Sull'integrazione delle equazioni di propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi omogenei isotropi e cristallini.

Memoria di ANGELO TONOLO (a Padova).

A Mauro Picone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Viene risolto, con quadrature, il problema di* CAUCHY *per le equazioni dichiarate nel titolo. Sia segnalata la forma sotto la quale si possono mettere gli integrali, quando la propagazione avviene in un mezzo omogeneo isotropo, sia esso conduttore o no.*

La ricerca degli integrali delle equazioni di MAXWELL-HERTZ che regolano la propagazione delle vibrazioni elettromagnetiche in un mezzo omogeneo isotropo o cristallino, uniassico o biassico, può essere eseguita, o nelle condizioni di un problema di CAUCHY, oppure in quelle di un problema al contorno o misto. Sia dal primo che dal secondo punto di vista, i lavori sono stati numerosi e vari i metodi escogitati per risolvere le relative quistioni.

Lasciando in disparte questo secondo punto di vista, che potrà formare oggetto di un'altra ricerca, e trattando qui solo del problema di CAUCHY, dirò che la prima determinazione generale del campo elettromagnetico in tutto lo spazio e per qualunque valore del tempo, successivo ad un fissato istante, quando il campo è conosciuto in questo istante, si trova in una Nota del BIRKELAND [1], ed è stata ottenuta con formule che possono considerarsi come una estensione alle equazioni di MAXWELL-HERTZ della classica formula di POISSON relativa all'equazione canonica dei piccoli moti. Successivamente il TEDONE [2], generalizzando alle equazioni in discorso il metodo d'integrazione dei coni caratteristici del VOLTERRA [3], ottenne una formula valida nel cronotopo, dalla quale poi dedusse la risoluzione del problema di CAUCHY nello spazio indefinito per le equazioni di partenza. Tanto nell'una, che nell'altra ricerca, il mezzo è supposto isotropo e conduttore, e nella Memoria del TEDONE, sono anche ammesse correnti di convezione. A me

---

(1) K. BIRKELAND, *Solution générale des équations de Maxwell pour un milieux absorbant homogène et isotrope*, « Comptes Rendus », T. CXX (1895); « Archive de Genève », T. XXXIV (1895).

(2) O. TEDONE, *Sull'integrazione delle equazioni di Maxwell*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5^{a}, vol. XXV (1916).

(3) V. VOLTERRA, *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes*, « Acta math. », B. 18 (1894).

sembra di aver raggiunto un perfezionamento concettuale e formale eseguendo la integrazione come segue: si osservi dapprima, come dalle equazioni di MAXWELL–HERTZ si ottenga, come necessaria conseguenza, l'equazione delle onde sferiche smorzate alla quale soddisfa, separatamente, ciascuno dei vettori che figura nelle equazioni di partenza. L'applicazione a questa equazione della formula di WEBER, permette subito di assegnare il campo elettromagnetico in tutto lo spazio e per qualunque valore del tèmpo, successivo ad un fissato istante t_0 con i dati di CAUCHY in questo istante, perchè le derivate temporali dei vettori, calcolate per $t = t_0$, si possono eliminare in virtù delle equazioni di MAXWELL. Una giudiziosa trasformazione di integrali consente poi di presentare la soluzione del problema sotto una forma assai espressiva e di estrema concisione. Basta infatti sostituire nelle equazioni di MAXWELL–HERTZ, i cui termini sono tutti portati nei primi membri, al posto dei vettori che ivi figurano, certe funzioni vettoriali del posto e del tempo e cambiare segno al coefficiente di conducibilità elettrica, per avere senz'altro gli integrali richiesti. Queste funzioni ausiliarie si ottengono con integrazioni definite portate sul campo elettromagnetico iniziale.

Per i mezzi uniassici o biassici, le formule risolutive perdono questa semplicità, anche supponendo che la propagazione avvenga in un mezzo non conduttore. Vi si perviene, per i mezzi uniassici, utilizzando le formule di GRÜNWALD–SIGNORINI ([4]) per l'integrazione del sistema differenziale del second'ordine, conseguenza delle equazioni di MAXWELL–HERTZ, e per i mezzi biassici, particolarizzando le formule generali, date da HERGLOTZ ([5]), per l'integrazione, sempre con i dati di CAUCHY, delle equazioni dell'ottica cristallografica, e più generalmente, per quelle della meccanica dei mezzi continui.

Che effettivamente le formule finali, sia nei mezzi isotropi che cristallini, diano le espressioni analitiche degli integrali delle equazioni di MAXWELL–HERTZ, con i dati iniziali arbitrariamente assegnati, risulta provato da un procedimento di calcolo, purchè, beninteso, essi soddisfino a quelle condizioni di regolarità per cui sono lecite le operazioni che si devono effettuare su queste funzioni.

([4]) J. GRÜNWALD, *Ueber die Ausbreitung elastischer und elektromagnetischer Wellen in einaxig kristallinischen Medien*, « Sitzungsberichten Akad. Wiss. », Wien, Math. naturw. Classe, B. CXI (1902).

A. SIGNORINI, *Sulla teoria analitica dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici*. « Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa », vol. XII (1911).

([5]) G. HERGLOTZ, *Ueber die Integration linearer partieller Differentialgleichungen mit kostanten Koeffizienten*, « Berichte der math. phys. Klasse der säch. Akad. Wiss. », Leipzig. B. LXXVIII (1926) e B. LXXX (1928).

PRELIMINARI

1. Formula di Weber.

Consideriamo l'equazione differenziale a derivate parziali del second'ordine

$$\underset{2}{\Delta} U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \alpha U = 0, \qquad \underset{2}{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{1}$$

ove x, y, z rappresentano coordinate cartesiane ortogonali dello spazio ordinario S e t il tempo, α una costante positiva, negativa, o nulla. Siano: $P(x, y, z)$ un punto, comunque scelto di S, t un istante di tempo successivo all'istante iniziale $t = 0$, σ_t la superficie della sfera di centro P e raggio t, $f(Q)$, $\varphi(Q)$ due funzioni arbitrarie regolari del punto Q variabile in S,

$$I_0(\rho) = \sum_0^{\infty}{}_i \frac{1}{(\underline{|i})^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2i}$$

la funzione di BESSEL non oscillante di ordine zero e di argomento ρ. Poniamo

$$F(P, t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma_t} \frac{f(Q)}{t}\, d\sigma_t, \tag{2}$$

$$\Phi(P, t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma_t} \frac{\varphi(Q)}{t}\, d\sigma_t, \tag{3}$$

$$U(P, t) = \Phi(P, t) + \frac{\partial}{\partial t} F(P, t) + \frac{\alpha t}{2} F(P, t) - \tag{4}$$

$$- \int_0^t [\Phi(P, r) + F(P, r)] \frac{\partial}{\partial r} I_0(\sqrt{\alpha}\sqrt{t^2 - r^2})dr.$$

È noto che la funzione $U(P, t)$ determinata dalla *formula di Weber* (4), risolve il problema di CAUCHY per l'equazione (1) nello spazio ordinario e per qualunque valore positivo del tempo, cioè essa soddisfa alla (1) per qualsiasi $t > 0$ ed inoltre si ha

$$U(P, 0) = f(P), \qquad \frac{\partial U(P, 0)}{\partial t} = \varphi(P), \tag{5}$$

ovunque si trovi P in S.

2. Formula di Poisson.

a) Consideriamo l'equazione di D'ALEMBERT

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \underset{2}{\Delta} U = 0. \tag{6}$$

Con la *formula di Poisson*

$$U(P,\ t) = \Phi(P,\ t) + \frac{\partial}{\partial t} F(P,\ t), \tag{7}$$

si ottiene la funzione $U(P,\ t)$ che risolve in tutto S e per qualunque $t > 0$ il problema di Cauchy con le condizioni iniziali (5). Nella (7) le $F(P,\ t)$, $\Phi(P,\ t)$ rappresentano le funzioni

$$F(P,\ t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\sigma_t^{(1)}} \frac{f(Q)}{t}\, d\sigma_t^{(1)}, \tag{8}$$

$$\Phi(P,\ t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\sigma_t^{(1)}} \frac{\varphi(Q)}{t}\, d\sigma_t^{(1)}; \tag{9}$$

nelle (8), (9), $\sigma_t^{(1)}$ denota la superficie sferica di centro P e raggio $r = at$.

b) Per l'equazione più generale della (6)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \tag{10}$$

l'integrale $U(P,\ t)$ della (10) valido in tutto S e per qualunque istante positivo del tempo, è dato da

$$U(P,\ t) = \Phi(P,\ t) + \frac{\partial}{\partial t} F(P,\ t), \tag{11}$$

ove adesso è

$$F(P,\ t) = \frac{1}{4\pi abc} \int_{\sigma_t^{(2)}} \frac{f(Q)}{\sqrt{\dfrac{(x-\xi)^2}{a^4} + \dfrac{(y-\eta)^2}{b^4} + \dfrac{(z-\zeta)^2}{c^4}}}\, d\sigma_t^{(2)}, \tag{12}$$

$$\Phi(P,\ t) = \frac{1}{4\pi abc} \int_{\sigma_t^{(2)}} \frac{\varphi(Q)}{\sqrt{\dfrac{(x-\xi)^2}{a^4} + \dfrac{(y-\eta)^2}{b^4} + \dfrac{(z-\zeta)^2}{c^4}}}\, d\sigma_t^{(2)}; \tag{13}$$

nelle (12), (13), $\sigma_t^{(2)}$ denota la superficie dell'ellissoide di centro P e di equazione cartesiana

$$\frac{(x-\xi)^2}{a^2} + \frac{(y-\eta)^2}{b^2} + \frac{(z-\zeta)^2}{c^2} = t^2.$$

3. Formule di Grünwald-Signorini.

Sia il sistema differenziale

$$(14)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - a^2 \underset{2}{\Delta} X - (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0,\\ &\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - a^2 \underset{2}{\Delta} Y + (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned} \qquad \underset{2}{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Indichiamo con $\sigma_\tau^{(1)}$ la superficie della sfera di centro $P(x, y, z)$ e raggio $a\tau$, τ un fissato istante positivo del tempo t; con $\sigma_\tau^{(2)}$ la superficie dell'ellissoide di rotazione di centro P e di equazione

$$\frac{(x-\xi)^2}{c^2} + \frac{(y-\eta)^2}{c^2} + \frac{(z-\zeta)^2}{a^2} = \tau^2;$$

con S_τ lo spazio racchiuso fra le due superficie $\sigma_\tau^{(1)}$ e $\sigma_\tau^{(2)}$; con $\bar{\sigma}_\tau^{(2)}$ la superficie della sfera corrispondente all'ellissoide $\sigma_\tau^{(2)}$ nell'affinità definita dalle posizioni

$$x = \frac{c}{a}\bar{x}, \qquad y = \frac{c}{a}\bar{y}, \qquad z = \bar{z}.$$

Essendo, come in precedenza, $f(Q)$, $\varphi(Q)$ due funzioni regolari del punto $Q(\xi, \eta, \zeta)$ variabile in S, si ponga

$$(15)\qquad \begin{aligned} \omega_x[f, \varphi] = {} & \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\!\!\int_{\bar{\sigma}_t^{(2)}}\left[f(Q) - \frac{f(Q)(\xi - x) + \varphi(Q)(\eta - y)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}(\xi - x)\right] d\bar{\sigma}_t^{(2)} + \\ & + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\!\!\int_{\sigma_t^{(1)}}\left[\frac{f(Q)(\xi - x) + \varphi(Q)(\eta - y)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}(\xi - x)\right] d\sigma_t^{(1)} \pm \\ & \pm \frac{1}{4\pi a}\int\!\!\int_{S_t}\left[f(Q)\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \varphi(Q)\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}\right] dS_t, \end{aligned}$$

$$(16)\qquad \begin{aligned} \omega_y[f, \varphi] = {} & \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\!\!\int_{\bar{\sigma}_t^{(2)}}\left[\varphi(Q) - \frac{f(Q)(\xi - x) + \varphi(Q)(\eta - y)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}(\eta - y)\right] d\bar{\sigma}_t^{(2)} + \\ & + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\!\!\int_{\sigma_t^{(1)}}\left[\frac{f(Q)(\xi - x) + \varphi(Q)(\eta - y)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}(\eta - y)\right] d\sigma_t^{(1)} \pm \\ & \pm \frac{1}{4\pi a}\int\!\!\int_{S_t}\left[f(Q)\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + \varphi(Q)\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}\right] dS_t; \end{aligned}$$

$$\chi = \log[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{-1/2}.$$

In queste formule vanno presi i segni $\pm$, secondochè si ha $a > c$, oppure $a < c$.

Siano ora $X_0(Q)$, $Y_0(Q)$; $\dot{X}_0(Q)$, $\dot{Y}_0(Q)$, quattro funzioni regolari del punto Q variabile in S; le funzioni $X(P, t)$, $Y(P, t)$ definite dalle posizioni

$$
\begin{aligned}
X(P,\ t) &= \omega_x[\dot{X}_0,\ \dot{Y}_0] + \frac{\partial}{\partial t}\omega_x[X_0,\ Y_0], \\
Y(P,\ t) &= \omega_y[\dot{X}_0,\ \dot{Y}_0] + \frac{\partial}{\partial t}\omega_y[X_0,\ Y_0],
\end{aligned}
\tag{17}
$$

soddisfano al sistema (14) ovunque si trovi P e per ogni $t > 0$, ed inoltre si ha

$$
\begin{aligned}
X(P,\ 0) &= X_0(P), & Y(P,\ 0) &= Y_0(P); \\
\frac{\partial X(P,\ 0)}{\partial t} &= \dot{X}_0(P), & \frac{\partial Y(P,\ 0)}{\partial t} &= \dot{Y}_0(P).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Le formule (17) sono state stabilite da GRÜNWALD e da SIGNORINI [6].

4. Formule di Herglotz.

Consideriamo i due sistemi differenziali

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= \Delta_2 X - \frac{\partial\theta}{\partial x}, \\
\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \Delta_2 Y - \frac{\partial\theta}{\partial y}, \\
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= \Delta_2 Z - \frac{\partial\theta}{\partial z};
\end{aligned}
\right.
\qquad
\theta = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.
\tag{19}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) - c^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right), \\
\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) - a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right), \\
\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) - b^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right).
\end{aligned}
\right.
\tag{20}
$$

---

[6] Utilizzando le soluzioni elementari, il sistema (14) è stato integrato da F. BUREAU, *Sur l'intégration des équations de propagation des ondes lumineuses dans les milieux cristallins uniaxes*, « Comptes Rendus », t. 226 (1948) e con i metodi funzionali del FANTAPPIÈ, da E. LINÉS ESCARDO, *Resolución en forma finita del problema de Cauchy sobre una hypersuperficie cualquiera en la equación des ondas con cualquier número de variables, y en otras notables de tipo hyperbolico con coeficientes constantes*, « Collec. Math. », vol. II (1949).

Poniamo

$$K(P,\ t) = \frac{1}{8\pi^2}\int_\omega \mathrm{sign}\,[x\xi + y\eta + z\zeta + t]d\omega, \tag{21}$$

ove l'integrazione va eseguita sulle due falde della superficie di FRESNEL di equazione cartesiana

$$\begin{aligned} H = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(b^2c^2\xi^2 + c^2a^2\eta^2 + a^2b^2\zeta^2) - \\ - \{ (b^2 + c^2)\xi^2 + (c^2 + a^2)\eta^2 + (a^2 + b^2)\zeta^2 \} + 1 = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

e

$$d\omega = \pm \frac{1}{\dfrac{\partial(H,\ h,\ k)}{\partial(\xi,\ \eta,\ \zeta)}} dhdk$$

rappresenta il differenziale della superficie. Per la falda interna si deve assumere il segno negativo e per quella esterna il segno positivo.

Siano $X_0(Q)$, $Y_0(Q)$, $Z_0(Q)$; $\dot{X}_0(Q)$, $\dot{Y}_0(Q)$, $\dot{Z}_0(Q)$, sei funzioni regolari del punto Q variabile in S, e facciamo le posizioni

$$(23)\quad \begin{cases} b^2c^2X_0(Q) = g_1(Q), \\ c^2a^2Y_0(Q) = g_2(Q), \\ a^2b^2Z_0(Q) = g_3(Q); \end{cases} \qquad (24)\quad \begin{cases} b^2c^2\dot{X}_0(Q) = f_1(Q), \\ c^2a^2\dot{Y}_0(Q) = f_2(Q), \\ a^2b^2\dot{Z}_0(Q) = f_3(Q); \end{cases}$$

$$\varphi(Q,\ t) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial X_0}{\partial\xi} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial Y_0}{\partial\eta} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial Z_0}{\partial\zeta} + t\left[\frac{1}{a^2}\frac{\partial \dot{X}_0}{\partial\xi} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial \dot{Y}_0}{\partial\eta} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \dot{Z}_0}{\partial\zeta}\right], \tag{25}$$

$$\Phi(P,\ t) = -\int_0^t ds\int K(P-Q,\ t-s)\varphi(Q,\ s)dQ, \tag{26}$$

$$\Phi_\alpha(P,\ t) = \int K(P-Q,\ t)f_\alpha(Q)dQ + \frac{\partial}{\partial t}\int K(P-Q,\ t)g_\alpha(Q)dQ. \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3). \tag{27}$$

In queste formule $dQ = d\xi d\eta d\zeta$ e le integrazioni rispetto a queste variabili vanno estese a tutto l'asse reale.

Le funzioni

$$(28)\quad \begin{cases} X(P,\ t) = \underset{2}{\Delta}\dfrac{\partial}{\partial x}\Phi(P,\ t) + \sum_1^3{}_\alpha\, \Delta^{1\alpha}\Phi_\alpha(P,\ t), \\ Y(P,\ t) = \underset{2}{\Delta}\dfrac{\partial}{\partial y}\Phi(P,\ t) + \sum_1^3{}_\alpha\, \Delta^{2\alpha}\Phi_\alpha(P,\ t), \\ Z(P,\ t) = \underset{2}{\Delta}\dfrac{\partial}{\partial z}\Phi(P,\ t) + \sum_1^3{}_\alpha\, \Delta^{3\alpha}\Phi_\alpha(P,\ t), \end{cases}$$

ove

$$
(29)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\Delta^{11} = -\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{b^2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},\\
&\Delta^{22} = -\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},\\
&\Delta^{33} = -\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{a^2b^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},\\
&\Delta^{12} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}, \quad \Delta^{23} = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}, \quad \Delta^{31} = -\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial z\partial x},\\
&\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},
\end{aligned}\right.
$$

sono gli integrali del sistema (19) che soddisfano alle condizioni iniziali

$$
(30)\qquad \left\{\begin{aligned}
&X(P,\ 0) = X_0(P), && Y(P,\ 0) = Y_0(P), && Z(P,\ 0) = Z_0(P);\\
&\frac{\partial X(P,\ 0)}{\partial t} = \dot{X}_0(P), && \frac{\partial Y(P,\ 0)}{\partial t} = \dot{Y}_0(P), && \frac{\partial Z(P,\ 0)}{\partial t} = \dot{Z}_0(P).
\end{aligned}\right.
$$

Formule analoghe valgono per la integrazione del sistema (20) con le condizioni iniziali

$$
(31)\qquad \left\{\begin{aligned}
&U(P,\ t) = U_0(P), && V(P,\ t) = V_0(P), && W(P,\ 0) = W_0(P);\\
&\frac{\partial U(P,\ 0)}{\partial t} = \dot{U}_0(P), && \frac{\partial V(P,\ 0)}{\partial t} = \dot{V}_0(P), && \frac{\partial W(P,\ 0)}{\partial t} = \dot{W}_0(P).
\end{aligned}\right.
$$

Gli integrali sono dati dalle formule

$$
(32)\qquad \left\{\begin{aligned}
&U(P,\ t) = \bar{\Delta}_2 \frac{\partial}{\partial x}\bar{\Phi}(P,\ t) + \sum_{1}^{3}{}_{\alpha}\, \bar{\Delta}^{1\alpha}\bar{\Phi}_\alpha(P,\ t),\\
&V(P,\ t) = \bar{\Delta}_2 \frac{\partial}{\partial y}\bar{\Phi}(P,\ t) + \sum_{1}^{3}{}_{\alpha}\, \bar{\Delta}^{2\alpha}\bar{\Phi}_\alpha(P,\ t),\\
&W(P,\ t) = \bar{\Delta}_2 \frac{\partial}{\partial z}\bar{\Phi}(P,\ t) + \sum_{1}^{3}{}_{\alpha}\, \bar{\Delta}^{3\alpha}\bar{\Phi}_\alpha(P,\ t),
\end{aligned}\right.
$$

ove, per simmetria con le precedenti notazioni, si è posto

$$
(33)\qquad \left\{\begin{aligned}
&U_0(Q) = \bar{g}_1(Q),\\
&V_0(Q) = \bar{g}_2(Q),\\
&W_0(Q) = \bar{g}_3(Q);
\end{aligned}\right.
\qquad\qquad
(34)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\dot{U}_0(Q) = \bar{f}_1(Q),\\
&\dot{V}_0(Q) = \bar{f}_2(Q),\\
&\dot{W}_0(Q) = \bar{f}_3(Q);
\end{aligned}\right.
$$

ed inoltre

$$
(35)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\bar{\Delta}^{11} = -(b^2+c^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial t^2},\\
&\bar{\Delta}^{22} = -(c^2+a^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - b^2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial t^2},\\
&\bar{\Delta}^{33} = -(a^2+b^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2} - c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial t^2},\\
&\bar{\Delta}^{12} = -c^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\quad \bar{\Delta}^{23} = -a^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial z},\quad \bar{\Delta}^{31} = -b^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial x},\\
&\bar{\Delta}_2 = b^2c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c^2a^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a^2b^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}.
\end{aligned}\right.
$$

Le (28), (32) sono le formule che si ricavano da quelle più generali stabilite da Herglotz nella integrazione delle equazioni dell'ottica cristallografica.

CAPITOLO I.

EQUAZIONI ELETTROMAGNETICHE NEI MEZZI OMOGENEI ISOTROPI CONDUTTORI. PROBLEMA DI CAUCHY E SUA RISOLUZIONE

1. Denotiamo con S un mezzo indefinito omogeneo, isotropo, conduttore; con $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, rispettivamente la forza elettrica e magnetica in un punto di coordinate cartesiane ortogonale (ξ, η, ζ) e all'istante di tempo τ; con ε, μ, λ, c, il potere induttore specifico, la permeabilità magnetica, la conducibilità elettrica e la velocità della luce nel vuoto.

Supposto che non vi siano correnti di convezione, nè sorgenti di elettricità, le equazioni di Maxwell-Hertz che regolano la propagazione delle onde luminose nella teoria elettromagnetica della luce sono le seguenti:

$$
(\mathrm{I})\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - a\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} + b\boldsymbol{E} = 0, &&\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0, &&a = \sqrt{\mu\,|\,\varepsilon},\\
&\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \frac{1}{a}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} - b\boldsymbol{H} = 0, &&\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0, &&b = 2\pi\lambda\mu,
\end{aligned}
$$

ove

$$
(1)\qquad \boldsymbol{E} = e^{bt}\mathfrak{E},\qquad \boldsymbol{H} = e^{bt}\mathfrak{H},\qquad t = \tau\,|\,\varepsilon\mu
$$

e le operazioni rot, div, si riferiscono alle coordinate x, y, z legate alle precedenti ξ, η, ζ dalle relazioni

$$
x = \xi\,|\,c\sqrt{\varepsilon\mu},\qquad y = \eta\,|\,c\sqrt{\varepsilon\mu},\qquad z = \zeta\,|\,c\sqrt{\varepsilon\mu}.
$$

Dalle (I) si traggono, come conseguenza, le equazioni differenziali del second' ordine

$$(2)\qquad \underset{2}{\Delta} \boldsymbol{E} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + b^2 \boldsymbol{E} = 0, \qquad\qquad (3)\qquad \underset{2}{\Delta} \boldsymbol{H} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} + b^2 \boldsymbol{H} = 0.$$

Sia proposta dapprima la quistione di determinare, con quadrature, le espressioni delle forze $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ in tutto lo spazio indefinito e per ogni valore del tempo $\tau > 0$, nell'ipotesi di conoscere ivi queste forze all'istante iniziale $\tau = 0$. Basterà riferirsi alla determinazione dei vettori $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(P, t)$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(P, t)$. Diciamo pertanto $\boldsymbol{E}_0(P)$, $\boldsymbol{H}_0(P)$ i valori iniziali di $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$; si abbia quindi

$$(4)\qquad \boldsymbol{E}(P, 0) = \boldsymbol{E}_0(P), \qquad\qquad (5)\qquad \boldsymbol{H}(P, 0) = \boldsymbol{H}_0(P).$$

Si osservi che, in virtù del sistema (I), la conoscenza dei valori iniziali $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ delle funzioni $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, permette di assegnare i valori iniziali delle derivate temporali $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$, $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$, e noi porremo

$$(6)\qquad \frac{\partial \boldsymbol{E}(P, 0)}{\partial t} = \dot{\boldsymbol{E}}_0(P), \qquad\qquad (7)\qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}(P, 0)}{\partial t} = \dot{\boldsymbol{H}}_0(P),$$

con

$$(8)\quad \dot{\boldsymbol{E}}_0(P) = a \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_0(P) - b\boldsymbol{E}_0(P), \qquad (9)\quad \dot{\boldsymbol{H}}_0(P) = -\frac{1}{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_0(P) + b\boldsymbol{H}_0(P).$$

Poichè $\boldsymbol{E}(P, t)$, $\boldsymbol{H}(P, t)$ soddisfano al sistema (I) in tutto S e per ogni t, sarà valida la equazione

$$(10)\qquad \underset{2}{\Delta} \boldsymbol{E}(P, t) - \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(P, t)}{\partial t^2} + b^2 \boldsymbol{E}(P, t) = 0.$$

Allora l'espressione analitica di $\boldsymbol{E}(P, t)$ si trova subito mediante la *formula di Weber* data nei Preliminari; abbiamo

$$(11)\qquad \boldsymbol{E}(P, t) = \Phi(P, t) + \frac{\partial \boldsymbol{F}(P, t)}{\partial t} + \frac{b^2 t}{2} \boldsymbol{F}(P, t) - $$
$$- \int_0^t \left\{ \boldsymbol{F}(P, r) \frac{\partial}{\partial t} + \Phi(P, r) \right\} \frac{\partial}{\partial r} I_0(b\sqrt{t^2 - r^2})\, dr,$$

ove

$$(12)\qquad \boldsymbol{F}(P, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_t} \frac{\boldsymbol{E}_0(Q)}{t}\, d\sigma_t, \qquad\qquad (13)\qquad \Phi(P, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_t} \frac{\dot{\boldsymbol{E}}_0(Q)}{t}\, d\sigma_t.$$

Possiamo dare alla (11) una forma assai espressiva.

A questo scopo osserviamo che, in virtù della (8), si può scrivere

$$(14)\qquad 4\pi\Phi(P,\ t)=a\int\limits_{\sigma_t}\frac{\operatorname{rot'}\boldsymbol{H}_0(Q)}{t}\,d\sigma_t-b\int\limits_{\sigma_t}\frac{\boldsymbol{E}_0(Q)}{t}\,d\sigma_t\,.$$

L'operazione rot' si riferisce alle coordinate correnti x', y', z', dei punti Q della superficie σ_t, ma è facile mostrare che questo operatore si può portare fuori dal segno d'integrale, purchè venga riferito alle coordinate x, y, z del punto P (7).

Si ha allora

$$(15)\qquad \operatorname{rot}\int\limits_{\sigma_t}\frac{\boldsymbol{H}_0(Q)}{t}\,d\sigma_t=\int\limits_{\sigma_t}\frac{\operatorname{rot'}\boldsymbol{H}_0(Q)}{t}\,d\sigma_t\,,$$

e quindi dalla (14)

$$(16)\qquad 4\pi\Phi(P,\ t)=a\operatorname{rot}\int\limits_{\sigma_t}\frac{\boldsymbol{H}_0(Q)}{t}\,d\sigma_t-b\int\limits_{\sigma_t}\frac{\boldsymbol{E}_0(Q)}{t}\,d\sigma_t\,.$$

Sostituendo nella (11) otteniamo

$$(17)\qquad \begin{aligned}4\pi\boldsymbol{E}(P,\ t)={}&a\operatorname{rot}\int\limits_{\sigma_t}\frac{\boldsymbol{H}_0(Q)}{t}\,d\sigma_t-b\int\limits_{\sigma_t}\frac{\boldsymbol{E}_0(Q)}{t}\,d\sigma_t+\\&+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\sigma_t}\frac{\boldsymbol{E}_0(Q)}{t}\,d\sigma_t+\frac{b^2t}{2}\int\limits_{\sigma_t}\frac{\boldsymbol{E}_0(Q)}{t}\,d\sigma_t-\\&-\int\limits_0^t\frac{\partial^2I_0(b\sqrt{t^2-r^2})}{\partial r\partial t}\,dr\int\limits_{\sigma_r}\frac{\boldsymbol{E}_0(Q)}{r}\,d\sigma_r-\\&-\int\limits_0^t\frac{\partial I_0(b\sqrt{t^2-r^2})}{\partial r}\,dr\left\{a\operatorname{rot}\int\limits_{\sigma_r}\frac{\boldsymbol{H}_0(Q)}{r}\,d\sigma_r-b\int\limits_{\sigma_r}\frac{\boldsymbol{E}_0(Q)}{r}\,d\sigma_r\right\},\end{aligned}$$

ove con σ_r intendiamo la superficie della sfera di centro P e raggio r, con $0<r\leq t$.

---

(7) Infatti, per fissare le idee, diamo alla sfera σ_t uno spostamento rigido di ampiezza dy parallelo all'asse y; ne risulta per y' l'accrescimento dy (le altre coordinate restando invariate), per la componente, ad esempio, $H_{0|x'}$, l'accrescimento $\frac{\partial H_{0|x'}}{\partial y'}\,dy$ e per l'integrale

$$I(P,\ t)=\int\limits_{\sigma_t}\frac{H_{0|x'}}{t}\,d\sigma_t,$$

Osserviamo che

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} I_0(b\sqrt{t^2-r^2})\right]_{r=t} = -\frac{b^2 t}{2}.$$

Ne risulta

$$(18)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{\partial I_0(b\sqrt{t^2-r^2})}{\partial r}\,dr \int_{\sigma_r} \frac{E_0(Q)}{r}\,d\sigma_r = -\frac{b^2 t}{2}\int_{\sigma_r} \frac{E_0(Q)}{t}\,d\sigma_t + \\ + \int_0^t \frac{\partial^2 I_0(b\sqrt{t^2-r^2})}{\partial r\partial t}\,dr \int_{\sigma_r} \frac{E_0(Q)}{r}\,d\sigma_r,$$

e quindi dalla (17), ordinando opportunamente i termini,

$$(19)\qquad 4\pi E(P,\ t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{\sigma_t} \frac{E_0(Q)}{t}\,d\sigma_t - \int_0^t \frac{\partial I_0(b\sqrt{t^2-r^2})}{\partial r}\,dr \int_{\sigma_r} \frac{E_0(Q)}{r}\,d\sigma_r\right\} + \\ + a \operatorname{rot}\left\{\int_{\sigma_t} \frac{H_0(Q)}{t}\,d\sigma_t - \int_0^t \frac{\partial I_0(b\sqrt{t^2-r^2})}{\partial r}\,dr \int_{\sigma_r} \frac{H_0(Q)}{r}\,d\sigma_r\right\} - \\ - b\left\{\int_{\sigma_t} \frac{E_0(Q)}{t}\,d\sigma_t - \int_0^t \frac{\partial I_0(b\sqrt{t^2-r^2})}{\partial r}\,dr \int_{\sigma_r} \frac{E_0(Q)}{r}\,d\sigma_r\right\}.$$

Se quindi facciamo le posizioni

$$(20)\qquad 4\pi e(P,\ t) = \int_{\sigma_t} \frac{E_0(Q)}{t}\,d\sigma_t - \int_0^t \frac{\partial I_0(b\sqrt{t^2-r^2})}{\partial r}\,dr \int_{\sigma_r} \frac{E_0(Q)}{r}\,d\sigma_r,$$

$$(21)\qquad 4\pi h(P,\ t) = -\int_{\sigma_t} \frac{H_0(Q)}{t}\,d\sigma_t + \int_0^t \frac{\partial I_0(b\sqrt{t^2-r^2})}{\partial r}\,dr \int_{\sigma_r} \frac{H_0(Q)}{r}\,d\sigma_r,$$

---

la variazione

$$d_y I(P,\ t) = \int_{\sigma_t} \frac{\partial H_{0|x'}}{\partial y'}\,dy\,\frac{d\sigma_t}{t} = dy \int_{\sigma_t} \frac{\partial H_{0|x'}}{\partial y'}\,\frac{d\sigma_t}{t},$$

perchè dy resta lo stesso per tutti gli elementi $d\sigma_t$ della sfera σ_t. Possiamo quindi scrivere

$$\frac{d_y I(P,\ t)}{dy} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_t} \frac{H_{0|x'}}{t}\,d\sigma_t = \int_{\sigma_t} \frac{\partial H_{0|x'}}{\partial y'}\,\frac{d\sigma_t}{t}.$$ c. d. d.

si arriva alla formula definitiva

$$E(P,\ t) = \frac{\partial e(P,\ t)}{\partial t} - a \operatorname{rot} h(P,\ t) - b e(P,\ t). \tag{22}$$

Un calcolo perfettamente analogo al precedente, porta alla seguente espressione del vettore $H(P,\ t)$

$$H(P,\ t) = \frac{\partial h(P,\ t)}{\partial t} + \frac{1}{a} \operatorname{rot} e(P,\ t) + b h(P,\ t). \tag{23}$$

Dunque: *Se* $E(P,\ t)$, $H(P,\ t)$ *sono integrali delle equazioni* (I) *in tutto lo spazio* S *e per ogni valore positivo di* t, *e per essi si ha*

$$E(P,\ 0) = E_0(P), \qquad H_0(P,\ 0) = H_0(P),$$

le loro espressioni analitiche si ottengono dai primi membri delle equazioni (I), *sostituendo al posto delle* $E(P,\ t)$, $H(P,\ t)$ *le funzioni* $e(P,\ t)$, $h(P,\ t)$ *date dalle* (20), (21) *e cambiando* b *in* $-b$.

2. Il risultato al quale siamo giunti si può invertire. A questo scopo denotiamo con $E_0(Q)$, $H_0(Q)$, $\dot{E}_0(Q)$, $\dot{H}_0(Q)$, quattro funzioni regolari del punto Q variabile in S e tali che per esse si abbia

(24) $\qquad \operatorname{div} E_0(Q) = 0, \qquad\qquad$ (25) $\qquad \operatorname{div} H_0(Q) = 0.$

Con le prime due funzioni $E_0(Q)$, $H_0(Q)$, noi possiamo costruire le $e(P,\ t)$, $h(P,\ t)$ a mezzo delle (20), (21), e quindi le $E(P,\ t)$, $H(P,\ t)$ ricorrendo alle (22), (23). Queste si identificano con le espressioni date dalla formula di Weber (la (11) per la $E(P,\ t)$ e quella analoga per la $H(P,\ t)$), purchè si assuma

$$\dot{E}_0(Q) = a \operatorname{rot} H_0(Q) \quad b E_0(Q), \tag{26}$$

$$\dot{H}_0(Q) = -\frac{1}{a} \operatorname{rot} E_0(Q) + b H_0(Q). \tag{27}$$

Che le funzioni $E(P,\ t)$, $H(P,\ t)$, così costruite, soddisfino alle equazioni (I) di Maxwell-Hertz, può essere provato nel modo seguente.

Sappiamo già che esse soddisfano all'equazione (10) e a quella analoga scritta per la $H(P,\ t)$; inoltre si ha

$$E(P,\ 0) = E_0(P), \qquad H(P,\ 0) = H_0(P),$$

$$\frac{\partial E(P,\ 0)}{\partial t} = \dot{E}_0(P); \qquad \frac{\partial H(P,\ 0)}{\partial t} = \dot{H}_0(P).$$

Dunque, per il modo con il quale abbiamo scelto $E_0(P)$, $H_0(P)$, $\dot{E}_0(P)$, $\dot{H}_0(P)$ — formule (24), (25), (26), (27) — le equazioni (I) sono soddisfatte dalle funzioni $E(P,\ t)$ $H(P,\ t)$ per $t = 0$ in tutto S. Dimostriamo che ivi lo sono per ogni altro $t > 0$. A questo scopo, sostituiamo al posto delle $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ che figurano nelle equazioni vettoriali del sistema (I), le (22), (23), e diciamo $f(P, t)$, $g(P, t)$ i risultati di tale sostituzione, cioè poniamo

$$f(P, t) = -a \operatorname{rot} \boldsymbol{H}(P, t) + \frac{\partial \boldsymbol{E}(P, t)}{\partial t} + b\boldsymbol{E}(P, t), \tag{28}$$

$$g(P, t) = \frac{1}{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}(P, t) + \frac{\partial \boldsymbol{H}(P, t)}{\partial t} - b\boldsymbol{H}(P, t). \tag{29}$$

Poichè $\boldsymbol{E}(P, t)$, $\boldsymbol{H}(P, t)$ soddisfano alla (10) e a quella analoga per la $\boldsymbol{H}(P, t)$, si verifica che si ha identicamente

$$\underset{2}{\Delta} f(P, t) - \frac{\partial^2 f(P, t)}{\partial t^2} + b^2 f(P, t) = 0. \tag{30}$$

Dunque, l'espressione analitica di $f(P, t)$ si identifica con quella che viene data dalla formula di Weber. Nel caso nostro $f(P, 0) = 0$, come vedemmo. Per provare che è nulla anche la derivata temporale di $f(P, t)$ per $t = 0$, osserviamo che si ha

$$\frac{\partial f(P, t)}{\partial t} + a \operatorname{rot} g(P, t) - bf(P, t) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(P, t)}{\partial t^2} + \operatorname{rot}^2 \boldsymbol{E}(P, t) - b^2 \boldsymbol{E}(P, t), \tag{31}$$

donde, tenendo conto della identità vettoriale

$$\operatorname{rot}^2 \boldsymbol{E}(P, t) = -\underset{2}{\Delta} \boldsymbol{E}(P, t) + \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{E}(P, t),$$

e della identità (10), si ottiene

$$\frac{\partial f(P, t)}{\partial t} + a \operatorname{rot} g(P, t) - bf(P, t) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{E}(P, t). \tag{32}$$

Ma per $t = 0$, $f(P, 0) = 0$, $g(P, 0) = 0$, $\operatorname{div} \boldsymbol{E}(P, 0) = 0$, perciò $\frac{\partial f(P, 0)}{\partial t} = 0$. La formula di Weber applicata alla (30) dà pertanto

$$f(P, t) = 0.$$

Similmente si prova che

$$g(P, t) = 0.$$

Valgono quindi le identità seguenti in tutto S e per $t > 0$

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}(P, t)}{\partial t} - a \operatorname{rot} \boldsymbol{H}(P, t) + b\boldsymbol{E}(P, t) = 0, \tag{33}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}(P, t)}{\partial t} + \frac{1}{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}(P, t) - b\boldsymbol{H}(P, t) = 0. \tag{34}$$

c. d. d.

Da queste si vede subito che

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(P, t) = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H}(P, t) = 0$$

per il fatto che le divergenze dei due vettori sono nulle per $t = 0$ — formule (24), (25) —.

CAPITOLO II.

EQUAZIONI ELETTROMAGNETICHE NEI MEZZI OMOGENEI CRISTALLINI NON CONDUTTORI UNIASSICI E BIASSICI. PROBLEMA DI CAUCHY E SUA RISOLUZIONE

§ 1. - **Mezzi uniassici.**

1. Il mezzo omogeneo indefinito S sia omogeneo, cristallino, uniassico, perfettamente dielettrico. Assumendo come assi coordinati un sistema di assi di simmetria elettrica, denotiamo con X, Y, Z; U, V, W, le componenti della forza elettrica e quelle della forza magnetica e indicando con $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{c^2}$ le costanti dielettriche principali, le equazioni che regolano le vibrazioni elettromagnetiche sono le seguenti

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{\partial W}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial U}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial x}, \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial Z}{\partial t} = \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}, \\ \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0; \end{cases} \qquad \text{(II)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Da queste si ottengono i due seguenti gruppi di equazioni a derivate parziali del second'ordine

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} - c^2\dfrac{\partial^2 X}{\partial y^2} - a^2\dfrac{\partial^2 X}{\partial z^2} + (a^2 - c^2)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - c^2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - a^2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - (a^2 - c^2)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - c^2\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - a^2\dfrac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0; \end{cases}$$

$$\text{(2)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2\underset{2}{\Delta} U - (a^2 - c^2)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2\underset{2}{\Delta} V + (a^2 - c^2)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2\underset{2}{\Delta} W = 0. \end{cases}$$

Anche qui proponiamoci la quistione di trovare, con quadrature, le espressioni analitiche dei vettori $\boldsymbol{E}(P,\ t)$, $\boldsymbol{H}(P,\ t)$ nello spazio indefinito S e per ogni valore positivo del tempo, note che siano in ogni punto P le loro determinazioni $\boldsymbol{E}_0(P,\ 0)$, $\boldsymbol{H}_0(P,\ 0)$ all'istante $t=0$. Faremo le posizioni

$$X(P,\ 0)=X_0(P), \qquad Y(P,\ 0)=Y_0(P), \qquad Z(P,\ 0)=Z_0(P);$$

$$\frac{\partial X(P,\ 0)}{\partial t}=\dot{X}_0(P), \qquad \frac{\partial Y(P,\ 0)}{\partial t}=\dot{Y}_0(P), \qquad \frac{\partial Z(P,\ 0)}{\partial t}=\dot{Z}_0(P).$$

Cominciamo a determinare $Z(P,\ t)$. Poichè tale componente soddisfa alla terza delle equazioni (1), avremo, dalla formula (11) dei Preliminari,

$$Z(P,\ t)=\Phi(P,\ t)+\frac{\partial F(P,\ t)}{\partial t}, \tag{3}$$

con

$$\Phi(P,\ t)=\frac{1}{4\pi a^2 c}\int_{\sigma_t^{(2)}}\frac{\dot{Z}_0(Q)}{\sqrt{\dfrac{(x-\xi)^2}{c^4}+\dfrac{(y-\eta)^2}{c^4}+\dfrac{(z-\zeta)^2}{a^4}}}\,d\sigma_t^{(2)}, \tag{4}$$

$$F(P,\ t)=\frac{1}{4\pi a^2 c}\int_{\sigma_t^{(2)}}\frac{Z_0(Q)}{\sqrt{\dfrac{(x-\xi)^2}{c^4}+\dfrac{(y-\eta)^2}{c^4}+\dfrac{(z-\zeta)^2}{a^4}}}\,d\sigma_t^{(2)}, \tag{5}$$

ove con $\sigma_t^{(2)}$ denotiamo la superficie dell'ellissoide di rotazione di centro P e di equazione

$$\frac{(x-\xi)^2}{c^2}+\frac{(y-\eta)^2}{c^2}+\frac{(z-\zeta)^2}{a^2}=t^2$$

Veniamo ora alla determinazione delle espressioni analitiche delle altre due componenti $X(P,\ t)$, $Y(P,\ t)$. Queste si ottengono subito ricorrendo alle (17) dei Preliminari, perchè basta osservare che le prime due equazione del sistema (I) si trasformano in quelle del sistema (14), scambiando fra loro a e c, ed eseguendo poi il cambiamento di variabile $z=\frac{c}{a}z'$. Si trova così

$$X(P,\ t)=\varpi_x(\dot{X}_0,\ \dot{Y}_0)+\frac{\partial}{\partial t}\varpi_x(X_0,\ Y_0), \tag{6}$$

$$Y(P,\ t)=\varpi_y(\dot{X}_0,\ \dot{Y}_0)+\frac{\partial}{\partial t}\varpi_y(X_0,\ Y_0), \tag{7}$$

ove, ad esempio,

$$(8)\qquad \bar{\omega}_x(X_0,\ Y_0)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{\sigma_t^{(1)}}\left[X_0(Q)-\frac{X_0(Q)(\xi-x)+Y_0(Q)(\eta-y)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}(\xi-x)\right]d\sigma_t^{(1)}+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{\sigma_t^{(2)}}\left[\frac{X_0(Q)(\xi-x)+Y_0(Q)(\eta-y)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}(\xi-x)\right]d\bar{\sigma}_t^{(2)}\pm$$

$$\pm\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_t}\left[X_0(Q)\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+Y_0(Q)\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}\right]dS_t,$$

$$(9)\qquad \bar{\omega}_y(X_0,\ Y_0)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{\sigma_t^{(1)}}\left[Y_0(Q)-\frac{X_0(Q)(\xi-x)+Y_0(Q)(\eta-y)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}(\eta-y)\right]d\sigma_t^{(1)}+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{\sigma_t^{(2)}}\left[\frac{X_0(Q)(\xi-x)+Y_0(Q)(\eta-y)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}(\eta-y)\right]d\bar{\sigma}_t^{(2)}\pm$$

$$\pm\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_t}\left[X_0(Q)\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}+Y_0(Q)\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right]dS_t.$$

In queste formule vale il segno $-$ per $a>c$, il segno $+$ per $a<c$.

Le espressioni analitiche delle $U(P,\ t)$, $V(P,\ t)$, $W(P,\ t)$, supposto di conoscere i valori iniziali

$$(10)\qquad U(P,\ 0)=U_0(P),\qquad V(P,\ 0)=V_0(P),\qquad W(P,\ 0)=W_0(P);$$

$$(11)\qquad \frac{\partial U(P,\ 0)}{\partial t}=\dot{U}_0(P),\qquad \frac{\partial V(P,\ 0)}{\partial t}=\dot{V}_0(P),\qquad \frac{\partial W(P,\ 0)}{\partial t}=\dot{W}_0(P),$$

si ottengono senz'altro dalle (17) e (7) dei Preliminari. Si ha

$$(12)\qquad U(P,\ t)=\omega_x(\dot{U}_0,\ \dot{V}_0)+\frac{\partial}{\partial t}\omega_x(U_0,\ V_0),$$

$$(13)\qquad V(P,\ t)=\omega_y(\dot{U}_0,\ \dot{V}_0)+\frac{\partial}{\partial t}\omega_y(U_0,\ V_0),$$

$$(14)\qquad W(P,\ t)=\Phi(P,\ t)+\frac{\partial}{\partial t}F(P,\ t),$$

con ovvio significato dei simboli ai secondi membri [8].

---

[8] Le formule scritte in questo n. 1 si trovano anche nelle due Memorie citate in [4]

2. Il risultato al quale siamo giunti si può invertire. Denotiamo con $X_0(Q)$, $Y_0(Q)$, $Z_0(Q)$; $U_0(Q)$, $V_0(Q)$, $W_0(Q)$, sei funzioni del posto Q regolari in tutto lo spazio, comunque scelte, sotto le condizioni che si abbia in S

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial X_0}{\partial \xi}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial Y_0}{\partial \eta}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial Z_0}{\partial \zeta}=0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \xi}+\frac{\partial V_0}{\partial \eta}+\frac{\partial W_0}{\partial \zeta}=0. \tag{16}$$

Poi assumiamo

$$\tag{17}\left\{\begin{aligned}\dot{X}_0(Q)&=a^2\left(\frac{\partial W_0}{\partial \eta}-\frac{\partial V_0}{\partial \zeta}\right),\\ \dot{Y}_0(Q)&=a^2\left(\frac{\partial U_0}{\partial \zeta}-\frac{\partial W_0}{\partial \xi}\right),\\ \dot{Z}_0(Q)&=c^2\left(\frac{\partial V_0}{\partial \xi}-\frac{\partial U_0}{\partial \eta}\right);\end{aligned}\right.$$

$$\tag{18}\left\{\begin{aligned}\dot{U}_0(Q)&=\frac{\partial Y_0}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z_0}{\partial \eta},\\ \dot{V}_0(Q)&=\frac{\partial Z_0}{\partial \xi}-\frac{\partial X_0}{\partial \zeta},\\ \dot{W}_0(Q)&=\frac{\partial X_0}{\partial \eta}-\frac{\partial Y_0}{\partial \xi}.\end{aligned}\right.$$

Con queste funzioni noi possiamo costruire le (4), (5) e quindi la (3); le (8), (9) e quindi le (6), (7); ed analogamente le (12), (13), (14).

Vogliamo provare che le $X(P, t)$, $Y(P, t)$, $Z(P, t)$; $U(P, t)$, $V(P, t)$, $W(P, t)$ così ottenute, soddisfano al sistema di MAXWELL-HERTZ. Intanto si osservi che queste funzioni soddisfano ai sistemi (1), (2), ed inoltre per esse si ha

$$X(P,\ 0)=X_0(P), \ldots\ W(P,\ 0)=W_0(P); \tag{19}$$

$$\frac{\partial X(P,\ 0)}{\partial t}=\dot{X}_0(P), \ldots\ \frac{\partial W(P,\ 0)}{\partial t}=\dot{W}_0(P). \tag{20}$$

Quindi, per il modo con il quale abbiamo scelto le $\dot{X}_0(P), \ldots \dot{W}_0(P)$, i sistemi (I), (II) sono soddisfatti per $t=0$. Poniamo le $X(P, t), \ldots W(P, t)$ al posto delle $X, \ldots W$ nelle (I), (II) e facciamo le posizioni

$$\tag{21}\left\{\begin{aligned}f(P,\ t)&=\frac{\partial X(P,\ t)}{\partial t}+a^2\left(\frac{\partial V(P,\ t)}{\partial z}-\frac{\partial W(P,\ t)}{\partial y}\right),\\ \varphi(P,\ t)&=\frac{\partial Y(P,\ t)}{\partial t}+a^2\left(\frac{\partial W(P,\ t)}{\partial x}-\frac{\partial U(P,\ t)}{\partial z}\right),\\ \psi(P,\ t)&=\frac{\partial Z(P,\ t)}{\partial t}+c^2\left(\frac{\partial U(P,\ t)}{\partial y}-\frac{\partial V(P,\ t)}{\partial x}\right);\end{aligned}\right.$$

$$\tag{22}\left\{\begin{aligned}f_1(P,\ t)&=\frac{\partial U(P,\ t)}{\partial t}+\frac{\partial Z(P,\ t)}{\partial y}-\frac{\partial Y(P,\ t)}{\partial z},\\ \varphi_1(P,\ t)&=\frac{\partial V(P,\ t)}{\partial t}+\frac{\partial X(P,\ t)}{\partial z}-\frac{\partial Z(P,\ t)}{\partial x},\\ \psi_1(P,\ t)&=\frac{\partial W(P,\ t)}{\partial t}+\frac{\partial Y(P,\ t)}{\partial x}-\frac{\partial X(P,\ t)}{\partial y};\end{aligned}\right.$$

$$(23)\quad \begin{cases} \omega(P,\, t) = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial X(P,\, t)}{\partial x} + \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial Y(P,\, t)}{\partial y} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial Z(P,\, t)}{\partial z}, \\ \omega_1(P,\, t) = \dfrac{\partial U(P,\, t)}{\partial x} + \dfrac{\partial V(P,\, t)}{\partial y} + \dfrac{\partial W(P,\, t)}{\partial z}. \end{cases}$$

Tenuto conto soltanto che le $X(P,\, t)$, $Y(P,\, t)$, $Z(P,\, t)$, soddisfano al sistema (1), si vede subito che $\omega(P,\, t)$ verifica l'equazione

$$(24)\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} = 0.$$

Nell'istante $t = 0$, $\omega(P,\, 0) = 0$ per la (15); inoltre per la scelta che abbiamo fatto per $\dot{X}_0(P)$, $\dot{Y}_0(P)$, $\dot{Z}_0(P)$, si ha pure $\dfrac{\partial\omega(P,\, 0)}{\partial t} = 0$, inquantoche le derivate temporali delle $X(P,\, t)$, $Y(P,\, t)$, $Z(P,\, t)$, si riducono alle funzioni $\dot{X}_0(P)$ $\dot{Y}_0(P)$, $\dot{Z}_0(P)$, all'istante iniziale $t = 0$. Allora, per la (11) dei Preliminari, la $\omega(P,\, t)$ è identicamente nulla. Analogamente si prova che $\omega_1(P,\, t) = 0$. Si trova poi agevolmente, tenendo conto di questi risultati,

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial f(P,\, t)}{\partial t} = \dfrac{\partial\varphi_1(P,\, t)}{\partial z} - \dfrac{\partial\psi_1(P,\, t)}{\partial y}, \\ \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial\varphi(P,\, t)}{\partial t} = \dfrac{\partial\psi_1(P,\, t)}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1(P,\, t)}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\psi(P,\, t)}{\partial t} = \dfrac{\partial f_1(P,\, t)}{\partial y} - \dfrac{\partial\varphi_1(P,\, t)}{\partial x}; \end{cases} \qquad (26)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1(P,\, t)}{\partial t} = \dfrac{\partial\psi(P,\, t)}{\partial y} - \dfrac{\partial\varphi(P,\, t)}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial\varphi_1(P,\, t)}{\partial t} = \dfrac{\partial f(P,\, t)}{\partial z} - \dfrac{\partial\psi(P,\, t)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial\psi_1(P,\, t)}{\partial t} = \dfrac{\partial\varphi(P,\, t)}{\partial x} - \dfrac{\partial f(P,\, t)}{\partial y}. \end{cases}$$

Concludiamo, in particolare, che le derivate temporali dei primi membri sono nulle per $t = 0$.

Dalle (25) si ricava

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial f(P,\, t)}{\partial x} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi(P,\, t)}{\partial y} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi(P,\, t)}{\partial z} = \text{costante rispetto al tempo } t.$$

Ma per $t = 0$, $f(P,\, 0) = 0$, $\varphi(P,\, 0) = 0$, $\psi(P,\, 0) = 0$ ovunque sia P, perciò la costante è lo zero. Si ha quindi

$$(27)\quad \frac{1}{a^2}\frac{\partial f(P,\, t)}{\partial x} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi(P,\, t)}{\partial y} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi(P,\, t)}{\partial z} = 0.$$

Similmente si prova che vale l'identità

$$(28)\quad \frac{\partial f_1(P,\, t)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1(P,\, t)}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1(P,\, t)}{\partial z} = 0.$$

Le funzioni $f(P,\, t)$, .. $\psi_1(P,\, t)$, essendo vincolate da otto equazioni analoghe alle (I), (II), sono integrali di due sistemi del tipo (1), (2). Ad essi possiamo allora applicare le formule di GRÜNWALD-SIGNORINI. Ma per $t = 0$ sono nulle le $f(P,\, 0)$, ... $\psi_1(P,\, 0)$ e le loro derivate temporali $\dfrac{\partial f(P,\, 0)}{\partial t}$ ... $\dfrac{\partial\psi_1(P,\, 0)}{\partial t}$.

Quindi le funzioni in discorso sono nulle nello spazio indefinito S e per ogni valore positivo del tempo.

§ 2. - **Mezzi biassici.**

1. Mantenendo le notazioni del precedente §, e denotando con $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ le tre costanti dielettriche principali del mezzo S omogeneo, cristallino, biassico, non conduttore, le equazioni elettromagnetiche di MAXWELL-HERTZ sono le seguenti:

$$
\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \\
&\frac{1}{b^2}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \\
&\frac{1}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \\
&\frac{1}{a^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial z} = 0;
\end{aligned} \right.
\qquad
\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\
&\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\
&\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \\
&\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \right.
$$

Da queste scendono, come conseguenza, le seguenti equazioni differenziali del second'ordine

$$
(1) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta_2 X - \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\
&\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \Delta_2 Y - \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\
&\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \Delta_2 Z - \frac{\partial \theta}{\partial z};
\end{aligned} \right.
\qquad
\begin{aligned}
&\theta = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}, \\
&\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
\end{aligned}
$$

$$
(2) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) - c^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right), \\
&\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) - a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right), \\
&\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) - b^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right).
\end{aligned} \right.
$$

Questi due sistemi sono stati considerati nei Preliminari, e per essi si hanno gli integrali $X(P, t) \ldots W(P, t)$ dati dalle formule (28), (32) con le condizioni iniziali ivi precisate. Ora prendiamo queste condizioni $X_0(Q), \ldots$

$W_0(Q)$, in modo che si abbia

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial X_0}{\partial \xi}+\frac{1}{b^2}\frac{\partial Y_0}{\partial \eta}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial Z_0}{\partial \zeta}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \xi}+\frac{\partial V_0}{\partial \eta}+\frac{\partial W_0}{\partial \zeta}=0. \tag{4}$$

Poi facciamo le posizioni

$$\left\{\begin{aligned} \dot X_0(Q) &= a^2\left(\frac{\partial W_0}{\partial \eta}-\frac{\partial V_0}{\partial \zeta}\right), \\ \dot Y_0(Q) &= b^2\left(\frac{\partial U_0}{\partial \zeta}-\frac{\partial W_0}{\partial \xi}\right), \\ \dot Z_0(Q) &= c^2\left(\frac{\partial V_0}{\partial \xi}-\frac{\partial U_0}{\partial \eta}\right); \end{aligned}\right. \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} \dot U_0(Q) &= \frac{\partial Y_0}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z_0}{\partial \eta}, \\ \dot V_0(Q) &= \frac{\partial Z_0}{\partial \xi}-\frac{\partial X_0}{\partial \zeta}, \\ \dot W_0(Q) &= \frac{\partial X_0}{\partial \eta}-\frac{\partial Y_0}{\partial \xi}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Allora risulta in tutto lo spazio

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial \dot X_0}{\partial \xi}+\frac{1}{b^2}\frac{\partial \dot Y_0}{\partial \eta}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial \dot Z_0}{\partial \zeta}=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \dot U_0}{\partial \xi}+\frac{\partial \dot V_0}{\partial \eta}+\frac{\partial \dot W_0}{\partial \zeta}=0. \tag{8}$$

In forza delle (3), (7), (4), (8) la funzione $\varphi(Q,\ t)$ considerata nei Preliminari — formula (25) — e quella analoga $\bar\varphi(Q,\ t)$ costruita con le $U_0, \dots \dot W_0$, sono nulle per il fatto che gli integrali $X(P,\ t), \dots W(P,\ t)$ e le loro derivate temporali $\frac{\partial X(P,\ t)}{\partial t}, \dots \frac{\partial W(P,\ t)}{\partial t}$ si identificano rispettivamente per $t=0$ con $X_0(P), \dots W_0(P)$ e con $\dot X_0(P), \dots \dot W_0(P)$. Le (28), (32) danno allora

$$\left\{\begin{aligned} X(P,\ t) &= \sum_1^3{}_\alpha\, \Delta^{1\alpha}\Phi_\alpha(P,\ t), \\ Y(P,\ t) &= \sum_1^3{}_\alpha\, \Delta^{2\alpha}\Phi_\alpha(P,\ t), \\ Z(P,\ t) &= \sum_1^3{}_\alpha\, \Delta^{3\alpha}\Phi_\alpha(P,\ t); \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{aligned} U(P,\ t) &= \sum_1^3{}_\alpha\, \bar\Delta^{1\alpha}\bar\Phi_\alpha(P,\ t), \\ V(P,\ t) &= \sum_1^3{}_\alpha\, \bar\Delta^{2\alpha}\bar\Phi_\alpha(P,\ t), \\ W(P,\ t) &= \sum_1^3{}_\alpha\, \bar\Delta^{3\alpha}\bar\Phi_\alpha(P,\ t). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

2. Per dimostrare che queste funzioni soddisfano anche alle equazioni di MAXWELL-HERTZ, eseguiremo un calcolo analogo a quello usato nei casi precedenti, cioè porremo le funzioni (9), (10) al posto delle $X, \dots W$ nelle

equazioni (I), (II) e faremo le posizioni

$$
(11)\quad \begin{cases}
f(P,\ t) = \dfrac{\partial X(P,\ t)}{\partial t} + a^2\left(\dfrac{\partial V(P,\ t)}{\partial z} - \dfrac{\partial W(P,\ t)}{\partial y}\right), \\[2ex]
\varphi(P,\ t) = \dfrac{\partial Y(P,\ t)}{\partial t} + b^2\left(\dfrac{\partial W(P,\ t)}{\partial x} - \dfrac{\partial U(P,\ t)}{\partial z}\right), \\[2ex]
\psi(P,\ t) = \dfrac{\partial Z(P,\ t)}{\partial t} + c^2\left(\dfrac{\partial U(P,\ t)}{\partial y} - \dfrac{\partial V(P,\ t)}{\partial x}\right);
\end{cases}
$$

$$
(12)\quad \begin{cases}
f_1(P,\ t) = \dfrac{\partial U(P,\ t)}{\partial t} + \dfrac{\partial Z(P,\ t)}{\partial y} - \dfrac{\partial Y(P,\ t)}{\partial z}, \\[2ex]
\varphi_1(P,\ t) = \dfrac{\partial V(P,\ t)}{\partial t} + \dfrac{\partial X(P,\ t)}{\partial z} - \dfrac{\partial Z(P,\ t)}{\partial x}, \\[2ex]
\psi_1(P,\ t) = \dfrac{\partial W(P,\ t)}{\partial t} + \dfrac{\partial Y(P,\ t)}{\partial x} - \dfrac{\partial X(P,\ t)}{\partial y};
\end{cases}
$$

$$
(13)\quad \begin{cases}
\omega(P,\ t) = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial X(P,\ t)}{\partial x} + \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial Y(P,\ t)}{\partial y} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial Z(P,\ t)}{\partial z}, \\[2ex]
\omega_1(P,\ t) = \dfrac{\partial U(P,\ t)}{\partial x} + \dfrac{\partial V(P,\ t)}{\partial y} + \dfrac{\partial W(P,\ t)}{\partial z}.
\end{cases}
$$

Per la scelta che abbiamo fatto di $\dot{X}_0(P), \ldots \dot{W}_0(P)$, le funzioni definite dalle (11), (12), (13) sono nulle per $t = 0$, perchè le $X(P,\ t), \ldots W(P,\ t)$; $\dfrac{\partial X(P,\ t)}{\partial t}, \ldots \dfrac{\partial W(P,\ t)}{\partial t}$, all'istante iniziale, si riducono alle $X_0(P), \ldots W_0(P)$; $\dot{X}_0(P), \ldots \dot{W}_0(P)$. Proveremo che lo sono per ogni altro valore positivo del tempo. Si verifica facilmente, tenendo conto che le (9), (10) soddisfano ai sistemi (1), (2), che si ha

$$
(14)\quad \begin{cases}
\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial f(P,\ t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \varphi_1(P,\ t)}{\partial z} - \dfrac{\partial \psi_1(P,\ t)}{\partial y}, \\[2ex]
\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial \varphi(P,\ t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \psi_1(P,\ t)}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1(P,\ t)}{\partial z}, \\[2ex]
\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \psi(P,\ t)}{\partial t} = \dfrac{\partial f_1(P,\ t)}{\partial y} - \dfrac{\partial \varphi_1(P,\ t)}{\partial x};
\end{cases}
\qquad
(15)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial f_1(P,\ t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \psi(P,\ t)}{\partial y} - \dfrac{\partial \varphi(P,\ t)}{\partial z}, \\[2ex]
\dfrac{\partial \varphi_1(P,\ t)}{\partial t} = \dfrac{\partial f(P,\ t)}{\partial z} - \dfrac{\partial \psi(P,\ t)}{\partial x}, \\[2ex]
\dfrac{\partial \psi_1(P,\ t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \varphi(P,\ t)}{\partial x} - \dfrac{\partial f(P,\ t)}{\partial y}.
\end{cases}
$$

All'istante iniziale le funzioni che figurano nei secondi membri sono nulle in tutto S, quindi sono tali anche le derivate temporali in questo istante. Dalle (14) si trae

$$
\frac{1}{a^2}\frac{\partial f(P,\ t)}{\partial x} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial \varphi(P,\ t)}{\partial y} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \psi(P,\ t)}{\partial z} = \text{costante rispetto al tempo.}
$$

Ma per $t = 0$, $f(P, 0) = 0$, $\varphi(P, 0) = 0$, $\psi(P, 0) = 0$, ovunque si trovi P; perciò la costante è nulla. Si ha quindi

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial f(P, t)}{\partial x} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial \varphi(P, t)}{\partial y} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \psi(P, t)}{\partial z} = 0. \tag{16}$$

Similmente si prova che vale l'identità

$$\frac{\partial f_1(P, t)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1(P, t)}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1(P, t)}{\partial z} = 0. \tag{17}$$

Dalle (14), (15), (16), (17), risulta che le funzioni $f(P, t), \dots \psi_1(P, t)$ soddisfano in tutto lo spazio S e per ogni $t > 0$ ad un sistema di equazioni analogo a quello di MAXWELL-HERTZ; perciò possiamo senz'altro asserire che le funzioni in discorso sono integrali di due sistemi differenziali del secondo ordine del tipo (1), (2). Pertanto le loro espressioni si identificano con quelle date dalle formule di HERGLOTZ. Ma nel caso attuale le $f(P, t) \dots \psi_1(P, t)$ e loro derivate temporali sono nulle per $t = 0$, quindi le funzioni $f(P, t), \dots \psi_1(P, t)$, saranno nulle per ogni altro valore positivo del tempo. Ne consegue che anche $\omega(P, t)$, $\omega_1(P, t)$ avranno valore zero in tutto lo spazio indefinito e per $t > 0$ (9).

(9) I risultati ottenuti in questo § erano già stati conseguiti nella mia Nota: ***Integrazione delle equazioni di Maxwell-Hertz nei mezzi cristallini biassici***, « Acta P. Acad. Nov. Lync. », Anno LXXXVII, Sess. VII. Ho voluto qui richiamarli, perchè il lettore possa avere rapidamente sott'occhio le formule risolutive dei problemi che hanno fatto oggetto della presente ricerca.