Sulla teoria dei ponti sospesi e l'impiego delle funzioni d'influenza.

Memoria di PEDRO B. J. GRAVINA (a São Paulo).

A Mauro Picone nel suo 70^{mo} compleanno.

Sunto. - *In questa memoria è trattato il calcolo dei ponti sospesi secondo la Teoria del secondo ordine e mediante l'impiego delle funzioni d'influenza ristretta per gli sforzi, spostamenti e rotazioni. Vengono dedotte le espressioni di tali funzioni attraverso l'integrazione diretta delle equazioni fondamentali della Teoria e ne è dato anche lo sviluppo in serie trigonometriche.*

Introduzione.

Lo studio della Teoria dei ponti sospesi, iniziata con i lavori di NAVIER [1] nel 1823, si è sviluppato attraverso numerosi contributi di diversi Autori.

Dalle prime ricerche sui fili isolati si è passato alla « Teoria Elastica » di CADART [3] e di M. LEVY [4], e finalmente alla « genauere Theorie » di MÜLLER-BRESLAU [2] e di J. MELAN [5], chiamata anche « Deflection Theory » dagli Autori americani. È, quest'ultima teoria, quella che si applica nello studio dei grandi ponti sospesi moderni. Essa tiene conto, contrariamente a ciò che succede con la Teoria Elastica, della deformazione del sistema sotto l'azione dei carichi accidentali, ed è perciò una teoria del secondo ordine.

In questa memoria studiamo il caso dei ponti sospesi con cavi ancorati esternamente alle estremità e travi irrigidenti semplicemente appoggiate, soggette a carichi considerati agenti staticamente. Indicate le equazioni fondamentali della teoria del secondo ordine e risolte direttamente, ricaviamo le funzioni d'influenza degli sforzi, spostamenti e rotazioni, di comodo impiego per le applicazioni. Ricaviamo, inoltre, le espressioni ottenute nello studio precedente, sviluppate in serie trigonometriche che, in alcuni casi, sono di impiego comodo per la rapida convergenza che le caratterizza.

Equazioni fondamentali della teoria.

Le ipotesi fatte dalla teoria del secondo ordine dei ponti sospesi, sono, in genere, le seguenti:

1 - Le tensioni nei diversi elementi della struttura non superano il limite di proporzionalità del materiale impiegato.

2 - Il cavo sostiene il peso proprio w del ponte rimanendo, pertanto, la trave irrigidente priva di sforzi quando non agiscono le forze accidentali sul sistema.

3 - La configurazione iniziale di equilibrio dell'asse del cavo sotto l'azione del peso proprio w è una parabola.

4 - Il cavo è perfettamente flessibile.

5 - La distanza tra i tiranti di sospensione è molto piccola in relazione alla distanza tra gli appoggi della trave irrigidente.

6 - Sono trascurabili gli effetti dovuti all'allungamento dei tiranti di sospensione e all'accorciamento delle torri sotto l'azione del carico mobile.

7 - I carrelli di appoggio del cavo sulle torri non soffrono impedimento di alcun genere agli spostamenti orizzontali.

8 - Sono trascurabili le deformazioni della trave irrigidente dovute allo sforzo di taglio e allo sforzo normale.

9 - Il momento d'inerzia della trave irrigidente è costante lungo ognuno dei vani del ponte.

Considerando un tratto dx del ponte (trave irrigidente e cavo) sotto l'azione dei carichi permanente e accidentali e scrivendo le corrispondenti condizioni statiche di equilibrio, si perviene facilmente [15] all'equazione di MÜLLER-BRESLAU-MELAN:

$$(1) \quad p(x) = EJ\eta^{IV} - H_S y'' - H\eta''$$

dove $p(x)$ è il carico mobile per unità di lunghezza; E il modulo di elasticità e J il momento d'inerzia della trave irrigidente; η lo spostamento verticale della sezione del cavo e della trave con la stessa ascissa x , provocato dalle forze accidentali; H_S la spinta addizionale dovuta alle forze accidentali; y l'ordinata dell'asse del cavo; H la spinta totale dovuta al carico permanente e alle forze accidentali.

Per trasformare l'equazione (1) in una relazione con termini adimensionali, moltiplichiamo il primo e il secondo membro per l^3/EJ , dove l è una lunghezza fissa scelta arbitrariamente. Abbiamo allora:

$$(2) \quad l^3\eta^{IV} - c^2 l\eta'' = \frac{c^2}{1 + \beta} \left(\beta l y'' + \frac{p(x)l}{H_v} \right)$$

dove:

$$(3) \quad \beta = \frac{H_S}{H_v}$$

essendo H_v la spinta dovuta al carico permanente w , e

$$(4) \quad c^2 = \frac{Hl^2}{EJ} = \frac{(1 + \beta)H_v l^2}{EJ}.$$

Chiameremo :

$$(5) \quad c_0 = \sqrt{\frac{H_v l^2}{EJ}}$$

di indice di flessibilità propria del ponte nel vano generico e

$$(6) \quad c = c_0 \sqrt{1 + \beta}$$

di indice di flessibilità accidentale del ponte nel vano generico.

Essendo :

$$(7) \quad H = H_S + H_v$$

l'equazione (1) fornisce una relazione tra lo spostamento η e la spinta H che sono le due incognite del problema.

Occorre, pertanto, un'altra relazione che ci è fornita dall'equazione di condizione del cavo. Questa equazione si ottiene esprimendo le condizioni di deformazione del cavo e osservando che la sua proiezione orizzontale, dopo l'azione delle forze accidentali, deve essere uguale alla distanza orizzontale tra gli ancoraggi di estremità meno l'eventuale differenza ΔL dovuta ad un cedimento dei blocchi [15]. Otteniamo così, con termini adimensionali, l'equazione :

$$(8) \quad -\int_C y'' \eta d\frac{x}{l} = \beta \vartheta \frac{L_S}{l} + \omega t \frac{L}{l} - \frac{\Delta L}{l} + \frac{1}{2} \int_C \eta' \eta d\frac{x}{l}$$

dove L_S , L , ϑ sono delle costanti che dipendono dalle caratteristiche del cavo e dalla sua configurazione iniziale di equilibrio :

$$(9) \quad L_S = \int_C \sec^3 \varphi dx$$

$$(10) \quad L = \int_C dx$$

$$(11) \quad \vartheta = \frac{H_v}{E_C A_C}$$

ω è il coefficiente di dilatazione termica del cavo, t la variazione uniforme di temperatura, E_C il modulo di elasticità e A_C l'area della sezione del cavo, φ l'angolo generico che la tangente all'asse del cavo, soggetto al carico permanente, forma con l'orizzontale. L'indice C presso il segno d'integrale vuol significare che l'integrazione si stende a tutta la lunghezza del cavo.

In genere si suole trascurare nelle applicazioni l'ultimo termine del secondo membro dell'equazione (8) con il quale si tiene conto della variazione, lungo il vano della frazione di carico mobile che si trasmette ai tiranti di

sospensione. L'equazione di condizione del cavo si riduce, pertanto, alla seguente:

$$(12) \quad - \int_c y'' \eta d \frac{x}{l} = \beta \vartheta \frac{L_S}{l} + \omega t \frac{L}{l} - \frac{\Delta L}{l}.$$

Risoluzione delle equazioni fondamentali.

Ottenute le due equazioni (1) e (12) fra le due incognite η e H , possiamo risolvere il problema. Per procedere al calcolo consideriamo, in un primo tempo, costanti la variabile H e pertanto H_S dell'equazione (1). Abbiamo così un'equazione differenziale ordinaria, di quart'ordine, lineare, non omogenea, con coefficienti costanti, che ci fornisce la legge di variazione di η in funzione di x per il valore costante di H ammesso. Essendo uguali, per ipotesi, gli spostamenti verticali delle sezioni della trave di irrigidimento e del cavo che si corrispondono, possiamo sostituire la espressione di η nella equazione di condizione del cavo e ottenere un valore più approssimato di H e pertanto di H_S che ci permette di dedurre, a sua volta, una legge di variazione di η più esatta. Procedendo così risolveremo, pertanto, il problema adoperando il metodo delle approssimazioni successive.

Dalla teoria della trave rettilinea si sa che:

$$M = - EJ\eta''.$$

Poniamo:

$$(13) \quad k^2 = \frac{H}{EJ}$$

donde per la (4):

$$(14) \quad c = kl.$$

Possiamo così trasformare la (1) nella seguente:

$$(15) \quad -M'' + k^2 M = H_S y'' + p(x).$$

Dalla teoria dei fili sappiamo che:

$$(16) \quad w(x) + H_n y'' = 0$$

donde:

$$(17) \quad -M'' + k^2 M = p(x) - \beta w(x).$$

Per il vano n è $k = k_n$ e $w(x) = w_n$, carico permanente costante del ponte nel vano n , per unità di lunghezza. Donde:

$$(18) \quad M'' - k_n^2 M = f(x)$$

dove:

$$(19) \quad f(x) = \beta w_n - p(x).$$

La risoluzione dell'equazione (18) non omogenea, con le condizioni ai limiti omogenee:

$$(20) \quad M(0) = 0, \quad M(l_n) = 0$$

costituisce un problema di contorno omogeneo. La soluzione del problema è, pertanto:

$$(21) \quad M(x) = - \int_0^{l_n} G_1(x, z) f(z) dz$$

dove $G_1(x, z)$ è la funzione di GREEN del problema omogeneo associato:

$$(22) \quad M'' - k_n^2 M = 0$$

$$(23) \quad M(0) = 0, \quad M(l_n) = 0.$$

Conosciute due soluzioni $M_1(x)$ e $M_2(x)$ dell'equazione differenziale (22) che soddisfano rispettivamente, alla prima e alla seconda condizione ai limiti (23), possiamo costruire facilmente la funzione di GREEN del problema omogeneo associato:

$$(24) \quad G_1(x, z) = \begin{cases} \frac{M_1(x)M_2(z)}{C} & \text{quando } 0 \leq x \leq z, \\ \frac{M_2(x)M_1(z)}{C} & \text{quando } z \leq x \leq l_n. \end{cases}$$

$$(25) \quad C = M_2(z)M_1'(z) - M_1(z)M_2'(z) = M_2(0)M_1'(0) = -M_1(l_n)M_2'(l_n).$$

Essendo:

$$(26) \quad M_1(x) = \text{sh } k_n x, \quad M_2(x) = \text{sh } k_n(l_n - x)$$

abbiamo:

$$(27) \quad G_1(x, z) = \begin{cases} \frac{\text{sh } k_n x \text{ sh } k_n(l_n - z)}{k_n \text{ sh } k_n l_n} & \text{quando } 0 \leq x \leq z, \\ \frac{\text{sh } k_n(l_n - x) \text{ sh } k_n z}{k_n \text{ sh } k_n l_n} & \text{quando } z \leq x \leq l_n. \end{cases}$$

Osservando che nell'espressione (19) di $f(x)$ è βw_n costante, abbiamo dalla (21):

$$(28) \quad M(x) = \frac{\text{sh } k_n(l_n - x) \int_0^x p(z) \text{ sh } k_n z dz + \text{sh } k_n x \int_x^{l_n} p(z) \text{ sh } k_n(l_n - z) dz}{k_n \text{ sh } k_n l_n} + \\ + \beta \frac{w_n}{k_n^2} \left[\frac{\text{ch } k_n \left(\frac{l_n}{2} - x \right)}{\text{ch } \frac{k_n l_n}{2}} - 1 \right].$$

Conosciuta la funzione $M(x)$ possiamo calcolare lo spostamento $\eta(x)$ risolvendo il problema non omogeneo:

$$(29) \quad \eta'' = -\frac{M(x)}{EJ_n}$$

$$(30) \quad \eta(0) = 0, \quad \eta(l_n) = 0.$$

La funzione di GREEN del problema omogeneo associato è:

$$(31) \quad G_2(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{l_n} x(l_n - t) & \text{quando } 0 \leq x \leq t, \\ \frac{1}{l_n} t(l_n - x) & \text{quando } t \leq x \leq l_n, \end{cases}$$

donde:

$$(32) \quad \eta(x) = \int_0^{l_n} G_2(x, t) \frac{M(t)}{EJ_n} dt$$

che per la (21) possiamo scrivere:

$$(33) \quad \frac{\eta(x)}{l} = - \int_0^{l_n} f(z) dz \int_0^{l_n} \frac{G_2(x, t) G_1(t, z)}{lEJ_n} dt$$

dove l è una lunghezza fissa arbitraria, per cui si è diviso il primo e il secondo membro della (32).

Calcoliamo il secondo integrale del secondo membro. Quando $0 \leq x \leq z$ abbiamo per la (24) e la (31):

$$\begin{aligned} Y_{xz} &= \int_0^{l_n} \frac{G_2(x, t) G_1(t, z)}{lEJ_n} dt = \frac{(l_n - x)}{l_n} \frac{M_2(z)}{C} \int_0^x t \frac{M_1(t)}{EJ_n} dt + \\ &+ \frac{x}{l_n} \frac{M_2(z)}{C} \int_x^z (l_n - t) \frac{M_1(t)}{EJ_n} dt + \frac{x}{l_n} \frac{M_1(z)}{C} \int_z^{l_n} (l_n - t) \frac{M_2(t)}{EJ_n} dt. \end{aligned}$$

Osserviamo che per la (18) possiamo scrivere:

$$\frac{M_1(t)}{EJ_n} = \frac{M_1''(t)}{H_v + H_S}, \quad \frac{M_2(t)}{EJ_n} = \frac{M_2''(t)}{H_v + H_S}$$

donde sostituendo nella (34), integrando per parti e osservando che $M_1(0) = M_2(l_n) = 0$, abbiamo:

$$(34) \quad Y_{xz} = \frac{x(l_n - z)}{u_n} \frac{[M_2(z)M_1'(z) - M_1(z)M_2'(z)]}{C(H_v + H_S)} - \\ - \frac{(l_n - x)}{u_n} \frac{M_2(z)M_1(x)}{C(H_v + H_S)} - \frac{x}{l_n} \frac{M_2(z)M_1(x)}{C(H_v + H_S)} = \\ = \frac{x(l_n - z)}{u_n H_v(1 + \beta)} - \frac{M_2(z)M_1(x)}{l C H_v(1 + \beta)}$$

quando $0 \leq x \leq z$.

Analogamente:

$$(35) \quad Y_{xz} = \frac{(l_n - x)z}{u_n H_v(1 + \beta)} - \frac{M_1(z)M_2(x)}{l C H_v(1 + \beta)}$$

quando $z \leq x \leq l_n$.

Ponendo:

$$X = \frac{x}{l_n}, \quad Z = \frac{z}{l_n}$$

e sostituendo nelle (35) e (36) al posto di M_1 , M_2 e C le corrispondenti espressioni (26) e (25) abbiamo:

$$(36) \quad Y_{xz} = \frac{1}{H_v(1 + \beta)} \frac{l_n}{l} \left[X(1 - Z) - \frac{\text{sh } c_n X \text{ sh } c_n(1 - Z)}{c_n \text{ sh } c_n} \right]$$

quando $0 \leq X \leq Z$ e:

$$(37) \quad Y_{xz} = \frac{1}{H_v(1 + \beta)} \frac{l_n}{l} \left[(1 - X)Z - \frac{\text{sh } c_n(1 - X) \text{ sh } c_n Z}{c_n \text{ sh } c_n} \right]$$

quando $Z \leq X \leq 1$.

Poniamo adesso:

$$(38) \quad \begin{cases} j_{xz} = (1 - X)Z - \frac{\text{sh } c_n(1 - X) \text{ sh } c_n Z}{c_n \text{ sh } c_n} & \text{quando } Z \leq X, \\ j_{xz} = X(1 - Z) - \frac{\text{sh } c_n X \text{ sh } c_n(1 - Z)}{c_n \text{ sh } c_n} & \text{quando } Z \geq X, \end{cases}$$

$$(39) \quad j_x = \frac{1}{2} X(1 - X) - \frac{1}{c_n^2} + \frac{\text{ch } c_n \left(\frac{1}{2} - X \right)}{c_n^2 \text{ ch } \frac{c_n}{2}}$$

e ancora definiamo:

$$(40) \quad J_{xz} = \frac{l_n}{l} j_{xz}$$

$$(41) \quad J_x = \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l} \right)^2 j_x$$

dove, come abbiamo già visto, l è una lunghezza fissa arbitrariamente scelta, w_0 un valore arbitrario del carico permanente, per unità di lunghezza, opportunamente fissato;

Possiamo, pertanto, scrivere le (36) e (37):

$$(42) \quad Y_{xz} = \frac{1}{H_w(1+\beta)} J_{xz}$$

donde la (33):

$$(43) \quad \frac{\eta(x)}{l} = -\frac{1}{H_w(1+\beta)} \int_0^{l_n} J_{xz} f(z) dz.$$

Sostituendo al posto di $f(z)$ il valore dato dalla (19) abbiamo:

$$(44) \quad \frac{\eta(x)}{l} = \frac{u}{1+\beta} \left[\int_0^{l_n} J_{xz} F(z) d\frac{z}{l} - \beta J_x \right],$$

dove:

$$(45) \quad u = \frac{w_0 l}{H_w}$$

$$(46) \quad \frac{p(z)}{w_0} = F(z)$$

$$(47) \quad J_x = \int_0^{l_n} \frac{w_n}{w_0} J_{xz} d\frac{z}{l} = \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l} \right)^2 j_x.$$

Per applicare le equazioni del momento e dello spostamento che abbiamo dedotto è necessario conoscere il valore di β dovuto alla condizione di carico assegnata, essendo per la (6):

$$c_n = c_{0n} \sqrt{1+\beta}$$

dove l'indice n vuol significare che studiamo il problema per il vano n generico. Questo valore di β sarà fornito dalla equazione di condizione del cavo (12):

$$(48) \quad -\int y'' \eta d\frac{x}{l} = \beta \frac{L_S}{l} + \omega t \frac{L}{l} - \frac{\Delta L}{l}.$$

Per potere calcolare l'integrale a primo membro è necessario conoscere la relazione che intercorre tra η e x , rispettivamente, spostamento verticale e ascissa della sezione generica del cavo. Essendo, per ipotesi, uguali gli spostamenti verticali delle sezioni del cavo e della trave irrigidente che si corrispondono, possiamo adoperare la equazione (44) dello spostamento della trave dedotta innanzi. Abbiamo:

$$(49) \quad \int_G \frac{u w_n}{w_0} \frac{1 + \beta}{u} \left[J_{xz} F(z) d \frac{z}{l} - \beta J_x \right] d \frac{x}{l} = \beta \vartheta \frac{L_S}{l} + \omega t \frac{L}{l} - \frac{\Delta L}{l}.$$

Poniamo:

$$(50) \quad A = \beta \vartheta \frac{L_S}{l} + \omega t \frac{L}{l} - \frac{\Delta L}{l}$$

e sostituiamo al posto di J_{xz} e J_x le espressioni (40) e (41). Integrando lungo tutto il cavo abbiamo:

$$(51) \quad \begin{aligned} & \frac{u^2}{1 + \beta} \sum_n \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l} \right)^2 \left\{ \int_0^Z \left[X(1 - Z) - \frac{\text{sh } c_n X \text{ sh } c_n (1 - Z)}{c_n \text{ sh } c_n} \right] dX + \right. \\ & \quad \left. + \int_Z^1 \left[(1 - X)Z - \frac{\text{sh } c_n (1 - X) \text{ sh } c_n Z}{c_n \text{ sh } c_n} \right] dX \right\} F(z) d \frac{z}{l} - \\ & - \frac{u^2 \beta}{1 + \beta} \sum_n \frac{w_n}{w_0} \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l} \right)^3 \int_0^1 \left[\frac{1}{2} X(1 - X) - \frac{1}{c_n^2} + \frac{\text{ch } c_n \left(\frac{1}{2} - X \right)}{c_n^2 \text{ ch } \frac{c_n}{2}} \right] dX = A \end{aligned}$$

donde:

$$(52) \quad \begin{aligned} & \sum_n \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} Z^2 (1 - Z) - \frac{[\text{ch } c_n Z - 1] \text{ sh } c_n (1 - Z)}{c_n^2 \text{ sh } c_n} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} Z(1 - Z)^2 - \frac{\text{sh } c_n Z [\text{ch } c_n (1 - Z) - 1]}{c_n^2 \text{ sh } c_n} \right\} F(z) d \frac{z}{l} - \\ & - \beta \sum_n \left(\frac{w_n}{w_0} \right)^2 \left(\frac{l_n}{l} \right)^3 \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{c_n^2} + \frac{2 \text{ sh } \frac{c_n}{2}}{c_n^3 \text{ ch } \frac{c_n}{2}} \right] = \frac{A(1 + \beta)}{u^2} \end{aligned}$$

e pertanto, calcolando le espressioni racchiuse in parentesi:

$$(53) \quad \sum_n \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} Z(1-Z) - \frac{1}{c_n^2} + \frac{\operatorname{ch} c_n \left(\frac{1}{2} - Z \right)}{c_n^2 \operatorname{ch} \frac{c_n}{2}} \right\} F(z) d \frac{z}{l} - \\ - \beta \sum_n \left(\frac{w_n}{w_0} \right)^2 \left(\frac{l_n}{l} \right)^3 g_n = \frac{A(1+\beta)}{u^2}$$

dove:

$$(54) \quad g_n = \frac{1}{12} - \frac{1}{c_n^2} + \frac{2 \operatorname{th} \frac{c_n}{2}}{c_n^3}.$$

Per la (41) possiamo scrivere la (53):

$$(55) \quad \sum_n J_z F(z) d \frac{z}{l} - \beta G = A \frac{(1+\beta)}{u^2}$$

dove:

$$(56) \quad J_z = \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l} \right)^2 j_z$$

$$(57) \quad G = \sum_n \left(\frac{w_n}{w_0} \right)^2 \left(\frac{l_n}{l} \right)^3 g_n = \sum_n G_n.$$

Se supponiamo caricato solamente il vano n , con la forza $F(z) d \frac{z}{l}$, possiamo scrivere:

$$(58) \quad \frac{1}{G} J_z F(z) d \frac{z}{l} - \beta = \delta$$

dove:

$$(59) \quad \frac{A(1+\beta)}{u^2 G} = \delta$$

è il termine correttivo che tiene conto dell'elasticità del cavo, della variazione di temperatura e della variazione di distanza ΔL tra gli ancoraggi.

Notiamo che in tutte queste formule che abbiamo dedotto, come in tutte le altre che dedurremo in seguito, rappresentiamo con β il valore del rapporto H_S/H_n corrispondente alla condizione di carico che si considera.

Ponendo:

$$(60) \quad \beta_0 = \frac{1}{G} J_z F(z) d \frac{z}{l}$$

possiamo scrivere la (58):

$$(61) \quad \beta = \beta_0 - \delta.$$

Caso un sistema di forze $F(z) d \frac{z}{l}$ agisse in diversi vani del ponte avremmo:

$$(62) \quad \sum_n \frac{J_z}{G} F(z) d \frac{z}{l} - \beta = \delta$$

e se le forze fossero distribuite:

$$(63) \quad \sum_n \frac{1}{G} \int_0^{l_n} J_z F(z) d \frac{z}{l} - \beta = \delta.$$

Per maggior chiarezza delle formule adopereremo l'indice z nei simboli corrispondenti ai vani in cui agiscono carichi nella sezione generica di ascissa z .

Moltiplicando e dividendo i termini della sommatoria a primo membro della (63) per G_z abbiamo:

$$(64) \quad \sum_n \frac{G_z}{G} \beta_{0z} - \beta = \delta$$

dove:

$$(55) \quad \beta_{0z} = \int_0^{l_z} \frac{J_z}{G_z} F(z) d \frac{z}{l}.$$

Per le (56) e (57) possiamo scrivere:

$$(66) \quad \frac{J_z}{G_z} = \frac{\frac{w_z (l_z)^2}{w_0} j_z}{\left(\frac{w_z}{w_0}\right)^2 \left(\frac{l_z}{l}\right) g_z} = \frac{w_0 l_z j_z}{w_z l g_z}.$$

Dalle (61) e (63) risulta che il valore di β_0 relativo ad una condizione di carico assegnata si ottiene sommando i valori degli integrali:

$$\int_0^{l_z} \frac{J_z}{G} F(z) d \frac{z}{l}$$

calcolati per tutti i vani caricati del ponte. Per far ciò si traccia per ognuno dei vani caricati l_z , il diagramma della funzione J_z/G con le ascisse $\frac{z}{l}$, supponendo c_z costante. Calcolata l'area elementare $\frac{J_z}{G} d \frac{z}{l}$, si moltiplica questa per $F(z)$ e si integra lungo tutto il vano considerato. Risulta, pertanto, che il diagramma della funzione $\frac{J_z}{G}$ è linea d'influenza di β_0 , supposto costante il valore di c_z .

Per il calcolo di β conviene adoperare la formula (64) che per la (65) possiamo scrivere:

$$(67) \quad \beta = \sum_n \frac{G_z}{G} \int_0^{l_z} \frac{J_z}{G_z} F(z) d\frac{z}{l} - \delta.$$

Il secondo membro di questa equazione è funzione di c che, a sua volta, dipende da β . Il calcolo sarà condotto col metodo delle approssimazioni successive. Per una certa condizione di carico si ammette il valore di c in uno dei vani, trascurando il termine correttivo δ . I valori di c negli altri vani risultano dalla condizione d'essere la spinta H costante lungo tutto il cavo. Conosciuto un primo valore di β_0' e calcolato il termine correttivo, si ottengono valori più esatti di c . Da questi si deduce un valore di β' che serve di base per il calcolo di un altro β'' . E così di seguito. La convergenza del metodo è, in genere, molto rapida.

Nel caso di un carico p costante, uniformemente distribuito lungo tutto il vano l_z , si deduce dall'equazione (65):

$$(68) \quad \beta_{0z} = \frac{p}{w_z}.$$

Se il carico permanente w_z è costante in tutti i vani abbiamo allora:

$$(69) \quad \beta = \frac{p}{w_z} - \delta$$

espressione questa che fornisce il valore di β nel caso che tutti i vani del ponte siano completamente caricati.

È interessante notare che passando al limite $c = \infty$ nelle formule dedotte, abbiamo le formule applicabili al calcolo delle funi flessibili isolate, mentre per $c = 0$ otteniamo le formule relative al caso della Teoria Elastica [15].

Impiego delle serie trigonometriche.

Vogliamo, adesso, sviluppare le formule innanzi ottenute in serie trigonometriche che in alcuni casi, per la rapida convergenza che presentano, sono molto convenienti nelle applicazioni pratiche.

Le serie trigonometriche furono adoperate per la prima volta nel 1927 dal MARTIN [6] e indipendentemente nel 1928 dal TIMOSHENKO [7] come mezzo semplice ed efficace per il calcolo dei ponti sospesi. Questi Autori adoperarono direttamente le serie trigonometriche per risolvere l'equazione (1) di MÜLLER-BRESLAU-MELAN.

Se un carico P isolato agisce in un certo vano di un ponte, il valore di η/l in una sezione di ascissa X si ottiene dalla (44) sostituendo P al posto di $p(z)dz$ e sopprimendo il segno d'integrale:

$$(70) \quad \frac{\eta}{l} = \frac{w_0 l}{(1 + \beta)H_v} \left[J_{xz} \frac{P}{w_0 l} - \beta J_x \right].$$

Essendo $\frac{\eta}{l} = f(X)$ una funzione finita e continua nell'intervallo $0 \leq X \leq 1$, che si annulla all'estremità di questo, la possiamo sviluppare in serie trigonometrica nell'intervallo considerato.

Supposta la funzione $f(X)$ definita nell'intervallo $0 \leq X \leq 2$, poniamo $\pi X = t$. Abbiamo, pertanto, $f(X) = F(t)$ e l'intervallo di definizione sarà $0 \leq t \leq 2\pi$. Siccome ci interessa di conoscere lo sviluppo di $f(X) = F(t)$ in serie trigonometrica per adoperarlo soltanto nell'intervallo $0 \leq X \leq 1$, cioè a dire $0 \leq t \leq \pi$, poniamo per $X < 1$, $f(2 - X) = -f(X)$, cioè a dire $F(2\pi - t) = -F(t)$, donde otteniamo lo sviluppo in seni:

$$(71) \quad f(X) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin m\pi X$$

essendo:

$$(72) \quad a_m = \frac{1}{2} \int_0^1 f(X) \sin m\pi X dX.$$

Ponendo:

$$(73) \quad A = \frac{w_0 l}{(1 + \beta)H_v} \frac{l_n}{l} \frac{P}{w_0 l}$$

$$(74) \quad B = \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{w_0 l}{H_v} \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l} \right)^2$$

otteniamo:

$$(75) \quad f(X) = A j_{xz} - B j_x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin m\pi X$$

donde:

$$(76) \quad a_m = 2A \int_0^1 j_{xz} \sin m\pi X dX - 2B \int_0^1 j_x \sin m\pi X dX.$$

Sostituendo in questa espressione i valori di j_{xz} e j_x forniti dalle (38) e (39), e calcolando gli integrali risulta:

$$(77) \quad a_m = \frac{2P}{(1 + \beta)H_v} \frac{l_n}{l} \frac{c_n^2 \sin m\pi Z}{m^2 \pi^2 (c_n^2 + m^2 \pi^2)} - \frac{2\beta}{1 + \beta} \frac{l w_n}{H_v} \left(\frac{l_n}{l} \right)^2 \frac{c_n^2 (1 - \cos m\pi)}{m^3 \pi^3 (c_n^2 + m^2 \pi^2)}$$

donde per la (75):

$$(78) \quad \frac{\eta}{l} = \frac{2Pc_n^2}{(1+\beta)H_v\pi^2} \frac{l_n}{l} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen } m\pi Z \text{ sen } m\pi X}{m^2(c_n^2 + m^2\pi^2)} -$$

$$- \frac{4\beta}{(1+\beta)} \frac{w_n l}{H_v} \frac{c_n^2}{\pi^3} \left(\frac{l_n}{l}\right)^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen } m\pi X}{m^3(c_n^2 + m^2\pi^2)}.$$

Nel caso di carico p distribuito tra due sezioni Z_1 e Z_2 ($Z_1 < Z_2$), sostituiamo $l_n p dZ$ al posto di P e integriamo:

$$(79) \quad \frac{\eta}{l} = \frac{2pc_n^2 l}{(1+\beta)H_v\pi^3} \frac{l_n^2}{l} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(\cos m\pi Z_1 - \cos m\pi Z_2) \text{ sen } m\pi X}{m^3(c_n^2 + m^2\pi^2)} -$$

$$- \frac{4\beta}{(1+\beta)} \frac{w_n l}{H_v} \frac{c_n^2}{\pi^3} \left(\frac{l_n}{l}\right)^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen } m\pi X}{m^3(c_n^2 + m^2\pi^2)}.$$

È interessante notare che la convergenza della serie, sia nel caso della (78) come della (79), è molto rapida, bastando pochi termini per ottenere risultati ottimamente approssimati.

Le equazioni (78) e (79) si possono scrivere:

$$(80) \quad \frac{\eta}{l} = \frac{u}{1+\beta} \left[\frac{P}{w_0 l} 2 \frac{l_n}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen } m\pi Z \text{ sen } m\pi X}{m^2 \pi^2 c_{nm}} - \right.$$

$$\left. - 2\beta \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi) \text{ sen } m\pi X}{m^3 \pi^3 c_{nm}} \right]$$

$$(81) \quad \frac{\eta}{l} = \frac{u}{1+\beta} \left[\frac{p}{w_0} 2 \frac{l_n^2}{l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\cos m\pi Z_1 - \cos m\pi Z_2) \text{ sen } m\pi X}{m^3 \pi^3 c_{nm}} - \right.$$

$$\left. - 2\beta \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi) \text{ sen } m\pi X}{m^3 \pi^3 c_{nm}} \right]$$

dove:

$$(82) \quad c_{nm} = 1 + \frac{m^2 \pi^2}{c_n^2}$$

e u è definito dalla (45). Confrontando la (80) con la (70) risulta:

$$(83) \quad J_{xz} = 2 \frac{l_n}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen } m\pi Z \text{ sen } m\pi X}{m^2 \pi^2 c_{nm}}$$

$$(84) \quad J_x = 2 \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi) \text{ sen } m\pi X}{m^3 \pi^3 c_{nm}}$$

donde, per la (40) e per la (41):

$$(85) \quad j_{xz} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} m\pi Z \operatorname{sen} m\pi X}{m^2 \pi^2 c_{nm}}$$

$$(86) \quad j_x = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi) \operatorname{sen} m\pi X}{m^3 \pi^3 c_{nm}}.$$

Poniamo adesso nella (71):

$$(87) \quad \alpha_m = \frac{u}{1 + \beta} \alpha_m$$

donde:

$$(88) \quad \frac{\eta}{l} = \frac{u}{1 + \beta} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \operatorname{sen} m\pi X.$$

Risulta dalla (80), nel caso di carico $F(x)dx$:

$$(89) \quad \alpha_m = 2F(x) d \frac{z}{l} \cdot \frac{l_n}{l} \frac{\operatorname{sen} m\pi Z}{m^2 \pi^2 c_{nm}} - 2\beta \frac{w_n}{w_0} \frac{l_n^2}{l^2} \frac{1 - \cos m\pi}{m^3 \pi^3 c_{nm}}$$

e dalla (81) nel caso di un carico $F = \frac{p}{w_0} = \text{costante}$, distribuito tra due sezioni Z_1 e Z_2 ($Z_1 < Z_2$):

$$(90) \quad \alpha_m = 2F \frac{l_n^2}{l^2} \frac{\cos m\pi Z_1 - \cos m\pi Z_2}{m^3 \pi^3 c_{nm}} - 2\beta \frac{w_n}{w_0} \frac{l_n^2}{l^2} \frac{1 - \cos m\pi}{m^3 \pi^3 c_{nm}}.$$

Consideriamo, adesso, l'equazione di condizione del cavo nella forma più generale (8), in cui si conserva l'ultimo termine a secondo membro che tiene conto della variazione, lungo il vano, della frazione di carico mobile trasmesso ai tiranti di sospensione. Osservando che:

$$(91) \quad \eta'' = \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{d^2 \eta}{l_n^2 dX^2}$$

otteniamo:

$$\frac{u}{w_0 l} \sum_n w_n l_n \int_0^1 \frac{\eta}{l} dX = \beta \vartheta \frac{L_S}{l} + \omega t \frac{L}{l} - \frac{\Delta L}{l} + \frac{l}{2} \sum_n \frac{l_n}{l_n^2} \int_0^1 \frac{\eta''}{l} \frac{\eta}{l} dX.$$

Dalla (88) risulta

$$\int_0^1 \frac{\eta}{l} dX = \frac{u}{1 + \beta} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_m}{m\pi} (1 - \cos m\pi) \right]$$

$$\int_0^1 \frac{\eta''}{l} \frac{\eta}{l} dX = - \frac{u^2}{(1 + \beta)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 \frac{m^2 \pi^2}{2}$$

donde per la (91):

$$(92) \quad \beta \frac{L_S}{l} = \frac{u^2}{(1+\beta)\pi w_0 l} \sum_n w_n l_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{m} (1 - \cos m\pi) - \\ - \omega t \frac{L}{l} + \frac{\Delta L}{l} + \frac{u^2}{(1+\beta)^2} \frac{\pi^2 l}{4} \sum_n \frac{l_n}{l_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \alpha_m.$$

La rapida convergenza delle serie che figurano in questa equazione permette dedurre formule semplificate per il calcolo di β applicabili sia nel caso di carico mobile distribuito che concentrato [12], [13], [14].

Per stabilire la relazione che intercorre tra questa equazione e la (52) trascuriamo l'ultimo termine del secondo membro che tiene conto di un effetto non considerato dalla stessa (52), cioè la variazione, lungo il vano, della frazione di carico mobile trasmesso ai tiranti di sospensione.

Per la (89) possiamo scrivere la (92) come segue:

$$(93) \quad \sum_n 2 \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l}\right)^2 F(z) d \frac{z}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi) \sin m\pi Z}{m^3 \pi^3 c_{nm}} - \\ - \beta \sum_n 2 \left(\frac{w_n}{w_0}\right)^2 \left(\frac{l_n}{l}\right)^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi)^2}{m^4 \pi^4 c_{nm}} = \frac{A(1+\beta)}{u^2}$$

dove A è definito dalla (50). D'altra parte dalla (84) abbiamo:

$$(94) \quad \sum_n J_z F(z) d \frac{z}{l} - \beta \Delta = \frac{A(1+\beta)}{u^2}$$

donde, confrontando con la (52) risulta:

$$\Delta = G$$

cioè a dire

$$(95) \quad G = \sum_n \left(\frac{w_n}{w_0}\right)^2 \left(\frac{l_n}{l}\right)^3 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi)^2}{m^4 \pi^4 c_{nm}}$$

e ancora, per le (57) e (54)

$$(96) \quad g_n = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi)^2}{m^4 \pi^4 c_{nm}}.$$

Abbiamo così ottenuto le espressioni dedotte precedentemente, sviluppate in serie trigonometriche.

Funzioni d'influenza.

Il valore di η/l in una sezione X della trave irrigidente per un carico distribuito lungo i vani del ponte è dato dalla (44) che possiamo scrivere:

$$(97) \quad \frac{\eta}{l} = \frac{u}{1+\beta} \left[\int_T J_{xz} F(z) d\frac{z}{l} - \beta J_x \right]$$

dove $\int_T$ indica che l'integrale è esteso a tutte le travi irrigidenti.

In realtà l'integrale si estende soltanto al vano in cui si trova la sezione X perchè, per gli altri vani, la funzione J_{xz} è nulla.

Osserviamo che per la (63) possiamo scrivere:

$$(98) \quad \beta = \int_T \frac{J_z}{G} F(z) d\frac{z}{l} - \delta$$

e sostituendo nella (97):

$$(99) \quad \frac{\eta}{l} = \frac{u}{1+\beta} \left[\int_T \left(J_{xz} - J_x \frac{J_z}{G} \right) F(z) d\frac{z}{l} + \delta J_x \right].$$

In questa equazione, contrariamente a quello che succede con J_{xz} , la funzione $J_x J_z / G$ è sempre diversa da zero, qualunque sia il vano in cui agisca il carico.

L'equazione (99) ha una importanza particolare perchè da essa si deducono facilmente le formule che rendono possibile lo studio completo della trave irrigidente.

Per semplificare le espressioni che dedurremo in seguito, definiamo le seguenti espressioni:

$$(100) \quad \left\{ \begin{aligned} J_x &= \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l} \right)^2 j_x \\ J_x^I &= \frac{l}{l_n} \frac{dJ_x}{dX} = \frac{w_n}{w_0} \frac{l_n}{l} j_x^I \\ J_x^{II} &= \frac{l_n}{c_n^2 l} \frac{dJ_x^I}{dX} = \frac{w_n}{w_0} \left(\frac{l_n}{l} \right)^2 j_x^{II} \\ J_{xz}^{III} &= \frac{l}{l_n} \frac{dJ_x^{II}}{dX} = \frac{w_n}{w_0} \frac{l_n}{l} j_x^{III} \\ J_x^{VI} &= - \frac{l}{l_n} \frac{dJ_x^{III}}{dX} = \frac{w_n}{w_0} j_x^{IV} \end{aligned} \right.$$

dove:

$$(101) \quad j_x^I = \frac{dj_x}{dX}, \quad j_x^{II} = -\frac{1}{c_n^2} \frac{dj_x^I}{dX}, \quad j_x^{III} = \frac{dj_x^{II}}{dX}, \quad j_x^{IV} = -\frac{dj_x^{III}}{dX}.$$

Poniamo ancora:

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{xz} = \frac{l_n}{l} j_{xz} \\ J_{xz}^I = \frac{l}{l_n} \frac{\partial J_{xz}}{\partial X} = j_{xz}^I \\ J_{xz}^{II} = -\frac{1}{c_n^2} \frac{l_n}{l} \frac{\partial J_{xz}^I}{\partial X} = \frac{l_n}{l} j_{xz}^{II} \\ J_{xz}^{III} = \frac{l}{l_n} \frac{\partial J_{xz}^{II}}{\partial X} = j_{xz}^{III} \\ J_{xz}^{IV} = -\frac{l}{l_n} \frac{\partial J_{xz}^{III}}{\partial X} = \frac{l}{l_n} j_{xz}^{IV} \end{array} \right.$$

dove:

$$(103) \quad j_{xz}^I = \frac{\partial j_{xz}}{\partial X}, \quad j_{xz}^{II} = -\frac{1}{c_n^2} \frac{\partial j_{xz}^I}{\partial X}, \quad j_{xz}^{III} = \frac{\partial j_{xz}^{II}}{\partial X}, \quad j_{xz}^{IV} = -\frac{\partial j_{xz}^{III}}{\partial X}.$$

Le funzioni J_{xz} e J_x sono state già definite dalle (40), (41), (38), (39). Derivando successivamente in rapporto a X l'equazione (99) e applicando le relazioni fondamentali della teoria delle travi rettilinee, otteniamo successivamente per la sezione X , la rotazione:

$$(104) \quad \eta' = \frac{d\eta}{dx} = \frac{l}{l_n} \frac{d\eta}{dX} = \frac{u}{1+\beta} \left[\int_T \left(J_{xz}^I - J_x^I \frac{J_z}{G} \right) F(z) d\frac{z}{l} + \delta J_x^I \right]$$

il momento flettente relativo:

$$(105) \quad \begin{aligned} \frac{M}{w_0 l^2} &= -\frac{EJ\eta''}{uH_w l} = -\frac{(1+\beta)EJ}{(1+\beta)uH_w l^2} \frac{d\eta'}{d\frac{x}{l}} = -\frac{(1+\beta)l_n^2}{H_w(1+\beta)ul^2} \frac{d\eta'}{d\frac{x}{l}} = \\ &= -\frac{(1+\beta)}{c_n^2 u} \frac{l_n}{l} \frac{d\eta'}{dX} = \int_T \left(J_{xz}^{II} - J_x^{II} \frac{J_z}{G} \right) F(z) d\frac{z}{l} + \delta J_x^{II} \end{aligned}$$

lo sforzo tagliante relativo:

$$(106) \quad \frac{Q}{w_0 l} = \frac{1}{w_0 l^2} \frac{dM}{d\frac{x}{l}} = \frac{l}{l_n} \frac{d}{dX} \left(\frac{M}{w_0 l^2} \right) = \int_T \left(J_{xz}^{III} - J_{xz}^{III} \frac{J_z}{G} \right) F(z) d\frac{z}{l} + \delta J_x^{III}$$

la frazione relativa di carico mobile che agisce sulla trave irrigidente:

$$(107) \quad \frac{p_T}{w_0} = -\frac{1}{w_0 l} \frac{dQ}{d\frac{x}{l}} = -\frac{l}{l_n} \frac{d}{dX} \left(\frac{Q}{w_0 l} \right) = \int_T \left(J_{xz}^{IV} - J_x^{IV} \frac{J_z}{G} \right) F(z) d\frac{z}{l} + \delta J_x^{IV}$$

dove:

$$p_T = p - p_t$$

essendo p_t la frazione di carico mobile trasmessa ai tiranti di sospensione.

Se poniamo:

$$(108) \quad I_{xz}^{(i)} = J_{xz}^{(i)} - J_{xz}^{(i)} \frac{J_z}{G}$$

abbiamo:

$$(109) \quad \frac{\eta}{l} = \frac{u}{1+\beta} \left[\int_T I_{xz} F(z) d\frac{z}{l} + \delta J_x \right]$$

$$(110) \quad \eta' = \frac{u}{1+\beta} \left[\int_T I_{xz}^I F(z) d\frac{z}{l} + \delta J_x^I \right]$$

$$(111) \quad \frac{M}{w_0 l^2} = \int_T I_{xz}^{II} F(z) d\frac{z}{l} + \delta J_x^{II}$$

$$(112) \quad \frac{Q}{w_0 l} = \int_T I_{xz}^{III} F(z) d\frac{z}{l} + \delta J_x^{III}$$

$$(113) \quad \frac{p_T}{w_0} = \int_T I_{xz}^{IV} F(z) d\frac{z}{l} + \delta J_{xz}^{IV}.$$

Osserviamo che $p_T = p - p_t$. Se nella sezione X non agisce nessun carico p risulta $p_T = -p_t$, cioè la trave irrigidente, nella sezione in esame, è soggetta solamente all'azione dei tiranti di sospensione. È necessario osservare che la funzione I_{xz}^{III} dello sforzo di taglio soffre nella sezione X un salto. I valori delle derivate, però, $dI_{xz}^{III}/dX = -I_{xz}^{IV}$, subito a destra e a sinistra della sezione X sono uguali, per cui se si trascura il salto della funzione I_{xz}^{III} nel calcolo di I_{xz}^{IV} , si trascura anche l'influenza del carico p che agisce nella sezione X . In questo caso il secondo membro della (113) fornisce in realtà, il valore di $-p_t/w_0$ nella sezione X .

Con le (109), (110), (111), (112) e (113) possiamo calcolare per una sezione X della trave irrigidente, in un vano qualunque del ponte, i valori di η , η' , M , Q , p_t per una condizione di carico assegnata, nell'ipotesi di c_n costante. Da questa osservazione risulta che trascurando le correzioni, le funzioni $I_{xz}^{(i)}$ sono funzioni d'influenza ristretta, cioè per c_n costante.

Conosciute, pertanto, le funzioni $I_{xz}^{(i)}$ d'influenza e supposto $\delta = 0$, possiamo tracciare le linee d'influenza e determinare le condizioni più sfavorevoli di carico per i diversi effetti in una sezione X , ammesso $c_n = \text{costante}$. Le linee d'influenza sarebbero esatte se δ fosse realmente nullo e se le travi irrigidenti variassero automaticamente la caratteristica EJ_n al variare la spinta totale, di maniera a soddisfare la condizione $c_n = \text{costante}$, il che non si realizza in pratica. I calcoli, pertanto, dovranno essere condotti col metodo delle approssimazioni successive. Si osservi che c_n dipende dalla condizione più sfavorevole di carico per l'effetto in esame.

D'altra parte la condizione più sfavorevole di carico, determinata dalla relativa linea d'influenza, dipende da c_n . È necessario, pertanto, ammettere in prima approssimazione, un conveniente valore di c_n e tracciare la linea d'influenza di β_0 e dell'effetto che si desidera calcolare. Saranno conosciute, pertanto, in prima approssimazione, le sezioni tra le quali è necessario distribuire il carico. La linea d'influenza di β_0 fornirà, allora, il valore di β_0 relativo a questa condizione di carico. Si corregge in seguito β_0 tenendo conto del termine correttivo che dipende anche esso da c_n .

Si ottiene così β' e pertanto un valore più esatto di c_n . Con questo nuovo valore di c_n si tracciano nuovamente le linee d'influenza di β_0 e dell'effetto che si desidera calcolare; si ripete così il calcolo e si ottiene un nuovo valore β'' , e così di seguito. È importante osservare che la convergenza del processo è molto rapida. Tracciata la linea d'influenza definitiva si calcola il valore massimo dell'effetto in esame, tenendo conto del termine correttivo già al calcolare l'ultimo valore $\beta^{(i)}$. Il lavoro di calcolo viene di molto ridotto se si adopera un processo d'interpolazione [15] tra casi opportunamente scelti.

Osserviamo che possiamo scrivere la (108) come segue:

$$(114) \quad I_{xz}^{(i)} = J_{xz}^{(i)} - J_x^{(i)} \frac{J_z}{G_z} \frac{G_z}{G}.$$

Si noti che quando il carico mobile agisce in una sezione Z di un vano diverso da quello al quale appartiene la sezione X che si considera, il termine $J_{xz}^{(i)}$ si annulla.

Sostituiamo nella (114) in luogo di $J_{xz}^{(i)}$ e $J_x^{(i)}$ i valori corrispondenti forniti dalle (102) e (100), e in luogo di J_z/G_z il valore fornito dalla (66).

Otteniamo, pertanto, per le diverse funzioni d'influenza le seguenti espressioni:

$$(115) \quad I_{xz} = \left(j_{xz} - \frac{w_x}{w_z} \frac{l_x}{l_z} \frac{G_z}{G} j_x \frac{j_z}{g_z} \right) \frac{l_x}{l}$$

$$(116) \quad I_{xx} = j_{xx} - \frac{w_x}{w_z} \frac{l_x}{l_z} \frac{G_z}{G} j_x \frac{j_z}{g_z}$$

$$(117) \quad I_{xz}^{\text{II}} = \left(j_{xz}^{\text{II}} - \frac{w_x l_x}{w_z l_z} \frac{G_z}{G} j_x^{\text{II}} \frac{j_z}{g_z} \right) \frac{l_x}{l}$$

$$(118) \quad I_{xz}^{\text{III}} = j_{xz}^{\text{III}} - \frac{w_x l_x}{w_z l_z} \frac{G_z}{G} j_x^{\text{III}} \frac{j_z}{g_z}$$

$$(119) \quad I_{xz}^{\text{IV}} = \left(j_{xz}^{\text{IV}} - \frac{w_x l_x}{w_z l_z} \frac{G_z}{G} j_x^{\text{IV}} \frac{j_z}{g_z} \right) \frac{l}{l_x}.$$

Gli indici x e z si riferiscono ai vani a cui appartengono, rispettivamente, la sezione X in esame e la sezione Z nella quale agisce il carico. Le espressioni delle funzioni $j_x^{(i)}$ e $j_{xz}^{(i)}$ si deducono facilmente. Conosciamo, difatti, le espressioni di j_x e di j_{xz} fornite dalle (39) e (38). Derivando successivamente in rapporto a X e tenendo conto della definizione delle diverse funzioni fornite dalle (101) abbiamo:

$$(120) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_x = \frac{1}{2} X(1-X) - \frac{1}{c_n^2} + \frac{\text{ch } c_n \left(\frac{1}{2} - X \right)}{c_n^2 \text{ch } \frac{c_n}{2}} \\ j_x^{\text{I}} = \frac{1}{2} - X - \frac{\text{sh } c_n \left(\frac{1}{2} - X \right)}{c_n \text{ch } \frac{c_n}{2}} \\ j_x^{\text{II}} = \frac{1}{c_n^2} - \frac{\text{ch } c_n \left(\frac{1}{2} - X \right)}{c_n^2 \text{ch } \frac{c_n}{2}} \\ j_x^{\text{III}} = \frac{\text{sh } c_n \left(\frac{1}{2} - X \right)}{c_n \text{ch } \frac{c_n}{2}} \\ j_x^{\text{IV}} = \frac{\text{ch } c_n \left(\frac{1}{2} - X \right)}{\text{ch } \frac{c_n}{2}}. \end{array} \right.$$

Si osservi che in relazione alla sezione di mezzo del vano le funzioni j_x , j_x^{II} e j_x^{IV} sono simmetriche, mentre le j_x^{I} , j_x^{III} sono antisimmetriche.

Dalle (103) risulta per le funzioni $j_{xz}^{(i)}$:

$$(121) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_{xz} = \\ j_{xz}^I = \\ j_{xz}^{II} = \\ j_{xz}^{III} = \\ j_{xz}^{IV} = \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ll} \text{quando } Z \leq X & \text{quando } Z \geq X \\ (1-X)Z - \frac{\text{sh } c_n(1-X) \text{sh } c_n Z}{c_n \text{sh } c_n} & X(1-Z) - \frac{\text{sh } c_n X \text{sh } c_n(1-Z)}{c_n \text{sh } c_n} \\ -Z + \frac{\text{ch } c_n(1-X) \text{sh } c_n Z}{\text{sh } c_n} & 1-Z - \frac{\text{ch } c_n X \text{sh } c_n(1-Z)}{\text{sh } c_n} \\ \frac{\text{sh } c_n(1-X) \text{sh } c_n Z}{c_n \text{sh } c_n} & \frac{\text{sh } c_n X \text{sh } c_n(1-Z)}{c_n \text{sh } c_n} \\ -\frac{\text{ch } c_n(1-X) \text{sh } c_n Z}{\text{sh } c_n} & \frac{\text{ch } c_n X \text{sh } c_n(1-Z)}{\text{sh } c_n} \\ -\frac{c_n \text{sh } c_n(1-X) \text{sh } c_n Z}{\text{sh } c_n} & -\frac{c_n \text{sh } c_n X \text{sh } c_n(1-Z)}{\text{sh } c_n} \end{array} \right.$$

Si osservi che in relazione alla sezione di mezzo del vano, cioè $X = \frac{1}{2}$, le funzioni j_{xz} , j_{xz}^{II} e j_{xz}^{IV} sono simmetriche mentre j_{xz}^I e j_{xz}^{III} sono antisimmetriche.

Casi particolari delle formule innanzi dedotte sono quelle relative alla Teoria Elastica, come abbiamo già osservato. Otteniamo, pertanto, passando al limite $c_n = 0$:

$$(122) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_{x0} = \frac{c_n^2}{24} X(1-X)(1+X-X^2) \\ j_{x0}^I = \frac{c_n^2}{24} (1-2X)(1+2X-2X^2) \\ j_{x0}^{II} = \frac{1}{2} X(1-X) \\ j_{x0}^{III} = \frac{1}{2} - X \\ j_{x0}^{IV} = 1 \end{array} \right.$$

e ancora:

$$(123) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_{xz0} = \\ j_{xz0}^I = \\ j_{xz0}^{II} = \\ j_{xz0}^{III} = \\ j_{xz0}^{IV} = \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ll} \text{quando } Z \leq X & \text{quando } Z \geq X \\ \frac{c_n^2}{6} (1-X)Z[1-(1-X)^2-Z^2] & \frac{c_n^2}{6} X(1-Z)[1-X^2-(1-Z)^2] \\ -\frac{c_n^2}{6} Z[1-3(1-X)^2-Z^2] & \frac{c_n^2}{6} (1-Z)[1-3X^2-(1-Z)^2] \\ (1-X)Z & X(1-Z) \\ -Z & 1-Z \\ -c_n^2(1-X)Z & -c_n^2 X(1-Z) \end{array} \right.$$

Otteniamo inoltre :

$$(124) \quad g_{n0} = \frac{c_n^2}{120}.$$

Se passiamo al limite per $c_n = \infty$ deduciamo le formule relative al cavo isolato :

$$(125) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_{x\infty} = \frac{1}{2} X(1 - X) \\ j_{x\infty}^I = \frac{1}{2} - X \\ j_{x\infty}^{II} = \frac{1}{c_n^2} \\ j_{x\infty}^{III} = \frac{e^{-c_n X}}{c_n} \\ j_{x\infty}^{IV} = e^{-c_n X} \end{array} \right.$$

e ancora :

$$(126) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_{xz\infty} = \\ j_{xz\infty}^I = \\ j_{xz\infty}^{II} = \\ j_{xz\infty}^{III} = \\ j_{xz\infty}^{IV} = \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{quando } Z \leq X \\ (1 - X)Z \\ -Z \\ \frac{1}{2c_n} e^{c_n(Z-X)} \\ -\frac{1}{2} e^{c_n(Z-X)} \\ -\frac{1}{2} c_n e^{c_n(Z-X)} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{quando } Z = X \\ (1 - X)Z \\ -Z + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} c_n \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} c_n \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{quando } Z \geq X \\ X(1 - Z) \\ \frac{1}{2} - Z \\ \frac{1}{2} c_n \\ +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} c_n \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{quando } Z \geq X \\ X(-Z) \\ 1 - Z \\ \frac{1}{2c_n} e^{c_n(X-Z)} \\ \frac{1}{2} e^{c_n(X-Z)} \\ -\frac{1}{2} c_n e^{c_n(X-Z)} \end{array} \right|$$

Otteniamo inoltre :

$$(127) \quad g_{n\infty} = \frac{1}{12}.$$

È facile dedurre le espressioni di $j_x^{(i)}$ e $j_{xz}^{(i)}$ sviluppate in serie trigonometriche. Difatti conosciamo le espressioni (86) e (85) di j_x e j_{xz} .

Derivando successivamente in rapporto a X e tenendo conto della definizione delle diverse funzioni date dalle (101) e (103) deduciamo:

$$(128) \quad \left\{ \begin{aligned} j_x &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi) \operatorname{sen} m\pi X}{m^3 \pi^3 c_{nm}} \\ j_x^I &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi) \cos m\pi X}{m^2 \pi^2 c_{nm}} \\ j_x^{II} &= \frac{2}{c_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi) \operatorname{sen} m\pi X}{m\pi c_{nm}} \\ j_x^{III} &= \frac{2}{c_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi) \cos m\pi X}{c_{nm}} \\ j_x^{IV} &= \frac{2}{c_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi(1 - \cos m\pi) \operatorname{sen} m\pi X}{c_{nm}}. \end{aligned} \right.$$

E ancora:

$$(129) \quad \left\{ \begin{aligned} j_{xz} &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} m\pi Z \operatorname{sen} m\pi X}{m^2 \pi^2 c_{nm}} \\ j_{xz}^I &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} m\pi Z \cos m\pi X}{m\pi c_{nm}} \\ j_{xz}^{II} &= \frac{2}{c_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} m\pi Z \operatorname{sen} m\pi X}{c_{nm}} \\ j_{xz}^{III} &= \frac{2}{c_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi \operatorname{sen} m\pi Z \cos m\pi X}{c_{nm}} \\ j_{xz}^{IV} &= \frac{2}{c_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2 \operatorname{sen} m\pi Z \operatorname{sen} m\pi X}{c_{nm}}. \end{aligned} \right.$$

Otteniamo inoltre:

$$(130) \quad g_n = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi)^2}{m^4 \pi^4 c_{nm}}.$$

Per semplificare l'applicazione delle formule dedotte in questa memoria e il calcolo che si propone per i ponti sospesi mediante le funzioni di influenza, abbiamo determinato [15] per diversi valori di c_n , X_n e Z_n , i valori delle funzioni $j_x^{(i)}$, $j_{xz}^{(i)}$ e g_n . I risultati, notevolmente ampliati con la considerazione di numerosi valori delle variabili, saranno pubblicati prossimamente a cura dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

Riteniamo che in tal maniera il calcolo mediante la teoria del secondo ordine dei ponti sospesi, soggetti all'azione di carichi, considerati agenti staticamente, non offrirà più difficoltà degne di nota, riducendosi a una serie di operazioni elementari.

BIBLIOGRAFIA

- [1] NAVIER L., *Mémoire sur les ponts suspendus*, Paris, 1823.
- [2] MÜLLER BRESLAU H. F. B., *Theorie der durch einen Balken versteiften Kette*, « Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover », 1881.
- [3] CADART G., *Théorie des ponts suspendus américains à tablier rigide*, Annales des Ponts et Chaussées, 1885.
- [4] LEVY M., *Mémoire sur le calcul des ponts suspendus rigides*, « Annales des Ponts et Chaussées », 1886.
- [5] MELAN J., *Handbuch der Ingenieurwissenschaften*, Leipzig, 1888.
- [6] MARTIN, *The theory of the stiffened suspension bridge*, « Engineering », 1927.
- [7] TIMOSHENKO S., *The stiffness of suspension bridges*, « A. S. C. E. », 1928.
- [8] STÜSSI F., *Zur Berechnung verankerter Hängebrücken*, « A. I. P. C. », 1936.
- [9] RUDBERG H., *Matematisk behandling av hängbroar*, « Tekniska Skrifter », 1944.
- [10] ASPLUND S. O., *On the deflection theory of suspension bridges*, Stockholm, 1945.
- [11] SELBERG A., *Design of suspension bridges*, Trondheim, 1946.
- [12] GRAVINA P. B. J., *Teoria das pontes pênséis*. São Paulo, 1948.
- [13] GRAVINA P. B. J., *Nota sobre o cálculo do empuxo adicional nos cabos das pontes pênséis*, « Engenharia », 1949.
- [14] GRAVINA P. B. J., *Contribuição para o calculo do empuxo adicional nos cabos das pontes pênséis. Sobre uma equação simplificada aplicável no caso de carga movel distribuida e sua generalização para qualquer condição de carga*, « D. E. R. », São Paulo, 1949.
- [15] GRAVINA P. B. J., *Teoria e cálculo das pontes pênséis*, São Paulo, 1951.