Sulle successioni di funzioni quasi continue negli spazi astratti (¹).

di TULLIO VIOLA (a Bari).

A Mauro Picone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Si studia una definizione del tutto generale di funzione quasi continua; si enuncia e dimostra poi un teorema, concettualmente nuovo, per le successioni di funzioni che sono quasi continue nel senso generale studiato.*

1. Il concetto di funzione quasi continua, introdotto nell'analisi matematica e largamente usato da L. TONELLI, è stato generalizzato, com'è noto, da M. PICONE e dalla Sua scuola, rivelando tutta la sua importanza in diversi argomenti fondamentali, principalmente nella teoria dell'integrazione (²).

Recentemente G. FICHERA (³) ha persino dato il concetto molto generale di funzione reale quasi continua in un insieme misurabile di un qualunque spazio *topologico* S. La misurabilità è intesa, da FICHERA, con riferimento ad una *misura* o funzione reale $\mu(e)$ definita nella famiglia $\mathfrak{F}$ degli insiemi *boreliani e* di S; la funzione $\mu(e)$ è supposta *completamente additiva* ed *a variazione finita*. In conseguenza, anche la quasi continuità è intesa con riferimento alla stessa misura $\mu(e)$.

La definizione di funzione $f(P)$ quasi continua può darsi in ipotesi ancora più generali, quando si supponga: che $\mu(e)$ assuma valori (⁴) appartenenti a uno spazio S' soddisfacente ad opportune condizioni di additività, ed $f(P)$ valori appartenenti ad uno spazio *topologico* S''. In questo lavoro mostrerò come una tale generalissima definizione si adatti a buona parte della teoria svolta da PICONE senza sostanziali cambiamenti, ove si aggiunga allo spazio S la condizione d'esser *metrico* e *separabile* (⁵). Se poi si suppone, più precisamente, che S'' sia *metrico* e *completo*, si può molto facilmente

---

(¹) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(²) Cfr. M. PICONE e T. VIOLA, *Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione* (Torino, Einaudi, 1952) pp. 124 e segg. Questo trattato verrà considerato, nel seguito del presente lavoro, come fondamentale e richiamato semplicemente con la sigla PV.

(³) G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I (Trieste, pr. l'Istituto Matematico dell'Università, 1954) pp. 327-330.

(⁴) La parola « valore » è qui intesa come sinonimo della parola « punto ».

(⁵) La separabilità avrà, in sostanza, lo scopo di regolarizzare i procedimenti costruttivi, nel senso di liberarli dal postulato delle infinite scelte arbitrarie.

pervenire anche qui al teorema fondamentale (da considerarsi come un corollario di quello di SEVERINI-EGOROFF ([6])): se una successione

(1) $$f_1(P),\ f_2(P), \dots,\ f_n(P), \dots$$

di funzioni quasi continue in un insieme lebesghiano I, converge quasi ovunque in I, la funzione $f(P)$ cui essa tende è anch'essa quasi continua in I.

2. Ma lo scopo principale del presente lavoro non si riduce ad una generalizzazione che potrebbe, forse, non apparire, in sè, nè imprevedibile nè difficile ([7]). Qui, volendo fare opera non indegna dell'illustre Maestro, mi propongo principalmente di dare la dimostrazione d'un teorema che, a quanto mi risulta, è da ritenersi del tutto nuovo. Introducendo ulteriormente, in via pregiudiziale, la condizione restrittiva per S'' d'esser *compatto* e *separabile*, il nuovo teorema (nel quale quello fondamentale, ricordato alla fine del n. 1, rientra come caso particolarissimo) è suscettibile del seguente enunciato:

se $\{f_n(P)\}$ *è una successione di funzioni tutte quasi continue in uno stesso insieme* I, *è possibile costruire una funzione* $f(P)$ *quasi continua in* I *che, in quasi tutti i punti* P *di* I, *è uguale a uno dei valori limiti della successione.*

I fondamenti della teoria.

3. Quanto precede non assume un significato pienamente determinato, finchè non si enuncino esplicitamente le proprietà dello spazio S' di cui sopra. Ritengo che, volendo richiedere ad S' un minimo possibile di restrizioni, non si possa tralasciare alcuna delle proprietà già imposte da M. FRÉCHET nella sua fondamentale memoria: *L'intégrale abstraite d'une fonction abstraite d'une variable abstraite et son application à la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque* (Revue Scientifique, vol. 82, dic. 1944, pp. 483-512). Mi limito perciò a richiamare succintamente quelle proprietà (ivi p. 503).

Se ν', ν'' sono due punti qualunque di S', esiste in S' la *somma* $\nu = \nu' + \nu''$ unica e ben determinata, per la quale valgono le proprietà commutativa ed associativa.

L'equazione $\nu' = \nu'' + \gamma$ nell'incognita γ, è sempre univocamente risolubile: la sua soluzione γ è la *differenza* $\nu' - \nu''$. Si deduce immediatamente l'esistenza dello *zero* $0 = \nu - \nu$, indipendente da ν.

([6]) Cfr. PV, p. 139.

([7]) Mi propongo tuttavia di riprendere, in altra sede, l'argomento per dimostrarne l'interesse in questioni attinenti alla teoria dell'integrazione.

Ad ogni punto ν di S' è associato un numero non negativo, la ***norma*** $\|\nu\|$ di ν, nulla se e solo se $\nu = 0$ e tale che, per ogni coppia ν', ν'', valga la limitazione:

$$\| \nu' - \nu'' \| \leq \| \nu' \| + \| \nu'' \| .$$

Infine, supposto che $\nu(x)$ sia un punto di S' dipendente da una variabile reale x e definito il

$$\lim_{x \to x_0} \nu(x) = \nu_0 \qquad \text{quando} \qquad \lim_{x \to x_0} \| \nu(x) - \nu_0 \| = 0,$$

è ammessa la validità del criterio di BOLZANO-CAUCHY.

Per ogni insieme E di $\mathfrak{F}$, indicheremo con $m(E)$ la variazione totale della funzione $\mu(e)$ su E, cioè l'estremo superiore (finito, per ipotesi) dell'insieme numerico descritto dalle somme

$$\| \mu(e_1) \| + \| \mu(e_2) \| + \dots + \| \mu(e_n) \| ,$$

al variare comunque della decomposizione:

$$E = e_1 \overset{\circ}{+} e_2 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} e_n \qquad (e_i \in \mathfrak{F};\ i = 1, 2, \dots, n; \ n \text{ intero posit. arbitr.}).$$

4. Diciamo che un insieme I, dello spazio *metrico* e *separabile* S, è *lebesghiano* (rispetto alla *massa* $\mu(e)$) se, comunque si assegni un numero $\varepsilon > 0$, è possibile costruire un insieme chiuso C_ε contenuto in I e un insieme aperto A_ε contenente I, in modo che risulti $m(A_\varepsilon - C_\varepsilon) < \varepsilon$.

Con questa definizione è possibile ripercorrere, passo passo, buona parte della teoria di PICONE relativa agli insiemi lebesghiani (Cfr. PV pag. 111 e segg.), sia pure con qualche leggera variante ch'è molto facile rilevare. Si comincerà col dimostrare:

che è lebesghiano il complementare, rispetto ad S, d'un insieme lebesghiano;

che sono lebesghiani gli insiemi chiusi e quelli aperti [8];

che condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme I sia lebesghiano è che, comunque si prefissi un numero $\varepsilon > 0$, si possa costruire un insieme chiuso C_ε e un insieme aperto A_ε, in modo che risulti

$$C_\varepsilon \subset I \subset C_\varepsilon + A_\varepsilon, \qquad m(A_\varepsilon) < \varepsilon;$$

che il prodotto e la somma d'una successione d'insiemi lebesghiani, sono anch'essi insiemi lebesghiani;

che la differenza di due insiemi lebesghiani è un insieme lebesghiano.

---

(8) La dimostrazione PV p. 112 vale se S si suppone euclideo (a un numero qualunque di dimensioni). Nel caso più generale qui contemplato, una semplice dimostrazione può dedursi dal teorema: ogni insieme chiuso di uno spazio metrico e separabile è il limite di una successione non crescente d'insiemi aperti (Cfr. FICHERA, loc. cit., p. 59).

Dopo ciò si prolungherà la definizione della massa $\mu(e)$ sulla famiglia $\mathfrak{L}_\mu$ degli insiemi e lebesghiani (famiglia contenente la $\mathfrak{F}$ e completamente additiva al pari della $\mathfrak{F}$), semplicemente per passaggio a limite a partire dagli insiemi aperti che contengono e oppure (ciò ch'è lo stesso) dagli insiemi chiusi che sono contenuti in e. E analogamente si prolungherà la definizione della variazione totale $m(e)$. Si dovrà osservare però che la funzione reale $m(e)$ assumerà sempre *valori finiti* (sia l'insieme e limitato o no) (9).

Infine si potrà dimostrare che $\mu(e)$ ed $m(e)$ sono completamente additive su $\mathfrak{L}_\mu$ ecc.

5. Diciamo che una funzione $f(P)$ assumente valori appartenenti allo spazio *topologico* S'', è *quasi continua* (rispetto alla massa $\mu(e)$) in un insieme I di S, se $I \in \mathfrak{L}_\mu$ e se, comunque si assegni il numero $\varepsilon > 0$, è possibile costruire un insieme $C_\varepsilon \subset I$, tale che in esso la $f(P)$ risulti continua e sia

$$m(I - C_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Sussistono le seguenti proposizioni (10).

Una funzione quasi continua in un insieme lebesghiano I, è tale anche in ogni insieme lebesghiano $U \subset I$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione sia quasi continua in un insieme lebesghiano non limitato, è ch'essa sia tale in ogni porzione lebesghiana limitata di quell'insieme.

Una funzione quasi continua in un insieme lebesghiano I, è definita in quasi tutto I: cioè l'eventuale insieme $\mathfrak{N}$ dei punti di I nei quali essa non è definita, è lebesghiano e tale che $m(\mathfrak{N}) = 0$.

Una funzione che sia quasi continua in un insieme $I - \mathfrak{N}$, essendo $\mathfrak{N}$ lebesghiano, contenuto in I e tale che $m(\mathfrak{N}) = 0$, è quasi continua anche in I.

Una funzione che sia quasi continua in ogni insieme della successione $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$, è tale anche negli insiemi

$$\prod_n^{1,\infty} I_n, \qquad \sum_n^{1,\infty} I_n, \qquad \lim_{n\to\infty}{}' I_n, \qquad \lim_{n\to\infty}{}'' I_n.$$

6. La teoria delle successioni di funzioni quasi continue (nella trattazione, così elegante e feconda di risultati, esposta da PICONE) non sembra a questo punto potersi estendere senza introdurre l'ipotesi, più restrittiva, che lo spazio S'' sia *metrico* e *completo*. In tale ipotesi ci proponiamo di dimostrare la seguente proposizione (11), che sembra all'uopo assolutamente fondamentale.

---

(9) Cfr. la nota (19).

(10) Per le dimostrazioni cfr. PV, pp. 124 e segg.

(11) Analoga, in certo modo, alla I di PV, p. 129, § 45.

Se $f(P)$ e $\varphi(P)$ sono due funzioni quasi continue in uno stesso insieme I ed a è una costante positiva arbitraria, è lebesghiano l'insieme $I_a = I[\overline{f\varphi} \geq a]$, formato dai punti P di I nei quali la distanza $\overline{f\varphi}$ è $\geq a$.

Infatti, in virtù dell'ipotesi, prefissato comunque un numero $\varepsilon > 0$, è possibile costruire due insiemi chiusi C_ε', C_ε'' e due insiemi aperti A_ε', A_ε'' tali che

$$C_\varepsilon' \subset I \subset C_\varepsilon' + A_\varepsilon', \qquad C_\varepsilon'' \subset I \subset C_\varepsilon'' + A_\varepsilon'', \qquad m(A_\varepsilon') < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad m(A_\varepsilon'') < \frac{\varepsilon}{2}$$

e che $f(P)$ sia continua in C_ε', $\varphi(P)$ sia continua in C_ε''. Nell'insieme chiuso $C_\varepsilon = C_\varepsilon' C_\varepsilon''$ risulteranno continue sia $f(P)$ che $\varphi(P)$, mentre per l'insieme aperto $A_\varepsilon = A_\varepsilon' + A_\varepsilon''$ si avrà $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$. Il prodotto $I_a C_\varepsilon$, come luogo dei punti dell'insieme chiuso C_ε in cui la funzione continua $\delta(P) = \overline{f\varphi}$ è $\geq a$, è un insiene chiuso e pertanto, avendosi

$$C_\varepsilon \subset I \subset C_\varepsilon + A_\varepsilon, \qquad I_a C_\varepsilon \subset I_a \subset I_a C_\varepsilon + A_\varepsilon,$$

si deduce la tesi enunciata.

Analogamente si dimostra che sono lebesghiani gli insiemi $I[\overline{f\varphi} \leq a]$, $I[\overline{f\varphi} = a]$. Saranno perciò lebesghiani anche gli insiemi

$$I[\overline{f\varphi} > a] = I[\overline{f\varphi} \geq a] - I[\overline{f\varphi} = a],$$

$I[\overline{f\varphi} < a]$ e (qualunque sia la costante reale $b > a$)

$$I[a \leq \overline{f\varphi} \leq b] = I[\overline{f\varphi} \geq a]. \ I[\overline{f\varphi} \leq b], \text{ ecc.}$$

Dalla proposizione or ora dimostrata si può dedurre il teorema: se le funzioni della successione (1) sono tutte quasi continue in uno stesso insieme lebesghiano I, sono lebesghiani sia l'insieme J dei punti di I in cui la (1) non converge, sia l'insieme $I - J$ dei punti in cui la (1) converge; il teorema di SEVERINI-EGOROFF: se la successione (1) di funzioni tutte quasi continue in uno stesso insieme I, è quasi ovunque convergente in I, comunque si assegni un $\varepsilon > 0$ è possibile costruire un insieme lebesghiano $H_\varepsilon \subset I$, tale che $m(H_\varepsilon) < \varepsilon$ e che la successione (1) converga uniformemente in $I - H_\varepsilon$; e da ultimo il teorema che abbiamo enunciato alle fine del n. 1 ([12]).

Passeremo ora all'argomento propostoci al n. 2.

([12]) Le dimostrazioni sono in tutto identiche a quelle di PV, pp. 134-139, ove soltanto si sostituiscano i valori assoluti $|f_m(P) - f_n(P)|$ con le distanze $\overline{f_m(P) f_n(P)}$.

Studio di una successione di funzioni, nelle condizioni più generali.

7. In questo numero dimostreremo due proposizioni preliminari, nelle quali potremo supporre di nuovo (come fu fatto prima del n. 6) che lo spazio S'' (dei valori assunti dalle funzioni quasi continue considerate) sia semplicemente *topologico*. Ferme dovranno però restare le ipotesi fatte sui due spazi nei quali s'intendono variare rispettivamente il punto P e la massa $\mu(e)$, cioè: S *metrico* e *separabile* (n. 4), S' *additivo* (nel senso del n. 3).

LEMMA I. - *Sia $f(P)$ una funzione quasi continua nell'insieme I e sia Γ un qualunque insieme chiuso di S''. L'insieme*

$$I_\Gamma = I[f(P) \in \Gamma],$$

formato da tutti i punti P di I nei quali $f(P)$ appartiene a Γ, è lebesghiano [13]

Infatti, prefissato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, è possibile costruire un insieme C_ε chiuso e di continuità per la $f(P)$, e un insieme aperto A_ε, in modo che risulti

$$C_\varepsilon \subset I \subset C_\varepsilon + A_\varepsilon, \qquad m(A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Il prodotto $I_\Gamma C_\varepsilon$ (come luogo dei punti dell'insieme chiuso C_ε, nei quali la funzione continua $f(P)$ assume valori appartenenti all'insieme chiuso Γ) è un insieme chiuso [14], donde segue immediatamente la tesi, osservando che

$$I_\Gamma C_\varepsilon \subset I_\Gamma \subset I_\Gamma C_\varepsilon + A_\varepsilon.$$

LEMMA II. - *Se le funzioni $f_n(P)$ della successione* (1) *sono tutte quasi continue in I, e se Γ è un qualunque insieme chiuso di S'', l'insieme Γ' dei punti di I in ciascuno dei quali infinite funzioni $f_n(P)$ assumono valori appartenenti a Γ, è lebesghiano.*

Infatti, posto

$$I_n = I[f_n(P) \in \Gamma] \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

risulta

$$\Gamma' = \lim_{n\to\infty}{}'' \; I_n.$$

Essendo dunque ciascun insieme I_n lebesghiano in virtù del lemma I, anche Γ' è lebesghiano (v. n. 5) c. d. d.

---

[13] Questa proposizione offre chiara analogia con quella che abbiamo enunciata e dimostrata al n. 6.

[14] Cfr. M. PICONE e G. FICHERA, *Trattato di Analisi Matematica* (Roma, Tumminelli, 1954) vol. I, p. 166, X.

8. Veniamo da ultimo alla dimostrazione del teorema che abbiamo enunciato al n. 2, supponendo ormai che lo spazio S'' sia *metrico, compatto* e *separabile.*

Per l'ipotesi della compattezza di S'', a prescindere al più da un insieme lebesghiano $\mathfrak{N}$ tale che $m(\mathfrak{N})=0$ (formato dagli eventuali punti di I in cui al più un numero finito di funzioni $f_n(P)$ sono definite), in ogni punto P di I la successione (1) ammette almeno un valor limite: indichiamo con $\mathfrak{U}_P$, per ogni punto P di $I-\mathfrak{N}$, l'insieme chiuso $\subset S''$ formato da tutti i valori limiti della successione (1), indi poniamo

$$H=\sum_{P\varepsilon I-\mathfrak{N}}\mathfrak{U}_P.$$

Sia $B\equiv(b_1, b_2, ...)$ la base di S'' e siano $Q_r(\rho)$ $(r=1, 2, ...)$ i domini, di S'', circolari e di raggio ρ, i cui centri sono rispettivamente nei punti b_r.

Diciamo R_{11} il primo dei domini $Q_r(1)$ $(r=1, 2, ...)$, sia $Q_{i_1}(1)$, che contiene nel proprio interno almeno un punto di H, ed I_{11} l'insieme (lebesghiano, in virtù del lemma II) formato dai punti P di $I-\mathfrak{N}$, in ciascuno dei quali infinite funzioni $f_n(P)$ assumono valori appartenenti ad R_{11}.

In virtù della compattezza di S'', se $P\in I_{11}$, $\mathfrak{U}_P R_{11}$ non è vuoto; invece, se $P\in I-\mathfrak{N}-I_{11}$, si può evidentemente dire soltanto che $\mathfrak{U}_P$ non possiede punti *interni* ad R_{11}.

Supponiamo cha sia $I-\mathfrak{N}\neq I_{11}$. Allora, percorrendo la successione $\{Q_{i_1+r}(1)\}$ $(r=1, 2, ...)$, si troverà certamente un primo dominio R_{12}, sia $Q_{i_2}(1)$, soddisfacente alle condizioni:

a) R_{12} contiene, nel proprio interno, almeno un punto di H non interno ad R_{11};

b) l'insieme lebesghiano [15] I_{12} formato dai punti P di $I-\mathfrak{N}-I_{11}$, in ciascuno dei quali infinite funzioni $f_n(P)$ assumono valori appartenenti ad R_{12}, non è vuoto.

Così proseguiamo ordinatamente. Supponiamo d'aver determinato un certo gruppo di p domini circolari $R_{11}, R_{12}, ..., R_{1p}$ (con $p\geq 1$) e, corrispondentemente, un certo gruppo di p insiemi lebesghiani $I_{11}, I_{12}, ..., I_{1p}$, due a due disgiunti, tali che sia

$$I-\mathfrak{N}\neq I_{11}\overset{\circ}{+}I_{12}\overset{\circ}{+}...\overset{\circ}{+}I_{1p}.$$

Percorrendo la successione $\{Q_{i_p+r}(1)\}$ $(r=1, 2, ...)$, si troverà certamente un primo dominio $R_{1,p+1}$, sia $Q_{i_{p+1}}(1)$, soddisfacente alle condizioni:

a) $R_{1,p+1}$ contiene, nel proprio interno, almeno un punto di H non interno ad $R_{11}+R_{12}+...+R_{1p}$;

([15]) $I-\mathfrak{N}-I_{11}$ è lebesghiano come differenza d'insiemi lebesghiani. I_{12} è dunque lebesghiano in virtù del lemma II.

b) l'insieme lebesghiano $I_{1,p+1}$ formato dai punti P di $I - \mathfrak{N} - (I_{11} \overset{\circ}{+} I_{12} \overset{\circ}{+} ... \overset{\circ}{+} I_{1p})$, in ciascuno dei quali infinite funzioni $f_n(P)$ assumono valori appartenenti ad $R_{1,p+1}$, non è vuoto.

Se il procedimento indicato non ha termine, cioè se non si perviene ad un intero $p > 0$ tale che sia $I - \mathfrak{N} = I_{11} \overset{\circ}{+} I_{12} \overset{\circ}{+} ... \overset{\circ}{+} I_{1p}$, si verrà così a determinare una successione d'insiemi I_{1p} $(p = 1, 2, ...)$ tale che, come subito si riconosce,

$$I - \mathfrak{N} = I_{11} \overset{\circ}{+} I_{12} \overset{\circ}{+} ... \overset{\circ}{+} I_{1p} \overset{\circ}{+} ...$$

Definiamo, in ogni caso, nell'insieme $I - \mathfrak{N}$, la funzione quasi continua

$$F_1(P) = b_{i_p} \text{ (centro di } R_{1p}\text{), per } P \in I_{1p} \qquad (p = 1, 2, ...).$$

9. Immaginando ora di fissare uno qualunque degli indici $p \geq 1$, diciamo R_1^{1p} il primo dei domini $Q_r\left(\frac{1}{2}\right)$ $(r = 1, 2, ...)$, sia $Q_{j_1}\left(\frac{1}{2}\right)$, che contiene nel proprio interno almeno un punto del prodotto HR_{1p}, ed I_1^{1p} l'insieme lebesghiano formato dai punti P di I_{1p}, in ciascuno dei quali infinite funzioni $f_n(P)$ assumono valori appartenenti ad R_1^{1p}

Se è $I_{1p} \neq I_1^{1p}$, si riconosce subito (analogamente à quanto sopra, v. n. 8) che, percorrendo la successione $\left\{ Q_{j_1+r}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ $(r = 1, 2, ...)$, si dovrà trovare un primo dominio R_2^{1p}, sia $Q_{j_2}\left(\frac{1}{2}\right)$, soddisfacente alle condizioni:

a) R_2^{1p} contiene, nel proprio interno, almeno un punto di HR_{1p} non interno ad R_1^{1p};

b) l'insieme lebesghiano I_2^{1p} formato dai punti P di $I_{1p} - I_1^{1p}$, in ciascuno dei quali infinite funzioni $f_n(P)$ assumono valori appartenenti ad R_2^{1p}, non è vuoto.

Così proseguiamo ordinatamente. Supponiamo d'aver determinato un certo gruppo di q domini circolari $R_1^{1p}, R_2^{1p}, ..., R_q^{1p}$ (con $q \geq 1$) e, corrispondentemente, un certo gruppo di q insiemi lebesghiani $I_1^{1p}, I_2^{1p}, ..., I_q^{1p}$, due a due disgiunti, tali che sia $I_{1p} \neq I_1^{1p} \overset{\circ}{+} ... \overset{\circ}{+} I_q^{1p}$. Percorrendo la successione $\left\{ Q_{j_q+r}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ $(r = 1, 2, ...)$ si troverà certamente un primo dominio R_{q+1}^{1p}, sia $Q_{j_{q+1}}\left(\frac{1}{2}\right)$, soddisfacente alle condizioni:

a) R_{q+1}^{1p} contiene, nel proprio interno, almeno un punto di HR_{1p} non interno ad $R_1^{1p} + R_2^{1p} + ... + R_q^{1p}$;

b) l'insieme lebesghiamo I_{q+1}^{1p} formato dai punti P di $I_{1p} - (I_1^{1p} \overset{\circ}{+} I_2^{1p} \overset{\circ}{+} ... \overset{\circ}{+} I_q^{1p})$, in ciascuno dei quali infinite funzioni $f_n(P)$ assumono valori appartenenti ad R_{q+1}^{1p}, non è vuoto.

Se il procedimento indicato non ha termine, cioè se non si perviene ad un intero positivo q tale che sia

$$I_{1p} = I_1^{1p} \overset{\circ}{+} I_2^{1p} \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} I_q^{1p},$$

si verrà così a determinare una successione d'insiemi I_q^{1p} $(q = 1, 2, \dots)$ tale che

$$I_{1p} = I_1^{1p} \overset{\circ}{+} I_2^{1p} \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} I_q^{1p} \overset{\circ}{+} \dots .$$

Disponiamo la successione doppia $\{ I_q^{1p} \}$ $(p = 1, 2, \dots;\ q = 1, 2, \dots)$ in una successione semplice che indichiamo con $\{ I_{2p} \}$ $(p = 1, 2, \dots)$ [16] e, corrispondentemente, la successione doppia $\{ R_q^{1p} \}$ $(p = 1, 2, \dots;\ q = 1, 2, \dots)$ nella successione semplice che indichiamo con $\{ R_{2p} \}$ $(p = 1, 2, \dots)$, e definiamo in $I - \mathfrak{N}$ la funzione quasi continua

$$F_2(P) = b_{j_p} \ (\text{centro di } R_{2p}), \ \text{per } P \in I_{2p} \qquad (p = 1, 2, \dots).$$

10. Così proseguiamo ordinatamente e indefinitamente.

Supponiamo d'esser pervenuti alla costruzione delle successioni

$$\{ I_{1p} \},\ \{ I_{2p} \}, \dots,\ \{ I_{sp} \} \qquad (p = 1, 2, \dots)$$

(per un certo intero $s \geq 1$) d'insiemi tutti lebesghiani [17]. Immaginando di fissare uno qualunque degli indici $p \geq 1$, diciamo R_1^{sp} il primo dei domini $Q_r\left(\frac{1}{2^s}\right)$ $(r = 1, 2, \dots)$, sia $Q_{h_1}\left(\frac{1}{2^s}\right)$, che contiene, nel proprio interno, almeno un punto di HR_{sp}, ed I_1^{sp} l'insieme lebesghiano formato dai punti P di I_{sp}, in ciascuno dei quali infinite funzioni $f_n(P)$ assumono valori appartenenti ad R_1^{sp}. E, dopo ciò, ripetiamo parola per parola tutto quanto abbiamo detto al n. 9, con l'unica differenza di sostituire sempre la coppia d'indici $1p$ (in ogni simbolo in cui questa compare) con la coppia sp, e di scegliere i domini circolari dalla successione $\left\{ Q_r\left(\frac{1}{2^s}\right) \right\}$ $(r = 1, 2, \dots)$ anzichè dalla successione $\left\{ Q_r\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$; infine definiamo la funzione quasi continua

$$F_{s+1}(P) = b_{h_p} \ (\text{centro di } R_{s+1,\,p}), \ \text{per } P \in I_{s+1,\,p} \qquad (p = 1, 2, \dots).$$

Affermiamo che la successione $\{ F_s(P) \}$ $(s = 1, 2, \dots)$ è convergente in quasi tutto I, precisamente *in tutto* $I - \mathfrak{N}$. Infatti se $P_0 \in I - \mathfrak{N}$, è definita una ben determinata successione d'insiemi

$$I_{1p_1} \supset I_{2p_2} \supset \dots \supset I_{sp_s} \supset \dots$$

---

[16] Si osservi che gli insiemi di tale successione semplice risultano due a due disgiunti.

[17] Ognuna di queste successioni è formata d'insiemi due a due disgiunti (Cfr. la nota precedente).

tutti contenenti P_0. Indicati allora con

$$(2) \qquad b_{i_{p_1}},\ b_{j_{p_2}}, \ldots,\ b_{l_{p_s}}, \ldots$$

i centri dei corrispondenti domini

$$R_{1p_1},\ R_{2p_2}, \ldots,\ R_{sp_s}, \ldots$$

si riconosce subito che, in virtù della completezza di S'', esiste il limite, unico e ben determinato, della successione (2). La funzione $f(P)$ che, in P_0, è uguale a siffatto limite, risponde alla tesi del teorema. Infatti si ha, in primo luogo,

$$\lim_{s \to \infty} F_s(P) = f(P)$$

in tutto $I - \mathfrak{N}$, e perciò $f(P)$ è quasi continua in I. In secondo luogo, in virtù della costruzione indicata, la successione $\{f_n(P_0)\}$ possiede infiniti termini in R_{sp_s} (qualunque sia $s = 1, 2, \ldots$), cioè termini la cui distanza da $b_{l_{p_s}}$ (centro di R_{sp_s}) non supera $\frac{1}{2^{s-1}}$: tale successione possiede dunque infiniti termini anche in ogni intorno del punto indicato con $f(P_0)$ e con ciò rimane dimostrato che $f(P_0)$ è uno dei valori limiti della successione stessa, c. d. d.

11. Può essere interessante ricercare se e come il teorema che abbiamo dimostrato, trovi applicazione al caso che i valori assunti dalle funzioni della successione (1) appartengano ad uno spazio S'' che sia bensì *metrico, completo* e *separabile*, ma non precisamente compatto: anzi, come accade per uno spazio euclideo a un numero qualunque di dimensioni, goda della proprietà che *siano compatti soltanto i suoi domini limitati.*

Una tale ricerca può essere fatta, nel modo più semplice, cominciando col predisporre, in S'', una successione di domini circolari concentrici Γ_m ($m = 1, 2, \ldots$), aventi raggi uguali ai propri indici. In corrispondenza di ogni valore dell'indice m, diciamo G_m l'insieme, lebesghiano in virtù del lemma II, formato dai punti P di $I - \mathfrak{N}$, in ciascuno dei quali infiniti termini della successione (1) cadono in Γ_m. È evidente che G_m contiene tutti i punti P di $I - \mathfrak{N}$ tali che $\mathfrak{U}_P$ abbia almeno un punto interno a Γ_m.

Poichè $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_m \subset \ldots$, l'insieme $G = \lim\limits_{m \to \infty} G_m$ è lebesghiano e comprende tutti e soli i punti P di $I - \mathfrak{N}$ in ciascuno dei quali la (1) possiede almeno un valore limite. D'altra parte, se consideriamo le funzioni della (1) come definite in G_1, potremo ripetere tutti i ragionamenti dei nn. 8-10 soltanto con qualche lieve alterazione di dettaglio: la più rilevante delle quali consiste nel sostituire alla considerazione dell'intero spazio S'', quella del dominio Γ_1 (assunto come spazio, compatto, dei valori di infinite funzioni $f_n(P)$).

Si giungerà così a costruire una ben determinata funzione $f(P)$, quasi continua in G_1, che in ogni punto P di G_1 è uguale a uno dei valori limiti della (1). Analogamente potrà ragionarsi successivamente sugli insiemi $G_{n+1} - G_n$ $(n = 1, 2, ...)$, assumendo come corrispondenti spazi, compatti, i domini Γ_{n+1}.

Si può dunque concludere col seguente teorema [18]:

nelle ipotesi fatte per la successione (1) *nell'insieme I, la parte G di I formata dai punti P nei quali la successione ammette almeno un valore limite, è lebesghiana. È possibile costruire una funzione $f(P)$ quasi continua in G, che, in ogni punto P di G, è uguale ad uno dei valori limiti della successione* [19].

---

[18] Cfr. il teor. II di PV, p. 141.

[19] Un'altra generalizzazione della teoria svolta è possibile: quella che s'ottiene supponendo che la massa $\mu(e)$ sia a variazione finita negli insiemi *limitati* e di $\mathfrak{F}$ (ma possa non esser tale su certi insiemi illimitati di $\mathfrak{F}$). Lasciamo al lettore i facili ritocchi necessari in qualche particolare dettaglio, avvertendo soltanto che nulla cambia nei risultati finali di questo lavoro.