Funzioni reali uniformemente separate negli spazii uniformi ed applicazioni agli spazii normali.

Nota di Giovanni Aquaro (a Bari).

A Mauro Picone nel suo 70^mo compleanno.

Sunto. - *È contenuto nell'introduzione.*

INTRODUZIONE

Di recente M. Katětov [1] [6] ed H. Tong [8], estendendo agli spazii normali un risultato di H. Hahn, [4], hanno dimostrato che:

(I). *Se f e g sono funzioni reali semicontinue, la prima superiormente e la seconda inferiormente, nello spazio normale E e risulta $f \leq g$ in E, esiste una funzione reale h continua in E tale che sia $f \leq h \leq g$ in E.*

Ancora in [6], Katětov ha stabilito che:

(II). *Se f è una funzione reale limitata ed uniformemente continua nell'insieme A dello spazio uniforme E, esiste una funzione reale $\bar{f}$ uniformemente continua in E, avente in E gli stessi estremi che f ha in A e tale che per ogni $x \in A$ sia $\bar{f}(x) = f(x)$.*

Poichè la (I) implica un ben noto teorema di prolungamento di Uryshon, si è condotti a chiedersi se il teorema di prolungamento (II) di Katětov non possa farsi conseguire da una proprietà che, negli spazii uniformi sostituisca quella che per gli spazii normali è espressa dalla (I).

A ciò si risponde nella presente Nota introducendo (n. 1, def. 1) le « coppie di funzioni reali uniformemente separate in uno spazio uniforme » e stabilendo per esse delle proprietà che non sembra siano state già rilevate. Tra le conseguenze di queste figurano, non solo la prop. (II), come richiesto, ma anche, con opportuni accorgimenti, la prop. (I), beninteso, con riferimento a spazii normali non necessariamente uniformizzabili. Quest'ultima circostanza si verifica, appunto, perchè le funzioni f e g di cui in (I) sono uniformemente separate rispetto ad una conveniente struttura uniforme che può definirsi su ogni spazio normale, senza alcun intervento diretto o indiretto del lemma e del teorema di Uryshon, ma con un metodo puramente « set theoretic », secondo la terminologia degli autori di lingua inglese: detti lemma e teorema

(1) I numeri indicati in [ ] si riferiscono alla Bibliografia riportata in fine della presente Nota.

di URYSHON, al contrario, a causa della (I), ne sono conseguenze. Ciò fa intravvedere la possibilità di subordinare parti notevoli della teoria degli spazii normali a quella degli spazii uniformi la cui importanza è sempre crescente in Topologia Generale.

Una estensione agli spazi uniformi compatti di un risultato W. SIERPINSKI [7], che generalizza il teorema di uniforme continuità di CANTOR, fornisce un ulteriore esempio di coppie uniformemente separate.

Per ragioni di brevità, salvo nei casi volta per volta specificati, per la terminologia ed il simbolismo qui usati si rimanda a [1], [2] e [3].

Va ben rilevato, però, che nella presente Nota, spazii normali e spazii compatti non si suppongono separati, cioè di HAUSDORFF, contrariamente a quanto è fatto in [2] ed in [3]. In altri termini supponiamo compatto o normale ogni spazio topologico che oltre ai consueti assiomi di spazio topologico (0_I) ed (0_{II}) di [2], verifichi rispettivamente l'assioma di BOREL-LEBESGUE, o, (C) di [2], oppure l'assioma $(0'_V)$ di [3].

Si tenga presente, inoltre, che il termine « entourage » di [2] è stato volto in italiano col termine « adiacenza ».

1. Le coppie uniformemente separate di funzioni reali.

DEF. 1 - *Se f e g sono funzioni reali definite nello spazio uniforme E, si dice che la coppia (f, g) è uniformemente separata in E se, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un'adiacenza V di E tale che se x' ed x'' sono punti di E vicini di ordine V, sia $f(x') < g(x'') + \varepsilon$.*

È appena necessario rilevare che una coppia uniformemente separata per una determinata struttura uniforme su E può non esserlo per una altra struttura uniforme sullo stesso insieme.

Dalla definizione consegue anche che se (f, g) è uniformemente separata in E risulta $f \leq g$. In generale, come è ovvio, non sussiste la proprietà reciproca benchè, in qualche caso, come si vedrà appresso, la relazione $f \leq g$ in E, implichi che (f, g) sia uniformemente separata.

Primo esempio, utile per il seguito, di coppia uniformemente separata è fornito dalla:

PROP. 1 - *Se f è una funzione reale uniformemente continua e limitata inferiormente e superiormente, rispett. dai numeri a e b nell'insieme A $(\complement A \neq \Phi)$ dello spazio uniforme E, dette f_a ed f_b le funzioni reali definite in E ponendo $f_a(x) = f_b(x) = f(x)$ per $x \in A$ ed $f_a(x) = a$, $f_b(x) = b$ per $x \in \complement A$, la coppia (f_a, f_b) è uniformemente separata in E e le f_a, ed f_b sono entrambe limitate inferiormente e superiormente da a e b in E.*

DIM. - Sia ε un numero reale positivo e V un'adiacenza di E tale che se x' ed x'' sono punti di A vicini di ordine V, sia $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$: se x_1 ed x_2 sono punti di E vicini di ordine V risulta $f_a(x') < f_b(x'') + \varepsilon$.

La seguente proposizione, estendendo agli spazii uniformi un risultato di W. SIERPINSKI (cfr. Introduzione) fornisce un ulteriore esempio di coppia uniformemente separata.

Se E è uno spazio uniforme e compatto, se f e g sono funzioni reali semicontinue in E, la prima superiormente e la seconda inferiormente e se è $f \leq g$ in E, la coppia (f, g) è uniformemente separata in E.

DIM. - Sia $\mathbf{U}$ il filtro delle adiacenze della struttura uniforme di E e, per assurdo, supponiamo che esista un numero reale $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $V \in \mathbf{U}$ esistano i punti x ed $\bar{x}$ di E vicini di ordine V e tali che sia $f(x) \geq g(\bar{x}) + \varepsilon_0$. Per ogni $V \in \mathbf{U}$, dunque, non è vuoto l'insieme A_V dei punti x di E tali che esista almeno un $\bar{x} \in E$ per cui x ed $\bar{x}$ siano vicini di ordine V e risulti $f(x) \geq g(\bar{x}) + \varepsilon_0$. Poichè se $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sono adiacenze di E, posto $V = \bigcap_{k=1}^{n} V_k$, risulta $V \in \mathbf{U}$ ed $A_V \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_{V_k}$, la famiglia $(A_V)_{V \in \mathbf{U}}$ è una base di filtro su E la quale, poichè E è compatto, ha almeno un punto aderente $x_0 \in E$. Per altro esiste $V_0 \in \mathbf{U}$ tale che sia:

$$g(x_0) - \varepsilon_0 / 2 < g(x) \qquad \text{per } x \in V_0(x_0). \tag{1}$$

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon_0 / 2 \qquad \text{per } x \in V_0(x_0). \tag{2}$$

Se $W \in \mathbf{U}$ è tale che sia $\overset{2}{W} = W \circ W \subset V_0$, essendo $x_0 \in \bar{A}_W$, esiste $x_1 \in W(x_0) \cap A_W$: poichè è $W \subset V_0$ consegue $x_1 \in V_0(x_0)$ e quindi, in forza della (2) $f(x_1) < f(x_0) + \varepsilon_0 / 2$, mentre, essendo $x_1 \in A_W$, esiste $\bar{x}_1 \in E$ tale che x_1 ed x_2 siano vicini di ordine W e sia $f(x_1) \geq g(\bar{x}_1) + \varepsilon_0$; quindi è $f(x_0) + {}$ ${}+ \varepsilon_0 / 2 > g(x_1) + \varepsilon_0$ nonchè:

$$f(x_0) > g(\bar{x}_1) + \varepsilon_0 / 2. \tag{3}$$

Essendo $(x_0, x_1) \in W$ ed $(x_1, \bar{x}_1) \in W$, si ha $(x_0, \bar{x}_1) \in \overset{2}{W} \subset V_0$ e quindi $\bar{x}_1 \in V_0(x_0)$, il che, per (1), implica $g(\bar{x}_1) > g(x_0) - \varepsilon_0 / 2$: ciò, richiamata la (3), ha come conseguenza $f(x_0) > g(x_0)$ contro la $f \leq g$ vera in E. Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ reale, esiste almeno un'adiacenza V di E tale che se x' ed x'' sono punti di E vicini di ordine V, sia $f(x') < g(x'') + \varepsilon$: per la def. 1 consegue la tesi.

È appena necessario rilevare che per $f = g$ consegue il teorema di uniforme continuità di CANTOR per le funzioni reali continue in uno spazio uniforme compatto.

2. Il teorema di separazione per le coppie uniformemente separate.

A tale teorema perveniamo dopo aver richiamato una proprietà degli spazii uniformi, dovuta ad A. WEIL ([9] p. 13, n. 2, teor. 1), della quale diamo una dimostrazione lievemente modificata che mette in luce elementi che ci interessano e dopo aver premesso alcune semplici proprietà delle funzioni reali.

PROP. 2. - *Per ogni adiacenza V dello spazio uniforme E esiste una famiglia $(f_{x_0})_{x_0 \in E}$ di applicazioni equiuniformemente continue di E nell'in-*

tervallo [0,1] [2] *tali che per ogni* $x_0 \in E$ *sia* $f_{x_0}(x_0) = 0$ *e per ogni* $x \in \complement V(x_0)$ *sia* $f_{x_0}(x) = 1$.

DIM. - Per ricorrenza determiniamo una successione $(V_n)_{n=0,1,\dots}$ di adiacenze *simmetriche* di E tali che sia $V_0 \subset V$ e $\overset{2}{V}_{n+1} = V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n$ per $n = 0, 1, \dots$.

Possiamo determinare, del pari per ricorrenza, una successione $(\mathbf{K}_m)_{m=0,1,\dots}$ di famiglie finite di parti di $E \times E$ tali che sia $\mathbf{K}_m = (U_m^{(k)})_{0 \leq k \leq 2^m}$ ed

$$\alpha)\ U_0^{(0)} = \Delta,\ U_0^{(1)} = V_0 \qquad (\Delta \text{ è la diagonale di } E \times E);$$
$$\beta)\ U_{m+1}^{(2h)} = U_m^{(h)} \qquad (m = 0, 1, \dots;\ h = 0, 1, \dots, 2^m);$$
$$\gamma)\ V_m \circ U_m^{(k)} \subset U_m^{(k+1)} \qquad (m = 0, 1, \dots;\ k = 0, 1, \dots, 2^m - 1).$$

Per $m = 0$ la $\mathbf{K}_m$ è determinata univocamente da α). Se $\mathbf{K}_m$ è costruita per un certo m intero positivo di guisa da verificare β) e γ), si costruisca $\mathbf{K}_{m+1}$ come segue. Sia $k = 0, 1, \dots, 2^{m+1}$; per k pari, cioè $k = 2h$ con $h = 0, 1, \dots, 2^m$, poniamo:

$$U_{m+1}^{(k)} = U_m^{(k)}; \tag{1}$$

per k dispari, cioè $k = 2h + 1$ con $h = 0, 1, \dots, 2^m - 1$, poniamo:

$$U_{m+1}^{(k)} = V_{m+1} \circ U_m^{(h)}. \tag{2}$$

La $\mathbf{K}_{m+1} = (U_{m+1}^{(k)})_{0 \leq k \leq 2^{m+1}}$ così costruita verifica β) a causa di (1). Quanto alla γ) se k è pari, cioè $k = 2h$ con $h = 0, 1, \dots, 2^m$, per (1) e (2) risulta: $V_{m+1} \circ U_{m+1}^{(k)} = V_{m+1} \circ U_m^{(h)} = U_{m+1}^{(2h+1)} = U_{m+1}^{(k+1)}$; se k è dispari, cioè $k = 2h + 1$ con $h = 0, 1, \dots, 2^m - 1$, per (2) ed (1), risulta $V_{m+1} \circ U_{m+1}^{(k)} = V_{m+1} \circ V_{m+1} \circ U_m^{(h)} \subset \subset V_m \circ U_m^{(h)} \subset U_m^{(h+1)} = U_{m+1}^{(2h+2)} = U_{m+1}^{(k+1)}$. In ogni caso, dunque, la γ) è vera. Dunque la successione $(\mathbf{K}_m)_{m=0,1,\dots}$ così determinata per ricorrenza verifica α), β) e γ). È facile riconoscere che, se k ed m sono interi non negativi con $k \leq 2^m$ e se n è un intero positivo risulta $U_m^{(k)} = U_{m+n}^{(2^n k)}$. Inoltre se k' e k'', m' ed m'' sono interi non negativi con $k' \leq 2^{m'}$, $k'' \leq 2^{m''}$ nonchè $k'/2^{m'} < k''/2^{m''}$ risulta $V_{m'} \circ U_{m'}^{(k')} \subset U_{m''}^{(k'')}$ donde le conseguenti:

$$U_{m'}^{(k')} \subset U_{m''}^{(k'')} \qquad (m',\ m'',\ k' \text{ e } k'' \text{ interi non negativi con } k' \leq 2^{m'};\ k'' \leq 2^{m''};\ k'/2^{m'} < k''/2^{m''}). \tag{3}$$

$$\Delta \subset U_m^{(k)} \qquad (m = 0, 1, \dots;\ k = 0, 1, \dots, 2^m). \tag{4}$$

Ciò premesso, denotiamo con D_x l'insieme dei numeri τ della forma $\tau = k/2^m$ con k ed m interi non negativi e $k \leq 2^m$ tali che sia $(x_0, x) \notin U_m^{(k)}$. Per un prefissato $x_0 \in E$, sia f_{x_0} la funzione reale definita in E ponendo $f_{x_0}(x) = 0$, se D_x è vuoto ed $f_{x_0}(x) = \sup\limits_{\tau \in D_x} \tau$, nell'altro caso.

---

[2] Se $a < b$ son numeri reali con $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ indichiamo gli insiemi dei numeri reali x verificanti, rispettivamente, le $a \leq x \leq b$; $a \leq x < b$; $a < x \leq b$.

Dopo ciò, essendo per (4) $(x_0, x) \in \Delta \subset U_m^{(k)}$ per m e k interi non negativi e $k \leq 2^m$, si ha $f_{x_0}(x_0) = 0$; mentre, per $x \in \complement V(x_0)$, essendo $x \notin U_0^{(1)}(x_0)$ risulta $f_{x_0}(x) = 1$.

Siano $\varepsilon > 0$ reale ed m_ε intero positivo tali che $1/2^{m_\varepsilon} < \varepsilon/2$ e poniamo $V_\varepsilon = V_{m_\varepsilon}$. Dimostriamo che, se x' ed x'' sono punti di E vicini di ordine V_ε, si ha:

(5) $$f_{x_0}(x') < f_{x_0}(x) + \varepsilon.$$

Ciò è banale per $f_{x_0}(x) = 1$; sia dunque $f_{x_0}(x) < 1$ e sia k_ε il numero intero tale che $1 \leq k_\varepsilon \leq 2^{m_\varepsilon}$, $(k_\varepsilon - 1)/2^{m_\varepsilon} \leq f_{x_0}(x) < k_\varepsilon/2^{m_\varepsilon}$: deve, ovviamente, essere anche $(k_\varepsilon + 1)/2^{m_\varepsilon} < f_{x_0}(x) + \varepsilon$ e, poichè risulta $(x_0, x) \in U_{m_\varepsilon}^{(k_\varepsilon)}$ (altrimenti sarebbe $k_\varepsilon/2^{m_\varepsilon} \in D_x$ e $k_\varepsilon/2^{m_\varepsilon} \leq f_{x_0}(x)$), consegue che, se è $(x, x') \in V_\varepsilon (= V_{m_\varepsilon})$, per γ) deve essere $(x_0, x') \in V_m \circ U_{m_\varepsilon}^{(k_\varepsilon)} \subset U_{m_\varepsilon}^{(k_\varepsilon + 1)}$. Da ciò e dalla (3) consegue $f_{x_0}(x') \leq$ $\leq (k_\varepsilon + 1)/2^{m_\varepsilon} \leq f_{x_0}(x) + \varepsilon$ nonchè la (5). Poichè V_ε è una adiacenza simmetrica di E la $(x, x') \in V_\varepsilon$ implica $f_{x_0}(x) < f_{x_0}(x') + \varepsilon$. In conclusione la $(f_{x_0})_{x_0 \in E}$ è una famiglia di applicazioni di E in $[0,1]$ tali che ogni $\varepsilon > 0$ reale esista un'adiacenza V_ε di E per cui, se x' ed x'' sono punti di E vicini di ordine V_ε, sia $|f_{x_0}(x') - f_{x_0}(x'')| < \varepsilon$ per ogni $x_0 \in E$ ed, inoltre, $f_{x_0}(x_0) = 0$ e, per $x \in \complement V(x_0)$, $f_{x_0}(x) = 1$.

Consegue:

PROP. 3 - *Se A' ed A'' sono insiemi dello spazio uniforme E e se esiste un'adiacenza V di E tale che $V(A') \cap A'' = \emptyset$, esiste un'applicazione uniformemente continua f di E in* $[0,1]$ *tale che sia $f(x) = 0$ per $x \in A'$ ed $f(x) = 1$ per $x \in A''$.*

DIM. - Per la prop. 2 esiste una famiglia $(f_{x_0})_{x_0 \in E}$ di applicazioni equiuniformemente continue di E in $[0,1]$ tali che per ogni $x_0 \in E$ sia $f_{x_0}(x_0) = 0$ e, per $x \in \complement V(x_0)$ sia $f_{x_0}(x) = 1$. L'inviluppo inferione f della sottofamiglia $(f_{x_0})_{x_0 \in A'}$, per la equiuniforme continuità di $(f_{x_0})_{x_0 \in A'}$, è uniformemente continuo in E e si ha $0 \leq f \leq 1$ in E. Inoltre per $x \in A'$, essendo $0 \leq f(x) \leq f_x(x) = 0$ si ha $f(x) = 0$; per $x_0 \in A'$ risultando $V(x_0) \cap A'' = \emptyset$ si ha $A'' \subset \complement V(x_0)$ e quindi per $x \in A''$ è $1 = f_{x_0}(x) = f(x)$.

PROP. 4 - *Se A' ed A'' sono insiemi dello spazio uniforme E e se esiste un'adiacenza V di E tale che $V(A') \cap A'' = \emptyset$, comunque si considerino i numeri reali α e β con $\alpha < \beta$, esiste un'applicazione uniformemente continua g di E in $[\alpha, \beta]$ tale che sia $g(x) = \alpha$ per $x \in A'$ e $g(x) = \beta$ per $x \in A''$.*

DIM. - Considerata l'applicazione f di cui alla prop. 3 precedente, basta assumere $g = \alpha + f(\beta - \alpha)$.

Ci saranno utili anche le seguenti osservazioni.

Denotiamo con $\mathfrak{F}$ una famiglia di funzioni reali definite nell'insieme E con le condizioni: 1) per ogni $f \in \mathfrak{F}$ e per ogni numero reale c è $(cf) \in \mathfrak{F}$; 2) per ogni $h \in \mathfrak{F}$ e $g \in \mathfrak{F}$, è $(h + g) \in \mathfrak{F}$; 3) per ogni $f \in \mathfrak{F}$ è $|f| \in \mathfrak{F}$; 4) le funzioni costanti in E appartengono ad $\mathfrak{F}$. Come $\mathfrak{F}$ si possono assumere p. es. la famiglia delle funzioni reali continue in uno spazio topologico o la famiglia delle funzioni reali uniformemente continue in uno spazio uniforme.

Osserviamo che se f, g e h appartengono ad $\mathfrak{F}$ altrettanto accade di $\min(f, g) = 1/2(f + g - |f - g|)$; $\max(f, g) = 1/2(f + g + |f - g|)$; $\text{intrm.}(f, h, g)$ questo simbolo indicando la funzione intermediaria tra f, h e g.

LEMMA 1. - *Se è $\varphi \in \mathfrak{F}$, $\psi \in \mathfrak{F}$ e se f e g sono funzioni reali definite in E tali che esista un numero positivo λ per cui risulti $f - \lambda \leq \varphi \leq g + \lambda$, $f - \lambda/2 \leq \psi < g + \lambda/2$ in E, esiste $\tau \in \mathfrak{F}$ tale che sia $|\varphi - \tau| \leq \lambda/2$, $f - \lambda/2 \leq \tau \leq g + \lambda/2$ in E.*

DIM. - Basta assumere $\tau = \text{intrm.}(\varphi - \lambda/2, \varphi + \lambda/2, \psi)$.

LEMMA 2. - *Se (φ_n) è una successione di funzioni di $\mathfrak{F}$ e se f e g sono funzioni reali definite in E tali che esista un numero positivo σ per cui risulti $f - \sigma/2^n \leq \varphi_n \leq g + \sigma/2^n$ per ogni indice n, esiste una successione (h_n) uniformemente convergente in E di funzioni di $\mathfrak{F}$ tale che sia $f \leq \lim\limits_{n\to\infty} h_n \leq g$ in E.*

DIM. - Mediante il lemma 1 precedente, per ricorrenza, si costruisce la successione (h_n) di funzioni di $\mathfrak{F}$ tali che sia $h_1 = \varphi_1$, $f - \sigma/2^n \leq h_n \leq g + \sigma/2^n$, $|h_{n+1} - h_n| \leq \sigma/2^n$ per $n = 1, 2 \dots$. La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(h_{k+1} - h_k)$ è totalmente convergente in E e quindi essendo $h_n = h_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(h_{k+1} - h_k)$ la successione (h_n) converge uniformemente in E e risulta $f \leq \lim\limits_{n\to\infty} h_n \leq g$.

Consegue:

PROP. 5. - *Se (φ_n) è una successione di funzioni reali uniformemente continue nello spazio uniforme E e se esistono le funzioni reali f e g definite in E ed il numero reale $\sigma > 0$ tali che $f \leq \varphi_n \leq g + \sigma/2^n$ in E per ogni $n = 1, 2 \dots$, esiste una funzione reale h, uniformemente continua in E e tale che $f \leq h \leq g$ in E.*

DIM. - Risultando $f - \sigma/2^n \leq \varphi_n \leq g + \sigma/2^n$, la tesi consegue dal lemma 2 precedente.

Possiamo dimostrare ora il teor. di separazione.

PROP. 6. - *Se (f, g) è una coppia uniformemenle separata di funzioni reali definite nello spazio uniforme E e se f e g sono limitate in E, esiste una funzione reale h uniformemente continua in E tale che sia $f \leq h \leq g$ in E.*

DIM. - Supponiamo inizialmente che sia $0 \leq f \leq g \leq 1$ in E e, per ogni coppia di numeri naturali m ed n tali che sia $m < 2^n$ poniamo $A_{mn} = \overset{-1}{g}([0, m/2^n]$ e $B_{mn} = \overset{-1}{f}([m/2^n + 1/2^{n+1}, 1])$; poichè la coppia (f, g) è uniformemente separata in E esiste un'adiacenza V di E tale che se x' ed x'' sono punti di E vicini di ordine V, risulti $f(x') < g(x'') + 1/2^n$. Se fosse $V(A_{mn}) \cap B_{mn} \neq \Phi$ esisterebbero $x'' \in A_{mn}$, $x' \in B_{mn}$ tali che $(x', x'') \in V$: conseguirebbe $m/2^n + 1/2^{n+1} \leq f(x') < g(x'') + 1/2^n \leq m/2^n + 1/2^{n+1}$ il che è impossibile: dunque $V(A_{mn}) \cap B_{mn} = \Phi$. Per la prop. 4 essendo $m/2^n + 1/2^{n+1} \leq 1$, esiste un'applicazione uniformemente continua f_{mn} di E in $[m/2^n + 1/2^{n+1}, 1]$ tale che sia $f_{mn}(x) = m/2^n + 1/2^{n+1}$ per ogni $x \in A_{mn}$ ed $f_{mn}(x) = 1$ per ogni $x \in B_{mn}$. Poichè è $f_{mn} \geq f$ in E, posto $f_n = \min(f_{1,n}, f_{2,n}, \dots, f_{2^n-1,n})$ si ha che f_n è una applicazione uniformemente continua di E in $[0, 1]$ e risulta $f_n \geq f$ in E. Inoltre, facilmente si riconosce che è $f_n(x) < g(x) + 3/2^{n+1}$ per ogni $x \in E$. Dunque è $f \leq f_n \leq g + 3/2^{n+1}$ in E onde, per la prop. 5 esiste uua funzione reale h uniformemente continua in E tale che $f \leq h \leq g$.

Nel caso generale, siano a e b gli estremi, rispettivamente, inferiore di f e superiore di g: essi sono numeri finiti ed ha interesse solo il caso $a < b$. Le funzioni $f^* = (f-a)/(b-a)$, $g^* = (g-a)/(b-a)$ sono uniformemente separate in E ed è $0 \leq f^* \leq g^* \leq 1$: per quanto sopra esiste la funzione reale h^* uniformemente continua in E tale che sia $f^* \leq h^* \leq g^*$ Posto $h = a + h^*(b-a)$ consegue la tesi.

Da questa proposizione e dalla prop. 1 consegue la (II) di KATĚTOV.

3. Spazi normali e strutture uniformi.

Vogliamo ora assegnare sopra ogni spazio normale, non necessariamente separato, una particolare struttura uniforme della quale dovremo servirci nel prossimo n. 4.

Premettiamo che, per semplicità, chiameremo *base associata* ad uno spazio topologico E l'insieme delle parti B di $E \times E$ della forma $B = \bigcup_{k=1}^{n} (U_k \times U_k)$ dove $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ è un ricovrimento aperto finito di E. Ovviamente la base associata ad E è una base di filtro su $E \times E$ ed il filtro da essa generato verrà chiamato *filtro associato* allo spazio topologico E.

Ciò premesso stabiliamo che:

PROP. 7 - *Il filtro associato ad uno spazio normale E definisce una struttura uniforme su E.*

DIM. - Denotiamo con $\mathbf{B}_E$ ed $\mathbf{U}_E$ rispettivamente base e filtro associati allo spazio E. La proposizione sarà dimostrata non appena avremo stabilito che $\mathbf{B}_E$ è un sistema fondamentale di adiacenze di una struttura uniforme su E, ossia che verifica gli assiomi (U'_{I}), (U_{II}) e (U'_{III}) di [2] chap. II, § 1, n. 1.

Poichè ciascun $B \in \mathbf{B}_E$ contiene la diagonale di E ed è simmetrico $\mathbf{B}_E$ verifica (U'_{I}) ed (U'_{II}). Per stabilire (U'_{III}) assumiamo comunque $B \in \mathbf{B}_E$ cioè supponiamo che esista un ricovrimento aperto finito $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ di E tale che sia $B = \bigcup_{k=1}^{n} (U_k \times U_k)$. Poichè E è normale ([3] chap. IX, § 4, n. 3 oppure [5] chap. I, (33.4), (a)) esiste un ricovrimento aperto finito $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ di E tale che per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ sia $\overline{V}_k \subset U_k$. Per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ $\complement \overline{V}_k$ è aperto ed è $U_k \cup (\complement \overline{V}_k) = E$ onde, posto $A_k = (U_k \times U_k) \cup ((\complement \overline{V}_k) \times (\complement \overline{V}_k))$ risulta $A_k \in \mathbf{B}_E$ e quindi $A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathbf{B}_E$, poichè $\mathbf{B}_E$ è base di filtro. Poichè $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ è ricovrimento di E assunto $x \in E$ esiste $k = 1, 2, \dots, n$ tale che $x \in V_k \subset \overline{V}_k$: consegue facilmente $A_k(x) \subset U_k$ e quindi essendo $A(x) \subset A_k(x)$. si ha $A(x) \subset U_k$ nonchè $A(x) \times A(x) \subset U_k \times U_k \subset B$. Si conclude che

$A \circ A = \bigcup_{x \in E} A(x) \times A(x) \subset B$. Dunque $\mathbf{B}_E$ verifica anche l'assioma (U'_{III}) e $\mathbf{U}_E$, avendo $\mathbf{B}_E$ come base, definisce una struttura uniforme $\mathcal{U}$ su E.

OSSERVAZIONE. - Ovviamente, in generale, la topologia $\mathcal{T}_0$ su E, dedotta dalla struttura uniforme $\mathcal{U}$, è meno fine della topologia $\mathcal{T}$ di spazio normale data inizialmente su E e quindi ogni applicazione di E in uno spazio topologico E' continua per la $\mathcal{T}_0$, è anche continua per $\mathcal{T}$. Inoltre è facile convincersi che è $\mathcal{T}_0 \equiv \mathcal{T}$ quando e solo quando E è regolare.

Si noterà anche che la $\mathcal{U}$ è una struttura uniforme di spazio precompatto (totalmente limitato) e se E è compatto e regolare e quindi normale, la $\mathcal{U}$ è l'unica ben nota struttura uniforme su E compatibile con la topologia di E.

Al fine di chiarire la portata della precedente proposizione e per precisare quanto è esposto nel prossimo n. 4 ricordiamo che *se il filtro associato* $\mathbf{U}_E$ *allo spazio topologico* E *definisce una struttura uniforme su* E, *lo spazio* E *è normale.*

Invero se F_1 ed F_2 sono insiemi chiusi e disgiunti di E, posto $U_1 = \complement F_2$ ed $U_2 = \complement F_1$, si ha $U_1 \cup U_2 = E$ e quindi $B = (U_1 \times U_1) \cup (U_2 \times U_2) \in \mathbf{U}_E$. Assumiamo un'adiacenza aperta e simmetrica W di E tale che sia $\overset{2}{W} \subset B$: risulta $W(F_1) \cap W(F_2) = \phi$. Invero altrimenti esisterebbero i punti x_1 di F_1 ed x_2 di F_2 tali che $(x_1, x_2) \in W \circ \overset{2}{W} \subset B$ e quindi sarebbe o $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_1$ e quindi $x_2 \in U_1 = \complement F_2$ il che è impossibile, oppure sarebbe $(x_1, x_2) \in U_2 \times U_2$ e quindi $x_1 \in U_2 = \complement F_1$ il che è del pari impossibile. Dunque $W(F_1)$ e $W(F_2)$ sono intorni aperti e disgiunti rispettivamente di F_1 ed F_2 ed E è normale.

4. Il teorema di separazione per gli spazii normali.

Supposto che E sia lo spazio normale di cui alla precedente prop. 7 supponiamo che f e g siano funzioni reali semicontinue, la prima superiormente e la seconda inferiormente, in E e sia $f \leq g$ in E.

In un primo momento sia $0 \leq f < g \leq 1$ in E e, fissato $\varepsilon > 0$ reale, sia n un intero positivo tale che $1/n < \varepsilon$. Gli insiemi $\overset{-1}{f}([0, k/n))$ e $\overset{-1}{g}(((k-1)/n, 1])$ e quindi anche la loro intersezione U_k, sono aperti per $k = 1, 2, \ldots, n$. Se è $x \in E$ esiste l'intero $k = 1, 2, \ldots, n$ tale che $(k-1)/n \leq f(x)$ ed $f(x) \leq k/n$, e, nella seconda disuguaglianza il segno $=$ è consentito solo per $k = n$. Poichè è $g(x) > f(x) \geq (k-1)/n$, risulta $x \in U_k$ ed in conseguenza $E = \bigcup_{k=1}^{n} U_k$: posto $B = \bigcup_{k=1}^{n} (U_k \times U_k)$ risulta $B \in \mathbf{U}_E$ cioè B è una adiacenza della struttura uniforme $\mathcal{U}$ su E definita da $\mathbf{U}_E$ (cfr. prop. 7).

Per $(x', x'') \in U_k \times U_k$ è $f(x') < k/n$, $g(x'') > (k-1)/n$ e quindi $f(x') < k/n = (k-1)/n + 1/n < g(x'') + \varepsilon$: in conseguenza $(x', x'') \in B$ implica $f(x') < g(x'') + \varepsilon$: ciò dimostra che (f, g) è una coppia uniformemente separata per $\mathfrak{U}$, il che, per la prop. 6 implica l'esistenza di una funzione reale h, uniformemente continua in E per $\mathfrak{U}$ e tale che sia $f \leq h \leq g$.

Se si lasciano cadere le limitazioni $0 \leq f$, $g \leq 1$, conservando la $f < g$, in E è immediato ricondursi al caso precedente. In conseguenza, nel caso generale $f \leq g$ in E, per ogni numero naturale n, esiste una funzione reale h_n, uniformemente continua in E per $\mathfrak{U}$ e tale che sia $f \leq h_n \leq g + 1/2^n$: ciò per la prop. 5 fornisce una funzione reale h uniformemente continua in E per $\mathfrak{U}$ e verificante la $f \leq h \leq g$ in E. La h è continua in E con la topologia $\mathfrak{T}_0$ (cfr. prop. 7 osservazione alla dimostrazione) e quindi essa è continua in E con $\mathfrak{T}$. Dunque la (I) è dimostrata. Il lemma ed il teorema di URYSHON sono sue immediate conseguenze.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI N., *Théorie des Ensembles* (Fascicule des Résultats), « Actual. Scient. et Industrielles », n. 846-1141, Paris (1951).

[2] BOURBAKI N., *Topologie Générale*, chap. I-II, « Actual. Scient. et Industrielles », n. 858-1142, Paris (1951).

[3] BOURBAKI N., *Topologie Générale*, chap. IX, « Actual. Scient. et Industrielles », n. 1045, Paris (1951).

[4] HAHN H., *Uber halbstetige und unstetige Functionen*, « Sitzber K. Ak. Wiss. Wien Math. K. », Bd. 126, pp. 1-20.

[5] LEFTSCHETZ S., *Algebraic Topology*, « Am. Math. Society », Coll. Publ. vol. XXVII, New York (1942).

[6] KATĔTOV M., *On real valued functions in topological spaces*, « Fundam. Math. », 38, pp. 85-91 (1951).

[7] SIERPINSKI W., *Sur une propriété des functions semi-continues*, « Fundam. Math. », 9, pp. 1-2 (1926).

[8] TONG H., *Some characterization of normal and perfectly normal spaces*, « Duke Math. J. », 19, pp. 289-292 (1952).

[9] WEIL A., *Sur les Espaces a Structure uniforme et sur la Topologie Générale*, « Actual. Scient. et Industrielles », n. 551, Paris (1938).