Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati (*).

Memoria di LUIGI AMERIO (a Milano).

A Mauro Picone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Si dimostra, per i sistemi quasi-periodici non lineari, un teorema di esistenza di soluzioni quasi-periodiche, estendendo un risultato di J.* FAVARD, *relativo ai sistemi lineari. Successivamente si studia il comportamento asintotico degli integrali dell'equazione* $X'' = -AX - \Phi(X') + F(t)$, *tipica nella teoria delle oscillazioni non lineari, con un numero qualsiasi di gradi di libertà, supponendo la funzione* $F(t)$ *limitata, o quasi-periodica. Si ottiene così, tra l'altro, una applicazione del teorema di esistenza precedentemente provato.*

Nelle « *Leçons sur les fonctions presque-périodiques* » il FAVARD dimostra un suo interessante teorema di esistenza per i sistemi differenziali quasi-periodici lineari non omogenei, provando che se un sistema di tal natura e i sistemi traslati e limiti di questi ammettono ciascuno *una unica soluzione limitata,* questa è *quasi-periodica* [1].

Il teorema di FAVARD è suscettibile di una larga estensione ai sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, che sarà indicata nel primo § di questo lavoro.

Nel secondo § si studia un sistema che è tipico nella *teoria delle oscillazioni non lineari,* facendo l'ipotesi che i secondi membri siano funzioni limitate della variabile indipendente t. Si dimostra, sotto assai larghe condizioni, l'esistenza di una soluzione limitata e, nel caso periodico, di una soluzione periodica.

Nel terzo § si suppone, più in particolare, il sistema dissipativo e quindi traducente il moto di un punto nelle consuete ipotesi della dinamica. Si dimostra allora che l'integrale limitato è unico e che ad esso sono asintotici, per $t \to +\infty$, tutti gli altri integrali.

Nel caso quasi periodico, in virtù del teorema dimostrato nel primo §, l'integrale limitato risulta inoltre quasi-periodico. Più in particolare, se il sistema è periodico oltre che dissipativo, risulta completato (poichè si prova l'esistenza della soluzione periodica) un interessante enunciato ottenuto alcuni

(*) Istituto Matematico del Politecnico di Milano.

(1) J. FAVARD, *Leçons sur les fonctions presque-périodiques,* Paris, Gauthier-Villars, 1933, pp. 88-90.

anni fa da CACCIOPPOLI e GHIZZETTI [2], relativo all'integrazione di un sistema concernente il moto dei fluidi. Questo sistema diede origine ad alcune ricerche [3] che furono proposte dal mio illustre Maestro, prof. MAURO PICONE, Direttore dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. A tali ricerche può pertanto aggiungersi la presente.

1. Consideriamo il sistema differenziale nelle incognite $x_1(t), \dots, x_n(t)$:

$$x_k' = f_k(t, x_1, \dots, x_n) \qquad (k = 1, \dots, n). \tag{1}$$

Rappresentiamo nello spazio S_n $(x_1, \dots, x_n)$ le *traiettorie* del sistema (1), di equazioni $x_k = x_k(t)$; nello spazio S'_{n+1} $(t, x_1, \dots, x_n)$ le *linee integrali*. Possiamo attribuire alla variabile indipendente t il significato cinematico di *tempo* e interpretare le x_k e t come coordinate cartesiane ortogonali negli spazi S_n o S'_{n+1}.

Detto X il vettore di S_n avente come coordinate $x_1, \dots, x_n$ e F il vettore di componenti f_k, il sistema (1) equivale all'equazione vettoriale

$$X' = F(t, X). \tag{2}$$

Supponiamo che $F(t, X)$ sia una funzione continua nell'insieme aperto $B(t \in J,\ X \in A)$, essendo J l'intervallo $-\infty < t < +\infty$ ed A un insieme aperto dello spazio S_n; inoltre $F(t, X)$ sia, per ogni $X \in A$, funzione *quasi-periodica* di t. Infine, detto Γ un arbitrario insieme chiuso e limitato $\subset A$, $F(t, X)$ sia funzione uniformemente continua del punto (t, X) per $t \in J$, $X \in \Gamma$. In tali ipotesi $F(t, X)$ risulta funzione quasi-periodica di t, uniformemente rispetto a $X \in \Gamma$, cioè ammette, in corrispondenza di ogni $\varepsilon > 0$, un insieme relativamente denso di quasi-periodi, dipendenti solo da Γ. Questo equivale a dire (per il criterio di BOCHNER) [4] che, presa comunque una successione $\{h_n\}$ di numeri reali, la successione $\{F(t + h_n, X)\}$ risulta compatta rispetto alla convergenza uniforme nell'insieme chiuso $\Lambda(t \in J,\ X \in \Gamma)$; tenuto conto dell'arbitrarietà di Λ si può allora estrarre da $\{h_n\}$ una successione $\{k_n\}$ tale che la successione $\{F(t + k_n, X)\}$ converga in A e la convergenza sia uniforme in Λ. La funzione limite $L(t, X)$ godrà pertanto delle stesse proprietà qualitative di $F(t, X)$.

Analogamente a quanto è fatto dal FAVARD nel caso lineare (allo scopo di poter applicare il criterio di BOCHNER), considereremo insieme all'equazione (2) tutte le equazioni

$$X' = L(t, X), \tag{3}$$

---

[2] R. CACCIOPPOLI e A. GHIZZETTI, *Ricerche asintotiche per una particolare equazione non lineare*. - *Ricerche asintotiche per una classe di sistemi di equazioni differenziali ordinarie non lineari*, « Atti R. Acc. d'Italia », 1942, pp. 427-440 e 493-501.

[3] R. CACCIOPPOLI e A. GHIZZETTI, loc. cit. in [2]; L. AMERIO, *Un preliminare teorema di Analisi per lo studio dei moti con resistenza passiva*, « Atti R. Acc. d'Italia », 1942, pp. 415-426.

[4] Cfr. ad es. J. FAVARD, loc. cit. in [1], pp. 77-80.

ove $L(t, X)$ è un elemento qualsiasi della chiusura della famiglia $\{F(t+h, X)\}$, con $-\infty < h < +\infty$, ottenuto nel modo dianzi indicato.

Consideriamo ora una qualunque delle (3). Sia $X(t)$ una soluzione: *supporremo sempre ottenuta la definizione di tale funzione in un intervallo aperto* $\alpha \frown \beta$ *di* J *di ampiezza massima, tale cioè che la soluzione* $X(t)$ *non possa essere prolungata in un intervallo* $\alpha_1 \frown \beta_1 \supset \alpha \frown \beta$.

Pertanto *se risulta, per ogni* t *di* $\alpha \frown \beta$, $X(t) \in \Gamma \subset A$, *con* Γ *insieme chiuso e limitato di* S_n, *l'intervallo* $\alpha \frown \beta$ *coincide con l'intervallo* J.

Una soluzione $X^*(t)$ di tal natura $(X^*(t) \in \Gamma)$ si dirà *contenuta nell'insieme* Γ. Tale traiettoria è manifestamente *limitata*. La soluzione $X(t)$, contenuta in Γ, si dirà poi *separata nell'insieme* $\Lambda(t \in J,\ X \in \Gamma)$ se per ogni altra eventuale traiettoria $Z(t)$ della (3), contenuta in Γ, risulta, per ogni t di J,

$$|\, X^*(t) - Z(t) \,| \geq \rho^* > 0 \tag{4}$$

dove ρ^* dipende solo da $X^*(t)$. Perciò (anche se per la (2) non vale il teorema di unicità) *due linee integrali separate in* Λ *non hanno, in* S'_{n+1}, *punti comuni.*

Se la $X^*(t) \in \Gamma$ *è unica, la diremo ancora separata in* Λ.

Se le soluzioni $Z(t)$ *contenute in* Γ *sono separate in* Λ, *esse sono in numero finito.* Infatti le $Z(t)$, sono equilimitate ed equicontinue; se fossero infinite esisterebbe una soluzione $X^*(t)$, di accumulazione al finito per le $Z(t)$, la quale sarebbe contenuta in Γ ma non potrebbe soddisfare alla (4): non sarebbe cioè separata in Λ.

Dimostriamo ora che *se la* (2) *ammette una soluzione* $X^*(t) \in \Gamma$ *anche la* (3) *ammette, qualunque sia* $L(t, X)$, *una soluzione* $Z(t) \in \Gamma$.

Infatti si ha, per $(t, X) \in B$, detta $\{k_n\}$ una conveniente successione di numeri reali,

$$L(t, X) = \lim_{n \to \infty} F(t + k_n, X), \tag{5}$$

la convergenza risultando uniforme per $(t, X) \in \Lambda$.

Inoltre le funzioni $X_n(t) = X^*(t + k_n)$ sono soluzioni delle equazioni

$$X' = F(t + k_n, X). \tag{6}$$

Le $X_n(t)$ sono $\in \Gamma$ e risultano equicontinue, a causa della limitatezza di $F(t, X)$ per $(t, X) \in \Lambda$. Si può perciò estrarre una successione $\{k_{n_r}\}$ tale che la corrispondente successione $X_{n_r}(t)$ converga in J e la convergenza sia uniforme in ogni intervallo limitato $a \vdash\!\dashv b$. Detta $Z(t)$ la funzione limite, sarà allora, per $t \in J$, $Z(t) \in \Gamma$. È noto poi che $Z(t)$ soddisfa, per le (5) e (6), all'equazione (3).

Più in generale possiamo dimostrare che *se la* (2) *ammette una soluzione* $X(t)$ *tale che risulti* $X(t) \in \Gamma$ *per* $\bar{t} \leq t < \infty$, *ciascuna delle* (3) *ammette una soluzione* $Z(t) \in \Gamma$ *per ogni* t *di* J.

Infatti consideriamo la successione $X_n(t) = X(t + n)$, con $n = 1, 2, \ldots$.

Le funzioni $X_n(t)$ soddisfano alle equazioni

$$X' = F(t + n, X)$$

e risultano (considerando $X_n(t)$ nell'intervallo $\bar{t} - n \vdash\!\!\!- +\infty$) equicontinue ed equilimitate. Si può allora estrarre una successione $\{n_r\}$ tale che le corrispondenti successioni $\{X_{n_r}(t)\}$, $\{F(t + n_r, X)\}$ convergano rispettivamente in J e in B a due funzioni $\overline{X}(t)$, $\overline{F}(t, X)$ e la convergenza risulti uniforme in ogni intervallo finito $a \vdash\!\!\dashv b$ per le $X_{n_r}(t)$ e in Λ per le $F(t + n_r, X)$.

Risulterà allora

$$\overline{X}'(t) = \overline{F}(t, \overline{X}(t))$$

e sarà $\overline{X}(t) \in \Gamma$ per ogni t di J. Poichè le funzioni $L(t, X)$, considerate in (3), si ottengono anche effettuando la chiusura della famiglia $\overline{F}(t + h, X)$ [5], da quanto prima si è dimostrato segue la tesi.

Proviamo infine che *se le soluzioni* $\in \Gamma$ *di ciascuna delle* (3) *sono separate in* Λ, *esse risultano anche equiseparate; esiste cioè un numero* $\sigma > 0$, *indipendente dalla* $L(t, X)$, *tale che, dette* $Z_1(t)$ *e* $Z_2(t)$ *due soluzioni* $\in \Gamma$ *di una qualsiasi delle* (3), *risulti, in tutto* J,

$$| Z_1(t) - Z_2(t) | \geq \sigma.$$

Consideriamo infatti una qualunque delle (3), corrispondente alla funzione $L'(t, X)$ e al valore $\rho' > 0$, e un'altra, corrispondente a $L''(t, X)$ e $\rho'' > 0$. Risulta, per una conveniente successione $\{h_n\}$, ed anzi uniformemente per $(t, X) \in \Lambda$,

$$L''(t, X) = \lim_{n \to \infty} L'(t + h_n, X).$$

Siano $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ due integrali $\in \Gamma$ dell'equazione

$$X' = L'(t, X). \tag{7}$$

Per quanto si è visto, si può estrarre dalla successione $\{h_n\}$ una successione $\{k_n\}$ tale che le successioni $Z_1(t + k_n)$, $Z_2(t + k_n)$ convergano per $t \in J$ a due funzioni $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, soluzioni dell'equazione

$$X' = L''(t, X). \tag{8}$$

Poichè risulta

$$\underset{(t \in J)}{\text{estr. inf.}} | Z_1(t + k_n) - Z_2(t + k_n) | = \underset{(t \in J)}{\text{estr. inf.}} | Z_1(t) - Z_2(t) | = \alpha_{12} > 0,$$

sarà anche

$$\underset{(t \in J)}{\text{estr. inf.}} | Y_1(t) - Y_2(t) | = \beta_{12} \geq \alpha_{12} \tag{9}$$

cioè le funzioni $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ sono distinte. Se indichiamo allora con $Z_i(t)$ le soluzioni $\in \Gamma$ della (7), in numero di $p' \geq 1$, e con $Y_j(t)$ le analoghe soluzioni della (8), in numero di $p'' \geq 1$, si conclude che è $p' \leq p''$. Allo stesso modo

---

[5] Cfr. ad es. J. FAVARD, loc. cit. in [1], pp. 72-73.

si dimostra che è $p'' \leq p'$ e quindi $p' = p'' = p$, cioè ***il numero di soluzioni contenute in*** Γ ***di una qualsiasi delle*** (3) ***è indipendente dal secondo membro*** $L(t, X)$. Posto poi

$$\sigma' = \min_{(i, k=1, \ldots, p)} \alpha_{ik}, \qquad \sigma'' = \min_{(j, l=1, \ldots, p)} \beta_{jl},$$

segue dalla (9)

$$\sigma' \leq \sigma''.$$

Analogamente si dimostra che è $\sigma'' \leq \sigma'$ e quindi $\sigma' = \sigma'' = \sigma$, cioè le soluzioni considerate sono equiseparate.

Premesse queste osservazioni possiamo dimostrare il seguente teorema.

Se le soluzioni $\in \Gamma$ ***di ciascuna delle*** (3) ***sono separate in*** Λ, ***esse risultano quasi-periodiche.***

Sia, per fissar le idee, $X(t)$ una soluzione della (2), $\in \Gamma$.

Dimostriamo che $X(t)$ è quasi-periodica. Presa ad arbitrio una successione $\{k_n\}$ occorre dimostrare che la successione $\{X_n(t)\} = \{X(t + k_n)\}$ è compatta, rispetto alla convergenza uniforme in J. Per quanto si è già visto, si può supporre senz'altro che la successione $X_n(t)$ converga per $t \in J$ a una funzione $Z(t)$, con convergenza uniforme in ogni intervallo limitato $a \vdash\!\dashv b$: inoltre risulti in B (ed anzi uniformemente per $(t, X) \in \Lambda$)

$$\lim_{n \to \infty} F(t + k_n, X) = L(t, X) \tag{10}$$

ed infine sia

$$Z'(t) = L(t, Z(t)).$$

Per provare che $X(t)$ è funzione quasi periodica basta dimostrare che le $X_n(t)$ convergono alla $Z(t)$ uniformemente in J.

Per quanto si è visto è $Z(t) \in \Gamma$ ed esiste un numero $\rho > 0$ tale che, se $Z_1(t)$ e $Z_2(t)$ sono due soluzioni $\in \Gamma$ di una qualsiasi delle (3), risulti $|Z_1(t) - Z_2(t)| \geq 2\rho$ per ogni $t \in J$.

Ammettiamo ora che le $X_n(t)$ non convergano uniformemente in J alla funzione $Z(t)$ e proviamo, dapprima, che *esistono un numero* α, *con* $0 < \alpha < \rho$, *e tre successioni* (le prime due di interi positivi)

$$\begin{aligned} &m_1 < m_2 < \ldots < m_r < \ldots \\ &n_1 < n_2 < \ldots < n_r < \ldots \qquad\qquad (r = 1, 2, \ldots) \\ &t_1, t_2, \ldots, t_r, \ldots \end{aligned}$$

tali che risulti

$$\alpha \leq | X(t_r + k_{m_r}) - X(t_r + k_{n_r}) | \leq \rho. \tag{11}$$

Infatti, posto

$$\varphi_{m,n}(t) = | X(t + k_m) - X(t + k_n) | \qquad (m < n)$$

sia $I_{m,n}$ l'insieme chiuso (eventualmente vuoto) dell'asse t in cui è $\varphi_{m,n}(t) \leq \rho$.

Po. .è, a causa della convergenza, risulta, per $\overline{m} \leq m < n$,

$$\varphi_{m,n}(0) = | X(k_m) - X(k_n) | \leq \rho,$$

l'insieme $I_{m,n}$ contiene, per $\overline{m} \leq m < n$, il punto $t = 0$. Possiamo supporre $\overline{m} = 1$ (cioè trascurare le prime $\overline{m} - 1$ funzioni) e allora nessun insieme $I_{m,n}$ sarà vuoto.

Posto

$$\delta_{m,n} = \underset{(t \in I_{m,n})}{\text{estr. sup.}} \varphi_{m,n}(t), \tag{12}$$

risulta

$$\delta_{m,n} \leq \rho. \tag{13}$$

Inoltre non può essere

$$\lim_{(m,n) \to \infty} \delta_{m,n} = 0. \tag{14}$$

Infatti, in tal caso, preso ad arbitrio ε, con $0 < \varepsilon < \rho$, esisterebbe un m_ε tale da aversi, per $m_\varepsilon \leq m < n$,

$$\delta_{m,n} < \varepsilon$$

e quindi

$$\underset{(t \in I_{m,n})}{\varphi_{m,n}(t)} < \varepsilon.$$

Inoltre, per definizione, nel complementare $CI_{m,n}$ di $I_{m,n}$ deve risultare

$$\varphi_{m,n}(t) > \rho.$$

Ma allora, per la continuità in J, l'insieme $CI_{m,n}$ è vuoto e quindi $I_{m,n}$ coincide, per $m_\varepsilon \leq m < n$, con tutto l'asse t. Per le (12) e (14), la convergenza risulterebbe allora uniforme in tutto l'intervallo J, contro l'ipotesi.

È pertanto

$$\max \lim_{(m,n) \to \infty} \delta_{m,n} = 2\alpha > 0$$

ed esistono due successioni di interi positivi

$$m_1 < m_2 < \ldots < m_r < \ldots$$
$$n_1 < n_2 < \ldots < n_r < \ldots$$

tali che sia

$$\delta_{m_r, n_r} \geq \frac{3\alpha}{2}.$$

Corrispondentemente si può trovare in I_{m_r, n_r} un punto t_r tale che risulti

$$\varphi_{m_r, n_r}(t_r) \geq \alpha,$$

e quindi, per la (13), la (11) è dimostrata.

La dimostrazione del teorema prosegue ora in modo analogo a quanto è stato fatto dal FAVARD per il caso lineare [6].

Possiamo estrarre dalle successioni $\{k_{m_r}\}$, $\{k_{n_r}\}$ due successioni $\{\mu_s\}$, $\{\nu_s\}$, corrispondenti ai valori r_s dell'indice r, tali che, posto $t_s' = t_{r_s}$, risulti

$$(15) \qquad \lim_{s\to\infty} X(t_s' + \mu_s) = U, \qquad \lim_{s\to\infty} X(t_s' + \nu_s) = V$$

essendo U, V due punti di S_n soddisfacenti alle limitazioni

$$(16) \qquad \alpha \leq | U - V | \leq \rho.$$

Consideriamo ora le successioni $\{X(t + t_s' + \mu_s)\}$, $\{X(t + t_s' + \nu_s)\}$.

Si possono estrarre, da queste, due successioni $\{X(t + t_p'' + \lambda_p)\}$, $\{X(t + t_p'' + \xi_p)\}$ (con $t_p'' = t_{s_p}$, $\lambda_p = \mu_{s_p}$, $\xi_p = \nu_{s_p}$), le quali convergano in J a due soluzioni $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ di due equazioni del tipo (3):

$$(17) \qquad Z_1' = L_1(t, Z_1), \qquad Z_2' = L_2(t, Z_2),$$

risultando in B, ed anzi uniformemente per $(t, X) \in \Lambda$,

$$(18) \qquad L_1(t, X) = \lim_{p\to\infty} F(t + t_p'' + \lambda_p, X), \qquad L_2(t, X) = \lim_{p\to\infty} F(t + t_p'' + \xi_p, X).$$

Sarà inoltre, per le (15) e (16),

$$(19) \qquad \alpha \leq | Z_1(0) - Z_2(0) | = | U - V | \leq \rho.$$

Dimostriamo che risulta

$$(20) \qquad L_1(t, X) = L_2(t, X).$$

Infatti è $\{\lambda_p\} \subseteq \{k_n\}$, $\{\xi_p\} \subseteq \{k_n\}$ e quindi, per la (10),

$$\lim_{p\to\infty} F(t + \lambda_p, X) = \lim_{p\to\infty} F(t + \xi_p, X) = L(t, X)$$

in tutto B, ed uniformemente per $(t, X) \in \Lambda$.

Perciò, preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$, sarà, per $p \geq p_\varepsilon'$, $(t, X) \in \Lambda$,

$$(21) \qquad | F(t + \lambda_p, X) - F(t + \xi_p, X) | \leq \varepsilon.$$

È poi, per $(t, X) \in \Lambda$, $p_\varepsilon' \leq p_\varepsilon \leq p$,

$$| L_1(t, X) - L_2(t, X) | \leq | L_1(t, X) - F(t + t_p'' + \lambda_p, X) | + \\ + | F(t + t_p'' + \lambda_p, X) - F(t + t_p'' + \xi_p, X) | + | F(t + t_p'' + \xi_p, X) - L_2(t, X) | \leq 3\varepsilon$$

a causa delle (18) e (21).

---

[6] J. FAVARD, loc. cit. in [1], pp. 89-90.

La (20) è perciò dimostrata. Ne segue che $Z_1(t)$ e $Z_2(t)$ definiscono due soluzioni $\in \Gamma$ e distinte della medesima equazione

$$Z' = L_1(t, X).$$

Per la (19), non può aversi, in tutto J,

$$| Z_1(t) - Z_2(t) | \geq 2\rho$$

ciò che è assurdo. Pertanto le $X_n(t)$ convergono uniformemente in J e la tesi è dimostrata.

COROLLARIO. - *Se ciascuna delle* (3) *ammette una sola traiettoria* $\in \Gamma$, *questa traiettoria è quasi-periodica.*

Se poi A coincide con tutto lo spazio S_n si ottiene l'enunciato particolarmente semplice: *se ciascuna delle* (3) *ammette una sola traiettoria limitata, questa è quasi-periodica.*

Nell'ipotesi che il sistema sia lineare, quest'ultima proposizione si riduce al teorema di FAVARD.

ESEMPIO. - Consideriamo dapprima il sistema nelle incognite $\xi(t)$, $\eta(t)$:

$$\xi' = \xi^2 - 1$$
$$\eta' = \eta.$$

Si hanno gli integrali particolari $\{ \xi_1(t) = 1,\ \eta_1(t) = 0 \}$, $\{ \xi_2(t) = -1,\ \eta_2(t) = 0 \}$.
Tutte le altre soluzioni sono date dalle formule

$$\xi(t) = \frac{C_1 - e^{2t}}{C_1 + e^{2t}}$$
$$\eta(t) = C_2 e^t$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie, $| C_1 | + | C_2 | > 0$. Risultano, tra queste, limitate in J soltanto le soluzioni corrispondenti ai valori $\{ C_1 > 0,\ C_2 = 0 \}$. Inoltre ognuna di tali soluzioni ha uno zero $\left(\text{per } t = \frac{1}{2} \log C_1\right)$.

Facciamo ora il cambiamento di incognite definito dalla trasformazione

$$x = r(t) \{ \xi \cos \varphi(t) + \eta \sin \varphi(t) \}$$
$$y = r(t) \{ -\xi \sin \varphi(t) + \eta \cos \varphi(t) \},$$

con $r(t)$, $\varphi(t)$ funzioni quasi-periodiche, insieme alle loro derivate $r'(t)$, $\varphi'(t)$. Inoltre $\varphi(t)$ abbia, in J, oscillazione $> 2\pi$ ed $r(t)$ soddisfi alle limitazioni

$$0 < \mu \leq r(t) \leq \nu.$$

La trasformazione considerata è manifestamente invertibile e le incognite $x(t)$, $y(t)$ soddisfano a un sistema (che si scrive immediatamente) del tipo

$$x' = X(t, x, y)$$
$$y' = Y(t, x, y),$$

con X, Y funzioni quasi periodiche di t. Alle soluzioni $\{\xi_1(t) = 1,\ \eta_1(t) = 0\}$, $\{\xi_2(t) = -1,\ \eta_2(t) = 0\}$ corrispondono, nel piano (x, y), le traiettorie $\{x_1(t) = r(t)\cos\varphi(t),\ y_1(t) = -r(t)\sin\varphi(t)\}$, $\{x_2(t) = -r(t)\cos\varphi(t),\ y_2(t) = r(t)\sin\varphi(t)\}$. Per queste, Γ è la corona circolare $\mu \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \nu$ ed è inoltre $\{(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2\}^{\frac{1}{2}} = 2r(t) \geq \mu > 0$. Nessuna altra traiettoria è contenuta in Γ, perchè le soluzioni limitate (escluse le due considerate) passano tutte per l'origine. Si conchiude che le due traiettorie $\{x_1(t), y_1(t)\}$, $\{x_2(t), y_2(t)\}$ sono *separate* nell'insieme Λ.

2. Consideriamo l'equazione

$$X'' = -AX - \Phi(X') + F(t), \tag{22}$$

nell'incognito vettore $X(t) \equiv (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, ponendo, dapprima, le seguenti ipotesi:

a) $A \equiv \| a_{ik} \|$ *è una matrice quadrata, simmetrica e tale che la forma quadratica* $\sum_{ik}^{1 \ldots n} a_{ik}\xi_i\xi_k$ *sia definita positiva;*

b) $F(t) \equiv (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ *è un vettore definito nell'intervallo J, continuo e limitato: risulta cioè, per ogni t di J,*

$$|F(t)| \leq M \tag{23}$$

con M costante positiva;

c) $\Phi(Y) \equiv (\varphi_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varphi_n(y_1, \ldots, y_n))$ *è un vettore, funzione continua del punto $Y \equiv (y_1, \ldots, y_n)$ in tutto lo spazio $(y_1, \ldots, y_n)$, tale che risulti*

$$\min \lim_{|Y| \to \infty} \frac{\Phi(Y) \times Y}{|\Phi(Y)|\,|Y|} = h > 0, \tag{24}$$

$$\min \lim_{|Y| \to \infty} |\Phi(Y)| > \frac{M}{h}. \tag{25}$$

In virtù di queste ipotesi, la (22) può interpretarsi come l'equazione del moto di un punto materiale, sotto l'azione di una *forza motrice* $F(t)$, di una *forza elastica di richiamo* $-AX$ e di una forza $-\Phi(X')$ la quale presenta il carattere di una *resistenza passiva*, almeno *per grandi valori, in modulo, della velocità.*

Quest'ultimo aspetto dell'equazione è tipico nei problemi concernenti la *Meccanica non lineare* e, più in generale, *la teoria delle oscillazioni non lineari.* Si noti che, con la (25), non si richiede alla resistenza $-\Phi(X')$ di diventare infinita con $|X'|$ ma soltanto di neutralizzare, quando $|X'|$ sia abbastanza grande, il lavoro elementare della forza motrice $F(t)$. Una ipotesi di tal natura è già stata fatta da ASCARI [7], per $n=1$.

Dimostriamo che, *nelle ipotesi poste, la* (22) *ammette almeno una soluzione* $X^*(t)$ *definita in* J *e limitata. Inoltre ogni integrale, corrispondente ad arbitrarie condizioni iniziali, per* $t=\bar{t}$, *è limitato nell'intervallo* $\bar{t} \vdash +\infty$.

Facciamo, innanzi tutto, una trasformazione lineare

$$U = RX, \tag{26}$$

dove $R \equiv \| r_{ik} \|$ è una matrice ortogonale, allo scopo di porre il sistema (22) nella forma più semplice. Dalla (26) segue

$$X = R^{-1}U, \qquad (R^{-1} \equiv \| r_{ki} \|). \tag{27}$$

Con questa trasformazione, detti V_1 e V_2 due vettori, W_1 e W_2 i trasformati, si ha

$$V_1 \times V_2 = W_1 \times W_2 . \tag{28}$$

Applicando la R, si ottiene, per la (22), l'equazione nell'incognita $U(t)$,

$$U'' = -RAR^{-1}U - R\Phi(R^{-1}U') + RF. \tag{29}$$

Ora, essendo la forma $\sum\limits_{i,k}^{1 \ldots n} a_{i,k}\xi_i\xi_k$ definita positiva, si può scegliere la matrice R in modo che la matrice $RAR^{-1} = N$ abbia la forma canonica diagonale:

$$N \equiv \| \rho_i \delta_{ik} \| , \tag{30}$$

essendo $\rho_i > 0$ le radici caratteristiche, δ_{ik} il simbolo di KRONECKER.

Posto

$$\Phi_0(U') = R\Phi(R^{-1}U'), \qquad F_0(t) = RF(t),$$

si ricava, per la (29) e (30), l'equazione

$$U'' = -NU - \Phi_0(U') - F_0(t). \tag{31}$$

Osserviamo ora che, preso un vettore arbitrario V e detto $W = RV$ il trasformato, risulta, per la (28),

$$|W| = |V|$$

e inoltre

$$\begin{aligned} \Phi_0(W) \times W = (R\Phi(R^{-1}W)) \times W = (R\Phi(R^{-1}W)) \times (RV) = \\ = \Phi(R^{-1}W) \times V = \Phi(V) \times V. \end{aligned} \tag{32}$$

---

[7] A. ASCARI, *Studio asintotico di un'equazione relativa alla dinamica del punto*, « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXXXV, 1952, pp. 278-288.

Pertanto le condizioni a), b), c) sono invarianti rispetto alla trasformazione R (ciò che era a priori evidente data la natura delle condizioni medesime e di R).

Possiamo perciò supporre senz'altro che nella (22) la matrice A abbia la forma diagonale. In tal caso la (22) equivale al sistema

$$x_k'' = -\rho_k x_k - \varphi_k(x_1', \dots, x_n') + f_k(t) \tag{33}$$

con $\rho_k > 0$. Posto poi $x_k' = y_k$, le (33) equivalgono al sistema di $2n$ equazioni nelle $2n$ incognite $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$:

$$\begin{aligned} x_k' &= y_k \\ y_k' &= -\rho_k x_k - \varphi_k(y_1, \dots, y_n) + f_k(t). \end{aligned} \tag{34}$$

Per dimostrare l'esistenza nell'intervallo J di una soluzione $\{x_k^*(t), y_k^*(t)\}$ limitata, possiamo seguire un procedimento di uso frequente in problemi di tal natura, consistente nel determinare un dominio limitato dal quale le traiettorie del sistema (34) non possano uscire.

Consideriamo la funzione

$$W(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \sum_1^n{}_k \{ (\sqrt{\rho_k}\, x_k + \delta \operatorname{arctg} y_k)^2 + y_k^2 \} \tag{35}$$

con $\delta > 0$.

Posto

$$\begin{aligned} u_k &= \sqrt{\rho_k}\, x_k + \delta \operatorname{arctg} y_k \\ v_k &= y_k \end{aligned} \tag{36}$$

cioè

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{u_k}{\sqrt{\rho_k}} - \delta \operatorname{arctg} v_k \\ y_k &= v_k \end{aligned}$$

si stabilisce un omeomorfismo tra i due spazi $\bar{S}_{2n}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ e $S_{2n}(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ che fa corrispondere ai punti non esterni all'ipersfera

$$\sum_1^n{}_k (u_k^2 + v_k^2) = \lambda^2 \qquad (\lambda > 0)$$

i punti del dominio Δ_λ non esterni alla ipersuperficie ξ_λ di equazione

$$W(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \lambda^2. \tag{37}$$

Consideriamo ora la funzione

$$W(t) = W(x_1(t), y_1(t), \dots, x_n(t), y_n(t)) \tag{38}$$

ove $\{x_1(t), y_1(t), \dots, x_n(t), y_n(t)\}$ è una soluzione del sistema (34).

Si ha, per le (34), (35), (38),

$$\frac{1}{2}\frac{dW}{dt}=\sum_1^n{}_k\left\{(\sqrt{\rho_k}\,x_k+\delta\,\mathrm{arctg}\,y_k)\left(\sqrt{\rho_k}\,x_k'+\frac{\delta y_k'}{1+y_k^2}\right)+y_ky_k'\right\}= \tag{39}$$

$$=\sum_1^n{}_k\left\{(\sqrt{\rho_k}x_k+\delta\,\mathrm{arctg}\,y_k)\sqrt{\rho_k}\,y_k+\right.$$

$$\left.+\left((\sqrt{\rho_k}\,x_k+\delta\,\mathrm{arctg}\,y_k)\frac{\delta}{1+y_k^2}+y_k\right)(-\rho_kx_k-\varphi_k+f_k)\right\}=$$

$$=-\sum_1^n{}_k\left\{y_k(\varphi_k-\delta\sqrt{\rho_k}\,\mathrm{arctg}\,y_k-f_k)+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta}{1+y_k^2}(\sqrt{\rho_k}\,x_k+\delta\,\mathrm{arctg}\,y_k)(\rho_kx_k+\delta\sqrt{\rho_k}\,\mathrm{arctg}\,y_k-\delta\sqrt{\rho_k}\,\mathrm{arctg}\,y_k+\varphi_k-f_k)\right\}=$$

$$=-\sum_1^n{}_k(\varphi_k-\delta\sqrt{\rho_k}\,\mathrm{arctg}\,y_k-f_k)\left(y_k+\frac{\delta(\sqrt{\rho_k}\,x_k+\delta\,\mathrm{arctg}\,y_k)}{1+y_k^2}\right)+$$

$$-\sum_1^n{}_k\frac{\delta\sqrt{\rho_k}}{1+y_k^2}(\sqrt{\rho_k}x_k+\delta\,\mathrm{arctg}\,y_k)^2.$$

Osserviamo ora che, per le (24) e (25), esistono due numeri σ ed L con $0<\sigma<1$, $L>0$, tali che per $|Y|\geq L$ risulti

$$\begin{gathered}|\Phi(Y)|\geq\frac{M}{h}\frac{(1+\sigma)^2}{1-\sigma}\\ \frac{\Phi(Y)\times Y}{|\Phi(Y)||Y|}\geq\frac{h}{1+\sigma}\,.\end{gathered} \tag{40}$$

Considerato poi il vettore $\psi(Y)\equiv\{\sqrt{\rho_1}\,\mathrm{arctg}\,y_1,\dots,\sqrt{\rho_n}\,\mathrm{arctg}\,y_n\}$ si ha, per ogni Y,

$$|\psi(Y)|\leq\gamma,$$

con γ costante positiva. Si può pertanto prendere $\delta_0>0$ in modo che, posto $G=\delta\psi(Y)+F(t)$ risulti, per $0<\delta\leq\delta_0$,

$$|G|\leq M+\delta\gamma\leq M(1+\sigma). \tag{41}$$

Per $|Y|\geq L$ risulta allora, tenute presenti le (40) e (41), e osservando che è necessariamente $0<h\leq 1$ e quindi, per la (41), $|G|<|\Phi(Y)|$,

$$(\Phi(Y)-G)\times Y\geq\frac{h}{1+\sigma}|\Phi(Y)||Y|-M(1+\sigma)|Y|= \tag{42}$$

$$=\frac{h}{1+\sigma}|\Phi(Y)|\left\{1-\frac{M(1+\sigma)^2}{h\,|\Phi(Y)|}\right\}|Y|\geq\frac{h\sigma}{1+\sigma}|\Phi(Y)||Y|\geq$$

$$\geq\frac{h\sigma}{2(1+\sigma)}\{|\Phi(Y)|+|G|\}|Y|\geq\frac{h\sigma}{2(1+\sigma)}|\Phi(Y)-G||Y|.$$

Consideriamo ora il vettore $H \equiv \left\{ \frac{\sqrt{\rho_1}x_1 + \delta \operatorname{arctg} y_1}{1 + y_1^2}, \dots, \frac{\sqrt{\rho_n}x_n + \delta \operatorname{arctg} y_n}{1 + y_n^2} \right\}$.

Risulta, nei punti della ipersuperficie ξ_λ, con $\lambda > L$, per le (35) e (37), supposto sempre $|Y| \geq L$,

$$(43) \quad \delta|\{\Phi(Y)-G\}\times H| \leq \delta|\Phi(Y)-G|\,|H| \leq \delta|\Phi(Y)-G| \left\{ \sum_1^n{}_k (\sqrt{\rho_k}x_k + \delta \operatorname{arctg} y_k)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \delta\,|\Phi(Y) - G|\,\sqrt{\lambda^2 - |Y|^2}.$$

Dalle (39), (42) e (43) segue allora, per $|Y| \geq L$, la disuguaglianza

$$(44) \qquad \frac{1}{2}\frac{dW}{dt} \leq -|\Phi(Y) - G|\,\{\mu\eta - \delta\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}\}$$

dove si è posto $\eta = |Y|$, $\mu = \dfrac{h\sigma}{2(1+\sigma)}$.

Sia ora $0 \leq \eta = |Y| \leq L$. Posto

$$p = \min_{1\leq k\leq n} \sqrt{\rho_k}, \qquad q = \max_{1\leq k\leq n} \sqrt{\rho_k},$$
$$N = \underset{0\leq\eta\leq L,\ t\in J}{\text{estr. sup.}} |\Phi(Y) - F(t)|,$$

risulta

$$|\psi(Y)| \leq q\eta,$$
$$\sum_1^n{}_k \frac{\sqrt{\rho_k}}{1+y_k^2}(\sqrt{\rho_k}\,x_k + \delta \operatorname{arctg} y_k)^2 \geq \frac{p(\lambda^2 - \eta^2)}{1+\eta^2}$$

e quindi, per la (39),

$$(45) \qquad \frac{1}{2}\frac{dW}{dt} \leq (N + \delta q\eta)(\eta + \delta\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}) - \frac{\delta p(\lambda^2 - \eta^2)}{1+\eta^2}.$$

Se vogliamo che in tutti i punti di ξ_λ e per ogni $t \in J$ risulti

$$\frac{dW}{dt} < 0,$$

basta, per le (44) e (45), che δ e λ soddisfino alle condizioni

$$(46) \qquad \begin{aligned} &\mu\eta > \delta\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}, && \text{per } \eta \geq L, \\ &\frac{\delta p(\lambda^2 - \eta^2)}{1+\eta^2} > (N + \delta q\eta)(\eta + \delta\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}), && \text{per } 0 \leq \eta \leq L. \end{aligned}$$

La prima delle (46) è verificata se risulta

$$(47) \qquad \mu L > \delta\sqrt{\lambda^2 - L^2}.$$

Quanto alla seconda si osservi che, posto

$$\omega(\eta) = (N + \delta q\eta)(\eta + \delta\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}),$$

risulta

$$\omega'(\eta) = \delta q(\eta + \delta\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}) + (N + \delta q\eta)\left(1 - \frac{\delta\eta}{\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}}\right)$$

$$= N + 2\delta q\eta + \delta^2 q\sqrt{\lambda^2 - \eta^2} - \frac{N\delta\eta}{\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}} - \frac{\delta^2 q\eta^2}{\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}} =$$

$$= N + \delta\eta\left(2q - \frac{N}{\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}}\right) + \delta^2 q\,\frac{\lambda^2 - 2\eta^2}{\sqrt{\lambda^2 - \eta^2}}.$$

Perciò, se è $\lambda^2 \geq 2L^2$, $2q \geq \dfrac{N}{\sqrt{\lambda^2 - L^2}}$, risulta $\omega'(\eta) > 0$ per $0 \leq \eta \leq L$, cioè $\omega(\eta)$ è funzione crescente.

A maggior ragione questo avverrà se supponiamo

(48)
$$\sqrt{\lambda^2 - L^2} \geq \sqrt{L^2 + \frac{N^2}{4q^2}} = \xi_0 > 0.$$

Pertanto, se vale la (48), la seconda delle (46) sarà soddisfatta se λ e $\delta \leq \delta_0$ soddisfano alla condizione

(49)
$$\frac{\delta p(\lambda^2 - L^2)}{1 + L^2} > (N + \delta qL)(L + \delta\sqrt{\lambda^2 - L^2}).$$

Posto allora $\xi = \sqrt{\lambda^2 - L^2}$, si ottengono dalle (47), (48) e (49) le condizioni

(50)
$$\begin{aligned} &\delta\xi < \mu L \\ &\delta p\xi^2 > \delta(1 + L^2)(N + \delta qL)\xi + L(1 + L^2)(N + \delta qL), \\ &(0 < \delta \leq \delta_0,\ \xi_0 \leq \xi). \end{aligned}$$

Posto

(51)
$$\begin{aligned} &\xi_2(\delta) = \frac{\mu L}{\delta} \\ &\xi_1(\delta) = \frac{\delta(1 + L^2)(N + \delta qL) + \sqrt{\delta^2(1 + L^2)^2(N + \delta qL)^2 + 4\delta pL(1 + L^2)(N + \delta qL)}}{2\delta p} \end{aligned}$$

si ottiene, per $0 < \delta \leq \delta' \leq \delta_0$,

(52)
$$\frac{\nu}{2\sqrt{\delta}} < \xi_1(\delta) < \frac{\nu}{\sqrt{\delta}},$$

con ν costante positiva. Se è allora

(53)
$$0 < \delta < \min\left(\delta',\ \frac{\mu^2 L^2}{\nu^2}\right) = \delta_1$$

risulta

$$\xi_1(\delta) < \xi_2(\delta).$$

Pertanto, fissato $\bar{\delta} < \delta_1$ e tale che sia $\xi_1(\bar{\delta}) \geq \xi_0$, si può prendere $\bar{\xi} \geq \xi_0$ soddisfacente alle condizioni

$$\xi_1(\bar{\delta}) < \bar{\xi} < \xi_2(\bar{\delta}) \tag{54}$$

e in tal caso le (50) saranno soddisfatte.

Nello spazio S_{2n} il vettore $V \equiv (x_1'(t), y_1'(t), \ldots, x_n'(t), y_n'(t))$ spiccato dai punti di $\zeta_{\bar{\lambda}}$ (con $\bar{\lambda} = \sqrt{\bar{\xi}^2 + L^2}$, $\delta = \bar{\delta}$), risulta orientato, qualunque sia t, verso l'interno del dominio $\Delta_{\bar{\lambda}}$, avente come frontiera l'ipersuperficie $\zeta_{\bar{\lambda}}$. Si conchiude che se le condizioni iniziali, per $t = \bar{t}$, $\{ x_k(\bar{t}) = \bar{x}_k, \ y_k(\bar{t}) = \bar{y}_k \}$ sono tali che il punto $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_n)$ appartenga a $\Delta_{\bar{\lambda}}$, l'integrale corrispondente a tali condizioni iniziali (o anche un qualsiasi integrale corrispondente a tali condizioni, poichè non è richiesto che valga per la (22) il teorema di unicità) è prolungabile nell'intervallo $\bar{t} \vdash\!\!- +\infty$ ed è contenuto in $\Delta_{\bar{\lambda}}$ per ogni $t \geq \bar{t}$ (qualunque sia il prolungamento effettuato). Tale integrale è pertanto limitato nell'intervallo $\bar{t} \vdash\!\!- +\infty$.

Questo avverrà in particolare per una successione $\{ x_{k,r}(t), \ y_{k,r}(t) \}$ di integrali soddisfacenti alle condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x_{k,r}(-r) &= 0 \\ y_{k,r}(-r) &= 0 \end{aligned} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots;\ t \geq -r).$$

Si ottiene in tal modo una successione di integrali i quali risultano equilimitati, e quindi, a causa delle (34), equicontinui. Si può estrarre allora da tale successione una successione parziale, la quale risulti convergente in tutto J (ed anzi uniformemente in ogni intervallo limitato $a \vdash\!\!\dashv b$) ad un integrale $\{ x_k^*(t), \ y_k^*(t) \}$ del sistema (34). Poichè tale integrale è definito in tutto J, ed è contenuto in $\Delta_{\bar{\lambda}}$, la prima parte del teorema è dimostrata.

Per provare poi la seconda parte, basta osservare che, fissate ad arbitrio le condizioni iniziali $\{ x_k(\bar{t}) = \bar{x}_k, \ y_k(\bar{t}) = \bar{y}_k \}$, si possono sempre scegliere $\delta_2 \leq \delta_1$ e $\xi' \geq \xi_0$ in modo che il punto $\bar{P}(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ sia contenuto in $\Delta_{\lambda'}$. In tal caso ogni traiettoria passante all'istante iniziale $\bar{t}$ per tale punto sarà contenuta in $\Delta_{\lambda'}$ in tutto l'intervallo $\bar{t} \vdash\!\!- +\infty$.

OSSERVAZIONE. - *Supponiamo che la funzione $F(t)$ sia continua e periodica, di periodo T. Allora, se valgono le condizioni* a) *e* c), *la* (22) *ammette almeno una soluzione periodica $\bar{X}(t)$ di periodo T.*

Osserviamo che la soluzione limitata $X^*(t)$, di cui dianzi si è provata l'esistenza, non è in generale periodica.

Per provare che esiste una siffatta soluzione $\bar{X}(t)$, anch'essa contenuta in $\Delta_{\bar{\lambda}}$, procediamo nel modo seguente.

Fissato $\lambda_1 > \bar{\lambda}$, sia $\varphi_{k,m}(y_1, \ldots, y_n)$ una successione di polinomi per i quali risulti

(55) $$\lim_{m \to \infty} \varphi_{k,m}(y_1, \ldots, y_n) = \varphi_k(y_1, \ldots, y_n)$$

uniformemente in Δ_{λ_1}. Posto $\Phi_m(Y) \equiv \{ \varphi_{1,m}(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varphi_{n,m}(y_1, \ldots, y_n) \}$, per l'equazione

(56) $$X'' + \Phi_m(X') + AX = F(t)$$

vale il teorema di esistenza e unicità per arbitrari valori iniziali. Inoltre si ha la dipendenza continua degli integrali da tali valori (ciò che si richiede per poter applicare il teorema di BROUWER).

Sia inoltre $\{ x_{1,m}(t), y_{1,m}(t), \ldots, x_{n,m}(t), y_{n,m}(t) \}$ una soluzione del sistema (equivalente alla (56))

(57) $$\begin{aligned} x_k' &= y_k \\ y_k' &= -\rho_k x_k - \varphi_{k,m}(y_1, \ldots, y_n) + f_k(t) \end{aligned}$$

e consideriamo il vettore $V_m \equiv \{ x'_{1,m}(t), y'_{1,m}(t), \ldots, x'_{n,m}(t), y'_{n,m}(t) \}$ spiccato dai punti di $\zeta_{\bar{\lambda}}$. Questo vettore, a causa delle (39), risulta, almeno per $m \geq \overline{m}$ abbastanza grande, orientato verso l'interno di $\Delta_{\bar{\lambda}}$, qualunque sia t.

Una consueta applicazione del teorema di BROUWER permette allora di affermare l'esistenza per il sistema (57) e per $m \geq \overline{m}$ di una soluzione periodica e di periodo T, $\{ \bar{x}_{k,m}(t), \bar{y}_{k,m}(t) \} \in \Delta_{\bar{\lambda}}$.

Le funzioni $\{ \bar{x}_{k,m}(t), \bar{y}_{k,m}(t) \}$ sono perciò equilimitate: sono inoltre, a causa delle (55) e (57), equicontinue. Si può estrarre perciò dalla loro successione una successione parziale $\{ \bar{x}_{k,m_r}(t), \bar{y}_{k,m_r}(t) \}$ convergente uniformemente in tutto J (a causa della periodicità).

La funzione limite $\{ \bar{x}_k(t), \bar{y}_k(t) \}$ soddisfa allora al sistema (34) ed è periodica, di periodo T ([8]).

3. Consideriamo l'equazione (22) e *supponiamo che, oltre alle* a), b), c) *sia verificata la condizione seguente:*

d) *risulta*

(58) $$\{ \Phi(U + V) - \Phi(U) \} \times V > 0$$

per ogni coppia U, V *di vettori con* $V \neq 0$.

In tal caso si può dimostrare che:

α) *vale, per arbitrarie condizioni iniziali date per* $t = \bar{t}$, *anche il teorema di unicità, almeno alla destra di* $\bar{t}$;

β) *l'integrale* $\{ x_k^*(t), y_k^*(t) \}$ *definito in tutto* J *e limitato* (di cui abbiamo

---

([8]) Per altri teoremi di esistenza di soluzioni periodiche, relativi a sistemi in più gradi di libertà, vedasi:

D. GRAFFI, *Forced oscillations for several non linear circuits*, « Ann. of Math. », vol. 54, 1951, pp. 262-271; S. MIZOHATA, *On the existence of systems of periodic solutions for several non linear circuits*, « Mem. of College of Sc. », Kyoto, vol. XXVII, 1952, pp. 115-121.

già dimostrato l'esistenza) *è unico e ad esso sono asintotici, per* $t \to +\infty$, *tutti gli altri integrali del sistema.*

Osserviamo, innanzi tutto, che anche l'ipotesi d) è indipendente dai cambiamenti di coordinate cartesiane ortogonali.

Per dimostrare la proprietà α) consideriamo due integrali

$$\{ \alpha_1(t),\ \beta_1(t), \dots,\ \alpha_n(t),\ \beta_n(t) \}, \qquad \{ \gamma_1(t),\ \delta_1(t), \dots,\ \gamma_n(t),\ \delta_n(t) \}$$

del sistema (34) soddisfacenti, per $t = \bar{t}$, alle medesime condizioni iniziali

$$\alpha_k(\bar{t}) = \gamma_k(\bar{t}) = \bar{x}_k, \qquad \beta_k(\bar{t}) = \delta_k(\bar{t}) = \bar{y}_k .$$

Posto poi

$$\xi_k(t) = \gamma_k(t) - \alpha_k(t)$$
$$\eta_k(t) = \delta_k(t) - \beta_k(t),$$

risulta

$$\xi_k(\bar{t}) = \eta_k(\bar{t}) = 0 \tag{59}$$

e le funzioni $\{ \xi_k(t),\ \eta_k(t) \}$ soddisfano, per le (34), al sistema

$$\xi_k' = \eta_k$$
$$\eta_k' = -\rho_k \xi_k - \{ \varphi_k(\beta_1(t) + \eta_1, \dots, \beta_n(t) + \eta_n) - \varphi_k(\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)) \}.$$

Posto $U \equiv \{ \beta_1, \dots, \beta_n \}$, $V \equiv \{ \eta_1, \dots, \eta_n \}$ e tenuto conto della (58), si ricava allora

$$\sum_1^n{}_k (\rho_k \xi_k \xi_k' + \eta_k \eta_k') = -\sum_1^n{}_k \{ \varphi_k(\beta_1 + \eta_1, \dots, \beta_n + \eta_n) - \varphi_k(\beta_1, \dots, \beta_n) \} \eta_k =$$
$$= -\{ \Phi(U + V) - \Phi(U) \} \times V \leq 0,$$

cioè la funzione

$$R(t) = \left\{ \sum_1^n{}_k (\rho_k \xi_k^2 + \eta_k^2) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

è non crescente. Poichè risulta, per le (59), $R(\bar{t}) = 0$, sarà allora $R(t) = 0$, e quindi $\xi_k(t) = 0$, $\eta_k(t) = 0$, per $t \geq \bar{t}$, ciò che prova la proprietà α).

Dimostriamo ora la proprietà β).

Posto

$$\xi_k(t) = x_k(t) - x_k^*(t)$$
$$\eta_k(t) = y_k(t) - y_k^*(t),$$

$\{ \xi_k(t),\ \eta_k(t) \}$ risulta, per le (34), soluzione del sistema

$$\begin{aligned} &\xi'_k = \eta_k \\ &\eta_k' = -\rho_k \xi_k - \{ \varphi_k(y_1^*(t) + \eta_1, \dots, y_n^*(t) + \eta_n) - \varphi_k(y_1^*(t), \dots, y_n^*(t)) \}. \end{aligned} \tag{60}$$

Ne segue, come precedentemente,

$$(61)\quad \sum_1^n {}_k \{ \rho_k \xi_k \xi_k' + \eta_k \eta_k' \} = -\sum_1^n {}_k \{ \varphi_k(y_1^* + \eta_1, \dots, y_n^* + \eta_n) - \varphi_k(y_1^*, \dots, y_n^*) \} \eta_k =$$
$$= - \{ \Phi(Y^* + H) - \Phi(Y^*) \} \times H \leq 0,$$

avendo posto $Y^*(t) \equiv \{ y_1^*(t), \dots, y_n^*(t) \}$, $H \equiv \{ \eta_1, \dots, \eta_n \}$.

Dalla (61) segue che *la funzione*

$$(62)\qquad R(t) = \left\{ \sum_1^n {}_k (\rho_k \xi_k^2 + \eta_k^2) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

è non crescente; esiste pertanto finito il limite

$$(63)\qquad \lim_{t \to +\infty} R(t) = r \geq 0.$$

Dimostriamo che è

$$(64)\qquad r = 0.$$

La tesi è evidente se per un valore $t_1 \geq \bar{t}$, essendo $\bar{t}$ l'istante iniziale, risulta $R(t_1) = 0$, poichè allora sarà $R(t) = 0$ per $t \geq t_1$.

Supponiamo perciò $R(t) > 0$ per ogni $t \geq \bar{t}$ e dimostriamo che vale la (64).

Ammettiamo infatti che sia $r > 0$. Si consideri l'integrale $\{ \xi_k(t), \eta_k(t) \}$ a partire dall'istante iniziale $\bar{t}$. Preso $\varepsilon > 0$ valutiamo la misura dell'insieme aperto $E_\varepsilon \subseteq (\bar{t} \,\vdash\, + \infty)$, in cui risulti

$$(65)\qquad | H(t) |^2 = \sum_1^n {}_k \eta_k^2(t) > \varepsilon^2.$$

Osserviamo che, per la (63), il vettore $H(t)$ è limitato nell'intervallo $\bar{t} \vdash + \infty$; lo stesso avviene per $Y^*(t)$. Inoltre nella chiusura di E_ε, $\bar{E}_\varepsilon \equiv (| H(t) |^2 \geq \varepsilon^2)$, risulta $| H(t) | \geq \varepsilon > 0$. Pertanto, per $t \in E_\varepsilon$, sussiste una limitazione del tipo

$$(66)\qquad \{ \Phi(Y^* + H) - \Phi(Y^*) \} \times H \geq \omega_\varepsilon > 0.$$

Dalla (61), integrando tra $\bar{t}$ e $+ \infty$, segue poi, per le (63) e (66),

$$(67)\qquad R^2(\bar{t}) - r^2 = 2 \int_{\bar{t}}^{\infty} \{ \Phi(Y^* + H) - \Phi(Y^*) \} \times H dt = l^2 > 0.$$

Perciò, detta $\mu(E_\varepsilon)$ la misura dell'insieme E_ε (il quale consta di una successione di intervalli aperti), risulta

$$(68)\qquad \mu(E_\varepsilon) < \frac{l^2}{2\omega_\varepsilon},$$

cioè E_ε ha misura finita.

È pertanto

$$\min \lim_{t \to +\infty} H(t) = 0.$$

Dimostriamo che è

$$\lim_{t \to +\infty} H(t) = 0. \tag{69}$$

Per questo cominciamo con l'osservare che, se non vale la (69), si ha

$$\max \lim_{t \to +\infty} |H(t)| = \delta, \tag{70}$$

con

$$0 < \delta \leq r$$

per la (63).

Posto poi

$$A^2(t) = \sum_{1}^{n}{}_k \rho_k \xi_k^2 = R^2 - |H|^2, \tag{71}$$

si prenda $\sigma > 0$ ad arbitrio, ma in modo che sia

$$0 < 2\varepsilon \leq \sigma < \delta \leq r. \tag{72}$$

Consideriamo solo quegli intervalli $a_m \overline{\quad} b_m$ della successione E_ε nei queli esistono punti τ_m tali che risulti $|H(\tau_m)|^2 \geq \sigma^2$, mentre in a_m, b_m è $|H|^2 = \varepsilon^2$. Si prenda poi $t_\varepsilon' \geq \bar{t}$ in modo che, per $t \geq t_\varepsilon'$, risulti

$$r^2 \leq A^2(t) + |H(t)|^2 \leq r^2 + \varepsilon^2.$$

Allora si ha, per $a_m > t_\varepsilon'$,

$$\begin{aligned} A^2(a_m) &\geq r^2 - |H(a_m)|^2 = r^2 - \varepsilon^2 \\ A^2(\tau_m) &\leq r^2 + \varepsilon^2 - |H(\tau_m)|^2 \leq r^2 + \varepsilon^2 - \sigma^2 \end{aligned} \tag{73}$$

e quindi

$$A^2(a_m) - A^2(\tau_m) \geq \sigma^2 - 2\varepsilon^2 \geq \frac{\sigma^2}{2}. \tag{74}$$

Ne segue

$$\left| \int_{a_m}^{\tau_m} 2A(t)A'(t)dt \right| = |A^2(\tau_m) - A^2(a_m)| \geq \frac{\sigma^2}{2}. \tag{75}$$

Ora le funzioni $\xi_k(t)$, $\eta_k(t)$ sono limitate nell'intervallo $\bar{t} \vdash\!\!- +\infty$. Pertanto, detta N una conveniente costante positiva, risulta, per $\bar{t} \leq t < +\infty$,

$$2|AA'| = 2\left|\sum_{1}^{n}{}_k \rho_k \xi_k \xi_k'\right| = 2\left|\sum_{1}^{n}{}_k \rho_k \xi_k \eta_k\right| \leq N$$

e quindi, per la (74) e (75),

$$\frac{\sigma^2}{2} \leq \left| \int_{a_m}^{\tau_m} 2A(t)A'(t)dt \right| \leq N(b_m - a_m)$$

cioè

$$b_m - a_m \geq \frac{\sigma^2}{2N}. \tag{76}$$

Inoltre, per la (68), la misura complessiva degli intervalli $a_m - b_m$ è $< \frac{l^2}{2\omega_\varepsilon}$. Pertanto il loro numero ν soddisferà alla limitazione

$$\nu < \frac{l^2 N}{\sigma^2 \omega_\varepsilon}. \tag{77}$$

In particolare, preso $\varepsilon = \frac{\sigma}{2}$, risulta $\nu < \frac{l^2 N}{\sigma^2 \omega_{\frac{\sigma}{2}}}$.

Se allora $t_\sigma \geq t_\varepsilon'$ è l'ascissa massima di questi intervalli, per $t \geq t_\sigma$ risulta

$$|H(t)| < \sigma$$

e quindi, per l'arbitrarietà di σ, la (69) è provata.

È pertanto, per le (53) e (61),

$$\lim_{t \to +\infty} A^2(t) = r^2 > 0$$

cioè

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_1^n {}_k\, \rho_k \xi_k^2(t) = r^2. \tag{78}$$

Ora si ha, per le (60), posto $L \equiv \{ \xi_1, ..., \xi_n \}$,

$$\sum_1^n {}_k (\xi_k' \eta_k + \xi_k \eta_k') = \frac{d}{dt} \sum_1^n {}_k\, \xi_k \eta_k = \sum_1^n {}_k (\eta_k^2 - \rho_k \xi_k^2) - \{ \Phi(Y^* + H) - \Phi(Y^*) \} \times L$$

e il secondo membro $\to -r^2 < 0$, per le (69) e (78).

Ne segue

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_1^n {}_k\, \xi_k \eta_k = -\infty$$

mentre, per essere le $\xi_k(t)$ limitate e le $\eta_k(t)$ infinitesime, deve essere

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_1^n {}_k\, \xi_k \eta_k = 0.$$

Non può essere pertanto $r > 0$ e la (64) è dimostrata.

Supponiamo ora che l'integrale $\{\xi_k(t), \eta_k(t)\}$, non identicamente nullo, abbia come suo intervallo di esistenza l'intervallo $t_0 \frown +\infty$ e ***dimostriamo che risulta***

(79) $$\lim_{t \to t_0+} R(t) = +\infty.$$

La (79) è evidente se t_0 è finito. In tal caso infatti la funzione non crescente $R(t)$ non può avere, per $t \to t_0+$, un limite finito ρ, perchè l'integrale $\{\xi_k(t), \eta_k(t)\}$ risulterebbe limitato nell'intervallo $t_0 \frown +\infty$ e quindi prolungabile in un più ampio intervallo $t_1 \frown +\infty$, con $t_1 < t_0$.

Supponiamo perciò $t_0 = -\infty$. Proviamo che non può essere

(80) $$\lim_{t \to -\infty} R(t) = R$$

finito e > 0. Per questo si ragiona sostanzialmente come nel caso precedente.

Supponiamo che valga la (80), con $R > 0$ e finito.

Si ha dalla (61), integrando nell'intervallo $-\infty \frown +\infty$ e tenendo presente la (64),

$$R^2 = 2\int_{-\infty}^{\infty} \{\Phi(Y^* + H) - \Phi(Y^*)\} \times H dt$$

e allora, considerando l'insieme $E_\varepsilon \subseteq J$ ove vale la (65), si ricava

(81) $$\mu(E_\varepsilon) < \frac{R^2}{2\omega_\varepsilon}.$$

Si ha perciò

$$\min \lim_{t \to -\infty} H(t) = 0.$$

Dimostriamo che è

(82) $$\lim_{t \to -\infty} H(t) = 0.$$

Infatti, se non vale la (82), risulta

(83) $$\max \lim_{t \to -\infty} |H(t)| = \gamma$$

con

(84) $$0 < \gamma \leq R$$

per la (80).

Consideriamo ora la funzione $A^2(t)$ e prendiamo σ, con

$$0 < 2\varepsilon \leq \sigma < \gamma.$$

Ragionando come precedentemente si dimostra che (per $b_m < t_\varepsilon''$) il numero ν degli intervalli $a_m \frown b_m$ di E_ε nei quali esiste un punto τ_m in cui sia

$| H(\tau_m) | \geq \sigma$ verifica la limitazione

$$\nu < \frac{R^2 N}{\sigma^2 \omega_\varepsilon}$$

dove N è una costante positiva tale che risulti, per $t \in J$,

$$| 2AA' | \leq N.$$

Di qui, per l'arbitrarietà di σ, segue la (82).

Dalla (79) segue allora

$$\lim_{t \to -\infty} A^2(t) = R^2 > 0$$

e quindi, come precedentemente,

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{d}{dt} \sum_1^n{}_k\, \xi_k \eta_k = \lim_{t \to -\infty} \{ \sum_1^n{}_k (\eta_k - \rho_k \xi_k^2) - \{ \Phi(Y^* + H) - \Phi(Y^*) \} \times L \} = -R^2 < 0.$$

Ne segue

$$\lim_{t \to -\infty} \sum_1^n{}_k\, \xi_k \eta_k = + \infty,$$

ciò che è assurdo, essendo le ξ_k limitate e le η_k infinitesime. Deve perciò essere $R = 0$, ma questo è assurdo poichè richiede $R(t) = 0$ per ogni t di J.

La tesi è perciò provata.

In virtù di quanto abbiamo dimostrato nel § 1, si conchiude che, *se la funzione $F(t)$ è quasi-periodica l'integrale* $\{ x_k^*(t), y_k^*(t) \}$ *risulta quasi-periodico* (9).

OSSERVAZIONE. - Possiamo indicare dei casi particolari espressivi, nei quali è soddisfatta la condizione d).

Questa si scrive, in forma scalare,

$$\sum_1^n{}_k \{ \varphi_k(u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) - \varphi_k(u_1, \dots, u_n) \} v_k > 0.$$

Ora, ammessa l'esistenza e continuità delle derivate $\varphi_{kj} = \dfrac{\partial \varphi_k(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_j}$, risulta

$$\sum_1^n{}_k \{ \varphi_k(u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) - \varphi_k(u_1, \dots, u_n) \} v_k =$$
$$= \int_0^1 \left\{ \sum_1^n{}_k\, v_k \frac{d}{d\lambda} \varphi_k(u_1 + \lambda v_1, \dots, u_n + \lambda v_n) \right\} d\lambda =$$
$$= \int_0^1 \left(\sum_{k,j}^{1 \dots n} \varphi_{kj}(u_1 + \lambda v_1, \dots, u_n + \lambda v_n) v_k v_j \right) d\lambda.$$

(9) Per un altro teorema di esistenza, concernente un caso dissipativo con un grado di libertà, vedasi: G. E. H. REUTER, *On certain non-linear differential equations with almost-periodic solutions*, « Journ. London Math. Soc. », vol. XXVI, 1951, pp. 215-221.

Pertanto *se supponiamo che in tutti i punti* $(u_1, \ldots, u_n)$ *la forma quadratica*

$$\sum_{k,j}^{1\ldots n} \varphi_{kj}(u_1, \ldots, u_n) v_k v_j$$

sia definita positiva, la condizione d) *è soddisfatta*

Ammessa questa ipotesi su $\Phi(Y)$, e inoltre che $F(t)$ sia *periodica* e che valga la a), CACCIOPPOLI e GHIZZETTI ([10]) hanno dimostrato che *la* (22) *o non ammette integrali limitati o, se ne ammette uno, questo è periodico e ad esso risultano asintotici, per* $t \to +\infty$, *tutti gli altri integrali.*

Osserviamo infine che *la* d) *risulta soddisfatta se è*

$$\Phi(U) = UL(|U|), \tag{85}$$

con $L(|U|)$ *funzione positiva per* $|U| > 0$ *e tale che* $|\Phi(U)| = |U| L(|U|)$ *risulti crescente con* $|U|$. È questa l'ipotesi consueta nello studio dei *moti con resistenza passiva.*

Posto infatti $W = U + V$, risulta

$$\begin{aligned} \{\Phi(U+V) - \Phi(U)\} \times V &= \{\Phi(W) - \Phi(U)\} \times (W - U) = \\ &= \Phi(W) \times W + \Phi(U) \times U - \Phi(W) \times U - \Phi(U) \times W = \\ &= |W|^2 L(|W|) + |U|^2 L(|U|) - U \times W \{L(|W|) + L(|U|)\} \geq \\ &\geq |W|^2 L(|W|) + |U|^2 L(|U|) - |U|\,|W| \{L(|W|) + L(|U|)\} \end{aligned} \tag{86}$$

e quindi

$$\{\Phi(U+V) - \Phi(U)\} \times V \geq \{|W| L(|W|) - |U| L(|U|)\}\{|W| - |U|\}. \tag{87}$$

Poichè $|U| L(|U|)$ è funzione crescente, il secondo membro della (87) è ≥ 0 qualunque siano U e W. Inoltre il segno $=$ si presenta solo per $|W| = |U|$. Ma in tal caso, non potendo essere $V = 0$, deve essere $W \neq U$, quindi $-U \times W > -|U|\,|W|$. Per le (86) e (87), si conchiude allora che *se è* $V \neq 0$ *e se* $\Phi(U)$ *è data dalla* (85) (con il comportamento dianzi ammesso) *la condizione* d *è soddisfatta.*

([9]) R. CACCIOPPOLI e A. GHIZZETTI, loc. cit. in ([2]), pp. 495-497.