Limitazioni per lo stato tensionale di un qualunque sistema continuo.

Memoria di GIUSEPPE GRIOLI (a Padova).

A Mauro Picone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Si stabiliscono nuove disuguaglianze relative ai massimi moduli degli sforzi che si generano in un corpo continuo in equilibrio. Si indicano delle applicazioni ai problemi dell'equilibrio dei solidi tubolari e in particolare dei corpi cilindrici.*

Lo studio dell'equilibrio dei corpi continui fondato su particolari proprietà integrali delle caratteristiche di tensione permette spesso di stabilire delle formule di non difficile applicazione relativamente alla valutazione dello stato tensionale dei corpi in equilibrio.

In tale indirizzo esistono importanti risultati dovuti ad A. SIGNORINI (1) che anche recentemente, in una conferenza tenuta a Torino (2), ha segnalato una elegante interpretazione geometrica di una certa condizione di sicurezza. - Io stesso ho qualche anno fa stabilito delle disuguaglianze relative alle caratteristiche di tensione fondate su proprietà di media (3).

Tali disuguaglianze, come pure quella di SIGNORINI, portano a precisare il secondo membro di relazioni del tipo $|X_{rs}|_{\max.} > \eta_{rs}$, se con X_{rs} si denotano le caratteristiche di tensione.

In questa mia nota stabilisco nuove disuguaglianze che migliorano quelle già stabilite e sono valide qualunque sia la forma del corpo continuo e la sua natura. Esse danno luogo nel caso dei corpi cilindrici ad un'interpretazione geometrica dei risultati analoga a quella già segnalata da SIGNORINI ma anche di maggiore efficacia in quanto certamente allarga la zona di *sicuro pericolo* che dalla disuguaglianza di SIGNORINI viene con un certo criterio prefissata.

---

(1) A. SIGNORINI, *Sopra alcune questioni di Statica dei sistemi continui,* « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », Serie II, vol. II, 1933, pag. 231.

(2) A. SIGNORINI, *Sopra un'estensione della teoria linearizzata dell'elasticità,* « Rendiconti Seminario dell'Università e politecnico di Torino », vol. 12, 1952-53, pag. 93.

(3) G. GRIOLI, *Relazioni quantitative per lo stato tensionale di un qualunque sistema continuo e per la deformazione di un corpo elastico in equilibrio,* « Annali di Matematica pura ed applicata », Serie IV, tomo XXXIII, 1952, pag. 239.

Non mi è sembrato superfluo segnalare la possibilità di estensione delle limitazioni stabilite per i corpi cilindrici al caso di particolari tipi di archi.

Per avere condizioni sufficienti di sicurezza sono desiderabili disuguaglianze nell'altro senso di quello quì considerato, del tipo di quelle recentemente stabilite da G. FICHERA (4) e da G. COLOMBO (5).

1) **Una limitazione di carattere generale per le componenti dello stress.**

Denoto con $\mathcal{C}$ la regione dello spazio occupata da un qualunque sistema continuo, riferita alla sua terna centrale $Ox_1x_2x_3$, e con $P_1, P_2, \ldots, P_n$ n funzioni di x_1, x_2, x_3, ortogonali in $\mathcal{C}$.

Posto

$$\rho_t^2 = \frac{1}{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} P_t^2 d\mathcal{C}, \qquad (t = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

e

$$p_{rst} = \overline{X_{rs} P_t}, \qquad (r, s = 1, 2, 3); \tag{2}$$

ove con il soprassegno si intende che della funzione alla quale esso è applicato si considera il valore medio in $\mathcal{C}$, vale la disuguaglianza (6)

$$|X_{rs}|_{\max.} \geq \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \frac{p_{rst}^2}{\rho_t^2}}, \qquad (r, s = 1, 2, 3), \tag{3}$$

atta a rivelare uno stato di pericolo ogni qualvolta i p_{rst} siano noti.

Si consideri invece l'uguaglianza

$$\int_{\mathcal{C}} X_{rs} \sum_{t=1}^{n} a_t P_t d\mathcal{C} = \mathcal{C} \sum_{t=1}^{n} a_t p_{rst}, \qquad (r, s = 1, 2, 3) \tag{4}$$

---

(4) G. FICHERA, *Methods of functional linear analysis in mathematical physics*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians - Amsterdam, 1954. Vol. I.

(5) G. COLOMBO, *Limitazioni superiori per i moduli delle componenti di stress in un particolare problema di deformazione piana*, « Annali dell'Università di Ferrara », (Nuova Serie), Sezione XII, Vol. III, n. 6, pag. 45.

Maggiorazioni delle componenti di stress nel problema di De Saint-Venant, « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova », vol. XXIV (1955), pag. 70.

(6) Loco cit. in nota (3), pag. 245.

ove le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono n costanti comunque scelte. Da essa si deduce la disuguaglianza (7)

$$|X_{rs}|_{\max.} > \mathcal{C}\frac{\left|\sum_{t=1}^{n} a_t p_{rst}\right|}{\int_{\mathcal{C}}\left|\sum_{t=1}^{n} a_t P_t\right| d\mathcal{C}}, \qquad (r,\ s = 1,\ 2,\ 3). \tag{5}$$

Posto

$$y^2 = \sum_{t=1}^{n}\frac{p_{rst}^2}{\rho_t^2}, \qquad z(a) = \mathcal{C}\frac{\left|\sum_{t=1}^{n} a_t p_{rst}\right|}{\int_{\mathcal{C}}\left|\sum_{t=1}^{n} a_t P_t\right| d\mathcal{C}}, \tag{6}$$

mostrerò subito che esistono valori a_t' delle a_t per i quali risulta

$$z(a') > |y|, \tag{7}$$

dopodichè sarà evidente che la disuguaglianza (5) per $a_t = a_t'$, $(t = 1, 2, \ldots, n)$, è più vantaggiosa della (3). Anzi, se si identificano le a_t con le a_t^* massimanti $z(a)$ si ottiene la più vantaggiosa delle disuguaglianze del tipo (5).

Dimostrazione della (7). - Per ogni prefissata coppia di valori degli indici r, s si assuma

$$a_t' = \frac{p_{rst}}{\rho_t^2}, \qquad (t = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{8}$$

e si identifichino le a_t con le a_t'. Ne segue

$$z^2(a') = \mathcal{C}^2\frac{\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{p_{rst}^2}{\rho_t^2}\right]^2}{\left(\int_{\mathcal{C}}\left|\sum_{t=1}^{n}\frac{p_{rst}P_t}{\rho_t^2}\right| d\mathcal{C}\right)^2} > \mathcal{C}\frac{\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{p_{rst}^2}{\rho_t^2}\right]^2}{\int_{\mathcal{C}}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{p_{rst}P_t}{\rho_t^2}\right]^2 d\mathcal{C}}. \tag{9}$$

La proprietà di ortogonalità in $\mathcal{C}$ dei P_t permette di dedurre da (9)

$$z^2(a') > \mathcal{C}\frac{\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{p_{rst}^2}{\rho_t^2}\right]^2}{\int_{\mathcal{C}}\sum_{t=1}^{n}\frac{p_{rst}^2 P_t^2}{\rho_t^4} d\mathcal{C}} = \frac{\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{p_{rst}^2}{\rho_t^2}\right]^2}{\sum_{t=1}^{n}\frac{p_{rst}^2}{\rho_t^2}} = y^2 \tag{10}$$

e la (7) risulta dimostrata.

---

(7) Da (4) anzichè la (5) segue una uguaglianza solo in casi eccezionali ed evidenti che ometto di considerare.

La disuguaglianza (5) acquista un interesse concreto ogni qualvolta i p_{rst} sono noti. - Tale circostanza si verifica, per ogni intero n nel problema dell'equilibrio di un sistema continuo soggetto a forze esterne note, purchè le funzioni P_t si identifichino con polinomi ortogonali in $\mathcal{C}$, opportunamente scelti [8].

2) Applicazione all'equilibrio dei corpi cilindrici.

La disuguaglianza (5) fornisce risultati molto espressivi nel caso che $\mathcal{C}$ sia un cilindro di sezione, A, qualunque, anche limitando i P_t ai monomi di primo grado.

Supposto l'asse x_1 coincidente con l'asse baricentrico di $\mathcal{C}$ parallelo alle sue generatrici espliciterò la (5) per dedurre una disuguaglianza relativa allo sforzo normale X_{11}. Frequentemente si presentano condizioni di sollecitazione tali che la valutazione di quello sforzo presenta il massimo interesse applicativo.

Denoto con $\mathcal{C}'(x_1)$ la porzione di $\mathcal{C}$ delimitata dalla base ad $x_1 < 0$ e dalla generica sezione $x_1 = \text{cost.}$ e con $R_i'(x_1)$, $M_i'(x_1)$, $(i = 1, 2, 3)$, le componenti rispetto ai prescelti assi centrali del risultante e del momento risultante rispetto al baricentro della sezione $x_1 = \text{cost.}$ delle forze esterne rispetto a $\mathcal{C}$ e agenti su $\mathcal{C}'(x_1)$. Indicando con R_i, M_i i valori medi di $R_i'(x_1)$, $M_i'(x_1)$, al variare delle coordinate x_1 tra le due basi del solido cilindrico, si riconosce essere

$$\overline{X_{11}} = \frac{A}{R_1}, \qquad \overline{X_{11}x_2} = -\frac{M_3}{A}, \qquad \overline{X_{11}x_3} = \frac{M_2}{A}. \tag{11}$$

Per $n = 3$ e

$$P_1 = 1, \qquad P_2 = x_2, \qquad P_3 = x_3 \tag{12}$$

le p_{11t}, $(t = 1, 2, 3)$, coincidono con i secondi membri di (11) e la (5) diviene

$$|X_{11}|_{\max.} > \frac{|a_1 R_1 - a_2 M_3 + a_3 M_2|}{\int_A |a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3| \, dA}. \tag{13}$$

Le costanti a_1, a_2, a_3 vanno determinate in modo che il secondo membro di (13) riesca massimo. - Si può tuttavia evitare la ricerca dei valori massimanti di a_1, a_2, a_3, che per la natura della forma della sezione A può riuscire laboriosa, identificando le a_t con i valori a_t' espressi da (8).

Ne segue

$$|X_{11}|_{\max.} > z, \tag{14}$$

---

[8] Loco cit. in nota (3), pag. 245.

con

$$(15)\qquad z = \frac{R_1^2 + \dfrac{M_3^2}{\rho_2^2} + \dfrac{M_2^2}{\rho_3^2}}{\displaystyle\int_A \left| R_1 - \frac{M_3}{\rho_2^2} x_2 + \frac{M_2}{\rho_3^2} x_3 \right| dA},$$

ove le ρ_t, $(t = 1, 2, 3)$, si possono ritenere espresse da

$$(16)\qquad \rho_t^2 = \frac{1}{A}\int_A x_t^2 dA, \qquad (t = 1, 2, 3),$$

anzichè da (1). Supposte M_2, M_3 non simultaneamente nulle, mostrerò che l'espressione (15) di z è suscettibile di una forma molto significativa. A tal fine osservo che supposto, com'è certamente lecito, $R_1 \geq 0$ e indicando con τ il denominatore del secondo membro di (15) e con r la retta appartenente al piano [9] π di A di equazione

$$(17)\qquad R_1 - \frac{M_3}{\rho_2^2} x_2 + \frac{M_2}{\rho_3^2} x_3 = 0,$$

si ha

$$(18)\qquad \tau = \int_{A_1} \left(R_1 - \frac{M_3}{\rho_2^2} x_2 + \frac{M_2}{\rho_3^2} x_3\right) dA - \int_{A-A_1} \left(R_1 - \frac{M_3}{\rho_2^2} x_2 + \frac{M_2}{\rho_3^2} x_3\right) dA,$$

pur di intendere che A_1 sia la porzione di A appartenente al semipiano di π nel quale il primo membro di (17) risulta positivo se r taglia A o l'intera A nel caso opposto [10]. Tenuto conto che la coppia Ox_2x_3 è centrale, da (18) segue

$$(19)\qquad \tau = (2A_1 - A)R_1 + 2A_1\left[\frac{M_2}{\rho_3^2} x_3^{(1)} - \frac{M_3}{\rho_2^2} x_2^{(1)}\right],$$

ove $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ denotano le coordinate x_2, x_3 del baricentro G_1 di A_1. Detto M^* il vettore di componenti 0, $\dfrac{M_2}{\rho_3^2}$, $\dfrac{M_3}{\rho_2^2}$, si riconosce subito che l'espressione dipendente da M_2, M_3 in (19) non è altro che $|M^* \wedge OG_1|$ e coincide [11]

---

(9) Per le considerazioni che seguono e per quelle dei nn. 3, 4, A si può identificare con la sezione $x_1 = 0$.

(10) A causa di $R_1 \geq 0$ il baricentro di A appartiene certamente ad A_1.

(11) La retta di equazione

$$(*)\qquad \frac{M_2}{\rho_3^2} x_3 - \frac{M_3}{\rho_2^2} x_2 = 0$$

divide la sezione A in due parti in una delle qnali, A_1', il primo membro di $(*)$ è positivo. Evidentemente A_1' [per $R_1 > 0$] è una parte di A_1 e contiene G_1.

Ne segue $\dfrac{M_2}{\rho_3^2} x_3^{(1)} - \dfrac{M_3}{\rho_2^2} x_2^{(1)} \geq 0$.

quindi con $M^*\delta_1$ se δ_1 indica la distanza di G_1 dalla parallela ad $\boldsymbol{M}^*$ per il baricentro G di A. Si ha quindi

$$\tau = (2A_1 - A)R_1 + 2A_1 M^* \delta_1 . \tag{20}$$

La distanza di r da G è espressa da $\frac{R_1}{M^*}$ e risulta

$$\delta_1 = \delta - \frac{R_1}{M^*}, \tag{21}$$

se δ esprime la distanza di G_1 da r.

In definitiva si ha quindi

$$\tau = 2A_1 M^* \delta - AR_1 > 0. \tag{22}$$

In corrispondenza la (14) diviene [vedi (15)]

$$|X_1|_{\max.} > \frac{R_1^2 + \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}^*}{2A_1 M^* \delta - AR_1}. \tag{23}$$

Se r non interseca A è $A_1 = A$, $\delta = \frac{R_1}{M^*}$ e la (23) diviene

$$|X_1|_{\max.} > \frac{R_1^2 + \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}^*}{AR_1}. \tag{23'}$$

Nel caso particolare di una sollecitazione astatica è $R_1 = 0$ e la (23) diviene

$$|X_1|_{\max.} > \frac{\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}^*}{2A_1 M^* \delta}, \tag{24}$$

ove δ denota la distanza di G_1 dalla parallela ad $\boldsymbol{M}^*$ per G.

Non è difficile riconoscere che il punto Q^* di coordinate $\frac{M_3}{R_1}, -\frac{M_2}{R_1}$ è l'antipolo della retta r di equazione (17) rispetto all'ellisse centrale di A. Ne segue che la r non taglia la sezione A allora e soltanto allora che Q^* è interno al nocciolo centrale. - Si conclude che delle disuguaglianze (23), (23') vale la seconda o la prima secondo che Q^* è interno o non al nocciolo centrale di A.

In un certo senso la r e Q^* corrispondono all'*asse neutro* e al *centro di sollecitazione*, quali sono definiti nello schema di De Saint-Venant del problema della presso-flessione. - Anzi in tal caso ad essi effettivamente si riducono, mentre R_1, M_2, M_3 coincidono con le componenti secondo x_1 e x_2, x_3 del risultante e del momento risultante rispetto al baricentro di $\mathcal{C}$ delle forze esterne agenti snlla base ad $x_1 > 0$.

La validità delle disuguaglianze (13), (14) può estendersi con qualche lieve modifica al caso di corpi non cilindrici per i quali la terna principale d'inerzia relativa ad ogni punto dell'asse x_1 ha gli assi paralleli a quelli centrali. - È facile riconoscere infatti che le (11) si mantengono valide pur d'intendere $A = \frac{l}{\mathfrak{C}}$, con $l = x_{1\,\text{max.}} - x_{1\,\text{min.}}$ e che da (5), (8) anzichè le (13), (14), (15) si deducono le disuguaglianze che da (13), (14), (15) si ottengono moltiplicando i secondi membri di (13), (15) per l e sostituendo gl'integrali che in essi appaiono con altri operanti sulle medesime funzioni integrande ma estesi a $\mathfrak{C}$. Le ρ_t^2, $(t = 2, 3)$, devono naturalmente pensarsi espressi da (1). Sulla trasformata come sopra è detto della (15) possono svilupparsi considerazioni analoghe a quelle svolte per la (15) stessa, considerando anzichè la retta di A di equazione (17) il piano di equazione (17), ecc. - Per brevità rinunzio ad esporle.

3) Sulle a_t massimanti in un caso paragonabile a quello della flessione uniforme.

In questo numero considererò un caso particolarmente interessante che per sollecitazioni esterne presenti soltanto sulle basi del cilindro può dirsi corrispondente del problema della flessione uniforme.

La disuguaglianza (5) per r, $s = 1$ e con riferimento ai soli polinomi $P_2 = x_2$, $P_3 = x_3$ diviene

$$|X_{11}|_{\text{max.}} > \frac{|a_3 M_2 - a_2 M_3|}{\int_A |a_2 x_2 + a_3 x_3| \, dA}. \tag{25}$$

Poichè le a_i possono evidentemente alterarsi per un comune fattore senza che il secondo membro di (25) muti di valore, si può porre

$$a_2 = -\operatorname{sen}\alpha, \qquad a_3 = \cos\alpha \tag{26}$$

e scrivere

$$|X_{11}|_{\max} > z(\alpha), \tag{27}$$

con

$$z(\alpha) = \frac{|M_2 \cos\alpha + M_3 \operatorname{sen}\alpha|}{\nu} \tag{28}$$

e

$$\nu = 2 \int_{A_1} (x_3 \cos\alpha - x_2 \operatorname{sen}\alpha)\, dA, \tag{29}$$

se A_1 è quella delle due parti in cui la retta r' di equazione

$$x_3 \cos\alpha - x_2 \operatorname{sen}\alpha = 0 \tag{30}$$

divide la sezione ove il primo membro di (30) è positivo.

Si può pensare orientata la retta r' e intendere che α sia precisamente l'angolo di r' e del semiasse positivo x_2 con l'avvertenza di ritenere $\alpha \geq 0$ se la semiretta positiva r' appartiene al primo o al secondo quadrante, $\alpha \leq 0$ nel caso opposto.

Se un prefissato valore di α subisce un incremento infinitesimo $\Delta\alpha$ ad esso corrisponde un incremento ΔA_1 di A_1. Il conseguente incremento $\Delta\nu$ di ν è espresso da

$$\Delta\nu = 2\int_{A_1+\Delta A_1} [x_3 \cos(\alpha+\Delta\alpha) - x_2 \operatorname{sen}(\alpha+\Delta\alpha)]dA - 2\int_{A_1} (x_3\cos\alpha - x_2 \operatorname{sen}\alpha)dA \tag{31}$$

che a meno di infinitesimi di ordine superiore a $\Delta\alpha$ diviene

$$\Delta\nu = -2\Delta\alpha \int_{A_1} (x_2\cos\alpha + x_3 \operatorname{sen}\alpha)dA. \tag{32}$$

Ne segue

$$\frac{d\nu}{d\alpha} = -2A_1(x_2^{(1)}\cos\alpha + x_3^{(1)}\operatorname{sen}\alpha), \tag{33}$$

ove, come nel numero precedente $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ denotano le coordinate di indice 2, 3 del baricentro G_1 di A_1.

Da (28), (34) segue

$$\frac{dz}{d\alpha} = \pm A_1 \frac{M_2 x_2^{(1)} + M_3 x_3^{(1)}}{2\nu^2}, \tag{34}$$

ove si deve assumere il segno superiore o quello inferiore a seconda che sia $M_2 \cos\alpha + M_3 \operatorname{sen}\alpha \lesseqgtr 0$.

Suppongo per pura semplicità di esposizione che ogni semiretta uscente dal baricentro della sezione normale del corpo cilindrico e contenuta nel suo piano incontri il contorno in un solo punto.

In tale ipotesi, assunto nella sezione A un sistema di coordinate polari con il polo in G, anomalia φ e asse polare x_2, detta

$$\rho = R(\varphi) > 0 \tag{35}$$

l'equazione polare del contorno di A e posto

$$\lambda(\varphi) = M_2\cos\varphi + M_3 \operatorname{sen}\varphi, \tag{36}$$

risulta

$$A_1(M_2 x_2^{(1)} + M_3 x_3^{(1)}) = \int_{A_1} \lambda(\varphi)\rho\, d\rho d\varphi = \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \lambda(\varphi) R^3(\varphi) d\varphi. \tag{37}$$

Senza restrizioni essenziali supporrò $M_2 \geq 0$, $M_3 > 0$. Si riconosce subito l'esistenza di valori α^* di α annullanti $\frac{dz}{d\alpha}$.

Basta a tal fine osservare che detto φ^* l'unico valore di φ compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e π annullante $\lambda(\varphi)$, l'integrale che compare nel terzo membro di (37) ha l'integrando sempre non positivo per $\alpha = \varphi^*$ sempre non negativo per $\alpha = \varphi^* - \pi$.

La $\frac{dz}{d\alpha}$ cambia quindi di segno al variare di α tra $\varphi^* - \pi$ e φ^*.

Da (34), (36), (37) per ogni α annullante $\frac{dz}{d\alpha}$ si deduce

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = \mp \frac{M_2 \cos\alpha^* + M_3 \operatorname{sen}\alpha^*}{2\nu^2}, \tag{38}$$

ove vale il segno superiore o inferiore a seconda che il numeratore della frazione a secondo membro sia positivo e negativo. Ciò significa che $\frac{d^2z}{d\alpha^2}$ è negativo per ogni α^* e la $z(\alpha)$ per $\alpha = \alpha^*$ ha un massimo effettivo.

4) **Prisma a sezione rettangolare. Un'interpretazione geometrica dei risultati.**

Supporrò che la sezione A sia un rettangolo e denoterò con $2b_2$, $2b_3$ le lunghezze dei lati e con $q = \frac{b_2}{b_3} \leq 1$ il loro rapporto. - Per evidenti motivi di simmetria si può supporre $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Con brevi sviluppi si trova

$$A_1(M_2x_2^{(1)} + M_3x_3^{(1)}) \begin{cases} = \frac{b_2}{3}[(3b_3^2 - b_2^2 \operatorname{tg}^2\alpha)M_3 - 2b_2^2M_2 \operatorname{tg}\alpha] & \text{per } 0 \leq |\operatorname{tg}\alpha| \leq q, \\ = \frac{b_3}{3\operatorname{tg}^2\alpha}[(b_3^2 - 3b_2^2\operatorname{tg}^2\alpha)M_2 + 2b_3^2M_3\operatorname{tg}\alpha] & \text{per } |\operatorname{tg}\alpha| \geq q. \end{cases} \tag{39}$$

Si constata altresì che, posto,

$$\eta = \frac{M_2}{M_3} \geq 0, \tag{40}$$

l'equazione in $\operatorname{tg}\alpha$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 2\eta \operatorname{tg}\alpha - 3q^2 = 0 \tag{41}$$

ammette nell'intervallo $0 \longleftrightarrow q$ l'unica radice espressa da

$$\operatorname{tg}\alpha^* = -\eta + \sqrt{\eta^2 + 3q^2} \tag{42}$$

allora e soltanto allora che sia $\eta \geq q$, mentre l'equazione

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha - \frac{2}{3}\frac{q^2}{\eta}\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{q^2}{3} = 0 \tag{43}$$

ammette nell'intervallo $q \longleftrightarrow \infty$ l'unica radice

$$\mathrm{tg}\,\alpha^* = \frac{q^2}{3\eta}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{3\eta^2}{q^2}}\right] \tag{44}$$

allora e soltanto allora che sia $\eta \leq q$.

Invece per $\eta > 0$ la (41) non ammette radici nell'intervallo $0 \longleftrightarrow -q$ e la (43) non ne ammette nell'intervallo $-q \longleftrightarrow -\infty$.

Da quanto sopra si deduce che $z(\alpha)$ assume il suo massimo valore per $\alpha = \alpha^*$, con α^* espresso da (42) o da (44) a seconda che sia $\eta \geq q$ oppure $\eta \leq q$. In corrispondenza si ha

$$z(\alpha^*) \begin{cases} = \dfrac{M_3[\eta + \sqrt{\eta^2 + 3q^2}]}{4b_2 b_3^2} & \text{per} \quad \eta \geq q, \\[2ex] = \dfrac{M_3\left[1 + \sqrt{1 + \dfrac{3\eta^2}{q^2}}\right]}{4b_2^2 b_3} & \text{per} \quad 0 \leq \eta \leq q. \end{cases} \tag{45}$$

È facile constatare che per $\eta = q$ le espressioni (42), (44) di $\mathrm{tg}\,\alpha^*$ divengono uguali e così pure le due fornite da (45) per $z(\alpha^*)$.

La disuguaglianza (27) quando sia prescritto che $|X_{11}|_{\max.}$ non superi un certo $k > 0$ fornisce una condizione necessaria di sicurezza che in base a (45) è suscettibile di un interessante interpretazione geometrica.

A tal fine comincio con l'osservare che tale condizione necessariamente implica

$$k > z(\alpha^*) \tag{46}$$

la quale, in base a (45), posto

$$\xi_2 = \frac{M_3}{Ak}, \qquad \xi_3 = \frac{M_2}{Ak}, \tag{47}$$

implica

$$\xi_3^2 + \frac{2b_2^2 q^2}{3}\,\xi_2 - \frac{b_3^2}{3} < 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq \eta = \frac{\xi_3}{\xi_4} \leq q, \tag{48}$$

e

$$\xi_2^2 + \frac{2b_3}{3q^2}\,\xi_3 - \frac{b_2^2}{3} < 0 \quad \text{per} \quad \eta = \frac{\xi_3}{\xi_2} \geq q. \tag{49}$$

Ne segue che, detta $\mathcal{S}_1^*$ la parabola di equazione

$$x_3^2 + \frac{2b_2 q^2}{3} x_2 - \frac{b_3^2}{3} = 0 \tag{50}$$

e B_1^* la regione del primo quadrante delimitata dal semiasse positivo x_2, dalla retta di equazione

$$x_3 - x_2 q = 0 \tag{51}$$

e da $\mathcal{S}_1^*$, la condizione (46) per $0 \leq \eta \leq q$ si traduce in quella che il punto $P^* \equiv (\xi_2, \xi_3)$ sia non esterno a B_1^* senza appartenere a $\mathcal{S}_1^*$.

Invece, detta $\mathcal{S}_2^*$ la parabola di equazione

$$x_2^2 + \frac{2b_3}{3q^2} x_3 - \frac{b_2^2}{3} = 0 \tag{52}$$

e B_2^* la regione del primo quadrante delimitata dal semiasse positivo x_3, dalla retta di equazione (51) e da $\mathcal{S}_2^*$, la condizione (46) per $\eta \geq q$ si traduce in quella che P^* sia non esterno a B_2^* senza appartenere a $\mathcal{S}_2^*$.

Osservato che $\mathcal{S}_1^*$ e $\mathcal{S}_2^*$ incontrano la retta di equazione (51) nello stesso punto $\left(\frac{b_2}{3}, \frac{b_3}{3}\right)$, in definitiva si conclude che la condizione (46) per $\eta \geq 0$, $M_3 > 0$ si traduce in quella che P^* sia non esterno alla regione $B_1^* + B_2^*$ senza appartenere a $\mathcal{S}_1^*$ nè a $\mathcal{S}_2^*$. Abbandonando ogni ipotesi sui valori di M_2, M_3 e supponendo η qualsiasi il risultato si può estendere per simmetria.

Detta B^* la regione di π costituita da $B_1^* + B_2^*$ e dalle tre ottenute per simmetria rispetto agli assi x_2, x_3 si può affermare: *condizione necessaria affinchè* $|X_{11}|_{\max.}$ *non superi* k *è che il punto* $P^* \equiv (\xi_2, \xi_3)$ *sia interno a* B^*.

È facile riconoscere che B^* è interna alla regione rettangolare definita dalle rette $x_2 = \pm\frac{b_2}{2}$, $x_3 = \pm\frac{b_3}{2}$. B^* risulta altresì interna alla regione racchiusa dall'ellisse centrale della sezione A già segnalata da SIGNORINI come quella a cui deve necessariamente appartenere P^*, qualunque sia la forma di A, perchè possa essere verificata la richiesta condizione di sicurezza ([12]). – Ad es., se P^* appartiene al semiasse positivo x_2 la condizione di appartenenza a B^* implica $0 < \xi_2 < \frac{b_2}{2}$ nonchè $0 < M_3 \wedge Ak\frac{b_2}{2}$, mentre quella di appartenenza alla regione racchiusa dall'ellisse centrale implica $0 < \xi_2 < \frac{b_2}{\sqrt{3}}$ e $0 < M_3 < Ak\frac{b_2}{\sqrt{3}}$.

([12]) Loco cit. in nota ([2]). Per maggiori dettagli vedi A. SIGNORINI, *Lezioni di Fisica matematica dell'anno accademico 1952-53*. Roma, Veschi, 1953 (litografie compilate dal Prof. G. Tedone), pp. 164-71.

5) **Disuguaglianze relative all'equilibrio degli archi.**

Disuguaglianze del tipo delle (13), (14) possono stabilirsi anche se $\mathcal{C}$ è un solido tubolare a sezione costante generato dal movimento di un'area piana sempre ortogonale alla curva L descritta dal suo baricentro. - In tal caso conviene riferirsi a coordinate curvilinee che chiamerò $x_1 x_2 x_3$ costituite dalla lunghezza d'arco x_1 di L valutata a partire dal suo punto medio e dalle coordinate cartesiane rispetto agli assi centrali della generica sezione $x_1 = \text{cost.}$

In tale ipotesi X_{11} ha il significato di sforzo normale nei punti della sezione $x_1 = \text{cost.}$ e in ogni sezione normale valgono le uguaglianze

$$(53) \qquad \int_A X_{11} dA = R_1'(x_1), \quad \int_A X_{11} x_2 dA = -M_3'(x_1), \quad \int_A X_{11} x_3 dA = M_2'(x_1),$$

se R_1', M_2', M_3' hanno significato analogo a quello del n. 2) ma con riferimento alla terna formata dalla normale ad A nel suo baricentro e dagli assi centrali di A.

Con procedimento analogo a quello che ha condotto alle (13), (14) si ricavano delle disuguaglianze che coincidono con le stesse (13), (14) tenuto conto di (15), (16), salvo la sostituzione di $R_1'(x_1)$ ad $R_1(x_1)$, ecc.

Tali disuguaglianze sono da ritenersi valide sezione per sezione e va pertanto cercata la sezione ove i secondi membri divengono massimi ([13]). - Le considerazioni relative alle (13), (14) possono ripetersi nel caso in esame. - Volendo evitare la ricerca del massimo al variare di x_1 dei secondi membri delle disuguaglianze così stabilite esse possono integrarsi membro a membro rispetto ad x_1. In particolare si ottiene, in $\mathcal{C}$,

$$(54) \qquad |X_{11}|_{\max.} > \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{R_1'^2 + \frac{M_3'^2}{\rho_2^2} + \frac{M_2'^2}{\rho_3^2}}{\int_A \left| R_1' - \frac{M_3'}{\rho_2^2} x_2 + \frac{M_2'}{\rho_3^2} x_3 \right| dA} \, dx_1 ,$$

se l indica la lunghezza di L.

Naturalmente i confronti fatti nel n. 1) tra le (3) e le (5) e validi anche per le (13), (14) non sussistono ma per brevità rinuncio a farne degli altri.

([13]) Se può riuscire conveniente, disuguaglianze del tipo quì considerate valide in ogni sezione normale possono adoperarsi anche nel caso dei corpi cilindrici a preferenza di quelle già stabilite nei numeri precedenti.