Sur l'existence des solutions pour un problème aux limites général

C. Avramescu (Craiova) (*) (**)

Résumé. - *On considère le problème de l'existence des solutions pour le problème aux limites $(L, K)+(T, H)$, où L, T sont des opérateurs linéaires et K, H des opérateurs non-linéaires.*

Dans ce travail nous allons considérer le problème aux limites,

$$(L,\ K) \qquad\qquad Lx = Kx$$

$$(T,\ H) \qquad\qquad Tx = Hx,$$

où L et T sont des opérateurs linéaires et K, H sont des opérateurs non-linéaires. Un problème aux limites de ce type a été considéré pour la première fois par R. Conti [1]; on doit à cet auter le développement tout-à-fait remarquable des problèmes aux limites de ce type. Remarquons encore les travaux de G. Pulvirenti [1], [2], et G. Santagati [1], [2], [3], consacrés aux problèmes de même type.

En vue d'obtenir des théorèmes d'existence pour le problème $(L, K)+(T, H)$, nous allons utiliser une variante de la méthode de Massera et Schäffer [1], [2], sous la forme donnée par C. Corduneanu [1] et Hartman et Onuchic [1]. On trouve l'idée d'utiliser la méthode de Massera et Schäffer aux problèmes aux limites sur un intervalle compact chez H. A. Antosiewicz [1], [2] et C. Corduneanu [2]. Dans le même ordre d'idées, mentionnons notre note [1].

1. - Soient X, Y, Z, U quatre espaces de Banach, et soit X_1 un sous-espace vectoriel de X. La norme de X induit dans X_1 une topologie, mais X_1 n'est pas nécessairement fermé dans X.

Soit encore Y_1 un espace de Banach satisfaisant aux conditions suivantes: Y_1 est un sous- espace vectoriel de Y et la topologie de Y_1 et plus forte que la topologie de Y.

Soit L un opérateur linéaire de X_1 *sur* Y et soit encore T un opérateur linéaire et continu de X *sur* Z.

Posons,

$$S = \{x;\ x \in X,\ \|x\|_X \leq r\}.$$

(*) L'auteur remercie à M. R. Conti, pour les conseils donnés pendant la préparation de ce travail.

(**) Entrata in Redazione il 10 settembre 1968.

Soit K un opérateur défini sur S a valeurs dans Y_1, continu de X à Y et soit H un opérateur défini sur S à valeurs dans Z, continu de X à Z Nous allons supposer que KS soit un ensemble borné dans Y_1, et que HS soit borné dans Z.

Désignons par $N(L)$ l'espace nul de L, par $N(T)$ l'espace nul de T et posons $N = N(L) \cap N(T)$. Nous allons supposer qu'il existe une application linéaire et continue π de X sur U, telle que la restriction de π à $N(L)$ soit invertible; nous allons désigner cette restriction par π_0 (1). Alors il est aisé de voir que l'équation,

$$(L,\ y) \qquad\qquad Lx = y,$$

admet une solution unique satisfaisant à la condition,

$$(\pi,\ u) \qquad\qquad \pi x = u,$$

pour tout $y \in Y$, u étant un élément fixé de U.

Désignons par U_0 l'image de N par l'application π; nous allons supposer que U_0 est fermé dans U et admet un complément aussi fermé, soit U_1. (Cette condition sera remplie en particulier si dim U ou dim U_0 sont finies, ou bien si codim U_0 est finie. Elle sera remplie aussi dans les cas *extrêmes*, c'est-à-dire dans les cas où $U_0 = \{0\}$, ou $U_0 = U$.) Désignons par P_0 et P_1 les projecteurs de U dans U_0 et U_1.

Pour montrer l'existence d'une solution pour le problème $(L, K) + (T, H)$, il est raisonnable d'admettre une hypothèse d'admissibilité au sens de MASSERA-SCHÄFFER, un peu modifiée, que nous allons désigner par *l'hypothèse H.*

L'hypothèse H. Pour tout $s \in S$, *le problème,*

$$(L,\ Ks) \qquad\qquad Lx = Ks$$

$$(T,\ Hs) \qquad\qquad Tx = Hs,$$

admet au moins une solution.

2. - On peut formuler maintenant un résultat fondamental pour ce qui suit

LEMME 1. - *Si l'hypothèse H est remplie, alors il existe une solution unique* x *du problème* $(L, Ks) + (T, Hs)$ *satisfaisant à la condition,*

$$(P,\ u) \qquad\qquad P_0 \pi x = u,$$

quel que soit $s \in S$.

---

(1) Remarquons que l'existence de π est assurée dans le cas suivant: considérons un espace U, homéomorphe avec $N(L) \subset X$ et soit π_0 une homéomorphisme entre ces espaces; si π peut être prolongée dans X, en conservant la continuité, on obtient aussi l'opérateur π.

DÉMONSTRATION. - Montrons d'abord que le problème $(L, Ks) + (T, Hs)$ admet une solution unique x, telle que $\pi x \in U_1$; en effet, soit x_1 une solution de ce problème. Considérons la solution x_2 de l'équation (L, Ks) satisfaisant à la condition $\pi x_2 = P_1 \pi x_1$. Il est évident que $x_2 - x_1 \in N$, d'où on déduit que x_2 est une solution du problème $(L, Ks) + (T, Hs)$. Supposons maintenant que x_3 soit aussi une solution de $(L, Ks) + (T, Hs)$, telle que $\pi x_3 \in U_1$. Il en résulte d'ici que $x_2 - x_3 \in N$, et d'autre part on a $\pi(x_2 - x_3) \in U_1$, ce qui nous donne $\pi(x_2 - x_3) = 0$, et donc $x_2 = x_3$.

Soit donc x la solution unique du problème $(L, Ks) + (T, Hs)$, avec $\pi x \in U_1$; la solution dont l'existence et l'unicité est affirmée dans l'énoncé du lemme, s'obtient en ajoutant à x la solution de l'équation $(L, 0)$ qui satisfait à la condition $\pi x = u$. Si l'on désigne par Ws la solution unique du problème $(L, Ks) + (T, Hs) + (P, 0)$, alors il en résulte que la solution unique du problème $(L, Ks) + (T, Hs) + (P, u)$ est,

$$x = \pi_0^{-1} u + Ws. \tag{1}$$

Le lemme se trouve ainsi démontré.

Remarquons que si $U_0 = \{0\}$, alors on n'a pas besoin de la condition (P, u) pour fixer une certaine solution du problème $(L, Ks) + (T, Hs)$, car dans ce cas, la seule solution de ce problème est Ws. Remarquons encore que le problème $(L, 0) + (T, 0) + (P, 0)$ admet seulement la solution $x = 0$.

Nous allons démontrer maintenant deux lemmes qui nous seront nécessaires dans ce qui suit.

LEMME 2. - *Supposons que l'hypothèse H soit remplie et que $L = L_1 + L_2$, $L_1 : X \longrightarrow Y_1$ étant une opérateur linéaire et continu et $L_2 : X_1 \longrightarrow Y$ étant une opérateur linéaire avec dim $N(L_2) < +\infty$, qui admet un invers à droit, soit L_2^+, complètement continu de Y_1 à X. Alors il existe un nombre positif M, tel que l'on ait,*

$$\| Ws \|_X \leq M, \tag{2}$$

pour tout $s \in S$.

DÉMONSTRATION. - Si la conclusion du lemme n'était pas vraie, alors pour tout entier positif n, on peut trouver un $s_n \in S$, tel que,

$$\| Ws_n \|_X > n. \tag{3}$$

Posons,

$$\xi_n = \frac{Ws_n}{\| Ws_n \|_X}; \qquad \eta_n = \frac{Ks_n}{\| Ws_n \|_X}; \qquad \zeta_n = \frac{Hs_n}{\| Ws_n \|_X}$$

On a,

(4) $$\| \xi_n \|_X = 1,$$

(5) $$L\xi_n = \eta_n, \qquad T\xi_n = \zeta_n, \qquad P_0\pi\xi_n = 0,$$

et,

(6) $$\lim_{n\to\infty} {}_{Y_1} \xi_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} {}_Z \zeta_n = 0.$$

De (5) il s'ensuit,

(7) $$\xi_n = \gamma_n + L_2^+(\eta_n - L_1\xi_n),$$

où $\gamma_n \in N(L_2)$. Comme $\{ \xi_n \}$ et $\{ L_2^+(\eta_n - L_1\xi_n) \}$ sont des ensembles bornés dans X, il en résulte que $\{ \gamma_n \}$ est un ensemble compact dans cet espace, donc contient une suite γ_{n_k} qui converge vers une certain $\gamma \in X$. Compte tenant du fait que L_2^+ est complètement continu de Y_1 à X, il en résulte que la suite $\{ \xi_{n_k} \}$ contient une sous-suite qui converge vers un certain $\xi \in X$. Alors de (7) il s'ensuit,

(8) $$\xi = \gamma + L_2^+(- L_1\xi).$$

ce qui nous montre que $\xi \in X_1$. De (8) et (6) on déduit,

(9) $$L\xi = 0, \qquad T\xi = 0, \qquad P_0\pi\xi = 0,$$

ce qui nous montre que $\xi = 0$, tandis que de (4) il s'ensuit que $\| \xi \|_X = 1$. La contradiction ainsi obtenue démontre le lemme.

COROLLAIRE . - *Si les hypothèses du lemme 2 sont satisfaites, alors pour la solution x du problème $(L, Ks) + (T, Hs) + (P, u)$ on a l'inégalité,*

(10) $$\| x \|_X \leq \| \pi_0^{-n} u \|_X + M,$$

pour tout $s \in S$.

LEMME 3. - *Supposons que les hypothèses du lemme 2 sont satisfaites. Soit la suite $\{ s_n \} \subset S$, convergente dans X vers s. Si l'on désigne par x_n la solution unique du problème $(L, Ks_n) + (T, Hs_n) + (P, u)$, alors x_n converge dans X vers la solution x du problème $(L, Ks) + (T, H_S) + (P, u)$,*

DÉMONSTRATION. - Si la conclusion du lemme n'était pas vraie, alors il existe un nombre positif q, et une sous-suite $\{ x_{n_k} \}$ de $\{ x_n \}$, telle que,

(11) $$\| x_{n_k} - x \|_X > q.$$

Compte tenant du fait que la suite $\{x_{n_k}\}$ est bornée, ce qui résulte du lemme 2, alors on peut montrer aisément que cette suite est compacte dans X, donc elle contient une sous-suite qui converge dans X vers un certain $x_0 \in X$; on constate, d'une manière analogue que dans le lemme 2, que $x_0 \in X_1$. Compte tenant de la continuité des opérateurs T, K, H, P_0 et π, on déduit que x_0 est une solution du problème $(L, Ks) + (T, Hs) + (P, u)$; mais comme ce problème admet une seule solution, il en résulte que $x_0 = x$, ce qui est en contradiction avec (11).

3. - Nous pouvons donner maintenant un théorème d'existence pour le problème $(L, K) + (T, H)$.

THÉORÈME 1. - *Supposons que les hypothèses du lemme 2 soient satisfaites, et que,*

$$\|\pi_0^{-1}u\|_X + M \leq r. \tag{12}$$

Alors le problème $(L, K) + (T, H) + (P, u)$ admet au moins une solution.

DÉMONSTRATION. - Nous allons appliquer le théorème du point fixe de SCHAUDER, pour l'opérateur $Vs = \pi_0^{-1}u + Ws$, sur l'ensemble S de X. D'après le corollaire 1 et l'inégalité (12) il résulte l'inclusion,

$$VS \subset S. \tag{13}$$

Le lemme 3 assure la continuité de l'opérateur V. Enfin, de l'égalité,

$$x = \gamma(s) + L_2^+(Ks - L_1x), \qquad \gamma(s) \in N(L_2), \qquad x = Vs,$$

il en résulte, compte tenant de (13) et du fait que L_2^+ est complètement continu de Y_1 à X, la compacité de l'ensemble VS. Donc l'ensemble S et l'opérateur V satisfont aux conditions exigées par le théorème de SCHAUDER, ce qui achève la démonstration, car évidemment, tout point fixe de V est une solution du problème $(L, K) + (T, H) + (P, u)$.

REMARQUE 1. - Les hypothèses sur l'opérateur L qui figurent dans le théorème 1, seront satisfaites en particulier si $N(L)$ est de dimension finie, et si L lui même admet un invers à droit complètement continue de Y_1 à X; dans ce cas $L_1 = 0$.

4. - Nous allons considérer maintenant le problème aux limites *linéaire*,

$$Lx = Kx \tag{L, K}$$

$$Tx = z, \tag{T, z}$$

z étant un élément fixé de Z. Évidemment, ce problème est un cas particulier du problème $(L, K) + (T, H)$, qui s'obtient en prenant $Hx \equiv z$; donc dans les hypothèse exigées par le théorème 1, le problème $(L, K) + (T, H) + (P, u)$ admet au moins une solution.

Remarquons que dans ce cas l'hypothèse H devient: *pour tout $y \in KS$ le problème $(L, y) + (T, z)$ admet au moins une solution.*

Nous allons utiliser une hypothèse d'admissibilité plus forte que l'hypothèse H, mais qui est plus raisonnable dans le cas linéaire que nous considérons.

HYPOTHÈSE H_0. - *Pour tout $y \in Y_1$ le problème $(L, y) + (T, z)$ admet au moins une solution.*

De l'hypothèse H_0 il s'ensuit que le problème $(L, y) + (T, 0)$ admet au moins une solution pour tout $y \in Y_1$. En effet, soient y_1, $y_2 \in Y$, tels que $y = y_1 - y_2$, et soit x_i une solution du problème $(L, y_i) + (T, z)$, $(i = 1, 2)$; alors $x = x_1 - x_2$ est une solution du problème $(L, y) + (T, 0)$.

On peut montrer, d'une manière analogue que dans le lemme 1, que le problème $(L, y) + (T, z) + (P, u)$ admet une solution unique pour tout $y \in Y_1$. De même, le problème $(L, y) + (T, 0) + (P, u)$ admet une solution unique. Soit alors $x = W_0 y$ la solution unique du problème $(L, y) + (T, 0) + (P, 0)$. Il est aisé de voir que W_0 est un opérateur linéaire de Y_1 dans X; dans le lemme qui suit, nous allons indiquer des conditions suffisantes assurant qu'il soit continu.

LEMME 4. - *Si $N(L)$ est fermé dans X et si L admet un invers à droit, soit L^+, continu de Y_1 à X, alors l'opérateur W_0 est continu de Y_1 à X.*

DÉMONSTRATION. - Comme W_0 est un opérateur linéaire, il suffira de montrer qu'il est fermé. Soit donc $x_n \in X$ et $y_n \in Y_1$, tels que,

$$x_n = W_0 y_n, \qquad \lim_{n\to\infty} {}_X\, x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} {}_{Y_1}\, y_n = y$$

On a donc,

$$Lx_n = y_n, \qquad Tx_n = 0, \qquad P_0 \pi x_n = 0, \tag{14}$$

d'où on déduit,

$$x_n = h_n + L^+ y_n, \qquad h_n \in N(L). \tag{15}$$

Comme les suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont convergentes, il en résulte, compte tenant du fait que L^+ est continu et $N(L)$ est fermé, que la suite h_n converge dans

X vers un certain $h \in N(L)$. Alors de (15) on obtient.

$$x = h + L^+ y, \tag{16}$$

ce qui nous montre que $x \in X_1$; de (14) et (16) il en résulte, compte tenant de la continuité de T, P_0 et π,

$$Lx = y, \qquad Tx = 0, \qquad P_0 \pi x = 0, \tag{17}$$

donc,

$$x = W_0 y.$$

REMARQUE 2. - Parce que la topologie de Y_1 est plus forte que la topologie de Y, pour que L^+ soit continu de Y_1 à X, il suffit que L_+ soit continu de Y à X. De même, si X_1 est un espace de Banach, avec la topologie plus forte que la topologie de X, alors du lemme 4 il résulte que W_0 est continu de Y_1 à X_1. Ces affirmations s'obtiennent en appliquant le théorème du graphique fermé.

COROLLAIRE 2 - *Dans les hypothèses du lemme* 4, *il résulte l'existence d'un nombre positif* q, *tel que,*

$$\| W_0 y \|_X \leq q \cdot \| y \|_{Y_1}, \tag{18}$$

quel que soit $y \in Y_1$.

Désignons par x_0 la solution unique du problème $(L, K0) + (T, z) + (P, 0)$. On peut démontrer maintenant le théorème suivant:

THÉORÈME 2. - *Supposons que l'hypothèse* H_0 *soit remplie et que* L *satisfasse aux conditions exigées dans l'énoncé du lemme* 4.

Supposons encore que l'opérateur K *soit définit sur* S *à valeurs dans* Y_1, *et satisfasse sur* S *à la condition,*

$$\| Kx_1 - Kx_2 \|_{Y_1} \leq Q \cdot \| x_1 - x_2 \|_X. \tag{19}$$

Si les inégalités suivantes,

$$qQ < 1, \qquad \| x_0 \|_X \leq (1 - qQ) \cdot r, \tag{20}$$

sont remplies, alors le problème $(L, K) + (T, z) + (P, u)$ *admet une solution unique.*

DÉMONSTRATION. - Cette fois nous allons appliquer le théorème de BANACH sur $S \subset X$. Soit l'opérateur $x = Vs$, défini sur S de la manière suivante; pour tout $s \in S$, Vs est la solution unique du problème $(L, Ks) + (T, z) + (P, u)$.

Nous allons montrer que V est un opérateur de contraction sur S. En effet, soient s_1, $s_2 \in S$ et $x_1 = Vs_1$, $x_2 = Vs_2$; alors on a,

$$x_1 - x_2 = W_0(Ks_1 - Ks_2),$$

d'où il s'ensuit, compte tenant de (18) et (19),

$$\| x_1 - x_2 \|_X \leq qQ . \| s_1 - s_2 \|_X .$$

D'autre part on a,

$$\| x \|_X \leq \| Vx - V0 \|_X + \| V0 \|_X \leq qQr + \| x_0 \|_X \leq r,$$

ce qui montre que $VS \subset S$. Le théorème se trouve ainsi démontré.

REMARQUE 3. - Si l'on considère le problème $(L, K) + (T, 0) + (P, u)$ alors on a pour M la valeur,

$$M = q . \sup_{s \in S} \{ \| Ks \|_{Y_1} \}.$$

REMARQUE 4. - Si X_1 est un espace de BANACH dont la topologie est plus forte que la topologie de X, alors on peut remplacer S par $S \cap X_1$, et (19) par,

$$\| Kx_1 - Kx_2 \|_{Y_1} \leq Q . \| x_1 - x_2 \|_{X_1} . \tag{19'}$$

Dans ce cas W_0 est continuu de Y_1 à X_1, et V est contractant dans X_1.

5. - Nous allons indiquer maintenant deux applications des théorèmes 1 et 2.

Remarquons d'abord que des théorèmes 1 et 2 il résulte en même temps que les solutions du problèmes considérés appartiennent à X_1. Supposons maintenant que X_1 soit un espace de BANACH, avec la topologie plus forte que la topologie de X.

Associons maintenant à l'équation (L, K) la condition aux limites linéaire,

$$x \in X_1 . \tag{X_1}$$

(Pour des détails concernant le probléme $(L, K) + (X_1)$, et aussi pour des autres types de problémes aux limites, nous renvoyons le lecteur au travail de R. CONTI [6]).

Remarquons que dans les théorèmes 1, 2 on peut supposer que T soit définit seulement sur X_1; alors, parce que la topologie de X_1 est plus forte que la topologie de X, il en résulte que T est continu de X_1 à Z. (D'ailleurs dans le théorème 2 avec la remarque 4, il suffit de supposer que T soit continu de X_1 à Z). Alors le problème $(L, K)+(X_1)$ peut être considéré comme un cas particulier du problème $(L, K)+(T, z)$, si l'on prend pour T l'opérateur nul de X_1 à Z et $z=0$; dans ce cas la condition $(T, 0)$ sera remplie identiquement, et nous aurons $N=N(L)$. L'hypothèse H_0 devient dans ce cas,

HYPOTHÈSE H'. – *Pour tout $y \in Y_1$ l'équation (L, y) admet au moins une solution dans X .*

Alors, des théorèmes 1, 2 on obtiennent ainsi les corollaires suivantes:

COROLLAIRE 3. – *Admettons les hypothèses suivantes:*

1) *L'hypothèse H' est remplie*

2) *dim $N(L)<+\infty$*

3) *L admet un invers à droit, soit L^+, complètement continu de Y_1 à X, et continu de Y à X*

4) *$K: S \rightarrow Y_1$ est un opérateur continu de X à Y et KS est borné dans Y_1.*

Alors si r est suffisamment grand, le problème $(L, K)+(X_1)$ admet au moins une solution, satisfaisant à la condition (P, u).

COROLLAIRE 4. – *Admettons les hypothèses suivantes:*

1) *l'hypothèse H' a lieu*

2) *$N(L)$ est fermé dans X; L^+ est continuu de Y_1 à X*

3) *K satisfait à la condition (19').*

Alors si Q et $1/r$ sont suffisamment petits, le problème $(L, K)+(X_1)+(P, u)$ admet au moins une solution.

REMARQUE 5. – Dans le théorème 2 et dans le corollaire 2, on peut supposer que L^+ soit continu de Y à X, parce que d'ici résulte la continuité de L^+ de Y_1 à X.

REMARQUE 6. – Nous avons énoncé le corollaire 3 seulement dans le cas particulier du théorème 1 où L_1 est l'opérateur nul de X à Y, mais on peut énoncer ce corollaire et dans le cas général considéré dans ce théorème.

6. On peut obtenier des divers applications concrètes des théorèmes démontrés plus haut, en particularisant les opérateurs et les espaces qui interviennent. Nous allons traiter, à titre d'exemple, quelques problèmes aux limites pour l'équation différentielle,

$$(A,\ f) \qquad x' = A(t)x + f(t,\ x),$$

où $A(t)$ est une matrice carrée du type $n \times n$ de fonctions définies sur $J = [0,\ h]$ et $f(t,\ x)$ est une fonction à valeurs dans R^n, définie pour $(t,\ x) \in J \times R^n$, $\| x \| \leq r$, $\| \cdot \|$ étant la norme de R^n.

Désignons par $C(J)$ l'espace de Banach des fonctions définies et continues sur J à valeurs dans R^n, et par $L^1(J)$ l'espace de Banach des fonctions integrables sur J à valeurs dans R^n.

Désignons encore par $AC(J)$ l'espace vectoriel des applications de J dans R^n, dont les composantes sont des fonctions absolument continues sur J et par $C^1(J)$ l'espace vectoriel des applications de J dans R^n, dont les composantes sont des fonctions de la classe C^1. Évidemment, $AC(J)$ et $C^1(J)$ sont des sous-espaces vectoriels de $C(J)$; la topologie propre de $AC(J)$ ou $C^1(J)$ n'interesse pas.

Posons,

$$S_1 = \{ x;\ x \in C(J),\ \| x(t) \| \leq r \}.$$

L'équation $(A,\ f)$ est du type $(L,\ K)$, si l'on prend,

$$L = d/dt - A(t), \qquad Kx = f(t,\ x(t)).$$

On prend aussi $S = S_1$, $X = C(J)$, $\pi x = x(0)$, $Z = U = R^n$.

Si A et f satisfont aux conditions de continuité, on prend,

$$X_1 = C^1(J), \qquad Y = Y_1 = C(J).$$

Si A et f satisfont aux conditions de Carathèodory, et si $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions sommables sur J telles que $\| A(t) \| \leq a(t)$, $\| f(t,\ x) \| \leq b(t)$ p. p. dans J, alors on prend,

$$X_1 = AC(J), \qquad Y = L^1(J), \qquad Y_1 = L_g(J),$$

où L_g est l'espace de Banach défini de la manière suivante: les éléments de L_g sont des fonctions de $L^1(J)$, telles que pour tout $x \in L_g$ il existe un nombre positif k, qui dépende de x, tel que l'on ait $\| x(t) \| \leq k \cdot g(t)$ p. p. dans J, où $g(t) = a(t) + b(t)$. La norme de L_g est définie par,

$$\| x \|_g = \sup_{t \in J} \{ \| x(t) \| / g(t) \}$$

On constate facilement que la topologie de L_g est plus forte que la topologie de $L^1(J)$. L'inégalité $\|f(t, x)\| \leq b(t) \leq g(t)$, nous assure que KS_1 est borné dans L_g.

Pour appliquer le théorème 1 on peut prendre,

$$L_1 = - A(t), \qquad L_2 = d/dt.$$

La continuité de L_1 est évidente. On a,

$$L_2^+ x = \int_0^t x(s)ds.$$

L_2^+ est continu de $L^1(J)$ à $C(J)$, et complètement continu de $C^1(J)$ ou $L_g(J)$ à $C(J)$.

Mais on peut prendre également dans les théorèmes 1 et 2, $L = L_2 = d/dt - A(t)$, $L_1 = 0$; nous aurons alors,

$$L^+ = \int_0^t X(t)X^{-1}(s).ds,$$

où $X(t)$ est une matrice fondamentale de l'équation $(A, 0)$.

De même, L^+ est continu de $L^1(J)$ à $C(J)$ et complètement continu de $C^1(J)$ ou $L_g(J)$ à $C(J)$.

Soit maintenant T un opérateur linéaire et continu de $C(J)$ dans R^n, et H un opérateur continu et borné sur S_1, à valeurs dans R^n; l'hypothèse H s'enonce dans ce cas comme suit: pour tout $s \in S$ le problème,

$$x' = A(t)x + f(t, s(t)) \tag{20}$$

$$Tx = Hs \tag{21}$$

admet au moins une solution. Elle sera remplie en particulier si la restriction de T à l'espace des solutions de l'équation $(A, 0)$ est invertible. Dans ce cas on a $U_0 = \{0\}$, et donc on n'a pas besoin de la condition (P, u); remarquons encore que dans ce cas il est remplie même l'hypothèse H_0.

Associons maintenant à l'équation (A, f) la condition aux limites,

$$C \cdot x(0) = 0, \tag{22}$$

où C est une matrice carrée du type $n \times n$, telle que rang $C = n - m$, $m \neq 0$. La condition (22) est du type (21), où $Tx = C \cdot x(0)$, $Hx = 0$ pour tout $x \in S_1$, mais la restriction de T à l'espace nul de L n'est pas invertible. Si nous supposons que le determinant de C formé par les dernières $n - m$ lignes et colonnes n'est pas nul, alors U_0 est le sous-espace de R^n formé par les vecteurs qui ont les dernières $n-m$ composantes nulles. Donc si $u = (u_1, \ldots, u_n) \in R^n$, alors $P_0 u = (u_1, \ldots, u_m)$, et la condition (P, u) devient,

$$x_1(0) = u_1, \ \ldots, \ x_m(0) = u_m.$$

Remarquons encore que des corollaires 3, 4, on peut obtenier les résultats de C. CORDUNEANU [2], concernant l'existence des solutions de l'équation (A, f) appartenent à un sous-espace de $C(J)$.

7. Il serait interessant de comparer les résultats établis dans ce travail avec les résultats obtenus par R. CONTI [4]; dans ce travail on réduit le problème $(L, K)+(T, H)$ à une seule équation fonctionnelle.

On peut poser aussi la question de renoncer à la condition (P, u); dans ce cas il faut utiliser des théorèmes de point fixe pour des applications multivoques, comme par exemple dans les notes de A. LASOTA el Z. OPIAL [1] et M. GRANDOLFI [1].

BIBLIOGRAPHIE.

H. ANTOSIEWICZ.

[1] *Un analogue du principe de point fixe de Banach,* Ann. mat. Pura ed Appl., (IV), LXXIV, (1966).

[2] *Boundary value problems for non-linear ordinary differential equations,* Pacif J, Math., 17, (1966).

C. AVRAMESCU.

[1] *Problèmes aux limites non-linéaires,* Ann. Mat. Pura ed Appl., S. IV, t. LXXX, (1968).

[2] *Systèmes différentiels à conditions aux limites non-homogènes,* Studii si Cerc. Iasi, XIV, (1963) (en roumain).

R. CONTI.

[1] *Equazioni differenziali ordinarie con condizioni lineari generali,* Rend. Accad. Lincei, s. VIII. vol. XXVI, (1959).

[2] *Problèmes linéaires pour les équations différentielles ordinaires,* Math. Nachr., vol. 23, (1961).

[3] *Problemi quasi lineari negli spazi di Banach,* Rend. Accad. Lincei, s.VII, vol. XXXII, (1962).

[4] *Les vibrations forcées dans les systèmes non-linéaires,* Coll. Intern. du C. N. R. S., Marseille, (1964).

[5] *On non-linear boundary value type problems,* RIAS, T. R. 64-12, (1964).

[6] *Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary equations,* Boll. U. M. I., (XXII), 3, (1967).

C. CORDUNEANU.

[1] *Sur certains systèmes différentielles non linéaires,* An. Univ. A. I. Cuza, Iasi, 6, (1960).

[2] *Problèmes aux limites linéaires,* Ann. Mat. Pura ed Appl., 68, (1966).

M. GRANDOLFI.

[1] *Problemi ai limiti per le equazioni differenziali multivoche,* Rend, Accad. Lincei, s. VIII, vol. XLII, fasc. 3, (1967).

PH. HARTMAN AND N. ONUCHIC.

[1] *On the asymptotic integration of ordinary differential equations,* Pacif, J. Math, 13, (1963).

A. LASOTA AND Z. OPIAL.

[1] *An application of the Kakutany-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations,* Bull. Acad. Pol. Sci., 13, (1965).

J. L. MASSESA and J. J. SCHÄFFER.

[1] *Linear differential equations and functional analysis,* I, Ann. of Math., 67, (1958).

[2] *Linear differential equations and functional analysis,* V. Math. Ann., 139, (1960).

G. PULVIRENTI.

[1] *Problemi lineari per le equazioni differenziali ordinarie in uno spazio di Banach,* Le Matematiche, 15, (1960).

[2] *Equazioni differenziali ordinarie con condizioni quasi lineari,* Le Matematiche, 16, (1961).

G. SANTAGATI.

[1] *Equazioni differenziali ordinarie quasi lineari con condizioni quasi lineari,* Ann. Mat. Pura ed Appl, 62, (1963).

[2] *Problemi quasi lineari negli spazi di Banach,* Le Matematiche, 18, (1963).

[3] *Equazioni differenziali ordinarie con condizioni quasi-lineari,* Ann. Mat. Pura ed App, 69, (1963)