Problème de Somigliana sur la théorie de l'élasticité à modules différents dans un milieu orthogonal-anisotrope.

I. T. MINTCHEV (Sofia) (*)

Résumé. - On obtient les équations fondamentales du problème de Somigliana pour la théorie d'élasticité dans un milieu orthogonal anisotrope à modules différents par l'intermédiaire des fonctions des contraintes $F(x, y)$ et $\psi(x, y)$.

Pour F et ψ on obtient un système d'équations différentielles partielles.

Il est montré, que si les points sont disposés sur la ligne isoclinne, la forme des fonctions F et ψ se détermine exactement.

Sont étudiés aussi les cas où le corps se trouve dans l'état de contrainte et de déformation planéaire.

Introduction.

Le problème posé par C. SOMIGLIANA exige que soient déterminés les contraintes et l'état de déformation d'un corps élastique, limité par une surface cylindrique, sous l'action d'une part de forces extérieures distribuées sur cette surface, d'autre part de forces volumiques. Les dimensions de la section transversale et la longueur du corps peuvent être aussi bien limitées qu'illimitées [1].

La résolution du problème posé, pour une anisotropie totale et sous condition que les forces volumiques sont sans potentiel, est donnée par W. VOIGT [2]; mais quand les mêmes forces ont un potentiel, la solution est donnée par S. G. LECHNITZKI [3], [4].

Notre but est de résoudre le problème de SOMIGLIANA dans un milieu orthogonal-anisotrope à modules différents quand il y a de petites déformations.

§ 1. Rapportons le corps à étudier un système de coordonnées orthogonales. L'axe z est identique à l'axe du corps et x, y sont identiques avec les directions principales de l'orthotropie.

Comme il est montré dans notre travail [5], la loi généralisée de HOOKE pour le corps étudié a la forme.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \varepsilon_{xx} &= A_{11}\sigma_{xx} + A_{21}\sigma_{yy} + A_{31}\sigma_{zz} + A_{41}\sigma_{yz} + A_{51}\sigma_{xz} + A_{61}\sigma_{xy}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \varepsilon_{xy} &= A_{16}\sigma_{xx} + A_{26}\sigma_{yy} + A_{36}\sigma_{zz} + A_{46}\sigma_{yz} + A_{56}\sigma_{xz} + A_{66}\sigma_{xy},
 \end{aligned}$$

(*) Entrata in Redazione il 5 novembre 1968.

où $\varepsilon_{xx} \dots$, et σ_{xx} , sont composantes du tenseur des déformations et des contraintes, A_{ij} sont les coefficients de déformation qui sont fonction des cosinus directeurs des directions principales de l'orthotropie par rapport aux directions principales des contraintes.

Les coefficients prennent des valeurs différentes en fonction des signes des contraintes principales.

En général $A_{ij} \neq A_{ji}$.

De part la forme de la charge extérieure il suit que la partie droite de (1) est une fonction continue de x et de y .

En ayant en vue les formules de Cauchy:

$$(2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x}, & \varepsilon_{yy} &= v_{,y}, & \varepsilon_{zz} &= w_{,z}, \\ \varepsilon_{yz} &= v_{,z} + w_{,y}, & \varepsilon_{zx} &= u_{,z} + w_{,x}, & \varepsilon_{xy} &= u_{,y} + v_{,x}, \end{aligned}$$

après intégration de z on détermine les composantes du déplacement élastique dans un point quelconque quand les composantes des contraintes ne dépendent pas de z .

De cette façon u , v , w on trouve les expressions suivantes:

$$(3) \quad \begin{aligned} u &= - (A_{3l}\sigma_{ij})_{,x} \frac{z^2}{2} + (A_{5l}\sigma_{ij})z - w_{0,x}z + u_0, \\ v &= - (A_{3l}\sigma_{ij})_{,y} \frac{z^2}{2} + (A_{4l}\sigma_{ij})z - w_{0,y}z + v_0, \\ w &= (A_{3l}\sigma_{ij})z + w_0; \\ (l &= 1, 2, \dots, 6; i, j = x, y, z) \\ (A_{3l}\sigma_{ij} &= A_{31}\sigma_{xx} + A_{32}\sigma_{yy} + A_{33}\sigma_{zz} + A_{34}\sigma_{yz} + A_{35}\sigma_{xz} + A_{36}\sigma_{xy}). \end{aligned}$$

Les expressions sont identiques avec les mêmes expressions du déplacement élastiques de la théorie classique sur le corps anisotrope, mais les coefficients A_{kl} sont différents. Les fonctions u_0 , v_0 , w_0 se déterminent par les trois équations restantes de la loi de Hooke.

§ 2. - Comme on la sait par [4], les composantes des contraintes se déterminent, dans les problèmes de l'espace, par deux fonctions de contraintes par l'intermédiaire:

$$(4) \quad \sigma_{xx} = F_{,yy} + \bar{U}, \quad \sigma_{yy} = F_{,xx} + \bar{U}, \quad \sigma_{xy} = -F_{,xy}, \quad \sigma_{xz} = \psi_{,y}, \quad \sigma_{yz} = -\psi_{,x},$$

où $\bar{U}(x, y)$ est le potentiel élastique.

Quand on remplace (4) dans la relation de St VENANT on obtient un

système d'équations différentielles partielles pour la détermination des fonctions $F(x, y)$ et $\psi(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 & \beta_{22}F_{,xxxx} + \beta_{11}F_{,yyyy} - (\beta_{26} + \beta_{62})F_{,xxxy} + (\beta_{12} + \beta_{21} + \beta_{66})F_{,xyxy} - \\
 & - (\beta_{16} + \beta_{61})F_{,xyyy} + (2\beta_{22,x} - \beta_{62,y})F_{,xxx} + (2\beta_{11,y} - \beta_{61,x})F_{,yyy} + \\
 & + (2\beta_{12,y} - 2\beta_{26,x} - \beta_{62,x} + \beta_{66,y})F_{,xxy} + (2\beta_{21,x} - 2\beta_{16,y} - \beta_{61,y} + \beta_{66,x})F_{,xyy} + \\
 & + (\beta_{12,yy} - \beta_{22,xx} - \beta_{62,xy})F_{,xx} + (\beta_{11,yy} + \beta_{21,xx} - \beta_{61,xy})F_{,yy} - \\
 & - (\beta_{16,yy} + \beta_{26,xx} - \beta_{66,xy})F_{,xy} - \beta_{24}\psi_{,xxx} + \beta_{15}\psi_{,yyy} + (\beta_{25} + \beta_{64})\psi_{,xxy} - \\
 & - (\beta_{14} + \beta_{65})\psi_{,xyy} - (2\beta_{24,x} - \beta_{64,y})\psi_{,xx} + (2\beta_{15,y} + \beta_{65,x})\psi_{,yy} + \\
 & + (2\beta_{25,x} - 2\beta_{14,y} + \beta_{64,x} - \beta_{65,y})\psi_{,xy} - (\beta_{14,yy} + \beta_{24,xx} - \beta_{64,xy})\psi_{,x} + \\
 & + (\beta_{15,yy} + \beta_{25,xx} - \beta_{65,xy})\psi_{,y} = -(\beta_{21} + \beta_{22})\bar{U}_{,xx} - (\beta_{11} + \beta_{12})\bar{U}_{,yy} + \\
 & + (\beta_{61} + \beta_{62})\bar{U}_{,xy} + (\beta_{61,y} + \beta_{62,y} - 2\beta_{21,x} - 2\beta_{22,x})\bar{U}_{,x} + (\beta_{61,x} + \\
 & + \beta_{62,x} - 2\beta_{11,y} - 2\beta_{12,y})\bar{U}_{,y} + (\beta_{61,xy} + \beta_{62,xy} - \beta_{11,yy} - \beta_{12,yy} - \beta_{21,xx} - \\
 & - \beta_{22,xx})\bar{U} + \left[\frac{A_{36}}{A_{33}}(Ax + By + C) \right]_{,xy} - \left[\frac{A_{23}}{A_{33}}(Ax + By + C) \right]_{,xx} - \\
 & - \left[\frac{A_{13}}{A_{33}}(Ax + By + C) \right]_{,yy} ; \\
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 & \beta_{42}F_{,xxx} - \beta_{51}F_{,yyy} - (\beta_{52} - \beta_{46})F_{,xxy} + (\beta_{56} + \beta_{41})F_{,xyy} - (\beta_{52,y} - \\
 & - \beta_{42,x})F_{,xx} - (\beta_{51,y} - \beta_{41,x})F_{,yy} + (\beta_{56,y} + \beta_{46,x})F_{,xy} - \beta_{44}\psi_{,xx} - \\
 & - \beta_{55}\psi_{,yy} + (\beta_{54} + \beta_{45})\psi_{,xy} + (\beta_{54,y} - \beta_{44,x})\psi_{,x} - (\beta_{55,y} - \beta_{45,x})\psi_{,y} = \\
 & = (\beta_{41} - \beta_{42})\bar{U}_{,x} + (\beta_{51} + \beta_{52})\bar{U}_{,y} - (\beta_{41,x} - \beta_{42,x} - \beta_{51,y} - \beta_{52,y})\bar{U} - \\
 & - \left[\frac{A_{43}}{A_{33}}(Ax + By + C) \right]_{,x} + \left[\frac{A_{53}}{A_{33}}(Ax + By + C) \right]_{,y} + 2v ; \\
 \end{aligned}$$

où A , B et C sont des constantes d'intégration qui caractérisent la flexion du corps dans les plans (XOZ) , (YOZ) , et la déformation dans le sens de l'axe z . v est l'angle relatif de la torsion autour de l'axe z . β_{ij} sont déterminés par A_{ij} par l'intermédiaire de la formule

$$\begin{aligned}
 & \beta_{ij} = A_{ij} - \frac{A_{i3}A_{j3}}{A_{33}} \\
 & (i, j = 1, 2, \dots, 6).
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Des fonctions F et ψ doivent satisfaire non seulement le système (5) mais aussi, la condition du contour de la section transversale, qui d'après la problème de SOMIGLIANA, est donné par une force axiale P_z et un moment avec ses trois composantes M_x , M_y , M_z .

La résolution générale du système pour les conditions ci-dessus est très difficile parce que les coefficients β_{ij} sont variables.

Si les points où l'on cherche les contraintes et les déformations du corps sont situés sur les lignes isoclinnes de la section transversale, donc les coefficients β_{ij} ont constants et le système (5) se simplifie. Dans ce cas quand on introduit les quatre différents opérateurs, le système (5) peut s'écrire symboliquement comme ceci:

$$(7) \quad \begin{aligned} (L_2 L_4 - L_3 L_3^*) F &= f_1(x, y) L_2 - f_2(x, y) L_3, \\ (L_3 L_3^* - L_2 L_4) \psi &= f_1(x, y) L_3^* - f_2(x, y) L_4; \end{aligned}$$

où différemment du cas classique, ici les opérateurs différentiels ont la forme:

$$(8) \quad \begin{aligned} L_2 &= \beta_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\beta_{45} + \beta_{54}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_3^* &= -\beta_{42} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{52} + \beta_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (\beta_{41} + \beta_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \beta_{51} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_3 &= -\beta_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{25} + \beta_{64}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (\beta_{14} + \beta_{65}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_4 &= \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - (\beta_{26} + \beta_{62}) \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (\beta_{12} + \beta_{21} + \beta_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ &\quad - (\beta_{16} + \beta_{61}) \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \end{aligned}$$

où

$$(9) \quad \begin{aligned} \beta_{ij} &\neq \beta_{ji}, \\ f_1(x, y) &= -(\beta_{21} + \beta_{22}) \bar{U}_{,xx} - (\beta_{11} + \beta_{12}) \bar{U}_{,yy} + (\beta_{61} + \beta_{62}) \bar{U}_{,xy}; \\ f_2(x, y) &= -(\beta_{41} + \beta_{42}) \bar{U}_{,x} + (\beta_{51} + \beta_{52}) \bar{U}_{,y} - \frac{A_{43}}{A_{33}} A + \frac{53}{A_{33}} B + 2v. \end{aligned}$$

Suivant [4], on peut démontrer que les intégrales générales des équations différentielles partielles (7), sont:

$$(10) \quad \begin{aligned} F(x, y) &= 2 \operatorname{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2) + F_3(z_3)] + F_0(x, y), \\ \psi(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \left[\lambda_1 F_1'(z_1) + \lambda_2 F_2'(z_2) + \frac{1}{\lambda_3} F_3'(z_3) \right] + \psi_0(x, y), \end{aligned}$$

où $F_k(z_k)$ sont les fonctions analytiques des variables généralisées complexes $z_k(x + \mu_k y)$, ($k = 1, 2, 3$), et μ_k sont les racines des équations caractéristiques algébrique, qui dans ce cas ont la forme suivante:

$$(11) \quad [\beta_{55}\mu^2 - (\beta_{45} + \beta_{54})\mu + \beta_{44}][\beta_{11}\mu^4 - (\beta_{16} + \beta_{61})\mu^3 + (\beta_{12} + \beta_{21} + \beta_{66})\mu^2 - \\ - (\beta_{26} + \beta_{62})\mu + \beta_{22}] - [\beta_{15}\mu^3 - (\beta_{14} - \beta_{65})\mu^2 + (\beta_{25} + \beta_{64})\mu - \beta_{24}] \cdot \\ \cdot [\beta_{51}\mu^3 - (\beta_{41} + \beta_{56})\mu^2 + (\beta_{46} + \beta_{52})\mu - \beta_{42}] = 0.$$

On peut facilement démontrer, que dans ce cas les racines des équations caractéristiques, (11) sont toujours complexes ou imaginaires, comme c'est le cas dans la théorie classique de l'élasticité [4].

Quand sont déterminées les fonctions des contraintes $F(x, y)$ et $\psi(x, y)$, d'après les formules (3) et (4) on peut déterminer les contraintes et les déformations dans un point quelconque.

§ 3. - Puisque le corps étudié a une symétrie élastique qui est normale à l'axe z ; donc $w = \text{const}$ et $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Pour les composantes des contraintes on obtient:

$$(12) \quad \sigma_{xx} = F_{,yy} + \bar{U}, \quad \sigma_{yy} = F_{,xx} + \bar{U}, \quad \sigma_{xy} = -F_{,xy}, \\ \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \\ \sigma_{zz} = -\frac{1}{A_{33}}(A_{31}\sigma_{xx} + A_{32}\sigma_{yy} + A_{36}\sigma_{xy}).$$

Donc, ici, on a $\psi = 0$ et pour $F(x, y)$ on obtient une équation différentielle partielle à coefficients variables

$$(13) \quad \beta_{22}F_{,xxxx} + \beta_{11}F_{,yyyy} - (\beta_{26} + \beta_{62})F_{,xxy} + (\beta_{12} + \beta_{21} + \beta_{66})F_{,xyy} - \\ - (\beta_{16} + \beta_{61})F_{,xyy} + (2\beta_{22,x} - \beta_{62,y})F_{,xxx} + (2\beta_{11,y} - \beta_{61,x})F_{,yyy} + \\ + (2\beta_{12,y} - 2\beta_{26,x} - \beta_{62,x} - \beta_{66,y})F_{,xxy} + (2\beta_{21,x} - 2\beta_{16,y} - \beta_{61,y} + \beta_{66,x})F_{,xyy} + \\ + (\beta_{12,yy} + \beta_{22,xx} - \beta_{62,xy})F_{,xx} + (\beta_{11,yy} + \beta_{21,xx} - \beta_{61,xy})F_{,yy} - \\ - (\beta_{16,yy} + \beta_{26,xx} - \beta_{66,xy})F_{,xy} = -\beta_{21} + \beta_{22}\bar{U}_{,xx}(\beta_{11} + \beta_{12})\bar{U}_{,yy} + \\ + (\beta_{61} + \beta_{62})\bar{U}_{,xy} + (\beta_{61,y} + \beta_{62,y} - 2\beta_{21,x} - 2\beta_{22,x})\bar{U}_{,x} + (\beta_{61,x} + \\ + \beta_{62,x} - 2\beta_{11,y} - 2\beta_{12,y})\bar{U}_{,y} + (\beta_{61,xy} + \beta_{62,xy} - \beta_{11,yy} - \beta_{12,yy} - \\ - \beta_{21,xx} - \beta_{22,xx})\bar{U};$$

dans le cas où les forces volumiques ont un potentiel élastique.

Pour la détermination de la fonction des contraintes $F(x, y)$, on peut supposer que les points dans lesquels s'étudie l'état de contraintes et de

déformation se trouvent sur les lignes isoclines de la section transversale qui peuvent être déterminées expérimentalement. Dans ce cas l'équation (13) se simplifie et prend la forme:

$$(14) \quad \beta_{22} F_{,xxxx} + \beta_{11} F_{,yyyy} - (\beta_{26} + \beta_{62}) F_{,xxy} + (\beta_{12} + \beta_{21} + \beta_{66}) F_{,xyy} - \\ - (\beta_{16} + \beta_{61}) F_{,xyy} = -(\beta_{21} + \beta_{22}) \bar{U}_{,xx} - (\beta_{11} + \beta_{12}) \bar{U}_{,yy} + (\beta_{61} + \beta_{62}) \bar{U}_{,xy}.$$

Ici comme dans la théorie d'élasticité classique on peut montrer que la forme générale de la fonction des contraintes $F(x, y)$ sera

$$(15) \quad F(x, y) = 2 \operatorname{Re} [F_1(z_1) + F_2(z_2)] + F_0,$$

où F_0 est une solution partielle de l'équation différentielle partielle non-homogène (14) et F_1, F_2 sont deux fonctions analytiques qui dépendent des racines de l'équation caractéristique

$$(16) \quad \beta_{11} \mu^4 - (\beta_{16} + \beta_{61}) \mu^3 + (\beta_{12} + \beta_{21} + \beta_{66}) \mu - (\beta_{26} + \beta_{62}) \mu + \beta_{22} = 0,$$

qui peuvent être complexes ou imaginaires.

Les expressions des composantes de la contrainte et du déplacement élastique, et les conditions du contour-définis par la fonction des contraintes $F(x, y)$ restent les mêmes comme dans la théorie de l'élasticité classique.

On peut étudier analogiquement le problème de l'état de contrainte planénaire. L'état de contrainte planénaire se caractérise suivant la condition $\sigma_{zz} = 0$.

L'équation fondamentale se détermine par la fonction des contraintes $F(x, y)$ ((13) (14)), gard sa forme, mais on doit remplacer β_{ij} par A_{ij} . Par conséquent les expressions des contraintes et des déplacements élastiques restent invariables quand β_{ij} est remplacé par A_{ij} .

Comme dans la théorie de l'élasticité classique on peut démontrer, que la solution, du problème de SOMIGLIANA pour la théorie d'élasticité dans un milieu à modules différents, existe et est unique.

LITTERATURE

- [1] C. SOMIGLIANA, *Ricerche sulla deformazione ed i fenomeni piezoelettrici in uno cilindro cristallino*, Annali di Matem. pura ed appl., II, t. XX, 1892, Milano.
- [2] W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Leipzig-Berlin (Teubner), 1928.
- [3] S. G. LECHNICKI, *Nekotore sloutchai ouprougogo rovnovesia ednorodnogo cilindra s proizvolnoy anisotropiey*, Prikladnaya matematika, t. II, vip. 3, 1939, SSSR.
- [4] — —, *Teoria ouprugosti anisotropnogo tela*, Gostechizdat M.-L. 1950, SSSR.
- [5] I. T. MINTCHEV, *Osnovni ouravnenia za rasnomodulnata teoria na elastichnosta za ortogonalno-anisotropna sreda*, Godishnik na VTUZ Priloga mehanika, 1968.