Solutions périodiques de certaines équations aux derivées partielles (*)

DAN PETROVANU

Résumé. - *On donne des critères assurant l'existence et l'unicité des solutions périodiques des problèmes* (1.6)-(1.7) *et* (2.1)-(2.2).

§ 0. - Considérons le système aux différentielles totales

$$dz = A(u, v, z)du + B(u, v, z)dv \tag{0.1}$$

où A, B sont des vecteurs continus à n dimensions et u, v sont des variables scalaires, tandis que z est la fonction-vecteur inconnue.

Si le système (0.1) est complètement intégrable, c'est-à-dire

$$\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial z} A \tag{0.2}$$

(identiquement par rapport à u, v, z), on sait qu'il existe — localement parlant — une solution unique de (0.1) continue avec ses dérivées partielles, satisfaisant à

$$z(0, 0) = z_0, \tag{0.3}$$

z_0 étant un vecteur constant, donné d'avance. Dans des conditions supplémentaires concernant les coefficients A et B, cette solution pourrait même être prolongée pour toute valeur de u et de v (v. [3], [4]).

Nous voulons donner dans cette note un critère assurant la périodicité de période T en u et v de la solution du problème (0.1), (0.3).

Comme il est facile à voir, les considérations qui suivent peuvent être transposées sans aucune difficulté aux systèmes généraux en n variables indépendantes, c'est-à-dire aux systèmes $dz = \sum_{i=1}^{n} A_i(u_1, \ldots, u_n, z)du_i$ pour lesquels on trouve sans peine un analogue du Th. 1, § 1. Remarquons d'abord

(*) Entrata in Redazione il 16 settembre 1968.

que toute solution de (0.1), (0.3) satisfait au système

$$z(u, v) = z_0 + \int_{(0,0)}^{(u,v)} \{A[u_1, v_1, z(u_1, v_1)]\, du_1 + B[u_1, v_1, z(u_1, v_1)]\, dv_1\} \tag{0.4}$$

et que, en vertu de (0.2), l'expression qui se trouve sous le signe d'intégrale curviligne dans (0.4) est une différentielle exacte pour tout $z(u, v)$ satisfaisant au système (0.1). Donc, toute solution $z(u, v)$ de (0.1), (0.3) satisfait à (0.4), quel que soit le chemin reliant les points (0,0), (u, v). En particulier on peut prendre le chemin $0 \leq u_1 \leq u$, $v = 0$; $u_1 = u$, $0 \leq v_1 \leq v$. Ce choix du chemin, permet d'affirmer que toute solution de (0.1), (0.3) satisfait à l'équation intégrale

$$z(u, v) = z_0 + \int_0^u A[u_1\ 0,\ z(u_1, 0)]\, du_1 + \int_0^v B[u, v_1, z(u, v_1)]\, dv_1 \tag{0.5}$$

(Quant à l'affirmation réciproque, elle n'est pas — en général — vraie). Tout ce qu'on peut affirmer, pour le moment, est qu'une solution périodique de (0.1), (0.3) doit être aussi une solution périodique de (0.5). Soit $\varphi(u, v)$ une solution de (0.5), périodique, de période T en u et en v. On a alors nécessairement

$$\int_u^{u+T} A[u_1, 0, \varphi(u_1, 0)] du_1 + \int_0^v \{B[u+T, v_1, \varphi(u, v_1)] - \\ - B[u, v_1, \varphi(u, v_1)]\}\, dv_1 = 0, \tag{0.6}$$

$$\int_v^{v+T} B[u, v_1, \varphi(u, v_1)] dv_1 = 0. \tag{0.7}$$

Si on suppose que $A[u+T, v, z] = A[u, v, z] = A[u, v+T, z]$ et $B[u + + T, v, z] = B[u, v, z] = B[u, v+T, z]$, alors les conditions (0.6), (0.7) conduisent aux conditions (nécessaires toujours)

$$\int_0^T A[u_1, 0, \varphi(u_1, 0)] du_1 = 0 \tag{0.8}$$

et

$$\int_0^T B[u, v_1, \varphi(u, v_1)] dv_1 = 0 \tag{0.9}$$

quel que soit u.

Par conséquent, *toute solution périodique de* (0.1), (0.4) *satisfait nécessairement aux conditions* (0.8), (0.9). La réciproque n'est pas vraie, en général.

Les conditions du théorème démontré dans le § 1 sont choisies de façon que les conditions (0.8)-(0.9) soient vérifiées. Dans tont ce qui suit, nous désignons par $|D|$ la norme matricielle de la matrice (vecteur) D.

§ 1. - Nous allons démontrer maintenant le

THÉORÈME. - *Supposons que* $A(u, v, z)$, $B(u, v, z)$ *soient des fonctions-vecteurs continues avec leurs dérivées* A_v, A_z, B_u, B_z, *sur* $\mathfrak{R} = [-\infty < u < +\infty, -\infty < v < +\infty, z \in R_n]$, ($R_n$ étant l'espace des vecteurs réels à n-dimensions) et *qu'on ait*

$$\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial z} A, \tag{1.1}$$

identiquement sur $\mathfrak{R}$. *Supposons, en outre, qu'on ait*

$$\begin{aligned} &A(-u, 0, z) = -A(u, 0, z), \\ &B(u, -v, z) = -B(u, v, z), \qquad B(-u, v, z) = B(u, v, z), \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &A(u + T, v, z) = A(u, v, z), \qquad A(u, v + T, z) = A(u, v, z), \\ &B(u + T, v, z) = B(u, v, z), \qquad B(u, v + T, z) = B(u, v, z), \end{aligned} \tag{1.3}$$

et

$$\begin{aligned} &|A(u, v, \bar{z}) - A(u, v, z)| \leq M_1 |\bar{z} - z|, \\ &|B(u, v, \bar{z}) - B(u, v, z)| \leq M_2 |\bar{z} - z|, \end{aligned} \tag{1.4}$$

quels que soient $-\infty < u, v < +\infty$ *et* $z, \bar{z} \in R_n$, *où* $T > 0$, $M_1 \geq 0$, $M_2 \geq 0$ *sont des constantes. Alors si*

$$T(M_1 + M_2) < 1, \tag{1.5}$$

il existe, quel que soit le vecteur constant donné c, une fonction-vecteur unique $\Phi(u, v)$, *continue avec ses dérivées* Φ_u *et* Φ_v *sur* $-\infty < u, v < +\infty$, *périodique de période T en u et en v, paire en u et en v, vérifiant la condition*

$$\Phi(0, 0) = c, \tag{1.6}$$

et satisfaisant pour $-\infty < u, v < +\infty$ *à l'équation*

$$d\Phi(u, v) = A[u, v, \Phi(u, v)]\, du + B[u, v, \Phi(u, v)]\, dv. \tag{1.7}$$

DÉMONSTRATION. - Soit $\mathcal{K}$ l'espace des fonctions-vecteurs à n dimensions $\varphi(u, v)$, continues sur $-\infty < u, v < +\infty$ et satisfaisant à

$$(1.8) \qquad \varphi(-u, v) = \varphi(u, v), \quad \varphi(u, -v) = \varphi(u, v),$$

et

$$(1.9) \qquad \varphi(u + T, v) = \varphi(u, v), \quad \varphi(u, v + T) = \varphi(u, v).$$

Les conditions (1.9) signifient, évidemment, que les fonctions de $\mathcal{K}$ sont périodiques de période T en u et en v. Nous pouvons alors définir une norme $\|\cdot\|$ dans l'espace linéaire $\mathcal{K}$, en posant $\|\varphi\| = \sup\limits_{0 \leq u, v \leq T} |\varphi(u, v)|$. Considérons maintenant l'opérateur $\mathfrak{J}: \psi = \mathfrak{J}\varphi$, défini par

$$(1.10) \qquad \psi(u, v) = c + \int_0^u A[u_1, 0, \varphi(u_1, 0)]du_1 + \int_0^v B[u, v_1, \varphi(u, v_1)]dv_1.$$

En vertu de (1.2) et (1.8), on obtient de (1.10)

$$(1.11) \qquad \psi(-u, v) = \psi(u, v), \quad \psi(u, -v) = \psi(u, v),$$

quelle que soit $\varphi \in \mathcal{K}$. On obtient ensuite de (1.10), en tenant compte de (1.3), (1.9),

$$\psi(u + T, v) = \psi(u, v) + \int_u^{u+T} A[u_1, 0, \varphi(u_1, 0)]du_1.$$

D'autre part, la dérivée par rapport à u de la dernière intégrale est identiquement nulle à cause de (1.3). Donc

$$m_1(u) = \int_u^{u+T} A[u_1, 0, \varphi(u_1, 0)]du_1 = \int_0^T A[u_1, 0, \varphi(u_1, 0)]du_1 =$$

$$= \int_0^{-T} A[u_2, 0, \varphi(u_2, 0)]du_2 = \int_T^0 A[u_3, 0, \varphi(u_3, 0)]du_3 =$$

$$= -m_1(u) = 0.$$

C'est-à-dire, on a $\psi(u + T, v) = \psi(u, v)$ quelle que soit $\varphi \in \mathcal{K}$. On voit, de la même façon, que $\int_v^{v+T} B[u, v_1, \varphi(u, v_1)]dv_1 = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{K}$, identiquement par rapport à u, v. Donc, on à

$$\psi(u+T,\ v)=\psi(u,\ v), \qquad \psi(u,\ v+T)=\psi(u,\ v), \tag{1.12}$$

quelle que soit $\varphi \in \mathcal{K}$. Comme ψ est, visiblement, une fonction continue, (1.11) et (1.12) montrent que la trausformation $\mathfrak{J}$ mène l'espace $\mathcal{K}$ en soi-même. D'autre part, l'opérateur $\mathfrak{J}$ est contractant sur K, car, si $\psi_1=\mathfrak{J}\psi_1$, $\psi_2=\mathfrak{J}\psi_2$, on a

$$|\psi_1(u,\ v)-\psi_2(u,\ v)|\leq \int_0^u |A[u_1,\ 0.\ \varphi_1(u_1,\ 0)]-A[u_1,\ 0,\ \varphi_2(u_1,\ 0)]|\,du_1+$$

$$+\int_0^v |B[u,\ v_1,\ \varphi_1(u,\ v_1)]-B[u,\ v_1,\ \varphi_2(u,\ v_1)]|\,dv_1\leq$$

$$\leq T(M_1+M_2)\|\varphi_1-\varphi_2\|,$$

et donc

$$\|\psi_1-\psi_2\|\leq T(M_1+M_2)\|\varphi_1-\varphi_2\|, \tag{1.13}$$

pour φ_1, $\varphi_2 \in \mathcal{K}$, et $T(M_1+M_2)<1$. Selon le principe des contractions (de Banach), il existe un élément unique de $\mathcal{K}$, soit $\Phi(u,\ v)$, satisfaisant à

$$\Phi(u,\ v)=c+\int_0^u A[u_1,\ 0,\ \Phi(u_1,\ 0)]du_1+ \tag{1.14}$$

$$+\int_0^v B[u,\ v_1,\ \Phi(u,\ v_1)]dv_1$$

En outre, la suite des fonctions (satisfaisant, evidemment, à (1.8) et (1.9))

$$\varphi_0(u,\ v)=c \tag{1.15.0}$$

$$\varphi_n(u,\ v)=c+\int_0^u A[u_1,\ 0,\ \varphi_{n-1}(u_1,\ 0)]du_1+\int_0^v B[u,\ v_1,\ \varphi_{n-1}(u,\ v_1)]dv_1, \tag{1.15.n}$$

$(n=1,\ 2,\ \ldots)$ converge uniformément sur $-\infty<u,\ v<+\infty$ (c'est-à-dire dans la topologie de $\mathcal{K}$) à $\Phi(u,\ v)$. Pour que le théorème soit complètement démontré, il suffit de montrer que $\Phi(u,\ v)$ satisfait à (1.7), c'est-à-dire que $\partial\Phi/\partial u=A[u,\ v,\ \Phi]$, $\partial\Phi/\partial v=B[u,\ v,\ \Phi]$. Compte tenu de la continuité de A

et B, il suffit pour cela de montrer que $\lim |(\partial\varphi_n/\partial u) - A[u, v, \varphi_n(u, v)]| = 0$ et $\lim |(\partial\varphi_n/\partial v) - B[u, v, \varphi_n(u, v)]| = 0$, pour $n \to \infty$, uniformément par rapport à u, v, sur $-\infty < u, v < +\infty$, (ou bien sur $0 \leq u, v \leq T$, ce qui revient à la même chose). Nous allons démontrer cela dans ce qui suit.

Faisons d'abord les notations

$$(1.16) \qquad M = \max(M_1, M_2, 1), \qquad d = \max\{\sup|A(u, v, c)|, \quad \sup|B(u, v, c)|\},$$

où "sup" se rapporte à l'intervalle $0 \leq u, v \leq T$. On obtient alors de (1.15.n) par induction, les estimations

$$(1.17.\mathrm{n}) \qquad |\varphi_n(u, v) - \varphi_{n-1}(u, v)| \leq d\,\frac{M^{n-1}(u+v)^n}{n!},$$

$(n = 1, 2, \ldots)$. D'autre part, on a de (1.15.n),

$$(1.18.\mathrm{n}) \qquad \left|\frac{\partial\varphi_n(u, v)}{\partial v} - B[u, v, \varphi_n(u, v)]\right| =$$

$$= |B[u, v, \varphi_{n-1}(u, v)] - B[u, v, \varphi_n(u, v)]| \leq M_2 |\varphi_n(u, v) - \varphi_{n-1}(u, v)|,$$

$(n = 1, 2, \ldots)$. On obtient encore,

$$(1.19) \qquad \frac{\partial\varphi_n(u, v)}{\partial u} - A[u, v, \varphi_n(u, v)] = A[u, 0, \varphi_{n-1}(u, 0)] - A[u, v\ \varphi_n(n, v)] +$$

$$+ \int_0^v \left\{\frac{\partial B[u, v_1, \varphi_{n-1}(u, v_1)}{\partial u} + \frac{\partial B[u, v_1, \varphi_{n-1}(u, v_1)]}{\partial z} \cdot \frac{\partial\varphi_{n-1}(u, v_1)}{\partial u}\right\} dv_1.$$

Substituons $\partial B/\partial u$ par sa valeur donnée par (1.1) et faisons la notation générique

$$F[u, v_1, \varphi_n(u, v_1)] = F_n(u, v_1);$$

on obtient, après des calculs évidents,

$$(1.20) \qquad \int^v \left\{\frac{\partial B_{n-1}(u, v_1)}{\partial u} + \frac{\partial B_{n-1}(u, v_1)}{\partial z}\ \frac{\partial\varphi_{n-1}(u, v_1)}{\partial u}\right\} dv_1 = A_{n-1}(u, v) - A_{n-1}(u, 0) +$$

$$+ \int_0^v \frac{\partial A_{n-1}(u, v_1)}{\partial z}\left\{B_{n-1}(u, v_1) - \frac{\partial\varphi_{n-1}(u, v_1)}{\partial v}\right\} dv_1 +$$

$$+ \int_0^v \frac{\partial B_{n-1}(u, v_1)}{\partial z}\left\{\frac{\partial\varphi_{n-1}(u, v_1)}{\partial u} - A_{n-1}(u, v_1)\right\} dv_1.$$

En introduisant (1.20) dans (1.19), on obtient. en passant aux valeurs absolues,

$$(1.20.\mathrm{n})\qquad \left|\frac{\partial\varphi_n(u,\ v)}{\partial u}-A[u,\ v,\ \varphi_n(u,\ v)]\right|\leq|A[u,\ v,\ \varphi_n(u,\ v)]-A[u,\ v,\ \varphi_{n-1}(u,\ v)]|+$$

$$+K\int_0\left\{\left|\frac{\partial\varphi_{n-1}(u,\ v_1)}{\partial u}-A[u,\ v_1,\ \varphi_{n-1}(u,\ v_1)]\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\partial\varphi_{n-1}(u,\ v_1)}{\partial v}-B[u,\ v_1,\varphi_{n-1}(u,\ v_1)]\right|\right\}dv_1,$$

où on a désigné par K la constante

$$(1.21)\qquad K=\max\left\{\sup\left|\frac{\partial A[u,\ v,\ \varphi_n(u,\ v)]}{\partial z}\right|,\sup\left|\frac{\partial B[u,\ v,\ \varphi_n(u,\ v)]}{\partial z}\right|\right\}.$$

(Ici "sup" est pris pour $0\leq u,\ v\leq T$ et $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Observons encore qu'on a $K<+\infty$, car $\partial A/\partial z$, $\partial B/\partial z$ sont des fonctions continues et $\varphi_n(u,\ v)$, $(n=1,\ 2,\ \ldots,)$ est une suite de fonctions continues uniformément convergente, donc uniformément bornée).

Désignons par $E_n(u,\ v)$ l'expression

$$(1.22.\mathrm{n})\qquad E_n(u,\ v)=\left|\frac{\partial\varphi_n(u,\ v)}{\partial u}-A[u,\ v,\ \varphi_n(u,\ v)]\right|+$$

$$+\left|\frac{\partial\varphi_n(u,\ v)}{\partial v}-B[u,\ v,\ \varphi_n(u,\ v)]\right|,$$

$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ et soit

$$(1.23)\qquad k_1=\max(K,\ M).$$

On a alors, en sommant (1.18.n) et (1.20.n) membre par membre et en tenant compte de (1.17.n),

$$(1.24.\mathrm{n})\qquad E_n(u,\ v)\leq 2d\frac{[M(u+v)]^n}{n!}+K\int_0^v E_{n-1}(u,\ v_1)dv_1,$$

$(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Nous obtenons maintenant de (1.24.n) par induction par rapport à n, en tenant compte de (1.23),

$$(1.25.\mathrm{n})\qquad E_n(u,\ v)\leq 2d\frac{[2k_1(u+v)]^n}{n!},$$

$(n=1,\ 2\ \ldots)$. Mais cette dernière inégalité montre que $\lim E_n(u,\ v)=0$ pour

$n \to \infty$, uniformément par rapport à u et v sur $0 \leq u, v \leq T$ (c'est-à-dire sur $-\infty < u, v < +\infty$). Donc, $\lim \partial\varphi_n/\partial u = A(u, v, \Phi)$ et $\lim \partial\varphi_n/\partial v = B(u, v, \Phi)$, uniformément par rapport à u et v. C.q.f.d.

§ 2. - Dans ce paragraphe, nous allons démontrer qu'on peut établir un analogue du théorème du § 1 pour un problème aux données initiales d'un type considéré par *A.* HAIMOVICI [1]. Considérons le problème formé par le système

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2, u, w), \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2, u, v),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = g(x_1, x_2, u, v, w), \qquad \frac{\partial w}{\partial x_2} = h(x_1, x_2, u, v, w), \tag{2.1}$$

(où f_1 est une fonction-vectorielle à n dimensions, f_2 une fonction vectorielle à n dimensions, g une fonction vectorielle à p dimensions, h une fonction vectorielle à q dimensions, f_1, f_2, g, h données, x_1 et x_2 des variables indépendantes scalaires) et les conditions initiales

$$u(0, 0) = u_0, \quad v(0, x_2) = \alpha(x_2), \quad w(x_1, 0) = \beta(x_1), \tag{2.2}$$

(où u_0 est un vecteur à n dimensions, $\alpha(x_2)$ une fonction vectorielle à p dimensions, $\beta(x_1)$ une fonction vectorielle à q dimensions, u_0, $\alpha(x_2)$, $\beta(x_1)$ données d'avance). Le problème de A. HAIMOVICI peut être allors formulé de la manière suivante: trouver (dans des conditions supplémentaires: condition d'intégrabilité complète etc...) des fonctions vectorielles $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$, $w(x_1, x_2)$ à n, respectivement p et q dimensions, continues avec u_{x_1}, u_{x_2}, v_{x_1}, w_{x_2} et satisfaisant à (2.1) et (2.2) (v. [1]). Nous allons démontrer pour ce problème le critère de périodicité suivant:

THÉORÈME: *Supposons que* $f_1(x_1, x_2, u, w)$, $f_2(x_1, x_2, u, v)$, $g(x_1, x_2, u, v, w)$ $h(x_1, x_2, u, v, w)$ *soient des fonctions vectorielles continues avec "leurs dérivées", les fonctions matricielles* $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_1}{\partial w}, \frac{\partial f_2}{\partial v}$ *sur*

$$R = [-\infty < x_1 < +\infty, \; -\infty < x_2 < +\infty, \; u \in R_n, \; v \in R_p, \; w \in R_q]$$

(R_j étant l'espace des vecteurs réels à j dimensions) *et qu'on ait*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial u} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial w} h = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u} f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial v} g \tag{2.3}$$

identiquement sur $\mathfrak{R}$. *Supposons en outre, qu'on ait*

$$
(2.4)\quad
\begin{aligned}
&f_1(-x_1,\ 0,\ u,\ w) = -f_1(x_1,\ 0,\ u,\ w), \quad \alpha(-x_2) = \alpha(x_2), \quad \beta(-x_1) = \beta(x_1),\\
&f_2(-x_1,\ x_2,\ u,\ v) = f(x_1,\ x_2,\ u,\ w), \quad f_2(x_1,\ x_2,\ u,\ v) = -f_2(x_1,\ x_2,\ u,\ v),\\
&g(-x_1,\ x_2,\ u,\ v,\ w) = -g(x_1,\ x_2,\ u,\ v,\ w), \quad g(x_1,\ -x_2,\ u,\ v,\ w) =\\
&\qquad = g(x_1,\ x_2,\ u,\ v,\ w),\\
&h(x_1,\ -x_2,\ u,\ v,\ w) = -h(x_1,\ x_2,\ u,\ v,\ w), \quad h(-x_1,\ x_2,\ u,\ v,\ w) =\\
&\qquad = h(x_1,\ x_2,\ u,\ v,\ w),
\end{aligned}
$$

$$
(2.5)\quad
\begin{aligned}
&f_1(x_1+T,\ x_2,\ u,\ w) = f_1(x_1,\ x_2,\ u,\ w), \quad f_1(x_1,\ x_2+T,\ u,\ w) =\\
&\qquad = f_1(x_1,\ x_2,\ u,\ w),\\
&f_2(x_1+T,\ x_2,\ u,\ v) = f_2(x_1,\ x_2,\ u,\ v), \quad f_2(x_1,\ x_2+T,\ u,\ v) =\\
&\qquad = f_2(x_1,\ x_2,\ u,\ v),\\
&g(x_1+T,\ x_2,\ u,\ v,\ w) = g(x_1,\ x_2,\ u,\ v,\ w), \quad g(x_1,\ x_2+T,\ u,\ v,\ w) =\\
&\qquad = g(x_1,\ x_2,\ u,\ v,\ w),\\
&h(x_1+T,\ x_2,\ u,\ v,\ w) = h(x_1,\ x_2,\ u,\ v,\ w), \quad h(x_1,\ x_2+T,\ u,\ v,\ w) =\\
&\qquad = h(x_1,\ x_2,\ u,\ v,\ w)
\end{aligned}
$$

et

$$
(2.6)\quad
\begin{aligned}
&|f_1(x_1,\ x_2,\ \bar{u},\ \bar{w}) - f_1(x_1,\ x_2,\ u,\ w)| \le M_1[|\bar{u}-u| + |\bar{w}-w|],\\
&|f_2(x_1,\ x_2,\ \bar{u},\ \bar{v}) - f_2(x_1,\ x_2,\ u,\ v)| \le M_2[|\bar{u}-u| + |\bar{v}-v|],\\
&|g(x_1,\ x_2,\ \bar{u},\ \bar{v},\ \bar{w}) - g(x_1,\ x_2,\ u,\ v,\ w)| \le M_3[|\bar{u}-u| + |\bar{v}-v| + |\bar{w}-w|],\\
&|h(x_1,\ x_2,\ \bar{u},\ \bar{v},\ \bar{w}) - h(x_1,\ x_2,\ u,\ v,\ w)| \le M_4[|\bar{u}-u| + |\bar{v}-v| + |\bar{w}-w|],
\end{aligned}
$$

pour tous $-\infty < x_1,\ x_2 < +\infty$; $u,\ \bar{u} \in R_n$; $v,\ \bar{v} \in R_p$, $w,\ \bar{w} \in R_q$, *où* $T > 0$, $M_1 \ge 0$, $M_2 \ge 0$, $M_3 \ge 0$, $M_4 \ge 0$ *sont des constantes. Alors, si*

$$
T(M_1 + M_2 + M_3 + M_4) < 1, \tag{2.7}
$$

***il existe**, quels que soient le vecteur* u_0 *et les fonctions vectorielles* $\alpha(x_2)$, $\beta(x_1)$, ***continues** sur* $(-\infty,\ +\infty)$ *un triple ordonné unique de fonctions vectorielles* $[u(x_1,\ x_2),\ v(x_1,\ x_2),\ w(x_1,\ x_2)]$, *continues avec leurs dérivées* u_{x_1}, u_{x_2}, v_{x_1}, w_{x_2} *sur* $-\infty < x_1,\ x_2 < +\infty$, *périodiques de période* T *en* x_1 *et* x_2, *paires en* x_1 *et* x_2, *vérifiant les conditions* (2.2) *et satisfaisant, pour* $-\infty < x_1,\ x_2 < +\infty$ *aux équations* (2.1).

DÉMONSTRATION. - Considérons les triples ordonnés $[u(x_1,\ x_2),\ v(x_1,\ x_2),\ w(x_1,\ x_2)]$, où u est une fonction vectorielle à n dimensions, v à p dimensions, w à q dimensions. Soit $\mathcal{K}$ l'espace des triples ordonnés ci-dessus, avec $u(x_1,\ x_2)$,

$v(x_1, x_2)$, $w(x_1, x_2)$ continues sur $-\infty < x_1, x_2 < +\infty$ et satisfaisant à

$$
\begin{aligned}
&u(-x_1, x_2) = u(x_1, x_2), \quad u(x_1, -x_2) = u(x_1, x_2),\\
&v(-x_1, x_2) = v(x_1, x_2), \quad v(x_1, -x_2) = v(x_1, x_2),\\
&w(-x_1, x_2) = w(x_1, x_2), \quad w(x_1, -x_2) = w(x_1, x_2),
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

et à

$$
\begin{aligned}
&u(x_1 + T, x_2) = u(x_1, x_2), \quad u(x_1, x_2 + T) = u(x_1, x_2),\\
&v(x_1 + T, x_2) = v(x_1, x_2), \quad v(x_1, x_2 + T) = v(x_1, x_2),\\
&w(x_1 + T, x_2) = w(x_1, x_2), \quad w(x_1, x_2 + T) = w(x_1, x_2).
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

$\mathcal{H}$ est un espace linéaire (avec l'addition des éléments et la multiplication avec un scalaire définies comme d'habitude) et on peut normer $\mathcal{H}$ en posant

$$
\|(u, v, w)\| = \sup_{0 \leq x_1, x_2 \leq T} [\,|u(x_1, x_2)| + |v(x_1, x_2)| + |w(x_1, x_2)|\,]. \tag{2.10}
$$

$\mathcal{H}$ est un espace de Banach.

Soit $\mathcal{J}:(u, v, w) \to (U, V, W)$ définie sur $\mathcal{H}$ par les formules

$$
\begin{aligned}
U(x_1, x_2) = u_0 + \int_0^{x_1} f_1(\xi, 0, u(\xi, 0), w(\xi, 0))d\xi \, + \\
+ \int_0^{x_2} f_2(x_1, \eta, u(x_1, \eta), v(x_1, \eta))d\eta,
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

$$
V(x_1, x_2) = \alpha(x_2) + \int_0^{x_1} g(\xi, x_2, u(\xi, x_2), v(\xi, x_2), w(\xi, x_2))d\xi,
$$

$$
W(x_1, x_2) = \beta(x_1) + \int_0^{x_2} h(x_1, \eta, u(x_1, \eta), v(x_1, \eta), w(x_1, \eta))d\eta.
$$

On démontre sans difficulté *que* $\mathcal{J}$ *même* $\mathcal{H}$ *dans* $\mathcal{H}$ (la démonstration résulte comme dans le § 1, en tenant compte de (2.4) et (2.5)). D'autre part, on obtient, pour tout $(u_i, v_i, w_i) \in \mathcal{H}$, en notant $(U_i, V_i, W_i) = \mathcal{J}[(u_i, v_i, w_i)]$, $(i = 1, 2)$, et en tenant compte de (2.11), (2.6):

$$|U_1(x_1, x_2) - U_2(x_1, x_2)| \leq T(M_1 + M_2)\|[u_1, v_1, w_1] - [u_2, v_2, w_2]\|,$$

$$|V_1(x_1, x_2) - V_2(x_1, x_2)| \leq TM_3\|[u_1, v_1, w_1] - [u_2, v_2, w_2]\|,$$

$$|W_1(x_1, x_2) - W_2(x_1, x_2)| \leq TM_4\|[u_1, v_1, w_1] - [u_2, v_2, w_2]\|,$$

pour $0 \leq x_1, x_2 \leq T$. Donc, on a

$$\|[U_1, V_1, W_1] - [U_2, V_2, W_2]\| \leq T(M_1 + M_2 + M_3 + M_4)\|[u_1, v_1, w_1] - \\ - [u_2, v_2, w_2]\|,$$

c'est-à-dire $\mathfrak{J}$ est un opérateur contractant. Donc, selon le principe des con tractions, il existe une solution (u^*, v^*, w^*) unique dans $\mathfrak{K}$, du système

$$(2.12)\quad \begin{aligned} u(x_1, x_2) &= u_0 + \int_0^{x_1} f_1(\xi, 0, u(\xi, 0), w(\xi, 0))d\xi + \\ &\quad + \int_0^{x_2} f_2(x_1, \eta, u(x_1, \eta), v(x_1, \eta))d\eta \\ v(x_1, x_2) &= \alpha(x_2) + \int_0^{x_1} g(\xi, x_2, u(\xi, x_2), v(\xi, x_2), w(\xi, x_2))d\xi \\ w(x_1, x_2) &= \beta(x_1) + \int_0^{x_2} h(x_1, \eta, u(x_1, \eta), v(x_1, \eta), w(x_1, \eta))d\eta. \end{aligned}$$

En outre, la suite des approximations successives (u_n, v_n, w_n) définies par

$$(2.13\text{ n})\quad \begin{aligned} u_n(x, y) &= u_0 + \int_0^{x_2} f_1(\xi, 0, u_{n-1}(\xi, 0), w_{n-1}(\xi, 0))d\xi + \\ &\quad + \int_0^{x_2} f_2(x_1, \eta, u_{n-1}(x_1, \eta), v_{n-1}(x_1, \eta))d\eta, \\ v_n(x_1, x_2) &= \alpha(x_2) + \int_0^{x_1} g[\xi, x_2, u_{n-1}(\xi, x_2), v_{n-1}(\xi, x_2), w_{n-1}(\xi, x_2)]d\xi, \\ w_n(x_1, x_2) &= \beta(x_1) + \int_0^{x_2} h[x_1, \eta, u_{n-1}(x_1, \eta), v_{n-1}(x_1, \eta), w_{n-1}(x_1, \eta)]d\eta, \end{aligned}$$

$(n=1,\ 2\ ..)$, $(u_0(x,\ y)=u_0,\ v_0(x_1,\ x_2)=\alpha(x_2),\ w_0(x_1,\ x_2)=\beta(x_1))$, converge uniformément vers la solution $[u^*,\ v^*,\ w^*]$ de (2.12).

On sait d'autre part, que toute solution de (2.1)-(2.2) satisfait à (2.12) (v. [1]). Pour que le théorème soit complètement démontré, *il reste à montrer que* $[u^*,\ v^*,\ w^*]$ *est non seulement une solution de* (2.12), *mais aussi une solution de* (2.1). Notons

$$
\begin{aligned}
(2.14.n)\qquad E_n(x_1,\ x_2)=&\left|\frac{\partial u_n(x_1,\ x_2)}{\partial x_1}-f_1(x_1,\ x_2,\ u_n(x_1,\ x_2),\ w_n(x_1,\ x_2))\right|+\\
&+\left|\frac{\partial u_n(x_1,\ x_2)}{x_2}-f_2(x_1,\ x_2,\ u_n(x_1,\ x_2),\ v_n(x_1,\ x_2))\right|+\\
&+\left|\frac{\partial v_n(x_1,\ x_2)}{\partial x_1}-g(x_1,\ x_2,\ u_n(x_1,\ x_2),\ v_n(x_1,\ x_2),\ w_n(x_1,\ x_2))\right|+\\
&+\left|\frac{\partial w_n(x_1,\ x_2)}{\partial x_2}-h(x_1,\ x_2,\ u_n(x_1,\ x_2),\ v_n(x_1,\ x_2),\ w_n(x_1,\ x_2))\right|,
\end{aligned}
$$

$(n=1,\ 2\ ...)$. Notons aussi

$$
(2.15.n)\qquad
\begin{aligned}
f_1^n(x_1,\ x_2)&=f_1(x_1,\ x_2,\ u_n(x_1,\ x_2),\ w_n(x_1,\ x_2)),\\
f_2^n(x_1,\ x_2)&=f_2(x_1,\ x_2,\ u_n(x_1,\ x_2),\ v_n(x_1,\ x_2)),\\
g^n(x_1,\ x_2)&=g(x_1,\ x_2,\ u_n(x_1,\ x_2),\ v_n(x_1,\ x_2),\ w_n(x_1,\ x_2)),\\
h^n(x_1,\ x_2)&=h(x_1,\ x_2,\ u_n(x_1,\ x_2),\ v_n(x_1,\ x_2),\ w_n(x_1,\ x_2)),
\end{aligned}
$$

$n=1,\ 2,\ ...)$.

On trouve maintenant, par induction, en partant de (2.13.n),

$$
(2.16.n)\qquad
\begin{aligned}
|u_n(x_1,\ x_2)-u_{n-1}(x_1,\ x_2)|&\le d\,\frac{(3M)^{n-1}(x_1+x_2)^n}{n!}\\
|v_n(x_1,\ x_2)-v_{n-1}(x_1,\ x_2)|&\le d\,\frac{(3M)^{n-1}(x_1+x_2)^n}{n!}\\
|w_n(x_1,\ x_2)-w_{n-1}(x_1,\ x_2)|&\le d\,\frac{(3M)^{n-1}(x_1+x_2)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

$(n=1,\ 2\ ...)$, où

$$
(2.17)\qquad
\begin{aligned}
&M=\max\{M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4\},\\
&d=\max\{\sup|f_1^0(x_1\ x_2)|,\ \sup|f_2^0(x_1,\ x_2)|,\ \sup|g^0(x_1,\ x_2)|,\ \sup|h^0(x_1,\ x_2)|\},
\end{aligned}
$$

le "sup" se rapportant à $0\le x_1,\ x_2\le T$.

En partant toujours de (2.13.n), on trouve

$$\left|\frac{\partial u_n(x_1, x_2)}{\partial x_2} - f_2^n(x_1, x_2)\right| \le M_2\{|u_{n-1}(x_1, x_2) - u_n(x_1, x_2)| + |v_{n-1}(x_1, x_2) - v_n(x_1, x_2)|\},$$

$$\left|\frac{\partial v_n(x_1, x_2)}{\partial x_1} - g^n(x_1, x_2)\right| \le M_3\{|u_{n-1}(x_1, x_2) - u_n(x_1, x_2)| + |v_{n-1}(x_1, x_2) - v_n(x_1, x_2)| + |w_{n-1}(x_1, x_2) - w_n(x_1, x_2)|\}, \tag{2.18}$$

$$\left|\frac{\partial w_n(x_1, x_2)}{\partial x_2} - h^n(x_1. x_2)\right| \le M_4\{|u_{n-1}(x_1, x_2) - u_n(x_2, x_2)| + |v_{n-1}(x_1, x_2) - v_n(x_1, x_2)| + |w_{n-1}(x_1, x_2) - w_n(x_1, x_2)|\}.$$

Puis

$$\left|\frac{\partial u_n(x_1, x_2)}{\partial x_1} - f_1^n(x_1, x_2)\right| = \left|f_1^{n-1}(x_1, 0) - f_1^n(x_1, x_2) + \int_0^{x_2}\left\{\frac{\partial f_2^{n-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2^{n-1}}{\partial u}\cdot\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2^{n-1}}{\partial v}\cdot\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_1}\right\}d\eta\right|, \tag{2.19}$$

où l'intégrand est considéré dans le point (x_1, η). Moyennant la complète intégrabilité (2.3) on trouve alors, en calculant l'intégrale de (2.19)

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_1} - f_1^n(x_1, x_2)\right| = \left|f_1^{n-1}(x_1, x_2) - f_1^n(x_1, x_2) + \int_0^{x_2}\left\{\frac{\partial f_1^{n-1}}{\partial u}\left(f_2^{n-1} \quad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial f_1^{n-1}}{\partial w}\left(h - \frac{\partial w_{n-1}}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial f_2^{n-1}}{\partial u}\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} - f_1\right) + \frac{\partial f_2^{n-1}}{\partial v}\left(\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_1} - g\right)\right\}_{(x_1, \eta)} d\eta\right|. \tag{2.20}$$

Donc, en désignant par

$$k = \max\left\{\sup\left|\frac{\partial f_1^n(x_1, x_2)}{\partial u}\right|, \sup\left|\frac{\partial f_1^n(x_1, x_2)}{\partial w}\right|, \sup\left|\frac{\partial f_2^n(x_1, x_2)}{\partial u}\right|, \sup\left|\frac{\partial f_2^n(x_1, x_2)}{\partial v}\right|\right\}, \tag{2.21}$$

le "sup" se rapportant à ($n = 0, 1, 2, \ldots$) et $0 \le x_1,\ x_2 \le T$, on obtient de (2.18), (2.20), (2.14.n), 2.16.n)

$$(2.22.\mathrm{n}) \qquad E_n(x_1, x_2) \leq 10\, d\, \frac{3^{n-1} M^n (x_1 + x_2)^n}{n!} + k \int^{x_2} E_{n-1}(x_1, \eta)\, d\eta,$$

$(n = 1, 2, \ldots)$, c'est-à-dire une récurrence analogue à (1.24.n) du § 1. On démontre alors, comme dans le § 1, que $\lim E_n(x_1, x_2) = 0$. pour $n \to \infty$, uniformément par rapport à $0 \leq x_1, x_2 \leq T$. En tenant compte de (2.14.n), cela veut dire que la solution (u^*, v^*, w^*) de (2.12) satisfait aussi à (2.1). C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. HAIMOVICI, *Sur un système d'équations aux dérivées partielles* (Comm. Acad. R.P.R., t. 12, nr. 2, 1962, p. 195-200).

[2] D. PETROVANU, *Comportement des solutions de certains systèmes à différentielles totales à coefficients périodiques*, (An. St.ale Univ. Iaşi, Matematică, t. X, 1964, fasc. 2).

[3] D PETROVANU, *Asupra prelungirii soluţiilor sistemelor Pfaff*, (Studii şi cerc. şt Iaşi, - Matematică - 1961, t XII, p. 1-12).

[4] B. PINI, *Su certe questioni di periodicità e asintoticità per i sistemi lineari del primo ordine ai differenziali totali.* Rendiconti Sem Mat. Univ. Padova, t. 20, 1951, p. 249-277.