Alcune proprietà di una classe di procedimenti iterativi approssimati connessi con trasformazioni più generali delle contrazioni, in uno spazio metrico. (*)

A. PASQUALI (Firenze) (**)

Summary. - *In this paper, we study a class of iterative processes of the type* $y_{n+1} = T_n y_n$, *which approximate the iterative processes* $x_{n+1} = Tx_n$, *where* T *and* T_n *are more general operators than contractions in a metric space.*

1. - Introduzione.

Se si vuole approssimare una soluzione dell'equazione $x = Tx$ mediante il procedimento iterativo $x_{n+1} = Tx_n$, è praticamente impossibile ottenere esattamente la successione delle iterate $\{x_n\}$, sia per le approssimazioni necessariamente compiute nel calcolo di T, sia perchè è molto spesso conveniente approssimare T con operatori di più facile calcolo; la successione $\{y_n\}$ realmente calcolata non converge in generale alla soluzione x^* dell'equazione considerata. È perciò assai utile disporre di valutazioni dell'errore commesso approssimando x^* con y_n; in questo senso sono orientati alcuni studi recenti (cfr. [1], [2], [3]) che J. M. ORTEGA e W. C. RHEINBOLDT hanno unificato ed esteso in un loro lavoro [4], utilizzando il principio di contrazione negli spazi pseudometrici (cfr. [5]).

In questo lavoro studiamo le connessioni esistenti fra la successione delle iterate $\{x_n\}$ e una successione approssimata $\{y_n\}$ nel caso di trasformazioni più generali di quelle contrattive, operanti in uno spazio metrico (X, d) dotato della metrica ordinaria; a questo scopo facciamo uso di un teorema di punto fisso comparso recentemente nella letteratura (cfr. [6], [7]).

Nel paragrafo 2 vengono riportati alcuni risultati preliminari, mentre nel paragrafo 3 viene considerato con particolare attenzione il caso in cui la successione $\{y_n\}$ è ottenuta mediante il procedimento iterativo $y_{n+1} = T_n y_n$, dove $\{T_n\}$ è un'opportuna successione di operatori approssimanti T. Infine nel paragrafo 4 otteniamo alcune conseguenze dei teoremi precedenti che generalizzano alcuni risultati di URABE [1].

(*) Entrata in Redazione il 27 marzo 1969.

(**) Istituto Matematico «U. DINI», Uuniversità degli Studi di Firenze, Viale Morgagni 67/*a* Firenze. Lavoro eseguito in relazione al Contratto N° 115.3050.0.5189 del Comitato per la Matematica del C.N.R. nel corso dell'anno accademico 1968-69.

2. - Alcuni risultati preliminari.

Consideriamo una funzione $\varphi(r)$ reale, definita per $r \in [0, +\infty)$:

DEFINIZIONE 1. - *Diremo che la funzione $\varphi(r)$ gode della proprietà P_1 se è continua e soddisfa alle seguenti condizioni:*

$$\varphi(r_1) \leq \varphi(r_2), \qquad \forall r_1,\ r_2 \in [0, +\infty), \qquad r_1 \leq r_2 \tag{2.1}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^\nu(r) < +\infty, \qquad \forall r \geq 0 \tag{2.2}$$

dove $\varphi^0(r) = r,\ \varphi^1(r) = \varphi(r),\ \dots,\ \varphi^\nu(r) = \varphi(\varphi^{\nu-1}(r)),\ \dots$.

DEFINIZIONE 2. - *Diremo che la funzione $\varphi(r)$ gode della proprietà P_2 se gode della proprietà P_1 e inoltre soddisfa alla condizione seguente:*

$$\varphi(r_1 + r_2) \leq \varphi(r_1) + \varphi(r_2), \qquad \forall r_1,\ r_2 \in [0, +\infty). \tag{2.3}$$

OSSERVAZIONE. - Soddisfano alle condizioni (2.1), (2.3) le funzioni due volte derivabili tali che

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(r) \geq 0 \quad \text{e} \quad \varphi''(r) \leq 0 \quad \text{per} \quad r > 0;$$

soddisfa alla proprietà P_2 per esempio la funzione $\varphi(r) = r/(1+r)$. Osserviamo anche che (2.2) implica:

$$\varphi(r) < r, \qquad \forall r > 0 \tag{2.4}$$

Consideriamo ora la seguente funzione:

$$S: r \longrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^\nu(r), \qquad r \in [0, R] \subset [0, +\infty), \qquad 0 < R < +\infty; \tag{2.5}$$

vale il seguente

LEMMA 2.1. - *Se $\varphi(r)$ gode della proprietà P_1, la funzione $S(r)$ è continua in $[0, R]$. In particolare*

$$\lim_{r \to 0+} S(r) = 0. \tag{2.6}$$

Essendo infatti per la proprietà P_1

$$\varphi^\nu(r) \leq \varphi^\nu(R), \qquad \forall r \in [0, R], \qquad \forall \nu \geq 0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^\nu(R) < +\infty,$$

la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^{\nu}(r)$ è totalmente convergente e quindi uniformemente convergente in $[0, R]$; dalla continuità di $\varphi^{\nu}(r)$, $\forall \nu \geq 0$, segue la continuità di $S(r)$. Segue immediatamente anche la (2.6).

Consideriamo ora una successione $\{r_k\} \subset [0, R]$ e formiamo la successione $\{a_n\}$ così definita:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi^{n-k}(r_k) \qquad n = 0, 1, \ldots . \tag{2.7}$$

Nel seguito useremo la seguente proprietà della successione (2.7):

LEMMA 2.2. - *Se* $\lim_{k \to +\infty} r_k = 0$, *allora anche* $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, *se* $\varphi(r)$ *gode della proprietà* P_1.

Fissato infatti $\sigma > 0$, per la continuità di $S(r)$ possiamo determinare $\delta_\sigma > 0$ tale che

$$0 \leq S(r) < \frac{\sigma}{2}, \qquad \forall r \in [0, R], \quad r \leq \delta_\sigma . \tag{2.8}$$

Per le ipotesi fatte su $\{r_k\}$ esiste un indice k_0 tale che

$$r_k \leq \delta_\sigma, \qquad \forall k \geq k_0; \tag{2.9}$$

per la (2.8) e la (2.9) e la proprietà P_1 di $\varphi(r)$, otteniamo la seguente disuguaglianza:

$$\sum_{k=k_0+1}^{n} \varphi^{n-k}(r_k) \leq \sum_{k=k_0+1}^{n} \varphi^{n-k}(\delta_\sigma) < S(\delta_\sigma) < \frac{\sigma}{2}, \qquad \forall n > k_0 . \tag{2.10}$$

Poniamo ora

$$r_M = \max_{k=0, \ldots, k_0} r_k; \tag{2.11}$$

poichè per la (2.2) abbiamo $\lim_{\nu \to \infty} \varphi^{\nu}(r) = 0$, $\forall r \geq 0$, è possibile determinare un indice $n_1 \geq k_0$ tale che

$$\varphi^{n-k_0}(r_M) < \frac{\sigma}{2(k_0+1)}, \qquad \forall n > n_1; \tag{2.12}$$

abbiamo allora

$$\sum_{k=1}^{k_0} \varphi^{n-k}(r_k) \leq \sum_{k=0}^{k_0} \varphi^{n-k}(r_M) < \sum_{k=0}^{k_0} \frac{\sigma}{2(k_0+1)} = \frac{\sigma}{2}, \qquad \forall n > n_1; \tag{2.13}$$

per le disuguaglianze (2.10) e (2.13) otteniamo infine

$$a_n = \sum_{k=0}^{k_0} \varphi^{n-k}(r_k) + \sum_{k=k_0+1}^{n} \varphi^{n-k}(r_k) < \sigma, \qquad \forall n > n_1. \tag{2.14}$$

Il lemma è così dimostrato.

Nel seguente lemma di immediata dimostrazione sono richiamate alcune proprietà della funzione $S(r)$ che verranno utilizzate nel seguito:

LEMMA 2.3. - *Se la funzione $\varphi(r)$ gode della proprietà P_2, la funzione $S(r)$ definita dalla* (2.5) *ha le proprietà seguenti:*

$$S(r_1) \leq S(r_2), \qquad \forall\, r_1,\ r_2 \geq 0,\ r_1 \leq r_2, \tag{2.15}$$

$$S(r_1 + r_2) \leq S(r_1) + S(r_2), \qquad \forall\, r_1,\ r_2 \geq 0 \tag{2.16}$$

$$S(\varphi(r)) + r = S(r). \tag{2.17}$$

Richiamiamo ora il seguente teorema di punto fisso (cfr. [6] [7]):

TEOREMA 2.1. - *Dato uno spazio metrico completo (X, d) e un sottinsieme non vuoto $M \subset X$, sia $T : M \to M$ una trasformazione tale che*

$$d(Tx,\ Ty) \leq \varphi[d(x,\ y)], \qquad \forall\, x,\ y \in M, \tag{2.18}$$

dove $\varphi(r)$ gode della proprietà P_1. Allora la successione $\{x_n\}$, definita dalla relazione

$$x_{n+1} = Tx_n, \qquad x_0 \in M, \tag{2.19}$$

converge verso un punto $x^* \in X$, indipendentemente dalla scelta di $x_0 \in M$.

Se M è chiuso in X, allora $x^* \in M$ è l'unico punto unito di T in M.

Congiuntamente al teorema precedente faremo uso nel seguente lemma:

LEMMA 2.4. - *Dato lo spazio metrico completo (X, d), sia $T : M \subset X \to X$ un operatore soddisfacente alla seguente condizione:*

$$d(Tx,\ Ty) \leq \varphi[d(x,\ y)] + \gamma. \qquad \forall x,\ y \in M, \tag{2.20}$$

dove $\varphi(r)$ è una funzione reale con la proprietà P_2 e dove $\gamma \in [0, +\infty)$ è fissato.

Esistano inoltre y_0, $y_1 \in M$ tali che

$$B \equiv \{\, x \in X : d(x,\ y_1) \leq \rho \,\} \subset M, \tag{2.21}$$

dove

$$\rho = S[\varphi(d(y_0, y_1))] + S(\delta + \gamma), \tag{2.22}$$

con $S(r)$ *data dalla* (2.5) *e*

$$\delta \geq d(Ty_0, y_1). \tag{2.23}$$

Allora $TB \subset B$.

Sia $x \in B$; dimostriamo che $Tx \in B$. Infatti, per la (2.20) e per la proprietà P_2, abbiamo:

$$\begin{aligned} d(Tx, y_1) &\leq \varphi[d(x, y_1) + d(y_1, y_0)] + \gamma + d(Ty_0, y_1) \\ &\leq \varphi[d(x, y_1)] + \varphi[d(y_1, y_0)] + \gamma + d(Ty_0, y_1) \\ &\leq \varphi(\rho) + \varphi[d(y_1, y_0)] + \gamma + \delta. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Osserviamo, ora, che valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\varphi(\rho) \leq \varphi\left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi^{\nu}[d(y_0, y_1)]\right] + \varphi\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^{\nu}(\gamma + \delta)\right], \tag{2.25}$$

$$\varphi\left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi^{\nu}(r)\right] \leq \sum_{\nu=2}^{\infty} \varphi^{\nu}(r). \tag{2.26}$$

Per la (2.26), otteniamo dalla (2.25) la seguente disuguaglianza:

$$\varphi(\rho) \leq \sum_{\nu=2}^{\infty} \varphi^{\nu}[d(y_1, y_0)] + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi^{\nu}(\gamma + \delta). \tag{2.27}$$

Servendoci di questo risultato ricaviamo dalla (2.24) la seguente relazione:

$$d(Tx, y_1) \leq \sum_{\nu=2}^{\infty} \varphi^{\nu}[d(y_0, y_1)] + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi^{\nu}(\gamma + \delta) + \varphi[d(y_0, y_1)] + (\gamma + \delta) = \rho. \tag{2.28}$$

Il lemma è così dimostrato.

3. - Alcuni teoremi sulle iterate ottenute mediante operatori approssimanti.

Consideriamo ora uno spazio metrico completo (X, d) e un operatore $T: M \subset X \to X$; sia $\{x_n\}$ la successione definita dalla (2.19) e sia $\{y_n\}$ un'arbitraria successione contenuta in M; vale allora il seguente:

TEOREMA 3.1. - *Se T soddisfa alla (2.18) e $\varphi(r)$ ha la proprietà P_2 e se $B \subset M$ è un sottinsieme chiuso con la proprietà $TB \subset B$, allora, posto*

$$\sigma_n = d(y_{n+1}, Ty_n), \qquad n = 0, 1, \dots, \tag{3.1}$$

valgono le seguenti stime dell'errore commesso approssimando la soluzione x^* di $x = Tx$ con un termine di $\{y_n\}$

$$d(y_{n+1}, x^*) \leq S(\sigma_n) + S[\varphi(d(y_{n+1}, y_n))], \tag{3.2}$$

dove $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, e

$$d(y_n, x^*) \leq d(x_n, x^*) + \varphi^n[d(x_0, y_0)] + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{n-k}(\sigma_k). \tag{3.3}$$

Inoltre la condizione

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = 0 \tag{3.4}$$

è necessaria e sufficiente perchè sia:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = x^*. \tag{3.5}$$

Infatti, per la (2.18) e la proprietà P_2 abbiamo:

$$d(y_{n+1}, x_m) \leq \sigma_n + \varphi[d(y_n, y_{n+1})] + \varphi[d(y_{n+1}, x_{m-1})] \leq \dots$$

$$\dots \leq \sum_{\nu=0}^{m-1} \varphi^\nu(\sigma_n) + \sum_{\nu=1}^{m} \varphi^\nu[d(y_n, y_{n+1})] + \varphi^m[d(y_{n+1}, x_0)],$$

e, passando al limite per $m \to \infty$ otteniamo

$$d(y_{n+1}, x^*) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^\nu(\sigma_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi^\nu[d(y_n, y_{n+1})]$$

cioè la (3.2).

Per dimostrare la (3.3) procediamo nel modo seguente:

$$\begin{aligned} d(x^*, y_n) &\leq d(x^*, x_n) + \varphi[d(x_{n-1}, y_{n-1})] + \sigma_{n-1} \\ &\leq d(x^*, x_n) + \varphi^2[d(x_{n-2}, y_{n-2})] + \sigma_{n-1} + \varphi(\sigma_{n-2}) \\ &\leq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &\leq d(x^*, x_n) + \varphi^n[d(x_0, y_0)] + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{n-k}(\sigma_k). \end{aligned}$$

Dalla definizione di σ_n ricaviamo, per la (2.18),

$$0 \leq \sigma_n \leq d(y_{n+1}, x_{m+1}) + \varphi[d(x_m, y_m)]$$

e, passando al limite per $m \to \infty$,

$$0 \leq \sigma_n \leq d(y_{n+1}, x^*) + \varphi[d(x^*, y_n)]$$

perciò dalla (3.4) segue la (3.5). Viceversa la (3.5) implica la (3.4), come si ottiene immediatamente dalla (3.3) servendosi del lemma 2.2.

Il teorema è così completamente dimostrato ed è da considerarsi come una generalizzazione di un risultato ottenuto da OSTROWSKI [2].

Supponiamo ora che la successione $\{y_n\}$, anzichè arbitraria, sia generata mediante il seguente procedimento iterativo (cfr. [3]):

(3.6) $$y_{n+1} = T_n y_n, \qquad n = 0, 1, \dots$$

dove $\{T_n\}$ è un'opportuna successione di operatori da $M \subset X$ in X.

Con ipotesi diverse su T e T_n si ottengono alcuni interessanti risultati, condensati nei teoremi che seguono.

TEOREMA 3.2. - *Supponiamo che $T : M \subset X \to X$ soddisfi alla* (2.18) *con $\varphi(r)$ dotata della proprietà P_2 e che gli operatori $T_n : M \to X$ soddisfino alle condizioni seguenti:*

(3.7) $$d(T_n x, T_n y) \leq \varphi[d(x, y)] + \gamma, \qquad \forall x, y \in M, \ n = 0, 1, \dots$$

con $\gamma \in [0, +\infty)$ fissato.

Sia poi $y_0 \in M$ tale che

(3.8) $$B \equiv \{ x \in X : d(x, T_0 y_0) \leq \rho \} \subset M$$

dove

(3.9) $$\rho = S[\varphi(d(y_0, T_0 y_0))] + S(\gamma + \delta)$$

con δ soddisfacente alle seguenti condizioni:

(3.10) $$\delta \geq d(T_n y_0, T_0 y_0), \qquad n = 0, 1, \dots$$

(3.11) $$\gamma + \delta \geq d(T y_0, T_0 y_0)$$

Allora le successioni $\{x_n\}$ e *$\{y_n\}$, definite rispettivamente da* (2.19) *e da* (3.6) *con $x_0 = y_0$, hanno significato per ogni n; inoltre*

i) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$,

dove x^* è l'unico punto fisso di T in B;

ii) *posto*

$$\sigma_n = d(T_n y_n,\ T y_n), \qquad n = 0,\ 1,\ \dots, \tag{3.12}$$

valgono le relazioni (3.2) *e* (3.3) *del Teorema* 3.1.

Infatti dalle condizioni (2.18), (3.7) e (3.8) e dal lemma 2.4 segue $TB \subset B$; il teorema 2.1 assicura allora $\{x_n\} \subset B$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ con $x^* = Tx^*$.

Le ipotesi (3.7), (3.8) e (3.10) assicurano, per il lemma 2.4, che $T_n B \subset B$, dunque $\{y_n\} \subset B$ e vale perciò il teorema 3.1.

Il teorema è così dimostrato.

TEOREMA 3.3. - *Sia* $(X,\ d)$ *uno spazio metrico completo ed* M *un suo sottinsieme chiuso; sia* T *un operatore da* M *in sè e* $\{T_n\}$ *una successione di operatori da* M *in* M *soddisfacenti alle seguenti condizioni*:

$$d(T_n x,\ T_n y) \leq \varphi[d(x,\ y)], \qquad \forall\ x,\ y \in M,\ n = 0,\ 1,\ \dots \tag{3.13}$$

dove $\varphi(r)$ *ha la proprietà* P_1.

Allora le successioni $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *definite rispettivamente da* (2.19) *e* (3.6) *esistono in* M.

Inoltre, se esiste $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in M$ *tale che* $x^* = Tx^*$, *la condizione*

$$\lim_{n\to\infty} d(T_n x^*,\ Tx^*) = 0 \tag{3.14}$$

implica

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x^* \tag{3.15}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0 \tag{3.16}$$

dove σ_n *è definito mediante la* (3.1).

Infatti:

$$d(y_{n+1},\ x^*) \leq \varphi[d(y_n,\ x^*)] + d(T_n x^*,\ Tx^*) \leq \dots$$

$$\dots \leq \varphi^{n+1}[d(y_0,\ x^*)] + \sum_{k=0}^{n} \varphi^{n-k}[d(T_k x^*,\ Tx^*)].$$

Tenuto conto della (3.14) e del fatto che $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(r) = 0$, il lemma 2.2 ci permette di ricavare dalla disuguaglianza precedente che

$$\lim_{n\to\infty} d(y_{n+1},\ x^*) = 0$$

da cui segue la (3.15). Perciò

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} d(y_{n+1}, Ty_n) = d(x^*, Tx^*) = 0.$$

TEOREMA 3.4. *Sia M un sottinsieme non vuoto dello spazio metrico (X, d), sia T un operatore da M in X e sia $\{T_n\}$ una successione di operatori da M in X soddisfacenti alla condizione* (3.13) *con $\varphi(r)$ dotata della proprietà P_2. Esista inoltre un $y_0 \in M$ tale che*

$$B \equiv \{x \in X : d(x, T_0y_0) \leq \rho\} \subset M \tag{3.17}$$

con

$$\rho = S[\varphi(d(y_0, T_0y_0))] + S(\delta), \tag{3.18}$$

in cui δ soddisfa alla condizione seguente:

$$\delta \geq \max\{\sup_n d(T_ny_0, T_0y_0), d(Ty_0, T_0y_0)\}. \tag{3.19}$$

Allora, se vale la condizione

$$\lim_{n\to\infty} d(T_nx, Tx) = 0 \tag{3.20}$$

uniformemente per $x \in M$, sono valide le tesi del teorema 3.2 *e inoltre* $\lim_{n\to\infty} y_n = x^*$.

Fissato infatti $\varepsilon > 0$, è possibile determinare, per la (3.20), un indice n_ε tale che

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi[d(x, y)] + 2\varepsilon, \qquad \forall n > n_\varepsilon;$$

perciò, per l'arbitrarietà di ε, si ottiene

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi[d(x, y)]. \tag{3.21}$$

Sono perciò soddisfatte le ipotesi del lemma 2.4 e del teorema 3.2, ove si ponga $\gamma = 0$. Esiste dunque $x^* \in B$ tale che $x^* = Tx^*$; allora la (3.20) con $x = x^*$ implica, per il teorema 3.3, $\lim_{n\to\infty} y_n = x^*$.

4. - Alcune conseguenze.

Il teorema seguente, derivante dai risultati ottenuti sopra, è più utile per le applicazioni:

TEOREMA 4.1 - *Sia dato uno spazio metrico completo (X, d) e un operatore $T : M \subset X \longrightarrow X$ soddisfacente alla condizione (2.18) con $\varphi(r)$ dotata della proprietà P_2; sia poi $\{ T_n \}$ una successione di operatori da M in X, tali che esista un numero reale β per il quale vale la seguente relazione:*

$$\beta \geq \sup_M \{ \sup_n \{ d(T_n x, \ Tx) \} . \tag{4.1}$$

Sia $y_0 \in M$ tale che

$$B \equiv \{ x \in X : d(x, \ T_0 y_0) \leq \delta \} \subset M, \tag{4.2}$$

dove

$$\rho = S[\varphi(d(y_0, \ T_0 y_0))] + S(2\beta + \delta), \tag{4.3}$$

con δ soddisfacente alla seguente disuguaglianza:

$$\delta \geq \sup_n \ d(T_n y_0, \ T_0 y_0) \tag{4.4}$$

Allora le successioni $\{ x_n \}$ e $\{ y_n \}$, definite mediante le relazioni (2.19) *e* (3.6) *rispettivamente, con $x_0 = y_0$, hanno significato per ogni n; inoltre si ha*

$$d(y_{n+1}, \ x_{n+1}) \leq S(\beta). \tag{4.5}$$

Valgono anche le limitazioni (3.2) *e* (3.3) *con $\sigma_n = \beta$.*
Inoltre $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^* = Tx^*$ appartiene alla sfera B_1 così definita:

$$B_1 \equiv \{ x \in X : d(x, \ T_0 y_0) \leq \rho_1 \}, \tag{4.6}$$

dove

$$\rho_1 = S[\varphi(d(y_0, \ T_0 y_0))] + S(\beta). \tag{4.7}$$

Infine la successione $\{ \tau_n \}$ definita dalla relazione

$$\tau_n = d(y_n, \ y_{n+1}), \qquad n = 0, \ 1, \ \ldots, \tag{4.8}$$

è monotona decrescente fino a che è soddisfatta la condizione seguente:

$$\tau_{n-1} > R = \inf \{ r > 0 : r - \varphi(r) > 2\beta \} \tag{4.9}$$

Dalle ipotesi (2.18) e (4.1) otteniamo:

$$d(T_n x, \ T_n y) \leq \varphi[d(x, \ y)] + 2\beta ;$$

inoltre

$$2\beta + \delta \geq \beta \geq d(Ty_0, T_0 y_0).$$

Posto perciò $2\beta = \gamma$ sono soddisfatte le ipotesi del teorema 3.2. Dunque le successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono ben definite e inoltre $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in B$.

La validità di (4.5) segue dalle disuguaglianze:

$$d(x_{n+1}, y_{n+1}) \leq \varphi[d(x_n, y_n)] + \beta \leq \dots$$

$$\dots \leq \varphi^{n+1}[d(x_0, y_0)] + \sum_{\nu=0}^{n} \varphi^{\nu}(\beta) = S(\beta).$$

Osserviamo ora che, essendo $x_0 = y_0$, dalla (4.5) ricaviamo.

$$d(x_1, x_0) \leq \beta + d(y_0, T_0 y^0), \tag{4.10}$$

mentre per la (3.2), ove si ponga $x_n = y_n$ e conseguentemente $\sigma_n = 0$, otteniamo

$$d(x^*, x_1) \leq S[\varphi(d(x_0, x_1))]. \tag{4.11}$$

Per le due ultime relazioni e per il lemma 2.3 vale anche la disuguaglianza seguente:

$$d(x^*, x_1) \leq S(\varphi(\beta)) + S[\varphi(d(y_0, T_0 y_0))];$$

da questa, congiuntamente alla (2.17) e alla (4.1), otteniamo

$$d(x^*, y^1) \leq d(x^*, x_1) + \beta \leq S[\varphi(d(y_0, T_0 y_0))] + S(\varphi(\beta)) + \beta$$

$$= S[\varphi(d(y_0, T_0 y_0))] + S[\beta).$$

Resta così provato che $x^* \in B_1$.

Per dimostrare l'ultima parte del teorema osserviamo che

$$\tau_n = d(T_{n-1} y_{n-1}, T_n y_n) \leq \varphi[d(y_{n-1}, y_n)] + 2\beta = \varphi(\tau_{n-1}) + 2\beta;$$

perciò

$$\tau_{n-1} - \tau_n \geq \tau_{n-1} - \varphi(\tau_{n-1}) - 2\beta. \tag{4.12}$$

Essendo $r - \varphi(r) > 0$ per $r > 0$ e $\lim_{r\to 0+} [r - \varphi(r)] = 0$, esiste

$$R = \inf \{ r > 0 : r - \varphi(r) > 2\beta \}. \tag{4.13}$$

Per $\tau_{n-1} > R$ abbiamo dunque, per la (4.12), $\tau_{n-1} - \tau_n > 0$, come volevamo dimostrare.

Come diretta conseguenza del teorema 4.1 possiamo ottenere una generalizzazione di un noto teorema dovuto a URABE [1].

Supponiamo infatti che $\tilde{T}$ sia un operatore avente lo stesso dominio M di T e che esista un numero reale β per cui vale la relazione:

$$\beta \geq \sup_M d(Tx, \tilde{T}x) \tag{4.14}$$

Sia $\{y_n\}$ la successione definita mediante il seguente procedimento iterativo:

$$y_{n+1} = \tilde{T}y_n, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{4.15}$$

Il seguente corollario è allora di immediata dimostrazione:

COROLLARIO 4.1. *Supposto che T soddisfi alla* (2.18) *e che per $\tilde{T}$ valga la* (4.14), *sia $y_0 \in M$ un punto tale che*

$$B \equiv \{ x \in X : d(x, \tilde{T}y_0) \leq \rho \} \subset M, \tag{4.16}$$

dove

$$\rho = S[\varphi(d(y_0, \tilde{T}y_0))] + S(2\beta); \tag{4.17}$$

allora la successione $\{y_n\}$ definita da (4.15) *è contenuta in B; inoltre*

$$d(y_{n+1}, x_{n+1}) \leq S(\beta). \tag{4.18}$$

Valgono le limitazioni (3.2) *e* (3.3) *con $\sigma_n = \beta$ e $x^* \in B_1$, dove B_1 è la sfera definita da* (4.6) *e* (4.7) *con $T_0 = \tilde{T}$.*

La successione $\{\tau_n\}$ ha la proprietà già enunciata nel teorema 4.1. *Infine, se $\tilde{T}$ gode della seguente proprietà:*

$$d(\tilde{T}x, \tilde{T}y) \leq \varphi[d(x, y)], \qquad \forall\, x, y \in M, \tag{4.19}$$

esiste in B $y^* = Ty^*$ e abbiamo

$$d(y^*, x^*) \leq S(\beta). \tag{4.20}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. URABE, *Convergence of numerical iteration in solution of equations*, J. of Sci. Hiroshima Univ. A 19, 479-489 (1956).

[2] A. OSTROWSKI, *The rounding-off stability of iterations*, Basel Math. Notes BMN-12, August 20-1964.

[3] H. EHRMANN, *Iterationsverfahren mit veränderlichen Operatoren*, Arch. Rat. Mech. Anal. 4, 45-64 (1959).

[4] L. COLLATZ, *Funktional Analysis und Numerische Mathematik*, Berlin- Götingen-Heidelberg-Springer 1964.

[5] J. M. ORTEGA-W. C. RHEINBOLDT, *On a class of approximate iterative processes*, Arch. Rat. Mech. Anal. 23, 352-365 (1967).

[6] F. BROWDER, *On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations*, Indagationes Math. 30, 27-35 (1968).

[7] R. M. BIANCHINI-M. GRANDOLFI, *Trasformazioni di tipo contrattivo generalizzato in uno spazio metrico*, Atti Accad. Naz. Lincei Vol. XLV, 5 (1968) 96-100.