$$

À cause de (h₁), (h₄) et des faits qu'on vient d'indiquer en rapport avec (h₅) il suit que

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \lim_{\nu} (\lambda_\nu + l_\nu) = \lim_{\nu} \Lambda_\nu = \lim_{\rho^\nu} \int_{\rho^\nu}^{(\beta_1, 0)} y \odot dm = \text{une intégrale} \int_{\tilde{r}}^{(\beta_1, 1)} y \odot dm,$$

où $\tilde{r} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$. L'énoncé (9.27) en découle.

(9.28) - En rapport avec (9.18)-(9.18'') nous introduisons les *rangs d'intégrales* de y de la manière suivante.

(i₁) δ où $0 \leq \delta \leq \beta_1$ [cf (9.9) pour $\delta = 0$, (9.10) pour $\delta = 1$, (9.13) pour $\delta > 1$]; on écrit $b_1 = (\beta_1)$.

(i₂) $(b_1, 0) = (\beta_1, 0)$ [cf. (9.23)]; $(b_1, 1) = (\beta_1, 1)$ [cf. (9.24)]; (b_1, δ) ($0 \leq \delta \leq \beta_2$); on écrit $b_2 = (b_1, \beta_2) = (\beta_1, \beta_2)$.

Si α est de première espèce, il sera entendu que dans la notation $b_\alpha = (\beta_1, \dots, \beta_\alpha)$ ne surviennent pas les β_λ , avec λ de seconde espèce, et les $\beta_{\lambda+1}$, avec $\lambda + 1 \leq \alpha$ où $\lambda \in (E^*)$ (9.18)*. Pour les β_λ qui sont présents dans b_α on a $\lambda \leq \alpha$. Pour α de seconde espèce on définit les rangs b_α d'accord avec (9.31).

(i₃) (b_α, δ) ($0 \leq \delta \leq \beta_{\alpha+1}$), si α est de première espèce;

(i₃') (b_α, δ) ($2 \leq \delta \leq \beta_{\alpha+1}$), si α est de seconde espèce et $p_{\alpha,1}$ est non parfait-s dans $\mathfrak{R}$ [e.g. $p_{\alpha,1} > P_{\alpha+1} = p_{\alpha, \beta_{\alpha+1}}$].

On définit les rangs (i₃): pour $\delta = 0$ selon (9.29), pour $\delta = 1$ d'accord avec (9.29'), pour $\delta > 1$ selon (9.30) et (9.30'). Les rangs (i₃) sont définis d'après (9.30').

(9.29) - Soit un α (> 1) de première espèce, un ensemble p parfait-s et un $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{H}$). On dira que I est sur $\tilde{r} - p\tilde{r}$ une $\int_{\tilde{r}-p\tilde{r}}^{(b_{\alpha}, 0)} y \odot dm$, si une suite $\tilde{r}(m) \uparrow q$ (pour $m \uparrow \infty$) existe, telle que $q \subset \tilde{r} - p\tilde{r}$ et l'ensemble $(\tilde{r} - p\tilde{r}) - q$ est dépourvu de points intérieurs, tandis que des éléments I_m existent de sorte que $I_m = \text{une } \int_{\tilde{r}(m)}^{b_{\alpha}} y \odot dm$ et $I = \lim_{\nu} I_m$. Avec α et p comme on l'a indiqué plus haut et un $\tilde{\rho}$, on dira que $\Gamma = \text{une } \int_{\tilde{\rho}}^{(b_{\alpha}, 0)} y \odot dm$, si $\tilde{\rho}'$ et $\tilde{\rho}''$ existent tels que $\tilde{\rho}'\tilde{\rho}'' = 0$, $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}' + \tilde{\rho}'$, $\tilde{\rho}' \subset \mathfrak{R} - p\mathfrak{R}$, $\tilde{\rho}'' \subset \mathfrak{R}$, tandis que y est intégrable-m $\tilde{\rho}''p$ et qu'il y a deux éléments

$$\tau' = \text{une } \int_{\tilde{\rho}'}^{b_{\alpha}} y \odot dm, \quad \tau = \text{une } \int_{\tilde{\rho}''-p\tilde{\rho}''}^{(b_{\alpha}, 0)} y \odot dm,$$

de sorte que

$$\Gamma = \int_{\tilde{\rho}''p}^0 y \odot dm + \tau' + \tau.$$

(9.29'). - Soient un α de première espèce, un p parfait-s, un $\tilde{r}$, des $\tilde{\rho}^{\nu} \uparrow \tilde{r}$. Supposons qu'il existe une suite d'éléments λ_{ν} et un élément λ , de sorte que

$$\lambda_{\nu} = \text{une } \int_{\tilde{\rho}^{\nu}}^{(b_{\alpha}, 0)} y \odot dm, \quad \lim_{\nu} \lambda_{\nu} = \lambda.$$

Selon la définition (9.29) (avec le même p) des ensembles $\tilde{\rho}'(\nu)$, $\tilde{\rho}''(\nu)$ existent,

$$\tilde{\rho}'(\nu)\tilde{\rho}''(\nu) = 0, \quad \tilde{\rho}^{\nu} = \tilde{\rho}'(\nu) + \tilde{\rho}''(\nu), \quad \tilde{\rho}'(\nu) \text{ disjoint de } p,$$

tels que y est intégrable-m sur $\tilde{\rho}''(\nu)p$, tandis que

$$\lambda_{\nu} = \int_{\tilde{\rho}'(\nu)p}^0 y \odot dm + \text{une } \int_{\tilde{\rho}'(\nu)}^{b_{\alpha}} y \odot dm + \text{une } \int_{\tilde{\rho}''(\nu)-p\tilde{\rho}''(\nu)}^{(b_{\alpha}, 0)} y \odot dm.$$

On suppose que $\tilde{\rho}'(\nu) \uparrow$, $\tilde{\rho}''(\nu) \uparrow$. Dans ces conditions on dira que

$$(9.29'a) \quad \lambda = \text{une intégrale } \int_{\tilde{r}}^{(b_{\alpha}, 1)} y \odot dm \quad (\text{en rapport avec } p).$$

(9.30. - Soient un $f (\subset \mathcal{R})$ fermé dans $\mathcal{R}$ (de $\mathfrak{N}$) et un α de première espèce. Au cas où $\delta (> 1)$ est de la première espèce, on dira que dans $\mathcal{R} - f$, e.g. pour tout $\tilde{r} \subset \mathcal{R} - f$.

$$\lambda = \lambda(\tilde{r}) = \text{une intégrale} \int_{\tilde{r}}^{(b_{\alpha}, \delta)} y \odot dm,$$

si un $e (\subset \tilde{r})$ de (*) et des $\tilde{h}^{\nu} \uparrow \tilde{r} - e$ ($\nu = 1, 2, \dots$) existent, tels que

$$\lambda_{\nu} = \text{une} \int_{\tilde{h}^{\nu}}^{(b_{\alpha}, \delta-1)} y \odot dm \quad \text{et} \quad \lim_{\nu} \lambda_{\nu} = \lambda.$$

Si δ est de seconde espèce on dira, que dans $\mathcal{R} - f$, $\lambda = \text{une intégrale} \int_{\tilde{r}}^{(b_{\alpha}, \delta)} y \odot dm$, pourvu qu'il y a un ensemble $e (\subset \tilde{r})$ de (*), des $\tilde{h}^{\nu} \uparrow \tilde{r} - e$ ($\tilde{r} \subset \mathcal{R} - f$) et des nombres de première espèce $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots$, $\delta_{\nu} < \delta$ ($\nu = 1, 2, \dots$), de sorte que

$$(9.30') \quad \lambda = \lim_{\nu} \lambda_{\nu}, \quad \text{avec} \quad \lambda_{\nu} = \text{une} \int_{\tilde{h}^{\nu}}^{(b_{\alpha}, \delta_{\nu})} y \odot dm.$$

(9.30''). - Soit un α de seconde espèce; supposons que $p_{\alpha,1}$ n'est pas parfait-s dans $\mathcal{R}$ (donc $\beta_{\alpha+1} \geq 2$); $2 \leq \delta \leq \beta_{\alpha+1}$. Dans ce cas $p_{\alpha,1}$ (fermé dans $\mathcal{R}$) possède des points isolés-s. On dira que pour un $\tilde{r}$ on a

$$(9.30''a) \quad \lambda = \lambda(\tilde{r}) = \text{une intégrale} \int_{\tilde{r}}^{(b_{\alpha}, 2)} y \odot dm,$$

s'il y a un $e (\subset \tilde{r})$ de (*) et des $\tilde{h}^{\nu} \uparrow \tilde{r} - e$, tels que

$$(9.30''b) \quad \lambda_{\nu} = \text{une} \int_{\tilde{h}^{\nu}}^{b_{\alpha}} y \odot dm \quad \text{et} \quad \lim_{\nu} \lambda_{\nu} = \lambda.$$

Soit un δ de première espèce, $2 < \delta \leq \beta_{\alpha+1}$; on dira que pour un $\tilde{r}$ un élément $\lambda = \lambda(\tilde{r})$ est une $\int_{\tilde{r}}^{(b_{\alpha}, \delta)} \dots$, si pour un choix de $e (\subset \tilde{r}) \in (*)$ et des $\tilde{h}^{\nu} \uparrow \tilde{r} - e$ il existent des éléments λ_{ν} , tels que

$$(9.30''c) \quad \lambda_{\nu} = \text{une} \int_{\tilde{h}^{\nu}}^{(b_{\alpha}, \delta-1)} y \odot dm \quad \text{et} \quad \lim_{\nu} \lambda_{\nu} = \lambda.$$

Soit un δ ($\leq \beta_{\alpha+1}$) de seconde espèce: on dira alors que pour un $\tilde{r}$ un élément λ vaut une intégrale $\int_{\tilde{r}}^{(b_\alpha, \delta)} y \odot dm$, si pour ce λ et ce $\tilde{r}$ la situation formulée en rapport avec (9.30') a lieu (mais cette fois avec α de seconde espèce).

(9.31). - Soient un α de la seconde espèce et un $\tilde{r}$. On dira qu'un élément λ est une intégrale sur $\tilde{r}$ de rang b_α et on écrira

$\lambda = \text{une } \int_{\tilde{r}}^{b_\alpha} y \odot dm$, s'il existent des $\tilde{\rho}^\nu \uparrow \tilde{r}$ et des nombres de première espèce $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$, $\gamma_\nu < \alpha$ ($\nu = 1, 2, \dots$) et des éléments λ_ν , de sorte que

$$(9.31a) \quad \lambda_\nu = \text{une } \int_{\tilde{\rho}^\nu}^{\gamma_\nu} y \odot dm, \quad \lambda = \lim_{\nu} \lambda_\nu.$$

LEMME 9.32. - Soit b un rang quelconque particulier selon (9.28). Soient $\tilde{\alpha} (\subset \mathbb{R})$, $\tilde{\beta} (\subset \mathbb{R})$ disjoints. Supposons que des éléments Γ_1, Γ_2 existent, tels que

$$\Gamma_1 = \text{une } \int_{\tilde{\alpha}}^b y \odot dm, \quad \Gamma_2 = \text{une } \int_{\tilde{\beta}}^b y \odot dm.$$

Alors

$$(9.32a) \quad \Gamma_1 + \Gamma_2 = \text{une } \int_{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}^b y \odot dm.$$

REMARQUE 9.32'. - Dans cet énoncé il est entendu que, si des ensembles parfaits-s interviennent dans les intégrations pour Γ_1 et Γ_2 , c'est le même ensemble p pour les deux; alors la conclusion (9.32a) est en rapport avec cet ensemble p .

Le lemme a été vérifié pour $b = \delta$ ($\delta \leq \beta_1$) dans (9.15), pour $(\beta_1, 0)$ dans (9.22) et (9.26), pour $b = (\beta_1, 1)$ dans (9.27). On dira qu'un rang (b_γ, λ) est antérieur à (b_α, δ) et on écrira $(b_\gamma, \lambda) < (b_\alpha, \delta)$, lorsque

(j₁) $\gamma = \alpha$ et $\lambda < \delta$, ou bien $\gamma < \alpha$; aussi $b_\alpha < (b_\alpha, 0)$ pour α de première espèce;

$b_\alpha < (b_\alpha, 2)$ si α est de seconde espèce, tandis que $p_{\alpha,1}$ n'est pas parfait-s dans $\mathbb{R}$; de plus $b_{\alpha_1} \leq b_{\alpha_2}$ pour $\alpha_1 < \alpha_2$. Considérons un rang particulier $b > (\beta_1, 1)$. Supposons que le lemme est vrai pour les rangs $< b$. On va établir la validité du lemme pour b , ce qui le vérifiera.

CAS I. - α de première espèce et $b = (b_\alpha, 0)$. La relation $b > (\beta_1, 1)$ implique $\alpha > 1$. Le rang b_α est l'antécédant immédiat de b . La conclusion du lemme

est admise pour le rang b_α . L'additivité pour le rang $b = (b_\alpha, 0)$ est établie en s'appuyant sur la définition (9.29) et en suivant des adaptations convenables des démonstrations des énoncés (9.22), (9.27).

CAS II. - α de première espèce et $b = (b_\alpha, \delta)$, $0 < \delta \leq \beta_{\alpha+1}$, avec δ de première espèce. Le rang $(b_\alpha, \delta - 1)$ sera l'antécédant immédiat de (b_α, δ) . L'additivité pour le rang $b = (b_\alpha, \delta)$ est vérifiée moyennant les définitions (9.29') (si $\delta = 1$), (9.30) (si $\delta > 1$), en utilisant des adaptations assez évidentes des preuves de (9.12), (9.15).

CAS III. - α de première espèce et $b = (b_\alpha, \delta)$, avec δ de seconde espèce. Le rang b n'aura pas d'antécédant immédiat. L'additivité pour b s'obtient en tenant compte de la deuxième partie de la définition (9.30), utilisant les procédés de la sorte qui interviennent dans la preuve de (9.15) (où δ remplace α),

CAS IV. - α de seconde espèce, tandis que $p_{\alpha,1}$ n'est pas parfait-s dans $\mathfrak{R}$ (ainsi $\beta_{\alpha+1} \geq 2$); $b = (b_\alpha, \delta)$ avec $2 \leq \delta \leq \beta_{\alpha+1}$. Soit δ de la première espèce; alors l'antécédant immédiat de b sera

$$(j_2) \quad b_\alpha \text{ (si } \delta = 2), \quad (j_3) \quad (b_\alpha, \delta - 1) \text{ (si } \delta > 2);$$

admettons la validité du lemme pour b_α au cas (j_2) [pour $(b_\alpha, \delta - 1)$ au cas (j_3)]; l'additivité pour le rang b est vérifiée en s'appuyant sur la définition (9.30'a, b) au cas (j_2) [la définition (9.30'c) au cas (j_3)] et en procédant à la manière de la preuve de (9.15). Pour δ de la seconde espèce $b = (b_\alpha, \delta)$ n'a pas d'antécédant immédiat; $(b_\alpha, \sigma) < b$ pour tout σ tel que $2 \leq \sigma < \delta$; on suppose que le lemme est vrai pour tout tel rang (b_α, σ) ; l'additivité pour b est déduite en tenant compte de la définition (9.30''), en procédant comme dans la preuve de (9.15).

CAS V. - α de seconde espèce. On admet l'additivité pour les rangs antérieurs à $b = b_\alpha$; b n'a pas d'antécédant immédiat. Supposons que $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ sont disjoints, tandis que des éléments Γ_1 , Γ_2 existent, tels que

$$\Gamma_1 = \text{une } \int_{\tilde{\alpha}}^b y \odot dm, \quad \Gamma_2 = \text{une } \int_{\tilde{\beta}}^b y \odot dm.$$

D'après la définition (9.31) il existent deux suites de nombres de première espèce

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots (\alpha_\nu < \alpha); \quad \alpha'_1 \leq \alpha'_2 \leq \dots (\alpha'_\nu < \alpha)$$

et deux suites $\tilde{h}^\nu \uparrow \tilde{\alpha}$, $\tilde{q}^\nu \uparrow \tilde{\beta}$, de sorte que des éléments $I(\tilde{h}^\nu)$, $II(\tilde{q}^\nu)$ existent,

tels que

$$(j) \quad I(\tilde{h}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{h}^\nu}^{b_{\alpha_\nu}} y \odot dm, \quad I(\tilde{q}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{q}^\nu}^{b_{\alpha_\nu}} y \odot dm,$$

tandis que $I(\tilde{h}^\nu) \rightarrow \Gamma_1$, $I(\tilde{q}^\nu) \rightarrow \Gamma_2$. Soit γ_ν le plus grand de α_ν , α'_ν ; alors γ_ν est de première espèce, $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$ et $\gamma_\nu < \alpha$. Puisque $b_{\alpha_\nu} \leq b_{\gamma_\nu}$ et $b_{\alpha_\nu} \leq b_{\gamma_\nu}$, il suit que

$$I(\tilde{h}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{h}^\nu}^{b_{\gamma_\nu}} y \odot dm, \quad I(\tilde{q}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{q}^\nu}^{b_{\gamma_\nu}} y \odot dm;$$

$b_{\gamma_\nu} < b_\alpha$. Selon l'hypothèse actuelle il y a de l'additivité pour les rangs b_{γ_ν} ; donc

$$(j_5) \quad I(\tilde{h}^\nu) + I(\tilde{q}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{h}^\nu + \tilde{q}^\nu}^{b_{\gamma_\nu}} y \odot dm.$$

Or $\tilde{h}^\nu + \tilde{q}^\nu$ (de $\mathfrak{H}\mathfrak{L}$) $\uparrow \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$; en plus $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \lim [I(\tilde{h}^\nu) + I(\tilde{q}^\nu)]$; par conséquent, d'après (j₅) et la définition (9.31) on est mené à la conclusion du lemme pour $b = b_\alpha$ (α de seconde espèce).

CAS VI. - α de première espèce et $b = b_\alpha > b_{\alpha-1}$. Ainsi β_α existe, car autrement $b_\alpha = b_{\alpha-1}$. Considérons les cas

(VIa) $\alpha - 1$ de seconde espèce;

(VIb) $\alpha - 1$ de première espèce.

Au cas (VIa) $\alpha - 1$ ne peut pas appartenir à (E^*) , car alors β_α n'existerait pas; donc

$$p_{\alpha-1,1} > P_\alpha = p_{\alpha-1,\beta_\alpha}, \quad \beta_\alpha \geq 2;$$

l'antécédant immédiat de b_α est $b_{\alpha-1}$ (si $\beta_\alpha = 2$), $b_{\alpha-1,\beta_\alpha-1}$ (si $\beta_\alpha > 2$); il suffira de procéder comme au Cas IV, où $\alpha - 1$ remplace α . Envisageons le cas (VIb); alors l'antécédant immédiat de $b_\alpha = (b_{\alpha-1,\beta_\alpha})$ sera $(b_{\alpha-1,\beta_\alpha} - 1)$ et on procède d'accord avec le Cas II, avec $\alpha - 1$ pour α [il est à noter qu'on pourrait avoir $b_{\alpha-1} = b_{\alpha-2}$, ce qui est le cas où $\alpha - 2$ est de la seconde espèce et $p_{\alpha-2,1}$ est parfait-s dans $\mathfrak{R}$, de sorte que $\beta_{\alpha-1}$ n'existe pas - pourtant cela ne modifierait pas le raisonnement qu'on vient d'indiquer].

Le lemme 9.32 est entièrement démontré.

THÉOREME FONDAMENTAL 9.33 - Soit une fonction y totalisable- D sur un $\mathcal{R} \in \mathfrak{N}$;

$$(9.33a) \quad \Psi(\tilde{r}) = (D) \int_{\tilde{r}} y \odot dm \quad \text{dans } \mathcal{R} \quad (\text{notation (9.8)}).$$

Envisageons les ensembles indiqués dans (9.18)-(9.18''). Les rangs des diverses intégrations étant spécifiés selon (9.28), on aura

$$(k_1) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{\delta} y \odot dm \quad [\text{dans } \mathcal{R} - p_{0,\delta}; 1 \leq \delta \leq \beta_1];$$

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{b_1} y \odot dm \quad [\text{dans } \mathcal{R} - P_1; b_1 = (\beta_1)];$$

$$(k_2) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{(\beta_1, 1)} y \odot dm \quad [\text{dans } \mathcal{R} - p_{1,1}];$$

si α est de la première espèce,

$$(k_3) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{(b_{\alpha'}, \delta)} y \odot dm \quad [\text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha,\delta}; 1 \leq \delta \leq \beta_{\alpha+1}],$$

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{b_{\alpha}} \dots \quad [\text{dans } \mathcal{R} - P_{\alpha}];$$

si α est de la seconde espèce,

$$(k_4) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{b_{\alpha}} \dots [\text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha,1}], \quad \Psi(r) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{(b_{\alpha}, \delta)} y \odot dm$$

[dans $\mathcal{R} - p_{\alpha,\delta}; 2 \leq \delta \leq \beta_{\alpha+1}$, si $p_{\alpha,1}$ est non parfait-s dans $\mathcal{R}$].

Soit α' le nombre minimal tel que $p_{\alpha',1} = 0$ [α' est de la première espèce]. On a

$$(9.33b) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{(b_{\alpha'}, 1)} y \odot dm \quad \text{dans } \mathcal{R} \quad [b_{\alpha'} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha'})].$$

Les affirmations (k_1) , (k_2) ont été établies dans les lemmes 9.17, 9.25. Soit b un rang particulier d'accord avec les spécifications suivantes.

CAS (I). — α de première espèce. On envisage les cas (I. A), ..., (I. D) de (I) comme il suit.

(I. A). $b = (b_\alpha, 1)$;

(I. B). $b = (b_\alpha, \delta)$, avec δ de première espèce, $2 \leq \delta \leq \beta_{\alpha+1}$;

(I. C). $b = (b_\alpha, \delta)$ avec $\delta (\leq \beta_{\alpha+1})$ de seconde espèce;

(I. D). $b = b_\alpha$.

Dans le cas (I. D) on suppose que $b_\alpha > b_{\alpha-1}$, e.g. que β_α existe.

CAS (II). — α de la seconde espèce. On considère les cas (II. A), ..., (II. D) de (II) suivants.

(II. A). $b = (b_\alpha, 2)$;

(II. B). $b = (b_\alpha, \delta)$, avec δ de première espèce, $2 < \delta \leq \beta_{\alpha+1}$;

(II. C). $b = (b_\alpha, \delta)$, avec $\delta (< \beta_{\alpha+1})$ de seconde espèce;

(II. D). $b = b_\alpha$.

Pour (II. A), (II. B), (II. C) on admet que $p_{\alpha,1}$ est non parfait-s dans $\mathcal{R}$, de sorte que $p_{\alpha,1} > P_{\alpha+1}$ et $\beta_{\alpha+1} \geq 2$.

Ayant en vue la démonstration de $(k_1) - (k_4)$ moyennant l'induction transfinie, supposons que dans les divers cas qu'on vient de spécifier on a réalisé $(l_1), \dots, (l_8)$ ci-après.

$$(l_1) \quad \text{Pour (I. A),} \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{b_\alpha} y \odot dm \quad \text{dans } \mathcal{R} - P_\alpha.$$

$$(l_2) \quad \text{Pour (I. B),} \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{(b_\alpha, \delta-1)} \dots \quad \text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, \delta-1}.$$

$$(l_3) \quad \text{Pour (I. C),} \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{(b_\alpha, \gamma)} \dots \quad \text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, \gamma} \text{ pour tout } (1 \leq) \gamma < \delta.$$

$$(l_4) \quad \text{Pour (I. D), comme il suit:}$$

(1) si $\alpha - 1$ est de seconde espèce [de sorte que $p_{\alpha-1,1} > P_\alpha = p_{\alpha-1,\beta_\alpha}$, $\beta_\alpha \geq 2$],

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{b_{\alpha-1}} \dots \quad \text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha-1,1} \text{ (si } \beta_2 = 2),$$

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{(b_{\alpha-1}, \beta_\alpha - 1)} \dots \quad \text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha-1, \beta_\alpha - 1} \text{ (si } \beta_\alpha > 2);$$

(2) si $\alpha - 1$ est de première espèce,

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{(b_{\alpha-1}, \beta_\alpha - 1)} \dots \quad \text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha-1, \beta_\alpha - 1}.$$

$$(l_5) \quad \text{Pour (II. A),} \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{b_\alpha} \dots \quad \text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha,1}.$$

$$(l_6) \quad \text{Pour (II. B),} \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{(b_\alpha, \delta - 1)} \dots \quad \text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, \delta - 1}.$$

$$(l_4) \quad \text{Pour (II. C),} \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{(b_\alpha, \gamma)} \dots \quad \text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, \gamma} \text{ pour tout } \gamma < \delta.$$

$$(l_8) \quad \text{Pour (II. D), } \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{b_\gamma} \dots \text{ dans } \mathcal{R} - P_\gamma \text{ pour tout } \gamma \text{ de première espèce } < \alpha.$$

[(I. A), (I₁)]. $p_{\alpha-1, \beta_\alpha} = P_\alpha$. On procède précisément comme on l'a fait dans (f₁) — (f₁₅) à la suite de (9.18''), avec

P_α , $p_{\alpha,1}$, le rang b_α pour P_1 , $p_{1,1}$, le rang β_1 .

Puis en s'appuyant sur la définition (9.28) de rangs, on utilise (9.29), (9.29'), avec $\alpha + 1$, P_α pour α , p ; on spécifie les intégrales de la forme $\int_{\tilde{r}}^{(b_\alpha, 0)}$ (sur $\tilde{r} - P_\alpha \tilde{r}$), $\int_{\tilde{r}}^{(b_\alpha, 1)}$ (sur $\tilde{r}$) et $\int_{\tilde{r}}^{(b_\alpha, 1)}$ (en rapport avec $p = P_\alpha$). On fait usage de l'addi-

tivité des intégrales au sens spécifié au lemme 9.23. Nous continuons comme à la suite de (f₁₅), avec les remplacements indiqués plus haut, jusqu'au lemme 9.25, ce qui mène à la conclusion

$$(m_1) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{(b_\alpha, 1)} y \odot dm \quad \text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, 1}; (b_\alpha, 1) \text{ est } b \text{ de (I. A).}$$

[(I. B), (l₂)]. Nous procédons comme dans la démonstration du lemme 9.17. Soit $\mathcal{N} = \{\rho_i\} + \{\rho^k\}$ la famille d'ensembles de G' ($\subset \mathcal{N}$), de sorte que $\rho^k \subset \mathcal{R} - p_{\alpha, \delta-1}$ et que pour les ρ_i on ait

$$\rho_i \subset \mathcal{R}, \quad \rho_i p_{\alpha, \delta-1} \neq 0, \quad \rho_i p_{\alpha, \delta-1}$$

$\subset$ la frontière d'un ensemble de $\mathcal{N}$; $e_{\alpha, \delta-1} = \sum_i \rho_i p_{\alpha, \delta-1}$ sera l'ensemble des points isolés- s dans $p_{\alpha, \delta-1}$, $p_{\alpha, \delta} = p_{\alpha, \delta-1} - e_{\alpha, \delta-1}$. Ensuivant des procédés de la sorte intervenant dans (b₂)-(b₆) et dans (d₁)-(d₂), en utilisant la définition (9.30) [avec $\alpha + 1$ pour α] et le lemme 9.23, on conclut que (l₂) entraîne

$$(m_2) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^b \dots \quad \text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, \delta}, \text{ avec } b = (b_\alpha, \delta).$$

[(I. C), (l₃)]. Dans ce cas $p_{\alpha, \delta} = \Pi(\gamma < \delta)p_{\alpha, \gamma}$. Soit $\mathcal{N} = \{\rho_i\}$ la famille des ensembles de G' tels que $\rho_i \subset \mathcal{R} - p_{\alpha, \gamma}$ pour un $\gamma = \gamma(i) < \delta$; $\mathcal{N}$ couvre $\mathcal{R} - p_{\alpha, \delta}$. En s'appuyant sur la définition (9.30) (pour δ de seconde espèce) et sur les lemme 9.23, en utilisant des modifications convenables dans les procédés qui sont en rapport avec (e₁)-(e₃), on déduit que

$$(m_3) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^b \dots \quad \text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, \delta}, \text{ avec } b = (b_\alpha, \delta) \\ \text{(où } \delta \text{ est de seconde espèce).}$$

[(I. D), (l₄)]. Au cas [l₄, (1)] on utilise la définition (9.30''), avec $\alpha - 1$ pour α , et on suit les procédés de la sorte qui de (9.11) mènent au lemme 9.17; on montre que [l₄, (1)] entraîne

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{(b_{\alpha-1}, \beta_\alpha)} \dots \quad \text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha-1, \beta_\alpha}; \text{ ici } (b_{\alpha-1}, \beta_\alpha) = b_\alpha, p_{\alpha-1, \beta_\alpha} = P_\alpha \text{ et } \beta_\alpha \geq 2.$$

Si [1₄, (2)] a lieu, on s'appuie essentiellement sur les mêmes méthodes et on démontre encore que Ψ est une $\int_{\tilde{r}}^{b_\alpha}$ dans $\mathcal{R} - P_\alpha$, avec $b_\alpha = (b_{\alpha-1}, \beta_\alpha)$ et $\beta_\alpha \geq 1$.

[(II. A), (1₅)], [(II. B), (1₆)], [(II. C), (1₇)]. En s'appuyant sur la définition (9.28) et le lemme (9.32) et en utilisant les méthodes déjà employées, on montre que (1₅), (1₆), (1₇) impliquent dans les cas respectifs:

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une } \int_{\tilde{r}}^{(b_\alpha, 2)} \dots \text{ dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, 2}; \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une } \int_{\tilde{r}}^{(b_\alpha, \delta)} \dots \text{ dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, \delta}, \text{ où } \delta$$

est de première espèce, $2 < \delta \leq \beta_{\alpha+1}$; Ψ est de rang (b_α, δ) dans $\mathcal{R} - p_{\alpha, \delta}$, aussi pour δ de seconde espèce.

[(II. D), (1₈)]. Soit $\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) la famille de tous les ensembles ρ_i de G' , tels que $\rho_i \subset$ un $\mathcal{R} - P_\gamma$, où $\gamma = \gamma(\rho_i)$ (de première espèce) $< \alpha$. On se rappelle que $p_{\alpha, 1}$ (α de seconde) est l'intersection des P_γ ($\gamma < \alpha$). La famille $\mathfrak{N}$ couvre $\mathcal{R} - p_{\alpha, 1}$. Moyennant un raisonnement déjà employé on conclut que pour tout $\tilde{r} \subset \mathcal{R} - p_{\alpha, 1}$ des $\tilde{\rho}_v$ ($v = 1, 2, \dots$) disjoints existent, tels que $\tilde{r} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\rho}_k$ et $\tilde{\rho}_k \subset$ un $\rho_{i(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$); posons $\tilde{\rho}^v = \tilde{\rho}_1 + \dots + \tilde{\rho}_v$. D'après (1₈) et puisque $\tilde{\rho}_k \subset \mathcal{R} - P_{\gamma_k}$, avec $\gamma_k = \gamma(\rho_{i(k)}) < \alpha$, en s'appuyant sur le lemme 9.32 on obtient

$$\Psi(\tilde{\rho}_k) = \text{une } \int_{\tilde{\rho}_k}^{b_{\gamma_k}} y \odot dm, \quad \Psi(\tilde{\rho}^v) = \sum_{k=1}^v \Psi(\tilde{\rho}_k) = \text{une } \int_{\tilde{\rho}^v}^{b_{\alpha_v}} y \odot dm,$$

où $\alpha_v = \sup(1 \leq k \leq v) \gamma_k$; les γ_k sont de première espèce, donc les α_v le sont; $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$ et $\alpha_v < \alpha$. On observe que $\tilde{\rho}^v \uparrow \tilde{r}$ et $\Psi(\tilde{r}) = \lim_v \Psi(\tilde{\rho}^v)$. Selon la définition (9.31) du rang b_α (α de seconde espèce) cela veut dire que

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une } \int_{\tilde{r}}^{b_\alpha} y \odot dm \quad \text{pour tout } \tilde{r} \text{ (de } \mathfrak{N}) \subset \mathcal{R} - p_{\alpha, 1}.$$

On a achevé la considération du cas [(II. D), (1₈)].

Nous avons établi la partie du théorème 9.33 en rapport avec (k₁)-(k₄). L'affirmation finale (9.33b) est une conséquence immédiate de (k₁)-(k₄); ainsi le théorème est vérifié.

(9.34). - Dans les conditions du théorème 9.33, y étant totalisable- D sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{N}$ et Ψ désignant la totale- D indéfinie de y , on dira que y est

différentiellement équivalente de rang b à Ψ , sur un $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathcal{R}$, si $\Psi(\tilde{r}) = \int_{\tilde{r}}^b y \odot dm$, où b est un rang selon la définition (9.28). En particulier, y est différentiellement équivalente de rang $b = (b_\alpha, 1)$ à sa totale- D sur $\mathcal{R}$ (voir (9.33b)).

La justification de cette définition est fondée sur le fait que la totale- D s'obtient progressivement à partir des intégrales de y de rang 0 [donc intégrales- m , essentiellement lebesguiennes], en utilisant une succession transfinie de suites transfinies de certains passages à la limite. Au point de départ, lorsque $\Psi(\tilde{r}) = \int_{\tilde{r}}^0 y \odot dm$, la notion d'équivalence différentielle est déjà connue. Dans l'ouvrage actuel nous laissons de côté l'élucidation de la portée explicite de l'équivalence différentielle de rang b (transfini). La base pour les développements de cette sorte est fournie par la définition (9.28) et le théorème 9.33.

10. - L'équivalence différentielle pour la totale- S .

Maintenant nous allons utiliser les développements et les définitions de la section 7 relativement à la totale- S symétrique. On se rappelle les familles d'ensembles $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$ [(5.4), (5.7)], $\mathfrak{N}^s$, $\mathfrak{N}'^s$, $\mathfrak{N}''^s$ [définition 7.4], la notion de la *complète additivité* dans $\mathfrak{N}^s$ d'une fonction $\Psi[: \mathfrak{N}^s \rightarrow \mathfrak{K}]$, zéro pour tout sous-ensemble de la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{N}^s$ [définition 7.5], et surtout la définition 7.16 d'une fonction $y(u) [: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}]$ totalisable- S sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{N}^s$ et de sa totale- S Ψ . Nous tenons compte de la remarque (7.23).

(10.1). - Soit une fonction y totalisable- S sur un $\mathcal{R}$ épais- v de $\mathfrak{N}^s$ (donc $R^0 \neq 0$); $\Psi(\tilde{r}) = (S) \int_{\tilde{r}} y \odot dm$ dans $\mathcal{R}$; ici et dans la suite $\tilde{r}, \tilde{\rho}, \dots$ (avec le tilde) désigneront des ensembles de la famille $\mathfrak{N}^s$.

On va faire usage de la section 8 [sur la succession transfinie des calculs pour la totale- S] de l'ouvrage (T^*) de l'auteur; dans les développements (T^* ; section 8) on supposera que des modifications et des adaptations ont été faites afin de convenir à la situation actuelle - la totalisation à présent étant vectorielle.

(10.2). - D'accord avec (9.9), si y est intégrable- m au sens de DENJOY sur un ensemble q , on dira que $\int y \odot dm = \int_0^q y \odot dm$ est une *intégrale de rang 0* sur q . $G^s[(T^*; (8.3))]$ est une sous-famille $\{S_k\}$ de $\mathfrak{N}^s$ de sphères ouvertes $S_k = S(x_k, r_k)$ ($k = 1, 2, \dots$), qui couvrent l'ensemble $\mathcal{R}^0$ indéfiniment au sens de la *mesure- v absolue* [aussi au sens du pseudo-diamètre], les centres $x_k, \subset \mathcal{R}^0$, sont partout denses sur $\mathcal{R}^0$; $r_k > 0$; cela veut dire que tout point u de $\mathcal{R}^0$ est contenu dans une suite de sphères de G^s de mesure- v (de dia-

mètre) tendant vers zéro. Soit $\mathfrak{N} = \{s_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) la famille des sphères de G^s , contenues dans $\mathbb{R}^0$, telles que $\Psi(\rho) = \int_{\rho} y \odot dm$ pour tout $\tilde{\rho} \subset s_i$; l'ensemble $p_{0,1} = \mathbb{R}^0 - \Sigma s_i$ est fermé dans $\mathbb{R}^0$ et non dense dans $\mathbb{R}^0$. Si un $\tilde{r} \subset \mathbb{R}^0 - p_{0,1}$, $\tilde{r}$ sera couvert par $\mathfrak{N}$, donc

$$(a_1) \quad \Psi(\tilde{r}) = \sum_{v=1}^{\infty} \Psi(\tilde{\rho}_v^0), \quad \tilde{\rho}_v^0 \in \mathfrak{N}_0^s, \quad \tilde{\rho}_v^0 \subset \tilde{r},$$

tandis que: $\tilde{r}^0 = \sum_1^{\infty} \tilde{\rho}_v$, $\tilde{\rho}_v = \tilde{\rho}_v^0 + e_v$, $e_v = (*)$ (7.8), les $\tilde{\rho}_v$ sont disjoints et tout $\tilde{\rho}_v$ est contenu dans une sphère s_i de $\mathfrak{N}$; en posant $\tilde{\rho}^v = \tilde{\rho}_1 + \dots + \tilde{\rho}^v$ il vient $\tilde{\rho}^v \uparrow \tilde{r}^0$, $\Psi(\tilde{\rho}^v) \rightarrow \Psi(\tilde{r}^0) = \Psi(\tilde{r})$ et

$$(a_2) \quad \Psi(\tilde{\rho}^v) = \sum_{j=1}^v \int_{\tilde{\rho}_j^0}^0 y \odot dm = \int_{\tilde{\rho}^v}^0 y \odot dm.$$

On vient d'utiliser l'affirmation (7.9) et la propriété de la complète additivité dans $\mathfrak{N}^s$ de la totale Ψ .

DÉFINITION 10.3. - Soit un $\tilde{r} \subset \mathbb{R}^0$; on dira qu'une intégrale $\int_{\tilde{r}}^{s:1} y \odot dm$ de rang 1 existe, s'il y a un $e \in (*)$ (7.8), $\subset \tilde{r}$, et une suite $\tilde{h}^v \uparrow \tilde{r} - e$, telle que

les intégrales $I_v = \int_{\tilde{h}^v}^0 y \odot dm$ existent, $\lim_v I_v$ existe;

dans ce cas on écrira

$$(10.3a) \quad \lim_v I_v = I = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:1} y \odot dm = \text{une} \int_{\tilde{r}-e}^{s:1} y \odot dm.$$

D'accord avec cette définition, (a₁), (a₂) signifient que

$$(10.4) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:1} y \odot dm \quad \text{dans } \mathbb{R}^0 - p_{0,1},$$

c'est-à-dire, pour tout $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset \mathbb{R}^0 - p_{0,1}$.

On peut vérifier l'affirmation suivante.

(10.5). - Si $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ (de $\mathfrak{N}^s$) sont disjoints et

$$I(\tilde{\alpha}) = \text{une} \int_{\tilde{\alpha}}^{s:1} y \odot dm, \quad I(\tilde{\beta}) = \text{une} \int_{\tilde{\beta}}^{s:1} y \odot dm,$$

on aura $I(\tilde{\alpha}) + I(\tilde{\beta}) = \text{une} \int_{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}^{s:1} y \odot dm$ [la démonstration est à la manière de celle de l'énoncé (9.12)].

Si $p_{0,1}$ n'est pas parfait-s au sens de (7.13), soit x_0 un point isolé-s, $x_0 \in \mathbb{R}^0$; il y a une sphère s_0 de G^s telle que $s_0 \subset \mathbb{R}^0$, $s_0 \ni x_0$, $s_0 p_{0,1} \subset g_0$, où g_0 est la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{N}^s$. Soit $\mathfrak{N} = \{\sigma_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) la famille des σ_i , $\in G^s$, telles que

$$(b_1) \quad \sigma_i = \mathbb{R}^0, \quad \sigma_i p_{0,1}$$

(non vide) $\subset g_i$, g_i étant la frontière d'un r_i de $\mathfrak{N}^s$ contenu dans $\mathbb{R}^0$. L'ensemble $e_{0,1}$ des points isolés-s dans $p_{0,1}$ est couvert par $\mathfrak{N}$; $\sigma_i p_{0,1} \in (*)$, $\Psi(\sigma_i p_{0,1}) = 0$, tandis que $\sigma_i - \sigma_i p_{0,1} \in \mathfrak{N}^s$ et $\Psi(\sigma_i) = \Psi(\sigma_i - \sigma_i p_{0,1})$; par définition $p_{0,2} = p_{0,1} - e_{0,1}$; on note que

$$(b_2) \quad e_{0,1} = \Sigma \sigma_i p_{0,1}, \quad p_{0,2} \text{ est fermé dans } \mathbb{R}^0.$$

Designons par $\mathfrak{N}' = \{\sigma^k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) la famille des sphères de G^s contenues dans $\mathbb{R}^0 - p_{0,1}$; on a $\mathbb{R}^0 - p_{0,1} = \Sigma \sigma^k$; $\mathbb{R}^0 - p_{0,2}$ est couvert par $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$. Si un $\tilde{r} \subset \mathbb{R}^0 - p_{0,2}$, en tant que $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ couvre $\tilde{r}$ on pourra procéder comme dans (a₁)-(a₂), mais avec $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ au lieu de la famille $\mathfrak{N}$ y intervenant. Ainsi $\tilde{r}^0 = \sum_1^\infty \tilde{\rho}_v$, $\tilde{\rho}_v = \tilde{\rho}_v^0 + e_v$, $e_v \in (*)$, les $\tilde{\rho}_v$ et les $\tilde{\rho}_v^0$ (de $\mathfrak{N}'$) étant disjoints, tandis que tout $\tilde{\rho}_v$ est dans une σ_i ou bien dans une σ^k ; $\tilde{\rho}^v = \tilde{\rho}_1 + \dots + \tilde{\rho}_v$

$$(b_3) \quad \Psi(\tilde{r}) = \Psi(\tilde{r}^0) = \lim_v \Psi(\tilde{\rho}^v), \quad \Psi \tilde{\rho}^v = \sum_{j=1}^v \Psi(\tilde{\rho}_j^0) = \sum_{j=1}^v \Psi(\tilde{\rho}_j).$$

Puisque $\sigma_i p_{0,1} \in (*)$, l'ensemble $\sigma_i^- = \sigma_i - \sigma_i p_{0,1} \in \mathfrak{N}^s$ et $\sigma_i^- \subset \mathbb{R}^0 - p_{0,1}$; d'après (10.4), (10.3a) on obtient

$$\Psi(\sigma_i) = \Psi(\sigma_i^-) = \text{une} \int_{\sigma_i^-}^{s:1} y \odot dm = \text{une} \int_{\sigma_i}^{s:1} y \odot dm.$$

Pour $\tilde{r} \subset$ un σ_i , on pose $\tilde{r}^- = \tilde{r} - \tilde{r} p_{0,1}$; ici $\tilde{r} p_{0,1} \subset \sigma_i p_{0,1} \subset g_i$, donc $\tilde{r} p_{0,1} \in (*)$ et [selon (10.4), (10.3a)]

$$(b_4) \quad \Psi(\tilde{r}) = \Psi(\tilde{r}^-) = \text{une} \int_{\tilde{r}^-}^{s:1} y \odot dm = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:1} y \odot dm.$$

$\sigma^k \subset \mathbb{R}^0 - p_{0,1}$, donc (10.4):

$$(b_5) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:1} y \odot dm \text{ pour tout } \tilde{r} \subset \sigma^k,$$

Or tout $r_{v,i}$ (de $\mathfrak{N}$) est dans une σ_m ou dans une σ^* ; par conséquent, d'après (b₃)-(b₅) et en tenant compte de l'additivité au sens de (10.5), il suit que

$$(b_6) \quad \Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}^\nu}^{s:1} y \odot dm.$$

DÉFINITION 10.6. - Soit α (> 0) des classes I, II. Si α est de la première espèce, on dira $I(\tilde{r})$ est intégrale de rang α pour un $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{N}$) $\subset \mathfrak{R}^0$, une $\int_{\tilde{r}}^{s:\alpha} y \odot dm$, s'il y a un ensemble e ($\subset \tilde{r}$) de $(*)$ et des ensembles $\tilde{h}^\nu \uparrow \tilde{r} - e$, tels que

$$(10.6a) \quad I(\tilde{r}) = \lim_{\nu} I(\tilde{h}^\nu),$$

où $I(\tilde{h}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{h}^\nu}^{s:\alpha-1} y \odot dm$. Soit α de la seconde espèce; on dira que $I(\tilde{r})$ est une intégrale de rang α pour un $\tilde{r} \subset \mathfrak{R}^0$, $I(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:\alpha} y \odot dm$, si des nombres

$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$, $\alpha_\nu < \alpha$, un ensemble e ($\subset \tilde{r}$) $\in (*)$, des $\tilde{h}^\nu \uparrow \tilde{r} - e$ ($\nu = 1, 2, \dots$) existent, de sorte que

$$(10.6b) \quad I(\tilde{r}) = \lim_{\nu} I(\tilde{h}^\nu), \text{ où } I(\tilde{h}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{h}^\nu}^{s:\alpha_\nu} y \odot dm.$$

Revenons à (b₁)-(b₆); en tenant compte des relations $\Psi(\tilde{r}) = \lim_{\nu} \Psi(\tilde{\rho}^\nu)$, $\tilde{\rho}^\nu \uparrow \tilde{r}^0$, $\tilde{r} - \tilde{r}^0 \in (*)$, il vient

$$(10.7) \quad \Psi(\tilde{r}) = \Psi(\tilde{r}^0) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:2} y \odot dm \quad \text{dans } \mathfrak{R}^0 - p_{0,2} \quad (\text{dans } \mathfrak{R} - p_{0,2}).$$

$$(10.8) \quad \tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta} = 0, \quad I(\tilde{\alpha}) = \text{une} \int_{\tilde{\alpha}}^{s:\alpha} y \odot dm, \quad I(\tilde{\beta}) = \text{une} \int_{\tilde{\beta}}^{s:\alpha} y \odot dm$$

entraînent

$$I(\tilde{\alpha}) + I(\tilde{\beta}) = \text{une} \int_{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}^{s:\alpha} y \odot dm.$$

Cette proposition se démontre à la manière de l'énoncé (9.15), en s'appuyant sur la définition 10.6.

On envisage la suite d'ensembles $p_{1,\alpha}$ (α des classes I, II) fermés dans $\mathcal{R}^0$:

$$(10.9) \quad \mathcal{R}^0 = P_0 \supset p_{0,1} \supset p_{0,2} \supset \dots p_{0,\alpha} \supset \dots,$$

où $p_{0,1}$ (10.2) est non dense dans $\mathcal{R}^0$ et $p_{0,2}$ est l'ensemble survenant à la suite de (b_1) ; pour α de la première espèce $p_{0,\alpha} = p_{0,\alpha-1} - e_{0,\alpha-1}$, $e_{0,\alpha-1}$ désignant l'ensemble des points isolés-s dans $p_{0,\alpha-1}$; si α est de la seconde espèce, $p_{0,\alpha} = \pi(\gamma < \alpha)p_{0,\gamma}$. Pour un β_1 minimal la suite (10.9) se stabilise et

$$(10.9a) \quad P_1 = p_{1,\beta_1} (< \mathcal{R}^0)$$

est parfait-s dans $\mathcal{R}^0$ et non dense dans $\mathcal{R}^0$.

LEMME 10.10. - *Admettons (10.1); alors*

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:\alpha} y \odot dm \quad \text{dans } \mathcal{R}^0 - p_{0,\alpha} \quad (1 \leq \alpha \leq \beta_1);$$

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:\beta_1} y \odot dm \quad \text{dans } \mathcal{R}^0 - P_1.$$

Pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ cette affirmation a été établie plus haut. Si $\alpha (> 1)$ est de la première espèce et l'énoncé a été vérifié pour $\alpha - 1$, nous considérons les familles $\mathcal{U} = \{\sigma_i\}$, $\mathcal{U}' = \{\sigma^k\}$ des sphères de G^s , telles que $\sigma_i \subset \mathcal{R}^0$, $\sigma_i p_{0,\alpha-1} (\neq 0) \subset$ la frontière d'un r_i (de $\mathcal{U}'$) contenu dans $\mathcal{R}^0$, tandis que $\sigma^k \subset \mathcal{R}^0 - p_{0,\alpha-1}$; $e_{0,\alpha-1} = \Sigma \sigma_i p_{0,\alpha-1}$ est l'ensemble des points isolés-s dans $p_{0,\alpha-1}$; $p_{0,\alpha} = p_{0,\alpha-1} - e_{0,\alpha-1}$; on obtient la conclusion du lemme pour α (de la première espèce) en procédant comme dans $(b_1)-(b_6)$, (10.7) et en s'appuyant sur la propriété d'additivité au sens de (10.8).

Soit α de la seconde espèce et supposons que $\Psi = \text{une} \int \dots$ dans $\mathcal{R}^0 - p_{0,\gamma}$ pour tout $1 \leq \gamma < \alpha$; on pose $p_{0,\alpha} = \Pi(\gamma < \alpha)p_{0,\gamma}$. Envisageons la famille $\mathcal{U} = \{\sigma_i\}$ des sphères de G^s , telles que toute σ_i est contenue dans $\mathcal{R}^0 - p_{0,\gamma}$ pour un $\gamma = \gamma < \alpha$; $\mathcal{U}$ couvre $\mathcal{R}^0 - p_{0,\alpha}$. Soit un $\tilde{r} \subset \mathcal{R} - p_{0,\alpha}$; on a

$$\tilde{r}^0 = \sum_1^\infty \tilde{\rho}_k, \text{ les } \tilde{\rho}_k \text{ disjoints, tout } \tilde{\rho}_k \subset \sigma_{i_k} \text{ (de } \mathcal{U});$$

on note que

$$(c_1) \quad \Psi(\tilde{\rho}_k) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}_k}^{s:\gamma_k} y \odot dm, \quad (\gamma_k = \gamma(i_k) < \alpha);$$

en posant $\tilde{\rho}^\nu = \tilde{\rho}_1 + \dots + \tilde{\rho}_\nu$, il résulte que

$$(c_2) \quad \Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \sum_{k=1}^{\nu} \Psi(\tilde{\rho}_k), \text{ où } \Psi(\tilde{\rho}_k) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}_k}^{s:\alpha'_\nu} y \odot dm,$$

avec $\alpha'_\nu = \sup(1 \leq k \leq \nu) \gamma_k$, $\alpha'_\nu < \alpha$, $\alpha'_\nu \uparrow$. On obtient

$$(c_3) \quad \Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}^\nu}^{s:\alpha'_\nu} y \odot dm, \quad \Psi(\tilde{r}) = \Psi(\tilde{r}^0) =$$

$$\text{une} \int_{\tilde{r}^0}^{s:\alpha} \dots \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:\alpha} \dots \quad \text{dans } \mathfrak{R} - p_{0,\alpha} \text{ (}\alpha \text{ de seconde espèce),}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

(10.11). - $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\lambda \dots$ (λ des classes I, II) étant des nombres de la première espèce, on obtient une suite transfinie d'ensembles

$$(10.11') \quad \mathfrak{R}^0 = P_0 > p_{0,1} \supset p_{0,2} \supset \dots \supset p_{0,\beta_1} = P_1 > p_{1,1} \supset p_{1,2} \supset \dots \supset p_{1,\beta_2} = P_2 > \dots$$

$$P_\alpha > p_{\alpha,1} \supset p_{\alpha,2} \supset \dots \supset p_{\alpha,\beta_{\alpha+1}} = P_{\alpha+1} > p_{\alpha+1,1} \supset \dots;$$

les P_α surviennent seulement pour α de la première espèce, les P_α sont parfaits-s dans $\mathfrak{R}^0$; les ensembles dans (10.11') sont fermés dans $\mathfrak{R}$;

$$(10.11'') \quad p_{\alpha,1} = \Pi(\gamma < \alpha) p_{\gamma,1} = \Pi(\gamma < \alpha) P_\gamma$$

pour α de la seconde espèce.

(10.11*). - Les β_λ ne sont pas définis pour λ de la seconde espèce; les $\beta_{\lambda+1}$ ne sont pas définis pour $\lambda \in (E^*)$, où (E^*) est la classe des λ , tels que

(E^*) λ est de seconde espèce et $p_{\lambda,1} = P_{\lambda+1}$, e.g. $p_{\lambda,1}$ est parfait-s dans $\mathfrak{R}^0$.

La constatation (10.10)-(E*) est pareille à (9.18)-(9.18*); pourtant à présent la désignation « parfait-s » est au sens de la section 7.

Nous tenons compte de $(T^*; (8.1)-(8.2a); (8.1_0), (8.2_0))$. Soit $\{s_i\}$ la famille des sphères de G^s , telles que

$$(d_1) \quad s_i \subset \mathfrak{R}^0, \quad s_i P_1 \neq 0, \quad \Psi(\tilde{\rho}) = \int_{\tilde{\rho}^{P_1}}^0 y \odot dm + \int_{\tilde{\rho}}^s \Psi^{(P_1)} \quad (\text{rel. à } P_1)$$

pour tout $\tilde{\rho}$ (de $\mathfrak{M}^s$) $\subset s_i$, y étant intégrable- m sur $s_i P_1$; l'ensemble

$$(d_2) \quad p_{1,1} P_1 - \Sigma s_i P_1 \quad \text{est fermé dans } \mathcal{R}^0, \text{ non dense sur } P_1.$$

Soit $\{s^k\}$ la famille des sphères de G^s telles que $s^k \subset \mathcal{R}^0 - P_1$. On note que

$$(d_3) \quad \text{la famille} \quad \mathfrak{M} = \{s_i\} + \{s^k\} \quad \text{couvre } \mathcal{R}^0 - p_{1,1}.$$

Si un $\tilde{r} \subset \mathcal{R}^0 - p_{1,1}$ et $\tilde{r}^0 \neq 0$, on a $\tilde{r}^0 \subset \mathfrak{M}_0^s$, tandis que $\tilde{r}^0$ est couvert par $\mathfrak{M}$. Il existent alors des $\tilde{\rho}_\nu$ disjoints, tout $\tilde{\rho}_\nu$ étant dans un s_i ou dans un s^k , de sorte que

$$\tilde{r}^0 = \sum_1^\infty \tilde{\rho}_\nu; \text{ en posant } \tilde{\rho}^\nu = \tilde{\rho}_1 + \dots + \tilde{\rho}_\nu, \text{ on obtient}$$

$$(d_4) \quad \Psi(\tilde{r}) = \lim \Psi(\tilde{\rho}^\nu), \quad \Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \sum_{j=1}^\nu \Psi(\tilde{\rho}_j).$$

En vertu du lemme 10.10

$$(d_5) \quad \Psi(\tilde{\rho}_\nu) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}_\nu}^{s: P_1} y \odot dm, \quad \text{si } \tilde{\rho}_\nu \subset \text{un } s^k;$$

en outre, si $\tilde{\rho}_\nu \subset \text{un } s_j$,

$$(d_6) \quad \Psi(\tilde{\rho}_\nu) = \int_{\tilde{\rho}_\nu P_1}^0 y \odot dm + \int_{\tilde{\rho}_\nu}^s \Psi^{(P_1)} \quad (\text{rel. à } P_1).$$

D'après $(T^*; (8.1)-(8.2a))$ l'intégrale de BURKILL au second membre dans (d_6) est exprimable comme il suit:

$$\int_{\tilde{\rho}_\nu}^s \Psi^{(P_1)} (\text{rel. à } P_1) = \lim \Psi^{(P_1)}(S) (\text{rel. à } P_1), \text{ lorsque } N(\tilde{\rho}_\nu^0, S) \rightarrow 0,$$

où $S = \{\sigma_i(x_i)\}$ est un système variable fini (rel. à P_1) de sphères fermées $\sigma_i = \sigma_i(x_i)$ disjointes, contenues dans $\tilde{\rho}_\nu^0$, x_i désignant le centre de σ_i ; $x_i \notin P_1$ implique $\sigma_i(x_i)P_1 = 0$; d'accord avec (7.11)

$$(d_7) \quad N(\tilde{\rho}_\nu^0, S) = \sup [M\{\sigma_i\}, \quad v(\tilde{\rho}_\nu^0 - \Sigma_j \sigma_j)], \quad M\{\sigma_i\} = \sup_i v(\sigma_i),$$

$v(\dots)$ étant la mesure absolue. Soit $S^m = \{\sigma_i^m\}$ ($m = 1, 2, \dots$) une suite de systèmes finis, chacun de la même sorte que S , avec

$$\sigma_i^m = \sigma_i^m(x_i^m) \text{ } [x_i^m \text{ étant le centre de } \sigma_i^m], \quad \lim_m N(\tilde{\rho}_\nu^0, S^m) = 0;$$

alors

$$(d_8) \quad \int_{\tilde{\rho}_v}^s \Psi^{(P_1)} \text{ (rel. à } P_1) = \lim_m \Psi^{(P_1)}(S^m),$$

où

$$(d_9) \quad \Psi^{(P_1)}(S^m) = \Sigma_j(x_i^m \notin P_1) \Psi(\sigma_i^m(x_i^m));$$

S^m étant relativement à P_1 , $x_i^m \notin P_1$ implique $\sigma_i^m P_1 = 0$; $\sigma_i^m \subset \tilde{\rho}_v^0$; les σ_i^m pour m fixe sont disjointes et en nombre fini; les σ_i^m qui interviennent au second membre de (d₉) sont contenues dans $\tilde{\rho}_v^0 - P_1 \tilde{\rho}_v^0$. Posons

$$(d_{10}) \quad \tilde{\rho}'_v(m) = \Sigma'_j[x_i^m \notin P_1] \sigma_i^m, \quad \tilde{\rho}''_v(m) = \Sigma''_j[x_i^m \in P_1] \sigma_i^m;$$

on aura $\tilde{\rho}'_v(m) \cdot \tilde{\rho}''_v(m) = 0$, $\tilde{\rho}'_v(m) \subset \rho_v^0 - P_1 \tilde{\rho}_v^0$; de plus

$$\varepsilon_v(m) = v(\tilde{\rho}_v^0 - \Sigma_i \sigma_i^m) = v[\tilde{\rho}_v^0 - (\tilde{\rho}'_v(m) + \tilde{\rho}''_v(m))] (\leq N(\tilde{\rho}_v^0, S^m)) \rightarrow 0 \quad (\text{pour } m \rightarrow \infty).$$

D'après (d₉), (d₁₀) et le lemme 10.10

$$(d_{11}) \quad \Psi^{(P_1)}(S^m) = \Psi(\tilde{\rho}'_v(m)) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}'_v(m)}^{s: \beta_1} y \odot dm \quad (m = 1, 2, \dots),$$

si $\tilde{\rho}_v \subset$ un s_j . Les σ_i^m , x_i^m qui interviennent plus haut sont en rapport avec $\tilde{\rho}_v$, donc ils dépendent de v .

(10.12). - Soient un p parfait- s dans $\mathfrak{R}^0$ et un $\tilde{\rho}$ (de $\mathfrak{N}\mathfrak{C}^s$) $\subset \mathfrak{R}^0$.

On dira qu'un élément I vaut sur $\tilde{\rho} - p\tilde{\rho}$ une intégrale de rang $(\beta_1, 0)$, à savoir

$$I = \text{une} \int_{\tilde{\rho} - p\tilde{\rho}}^{s: (\beta_1, 0)} y \odot dm,$$

s'il existe une suite $S^m = \{\sigma_i^m\}$ [($m = 1, 2, \dots$), x_i^m étant le centre de la sphère fermée σ_i^m] de systèmes finis, rel. à P_1 , de sphères disjointes (pour tout m fixe), contenues dans $\tilde{\rho}^0$, et avec $\lim_m N(\tilde{\rho}^0, S^m) = 0$, de sorte que des éléments I_m existent, tels que

$$I_m = \text{une} \int_{\tilde{\rho}'_v(m)}^{s: \beta_1} y \odot dm, \quad \text{où } \tilde{\rho}'_v(m) = \Sigma'_j[x_i^m \notin p] \sigma_i^m, \quad \text{et que } I = \lim_m I_m$$

[on observe que $\tilde{\rho}'_v(m) \subset \tilde{\rho}^0 - p\tilde{\rho}^0$],

En tenant compte de cette définition et de (d_{11}) , (d_8) , il vient

$$(10.13) \quad \int_{\tilde{\rho}_v}^s \Psi^{(P_1)} \text{ (rel. à } P_1) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}_v - P_1 \tilde{\rho}_v}^{s: (\beta_1, 0)} y \odot dm,$$

si $\tilde{\rho}_v \subset \text{un } s_j$; dans ce cas (d_6) :

$$(10.13a) \quad \Psi(\tilde{\rho}_v) = \int_{\tilde{\rho}_v - P_1}^0 y \odot dm + \text{une} \int_{\tilde{\rho}_v - P_1 \tilde{\rho}_v}^{s: (\beta_1, 0)} y \odot dm,$$

On peut vérifier la fait suivant.

(10.14). - Si ρ est parfait-s dans $\mathfrak{R}^0$ et $\tilde{\alpha} \subset \mathfrak{R}^0$, $\tilde{\beta} \subset \mathfrak{R}^0$, $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta} = 0$, tandis que

$$I_1 = \text{une} \int_{\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_P}^{s: (\beta_1, 0)} y \odot dm, \quad I_2 = \text{une} \int_{\tilde{\beta} - \tilde{\beta}_P}^{s: (\beta_1, 0)} y \odot dm,$$

il suit que $I_1 + I_2 = \text{une} \int_{\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_P}^{s: (\beta_1, 0)} y \odot dm$, où $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$.

Introduisons les ensembles

$$(e_1) \quad \tilde{\rho}'(v) = \Sigma'_i [1 \leq i \leq v; \tilde{\rho}_i \subset \text{un } s^k] \tilde{\rho}_i, \quad \tilde{\rho}''(v) = \Sigma''_i [1 \leq i \leq v; \tilde{\rho}_i \subset \text{un } s_j] \tilde{\rho}_i;$$

on aura $\tilde{\rho}'(v) \tilde{\rho}''(v) = 0$, $\tilde{\rho}_v = \tilde{\rho}'(v) + \tilde{\rho}''(v)$; d'après (d_5) et (10.8)

$$(e_2) \quad \Psi(\tilde{\rho}(v)) = \Sigma'_i \Psi(\tilde{\rho}_i) = \Sigma'_i \text{une} \int_{\tilde{\rho}_i}^{s: \beta_1} y \odot dm = \text{une} \int_{\tilde{\rho}(v)}^{s: \beta_1} y \odot dm;$$

de plus, en tenant compte de (10.13a), (10.14) il résulte

$$(e_3) \quad \begin{aligned} \Psi(\tilde{\rho}''(v)) &= \Sigma''_i \Psi(\tilde{\rho}_i) = \int_{\tilde{\rho}''(v) - P_1}^0 y \odot dm + \Sigma''_i \text{une} \int_{\tilde{\rho}_i - P_1 \tilde{\rho}_i}^{s: (\beta_1, 0)} y \odot dm \\ &= \int_{\tilde{\rho}''(v) - P_1}^0 y \odot dm + \text{une} \int_{\delta(v)}^{s: (\beta_1, 0)} y \odot dm, \quad \delta(v) = \tilde{\rho}''(v) - P_1 \tilde{\rho}''(v); \end{aligned}$$

par conséquent

$$(e_4) \quad \Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \int_{\tilde{\rho}''(\nu)P_1}^0 \mathbf{y} \odot dm + \text{une} \int_{\tilde{\rho}'(\nu)}^{s:\beta_1} \mathbf{y} \odot dm + \text{une} \int_{\delta(\nu)}^{s:(\beta_1, 0)} \mathbf{y} \odot dm.$$

Envisageons la définition suivante.

(10.15). - Soient p parfait-s dans $\mathfrak{R}^0$, $\tilde{\rho} \subset \mathfrak{R}^0$; $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}' + \tilde{\rho}''$, $\tilde{\rho}'\tilde{\rho}'' = 0$, $\tilde{\rho} \subset \mathfrak{R}^0 - p\mathfrak{R}^0$. Admettons que y est intégrable- m sur $\tilde{\rho}''p$. On dira qu'un élément I est sur $\tilde{\rho}$ une intégrale de y de rang $(\beta_1, 0)$ et on écrira $I = \text{une} \int_{\tilde{\rho}}^{s:(\beta_1, 0)} \mathbf{y} \odot dm$, si

$$(10.15a) \quad I = \int_{\tilde{\rho}''p}^0 \mathbf{y} \odot dm + \text{une} \int_{\tilde{\rho}'}^{s:\beta_1} \mathbf{y} \odot dm + \text{une} \int_{\delta}^{s:(\beta_1, 0)} \mathbf{y} \odot dm,$$

où $\delta = \tilde{\rho}'' - p\tilde{\rho}''$ [cette intégrale est en rapport avec l'ensemble p].

En vertu de cette désignation et de (e₄) il résulte

$$(e_5) \quad \Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}^\nu}^{s:(\beta_1, 0)} \mathbf{y} \odot dm \quad (\text{en rapport avec } P_1).$$

Or selon le texte à la suite de (d₃) et d'après (e₁) on note que

$$(e_6) \quad \rho^\nu \uparrow \tilde{r}^0 \text{ [avec } \tilde{r} \subset \mathfrak{R}^0 - p_{1,1}], \quad \tilde{\rho}'(\nu) \uparrow \rho', \quad \tilde{\rho}''(\nu) \uparrow \rho'',$$

$$\rho'\rho'' = 0, \quad \rho' \subset \mathfrak{R}^0 - P_1, \quad \tilde{r}^0 = \rho' + \rho'';$$

de plus (d₄):

$$(e_7) \quad \Psi(\tilde{r}) = \lim_{\nu} \Psi(\tilde{\rho}^\nu), \quad \Psi(\tilde{\rho}^\nu)$$

étant représentable par (e₄), (e₅).

(10.16). - Un ensemble p étant parfait-s dans $\mathfrak{R}^0$, soit un $\tilde{r} \subset \mathfrak{R}$.

Soient des ensembles $\tilde{\rho}^\nu \uparrow \tilde{r}^0$ et des éléments $\lambda_\nu = \text{une} \int_{\tilde{\rho}^\nu}^{s:(\beta_1, 0)} \mathbf{y} \odot dm$ ($\nu = 1, 2, \dots$), tels que $\lambda = \lim_{\nu} \lambda_\nu$ existe. Selon (10.15) des ensembles $\tilde{\rho}'(\nu)$, $\tilde{\rho}''(\nu)$ existent de sorte que

$$\tilde{\rho}(\nu)\tilde{\rho}''(\nu) = 0, \quad \tilde{\rho}^\nu = \tilde{\rho}'(\nu) + \tilde{\rho}''(\nu), \quad \tilde{\rho}(\nu) \subset \mathfrak{R}^0 - p\mathfrak{R}^0, \quad \tilde{\rho}''(\nu) \subset \mathfrak{R}^0,$$

tandis que

$$\lambda_\nu = \int_{\tilde{\rho}'(\nu)p}^0 \mathbf{y} \odot dm + \text{une} \int_{\tilde{\rho}'(\nu)}^{s:\beta_1} \mathbf{y} \odot dm + \text{une} \int_{\delta(\nu)}^{s:(\beta_1, 0)} \mathbf{y} \odot dm \quad (\delta(\nu) = \rho''(\nu) - p\rho''(\nu));$$

on suppose que $\tilde{\rho}'(\nu) \uparrow$ et $\tilde{\rho}''(\nu) \uparrow$ pour $\nu \uparrow \infty$. Alors on dira que λ est sur $\tilde{r}$ une intégrale de y de rang $(\beta_1, 1)$:

$$(10.16a) \quad \lambda = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s: (\beta_1, 1)} y \odot dm \quad (\text{en rapport avec } p).$$

En tenant compte de cette définition et de (e_5) -(e_7), on conclut comme il suit.

LEMME 10.17. - Si l'on admet (10.1) et note les ensembles survenant dans (10.9) et (10.11'), il suit que

$$(10.17a) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s: (\beta_1, 1)} y \odot dm \quad \text{dans } \mathfrak{R}^0 - p_{1,1} \quad (\text{en rapport avec } P_1).$$

(10.18). - Il y a de l'additivité au sens fini pour les intégrales des rangs $(\beta_1, 0)$, $(\beta_1, 1)$.

Cela se démontre d'une façon pareille aux preuves des énoncés analogues (9.26), (9.27).

DÉFINITION 10.19. - Nous adaptons la définition (9.28) des rangs d'intégrales à la situation actuelle, en rapport avec (10.11)-(10.11''), de la façon suivante.

(f₁) $\delta(0 \leq \delta \leq \beta_1)$ [pour $\delta = 0$ selon (9.9), pour $\delta > 0$ d'après (10.3), (10.6)];

(f₂) $(b_1, 0) = (\beta_1, 0)$ [cf. (10.15), en rapport avec $p = P_1$];

$(b_1, 1) = (\beta_1, 1)$ [cf. (10.16), en rapport avec $p = P_1$]; $(b_1, \delta)(0 \leq \delta \leq \beta_2)$; $b_2 = (b_1, \beta_2) = (\beta_1, \beta_2)$, pour α de la première espèce, les β_λ dans la désignation $b_\alpha = (\beta_1, \dots, \beta_\alpha)$ sont ceux qui existent [voir (10.11*)] et pour lesquels $\lambda \leq \alpha$; les β_λ qui surviennent sont ceux avec $\lambda, \leq \alpha$, de la première espèce, tels que $\lambda - 1 \notin E^*$ (10.11*).

(f₃) $(b_\alpha, \delta)(0 \leq \delta \leq \beta_{\alpha+1})$ pour α de la première espèce.

(f₄) $(b_\alpha, \delta)(2 \leq \delta \leq \beta_{\alpha+1})$ si α est de la seconde espèce tandis que

$$p_{\alpha,1} > P_{\alpha+1} = p_{\alpha, \beta_{\alpha+1}}.$$

Ci-après on définit les rangs (f₃) selon (10.20)-(10.20'), les rangs (f₄) d'après (10.21); pour α de la seconde espèce la définition du rang b_α se trouve dans (10.22).

(10.20). - *Envisageons un p parfait-s dans $\mathbb{R}^0$ et un $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{N}^s$) $\subset \mathbb{R}^0$; soit α de la première espèce. On dira que $I = \text{une } \int_{\tilde{r}-p\tilde{r}}^{s:(b_\alpha, 0)} y \odot dm$, s'il y a une suite $S^m = \{ \sigma_i^m \} [(m = 1, 2, \dots), x_i^m \text{ étant le centre de la sphère fermée } \sigma_i^m]$ de systèmes finis de sphères disjointes pour tout m fixe, relativement à p , avec $\sigma_i^m \subset \tilde{r}^0$ et $\lim_m N(\tilde{r}^0, S^m) = 0$, tels que les I_m existent de sorte que $I_m = \text{une } \int_{\tilde{r}'(m)}^{s:b_\alpha} y \odot dm$, où $\tilde{r}'(m) = \Sigma_i' [x_i^m \notin p] \sigma_i^m (\subset \tilde{r}^0 - p\tilde{r}^0)$, $I = \lim I_m$. Avec le même p et α , soit $\tilde{\rho} \subset \mathbb{R}^0$; $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}' + \tilde{\rho}''$, $\tilde{\rho}' \subset \mathbb{R}^0 - p\mathbb{R}^0$, y étant intégrable- m sur $\tilde{\rho}''p$; on dira que $J = \text{une } \int_{\tilde{\rho}''p}^{s:(b_\alpha, 0)} y \odot dm$ (en rapport avec p), si*

$$J = \int_{\tilde{\rho}''p}^0 y \odot dm + \text{une } \int_{\tilde{\rho}'}^{s:b_\alpha} y \odot dm + \text{une } \int_{\tilde{\delta}}^{s:(b_\alpha, 0)} y \odot dm, \quad \tilde{\delta} = \tilde{\rho}'' - p\tilde{\rho}''.$$

(10.20'). - *Soient α de la première espèce, un p parfait-s dans $\mathbb{R}^0$, un $\tilde{r} \subset \mathbb{R}$. Supposons qu'il y a des $\tilde{\rho}^\nu \uparrow \tilde{r}^0$ et des éléments $\lambda_\nu = \text{une } \int_{\tilde{\rho}^\nu}^{s:(b_\alpha, 0)} y \odot dm$ (en rapport avec p), de sorte que la limite $\lambda = \lim \lambda_\nu$ existe. D'après la définition (10.20) des ensembles $\tilde{\rho}'(\nu)$, $\tilde{\rho}''(\nu)$ existent, tels que*

$$\tilde{\rho}'(\nu)\tilde{\rho}''(\nu) = 0, \quad \tilde{\rho}^\nu = \tilde{\rho}'(\nu) + \tilde{\rho}''(\nu), \quad \tilde{\rho}'(\nu) \subset \mathbb{R}^0 - p\mathbb{R}^0,$$

$$\lambda_\nu = \int_{\tilde{\rho}''(\nu)p}^0 y \odot dm + \text{une } \int_{\tilde{\rho}'(\nu)}^{s:b_\alpha} y \odot dm + \text{une } \int_{\tilde{\delta}(\nu)}^{s:(b_\alpha, 0)} y \odot dm, \quad \tilde{\delta}(\nu) = \tilde{\rho}'(\nu) - p\tilde{\rho}''(\nu);$$

on suppose que ces ensembles peuvent être choisis tels que $\tilde{\rho}'(\nu) \uparrow$, $\tilde{\rho}''(\nu) \uparrow$. Dans ces conditions on dira que

$$\lambda = \text{une } \int_{\tilde{r}}^{s:(b_\alpha, 1)} y \odot dm \quad (\text{en rapport avec } p).$$

(10.20''). - *Soient un $f, \subset \mathbb{R}^0$, fermé dans $\mathbb{R}^0$, α de la première espèce, un $\tilde{\delta}(> 1)$, des classes I, II. Si $\tilde{\delta}$ est de la première espèce, on dira que*

$$\lambda(\tilde{r}) = \text{une } \int_{\tilde{r}}^{s:(b_\alpha, \tilde{\delta})} y \odot dm \quad \text{dans } \mathbb{R} - f$$

[e.g. pour tout $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{M}^s) \subset \mathfrak{R} - f$], s'il existent un $e (\subset \tilde{r}) \in (*)$, des $\tilde{h}^\nu \uparrow \tilde{r} - e$ et des éléments λ_ν , de sorte que

$$\lambda_\nu = \text{une} \int_{\tilde{h}^\nu}^{s:(b_\alpha, \delta-1)} y \odot dm, \quad \lim_{\nu} \lambda_\nu = \lambda(\tilde{r}),$$

Si δ est de la seconde espèce. On dira que $\lambda = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:(b_\alpha, \delta)} y \odot dm$ dans $\mathfrak{R} - f$ [e.g. pour tout $\tilde{r} \subset \mathfrak{R} - f$], pourvu qu'il y a des nombres $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots$, $\delta_\nu < \delta$ ($\nu = 1, 2, \dots$), un $e (\subset \tilde{r}) \in (*)$ et des $\tilde{h}^\nu \uparrow \tilde{r} - e$, tels que

$$(10.20'a) \quad \lambda = \lim_{\nu} \lambda_\nu, \quad \text{où} \quad \lambda_\nu = \text{une} \int_{\tilde{h}^\nu}^{s:(b_\alpha, \delta_\nu)} y \odot dm,$$

(10.21). - Supposons que α est de la seconde espèce, tandis que (10.11'): $p_{\alpha,1} > P_{\alpha+1}$ ($= p_{\alpha, \beta_{\alpha+1}}$) e.g. $p_{\alpha,1}$ n'est pas parfait-s dans $\mathfrak{R}^0$. Nécessairement $\beta_{\alpha+1} \geq 2$ et on envisage $2 \leq \delta \leq \beta_{\alpha+1}$. On dira qu'un élément λ vaut, pour $\tilde{r}$, une intégrale $\int_{\tilde{r}}^{s:(b_\alpha, 2)} y \odot dm$, si un $e, \subset \tilde{r}$, de $(*)$ et des $\tilde{h}^\nu \uparrow \tilde{r} - e$ existent, tels qu'il y ait des éléments λ_ν ,

$$\lambda_\nu = \text{une} \int_{\tilde{h}^\nu}^{s:b_\alpha} y \odot dm, \quad \lim_{\nu} \lambda_\nu = \lambda.$$

Si δ , $2 < \delta \leq \beta_{\alpha+1}$, est de la première espèce, on dira qu'un élément λ vaut pour un $\tilde{r}$, une intégrale $\int_{\tilde{r}}^{s:(b_\alpha, \delta)} y \odot dm$, pourvu qu'il y a un $e, \subset \tilde{r}$, $\in (*)$, des $\tilde{h}^\nu \uparrow \tilde{r} - e$ et des éléments λ_ν , de sorte que

$$\lambda_\nu = \text{une} \int_{\tilde{h}^\nu}^{s:(b_\alpha, \delta-1)} y \odot dm, \quad \lim_{\nu} \lambda_\nu = \lambda.$$

Enfin, si $\delta (\leq \beta_{\alpha+1})$ est de la seconde espèce et non considère un $\tilde{r} (\subset \mathfrak{R})$, on dira que $\lambda = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:(b_\alpha, \delta)} y \odot dm$, pourvu que la situation décrite en rapport avec (10.20'a) (mais avec α de la seconde espèce) ait lieu.

(10.22). - α de la seconde espèce; un $\tilde{r}$. On dira qu'un élément λ vaut une $\int_{\tilde{r}}^{s:b_\alpha} y \odot dm$, si l'on peut trouver des $\tilde{r}^\nu \uparrow \tilde{r}^0$, des nombres de la première

espèce $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$, $\gamma_\nu < \alpha$ ($\nu = 1, 2, \dots$) et des λ_ν , tels que

$$(10.22a) \quad \lambda_\nu = \text{une} \int_{\tilde{p}^\nu}^{s:b_{\gamma_\nu}} y \odot dm, \quad \lambda = \lim_\nu \lambda_\nu.$$

Les intégrales des divers rangs (10.19) jouissent de la propriété de l'additivité au sens suivant.

LEMME 10.23. - Si b dénote un rang particulier et $\tilde{\alpha}$ ($\subset \mathbb{R}^0$), $\tilde{\beta}$ ($\subset \mathbb{R}^0$) sont disjoints tandis que

$$\Gamma_1 = \int_{\tilde{\alpha}}^{s:b} x \odot dm, \quad \Gamma_2 = \text{une} \int_{\tilde{\beta}}^{s:b} y \odot dm,$$

il suit que $\Gamma_1 + \Gamma_2$ vaut une $\int_{\tilde{\gamma}}^{s:b} y \odot dm$, où $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$.

La démonstration est pareille à celle du lemme 9.32. On fait une remarque analogue à (9.32').

THÉORÈME FONDAMENTAL 10.24. - Soit une fonction y totalisable- S sur un $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{N}^s$, $\mathbb{R}^0 \neq 0$; posons $\Psi(\tilde{r}) = (S) \int_{\tilde{r}} y \odot dm$ dans $\mathcal{R}$. Considérons les ensembles (10.11)-(10.11''); on définit les rangs des diverses intégrales en rapport avec ces ensembles (définition 10.19). On conclut ainsi:

$$(g_1) \quad \Psi(\tilde{r}) = \int_r^{s:\delta} y \odot dm \quad [\text{dans } \mathcal{R} - p_{0,\delta}; \ 1 \leq \delta \leq \beta_1];$$

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_r^{s:b_1} y \odot dm \quad [\text{dans } \mathcal{R} - P_1; \ b_1 = (\beta_1)];$$

$$(g_2) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_r^{s:(\beta_n^1)} y \odot dm \quad [\text{dans } \mathcal{R} - p_{1,1}];$$

ici $\int_r^{s:0} \dots = \int_r^0 \dots$ est l'intégration- m ; pour α de la première espèce

$$(g_3) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_r^{s:(b_\alpha, \delta)} y \odot dm \quad [\text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha,\delta}; \ 1 \leq \delta \leq \beta_{\alpha+1}],$$

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_r^{s:b_\alpha} \dots \quad [\text{dans } \mathcal{R} - P_\alpha];$$

pour α de la seconde espèce

$$(g_4) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s; b_\alpha} y \odot dm \quad [\text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha,1}].$$

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s(b_\alpha, \delta)} y \odot dm \quad [\text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, \delta}; 2 \leq \delta \leq \beta_{\alpha+1}, \text{ si } p_{\alpha,1} > P_{\alpha+1} = p_{\alpha, \beta_{\alpha+1}}],$$

Pour un α' minimal de la première espèce $p_{\alpha',1} = 0$; correspondamment

$$(10.24a) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s(b_{\alpha'}, 1)} y \odot dm \quad \text{dans } \mathcal{R}, \text{ avec } b_{\alpha'} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha'}).$$

Les affirmations (g_1) , (g_2) ont été vérifiées dans les lemmes 10.10, 10.17. L'antériorité d'un rang à un autre, désignée par $<$, sera entendue d'accord avec le texte en rapport avec (j_1) à la suite de (9.32'). La démonstration sera par l'induction transfinie et sera modelée sur celle du théorème 9.33. Soit b un rang particulier; b sera donné selon un des huit cas de la section 9:

(I.A), (I.B), (I.C), (I.D), (II.A), (II.B), (II.C), (II.D);

au cas (I.D) on suppose que β_α (10.11*) existe, de sorte que $b_{\alpha-1} < b_\alpha$; aux cas (II.A), (II.B), (II.C) on suppose que $p_{\alpha,1} > P_{\alpha+1}$, e.g. que $p_{\alpha,1}$ est non parfait-s dans $\mathcal{R}^0$ (alors $2 \leq \beta_{\alpha+1}$).

Dans ce qui suit on s'appuie sur la définition 10.19 des rangs et sur l'additivité selon le lemme 10.23.

Au cas (I.A) admettons que Ψ est de rang b_α dans $\mathcal{R} - P_\alpha$; on a $p_{\alpha-1, \beta_\alpha} = P_\alpha$. Nous suivons les procédés de la sorte survenant dans $(d_1) \cdot (d_{11})$, avec P_α , $p_{\alpha,1}$, le rang b_α au lieu de P_1 , $p_{1,1}$ et le rang β_1 ; on est mené aux intégrales

$$\int_{\tilde{r}-P_\alpha}^{s(b_\alpha, 0)} \dots, \quad \int_{\tilde{r}}^{s(b_\alpha, 0)} \dots, \quad \int_{\tilde{r}}^{s(b_\alpha, 1)} \dots \quad (\text{en rapport avec } P_\alpha).$$

En procédant comme de (10.12) jusqu'au lemme 10.17, il vient

$$(h_1) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s(b_\alpha, 1)} y \odot dm \quad \text{dans } \mathcal{R} - p_{\alpha,1} \quad [\text{ici } (b_\alpha, 1) = b].$$

Si b est selon (I.B), supposons que Ψ est de rang $(b_\alpha, \delta - 1)$ dans $\mathcal{R} - p_{\alpha, \delta-1}$.

On considère les familles $\mathcal{O} = \{\sigma_i\}$, $\mathcal{O}' = \{\sigma^k\}$ des sphères de G^s de sorte que

$\sigma_i \subset \mathbb{R}^0$, $\sigma_i p_{\alpha, \delta-1} (\neq 0) \subset$ la frontière d'un r_i (de $\mathcal{O}'$) contenu dans $\mathbb{R}^0$,
 $\sigma^k \subset \mathbb{R}^0 - p_{\alpha, \delta-1}$;

$e_{\alpha, \delta-1} = \sum_i \sigma_i p_{\alpha, \delta-1}$ est l'ensemble des points isolés- s dans $p_{\alpha, \delta-1}$, tandis que
 $p_{\alpha, \delta} = p_{\alpha, \delta-1} - e_{\alpha, \delta-1}$. En adaptant les développements (b₁)-(b₆) et la première
 partie de la démonstration du lemme 10.10, on obtient que

$$(h_2) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:b} y \odot dm \text{ dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, \delta} [b = (b_\alpha, \delta) \delta \text{ de la première espèce, } \delta \geq 2].$$

CAS (1.C). - On a $p_{\alpha, \delta} = \Pi(\gamma < \delta) p_{\alpha, \gamma}$. Envisageons la famille $\mathcal{O} = \{\sigma_i\}$
 des sphères de G^s , telles que toute $\sigma_i \subset \mathbb{R}^0 - p_{\alpha, \gamma}$ pour un $\gamma = \gamma(i) < \delta$; $\mathcal{O}$
 couvre $\mathbb{R}^0 - p_{\alpha, \delta}$. En adaptant la deuxième partie de la preuve du lemme
 10.10 [voir (c₁)-(c₃)], il résulte que

$$(h_3) \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:b} y \odot dm \text{ dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, \delta} [b = (b_\alpha, \delta), \delta \text{ de la seconde espèce}].$$

CAS (I.D). - Si $\alpha - 1$ est de la seconde espèce (donc β_α , qui existe, ≥ 2)
 on suppose que

Ψ est de rang $b_{\alpha-1}$ dans $\mathcal{R} - p_{\alpha-1, 1}$ (si $\beta_\alpha = 2$),

Ψ est de rang $(b_{\alpha-1}, \beta_\alpha - 1)$ dans $\mathcal{R} - p_{\alpha-1, \beta_\alpha-1}$ (si $\beta_\alpha > 2$);

on fait usage de la définition (10.21), avec $\alpha - 1$ au lieu de α , et on procède
 comme de (10.4) jusqu'au lemme 10.10, ce qui mène à la conclusion

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s:(b_{\alpha-1}, \beta_\alpha)} \dots \text{ dans } \mathcal{R} - p_{\alpha-1, \beta_\alpha}, \text{ où } (b_{\alpha-1}, \beta_\alpha) = b_\alpha \text{ et } p_{\alpha-1, \beta_\alpha} = P_\alpha.$$

En outre, si $\alpha - 1$ est de la première espèce, nous supposons que

Ψ est de rang $(b_{\alpha-1}, \beta_\alpha - 1)$ dans $\mathcal{R} - p_{\alpha-1, \beta_\alpha-1}$;

alors, en utilisant les mêmes méthodes, on obtient que Ψ est de rang $b_\alpha =$
 $= (b_{\alpha-1}, \beta_\alpha)$ dans $\mathcal{R} - P_\alpha$ ($\beta_\alpha \geq 1$).

Les cas (II.A), (II.B), (II.C). - Dans ces trois cas on admet respectivement que

Ψ est de rang b_α dans $\mathcal{R} - p_{\alpha, 1}$, Ψ est de rang $(b_\alpha, \delta - 1)$ dans $\mathcal{R} - p_{\alpha, \delta-1}$,
 Ψ est de rang (b_α, γ) dans $\mathcal{R} - p_{\alpha, \gamma}$ pour tout $\gamma < \delta$;

en faisant usage des méthodes déjà utilisées, on conclut dans les cas respectifs :

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s(b_\alpha, 2)} \dots \text{ dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, 2}, \quad \Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s(\gamma, \delta)} \dots \text{ dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, \delta}$$

($\delta, > 2$ le la première espèce)

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s(b_\alpha, \delta)} \dots \text{ dans } \mathcal{R} - p_{\alpha, \delta} \quad (\delta \text{ de la seconde espèce}).$$

CAS (II.D). - On suppose que

$$\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{b_\gamma} y \odot dm$$

dans $\mathcal{R} - P_\gamma$ pour tout γ de première espèce $< \alpha$.

Nous utilisons la relation $p_{\alpha, 1} = \Pi(\gamma < \alpha)P_\gamma$, les γ intervenant étant de la première espèce. Soit $\mathcal{O} = \{\sigma_i\}$ la famille de toutes les sphères de G^s , telles que $\sigma_i \subset \mathcal{R}^0 - P_\gamma$ pour un $\gamma = \gamma(i) < \alpha$; cette famille couvre $\mathcal{R}^0 - p_{\alpha, 1}$. Soit un $\tilde{r}$ (de $\mathcal{O}^s$) $\subset \mathcal{R} - p_{\alpha, 1}$; on a $\tilde{r}^0 = \sum_1^\infty \tilde{\rho}_k$, avec les $\tilde{\rho}_k$ disjoints et tout $\tilde{\rho}_k$ étant contenu dans une σ_{i_k} de $\mathcal{O}$; il vient $\Psi(\tilde{\rho}_k) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}_k}^{s(b_\gamma, \gamma_k)} \dots$, où $\gamma_k = \gamma(i_k)$.

On pose $\tilde{\rho}^\nu = \tilde{\rho}_1 + \dots + \tilde{\rho}_\nu$, $\alpha_\nu = \sup(1 \leq k \leq \nu) \gamma_k$, $\alpha_\nu < \alpha$, $\alpha_\nu \uparrow$. Il suit que $\tilde{\rho}^\nu \uparrow \tilde{r}^0$, tandis que

$$\Psi(\tilde{\rho}^\nu) = \sum_{k=1}^\nu \Psi(\tilde{\rho}_k) = \text{une} \int_{\tilde{\rho}^\nu}^{s(b_{\alpha_\nu}, \alpha_\nu)} \dots, \quad \Psi(\tilde{r}) = \Psi(\tilde{r}^0) = \lim_\nu \Psi(\tilde{\rho}^\nu).$$

D'après la définition (10.22) il résulte que $\Psi(\tilde{r}) = \text{une} \int_{\tilde{r}}^{s(b_\alpha, \alpha)} \dots$ dans $\mathcal{R} - p_{\alpha, 1}$.

En utilisant l'induction transfinie nous avons démontré la partie $(g_1) \cdot (g_4)$ du théorème; la conclusion (10.24a) est une conséquence immédiate de $(g_1) \cdot (g_4)$. Le théorème est entièrement vérifié.

REMARQUE 10.25. - Si y est totalisable- S sur un $\mathcal{R}$ de $\mathcal{O}^s$, $\mathcal{R}^0 \neq 0$, et Ψ est la totale- S indéfinie de y , on envisage la notion d'équivalence différentielle de rang b d'une façon analogue à la constatation (9.34), mais en s'appuyant sur le théorème fondamental (10.24). En plus, on fait une remarque pareille à l'affirmation à la suite de (9.34).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. DENJOY, *Métrie sans topologie Définition des fonctions mesurables, non dogmatique, mais exigée par l'intégration*, [C.R. Acad. Sc. Paris, t. 257, pp. 2776-2781 (4 novembre, 1963); désigné dans le texte par (D)].
 - [2] W. J. TRJITZINSKY, *Totalisations dans les espaces abstraits*, [Mém. Sc. Math., fasc. 155, 1963, pp. 1-131; désigné dans le texte par (T)].
 - [3] — —, *Totalisations des séries dans les espaces abstraits*, [Mém. Sc. Math., fasc. 161, 1965, pp. 1-69; désigné par (T*)].
 - [4] — —, *La totale-D de Denjoy et la totale-S symétrique*, [Mém. Sc. Math., fasc. 166, 1968, pp. 1-104; désigné par (T*)].
 - [5] C. E. RICKART, *Integration in a convex linear topological space*, [Trans. Am. Math. Soc., vol. 52, 1942, pp. 498-521; désigné par (R)].
 - [6] A. KOLMOGOROFF, *Untersuchungen über den Integralbegriff*, [Math. Annalen, 103. Band, 1930, s. 654-696; désigné par (K)].
-