Über Streuungs- und Stabilisierungsfunktionen bei Differentialgleichungen der theoretischen Mechanik.

Memoria di W. GRÖBNER (in Innsbruck).

Mauro Picone zu seinem 70. Geburstag gewidmet.

Zusammenfassung. - *Indem man zu den Lagrangeschen Gleichungen passende Glieder hinzufügt, kann man erreichen, dass die Energie des Systems dauernd gegen null abnimmt, oder nur auf diskreten Energiestufen stationär bleibt. Man kann so mechanische Modelle konstruieren, welche nur auf vorgegebenen diskreten Energiestufen stabil sind.*

Die Differentialgleichungen eines konservativen Systems können bekanntlich (1) mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips aus der sogenannten Lagrangeschen Funktion

$$L = T - U \tag{1}$$

abgeleitet werden: man hat nach den Regeln der Variationsrechnung das Integral

$$\Omega = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt \tag{2}$$

stationär zu machen. Dabei bedeutet T die kinetische, U die potentielle Energie des Systems. Bei Verwendung allgemeiner Koordinaten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (entsprechend n Freiheitsgraden), die mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Zeit sein sollen, dürfen wir annehmen, dass T als quadratische homogene Funktion der Ableitungen $\dot{u}_\nu$ gegeben ist:

$$T = \Sigma\, a_{\nu\mu} \dot{u}_\nu \dot{u}_\mu \qquad (a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}) \tag{3}$$

mit Koeffizienten $a_{\nu\mu}$, die stetig differenzierbare Funktionen der Koordinaten u_i sind; ferner ist

$$U = f(u), \tag{4}$$

wo $f(u)$ ebenfalls eine stetig differenzierbare Funktion der Koordinaten u_i bedeutet.

(1) Vgl. etwa G. HAMEL, *Theoretische Mechanik*, Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1949, S. 244 ff.

Die Lagrangeschen Gleichungen des Systems erhält man durch Variation von (2) in der Gestalt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Ausführlich geschrieben lauten sie mit Rüchsicht auf (1), (3) und (4):

$$M_i(u) \equiv 2\,\Sigma\, a_{\nu i}\ddot{u}_\nu + 2\,\Sigma \frac{\partial a_{\nu i}}{\partial u_\mu}\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu - \Sigma \frac{\partial a_{\nu\mu}}{\partial u_i}\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu + \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{5'}$$

Führt man nun die Gesamtenergie des Systems $E = T - U$ ein und berechnet die Ableitung

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + U),$$

so findet man nach kurzer Rechnung

$$\dot{E} = 2\,\Sigma\, a_{\nu i}\dot{u}_\nu \ddot{u}_i + \Sigma \frac{\partial a_{\nu\mu}}{\partial u_i}\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu \dot{u}_i + \Sigma \frac{\partial f}{\partial u_i}\dot{u}_i.$$

Denselben Ausdruck bekommt man aber für $\Sigma\, \dot{u}_i M_i(u)$, da bei dieser Summierung die beiden mittleren Glieder von $M_i(u)$ sich folgendermassen zusammenziehen lassen:

$$2\,\Sigma \frac{\partial a_{\nu i}}{\partial u_\mu}\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu \dot{u}_i - \Sigma \frac{\partial a_{\nu\mu}}{\partial u_i}\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu \dot{u}_i = \Sigma \frac{\partial a_{\nu\mu}}{\partial u_i}\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu \dot{u}_i.$$

Daher findet man endgültig:

$$\dot{E} = \Sigma\, \dot{u}_i M_i(u), \tag{6}$$

also $\dot{E} = 0$, $E = \text{const.}$, wenn die Differentialgleichungen (5′) gelten.

Es kann aber auch der Fall sein, dass ausser den im Potential U enthaltenen Kräften noch andere Kräfte dem System eingeprägt sind, die kein Potential besitzen und also auch nicht konservativ sind; dann werden auf der rechten Seite der Differentialgleichungen (5) und (5′) anstelle von 0 gewisse Funktionen $k_i(u, \dot{u})$ auftreten, welche den von diesen Kräften ausgeübten Wirkungen entsprechen. Insbesondere können auf diese Weise Reibungskräfte berücksichtigt werden.

Wir betrachten daher jetzt anstelle von (5′) die folgenden Differentialgleichungen:

$$M_i(u) = k_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5''}$$

wo k_i irgendwelche stetige Funktionen von u und $\dot{u}$ sein können. Setzen wir das in die Identität (6) ein, so folgt:

$$\dot{E} = \Sigma\, \dot{u}_i M_i(u) = \Sigma\, \dot{u}_i k_i. \tag{7}$$

Nehmen wir z. B. speziell $k_i = -\varepsilon_i \dot{u}_i$ an. mit positiven Konstanten ε_i, so liefert (7) die Beziehung:

$$\dot{E} = -\Sigma\, \varepsilon_i \dot{u}_i^2 < 0,$$

d. h. die Gesamtenergie des Systems nimmt dauernd ab, und zwar in einem den Quadraten der Geschwindigkeiten proportionalen Verhältnis, solange bis ein Ruhezustand $\dot{u}_1 = \dot{u}_2 = \dots = \dot{u}_n = 0$ erreicht ist.

Die Differentialgleichungen (5″) werden also bei dieser Annahme einen Bewegungszustand des Systems beschreiben, wie er beim Einwirken von gewissen Reibungskräften tatsächlich vorkommen kann. Es ist klar, dass die Funktionen k_i auf sehr verschiedenartige Weise gewählt werden können, so dass immer $\dot{E} < 0$ gilt; daher ist die Möglichkeit gegeben, den experimentellen Erfahrungen durch passende Bestimmung der Funktionen k_i möglichst gerecht zu werden.

Man kann die Funktionen k_i als Streuungs- oder Dissipationsfunktionen bezeichnen, weil sie die Energie des Systems zerstreuen und allmählich aufzehren, bis ein Ruhezustand erreicht ist.

Wir wollen nun noch folgenden Ansatz versuchen:

$$k_i = \dot{u}_i \Phi(E), \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

wo $\Phi(E)$ eine Funktion der Energie E bedeutet. In (7) eingesetzt, erhält man dann:

$$\dot{E} = \Sigma\, \dot{u}_i^2 \Phi(E),$$

also eine Funktion, deren Vorzeichen, solange das System überhaupt in Bewegung ist ($\Sigma\, \dot{u}_i^2 > 0$), vom Vorzeichen der Funktion $\Phi(E)$ abhängt.

Wählt man z. B. $\Phi(E) = 1 - \frac{E}{E_0}$, so ist $\dot{E} > 0$ für $E < E_0$, und $\dot{E} < 0$ für $E > E_0$, d. h. das System gibt, solange seine Energie $E > E_0$ ist, Energie nach aussen ab, absorbiert dagegen Energie von aussen, solange $E < E_0$ ist. Für $E = E_0$ ist $\dot{E} = 0$, und dann gelten auch die Differentialgleichungen (5′) des ungestörten Systems.

Wir können sagen, diese Funktionen k_i sind Stabilisierungsfunktionen für unser mechanisches System; denn sie bewirken, dass das System auf der Energiestufe $E = E_0$ stabil bleibt; wird ihm durch irgendeinen äusseren Anstoss Energie zugeführt oder entnommen, so bewirken die Stabilisierungsfunktionen, dass binnen kürzester Zeit der stabile Zustand $E = E_0$ wieder hergestellt wird.

Es ist naheliegend, diesen Ansatz in der mannigfaltigsten Weise zu variieren; man kann leicht Stabilisierungsfunktionen angeben, die bewirken, dass das System auf gewissen Energiestufen E_0, E_1, ... und nur auf diesen stabil ist. Wenn durch einen von aussen kommenden Anstoss Energie zugeführt wird, so kann das System diese Energie nur dann im Innern aufnehmen, wenn der zugeführte Betrag gerade der Differenz von zwei Energiestufen entspricht; ein darüber hinausgehender Energiebetrag kann vom System nicht absorbiert werden, sondern wird in entsprechend kurzer Zeit wieder nach aussen zerstreut. Analoges gilt für Energieabgaben des Systems.

In jedem Falle können die Funktionen k_i noch im weitesten Ausmass abgeändert werden, um eventuellen weiteren Forderungen Genüge zu leisten. Aber die Frage, ob es möglich ist, diese hier vom mathematischen Gesichtspunkte herausgestellten Ansätze in Problemen der theoretischen Physik zu verwerten, soll hier gar nicht angeschnitten werden, sondern einer gemeinsam mit F. CAP zu publizierenden Arbeit vorbehalten sein.