Una dimostrazione del teorema di Brouwer sulle traslazioni piane generalizzate.

Memoria di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (a Padova).

A Mauro Picone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *L'A. dimostra il teorema di Brouwer sugli autoomeomorfismi del piano, diretti e privi di punti uniti, utilizzando opportune suddivisioni simpliciali e i risultati di Brouwer sulle traiettorie di un tal autoomeomorfismo.*

In questa Memoria mi propongo di dimostrare il teorema di BROUWER su quegli autoomeomorfismi del piano reale ed euclideo che conservano il senso delle rotazioni e che son privi di punti invarianti; mi propongo cioè di provare che la totalità dei campi di traslazione di un tal autoomeomorfismo ricopre completamente il piano.

Questa mia dimostrazione si svolge nella stessa linea concettuale di quelle già conosciute (1). La novità, se mai, si è che, per costruire un campo di traslazione che contenga un punto prefissato ad arbitrio, essa fa intervenire, in sostanza, soltanto gli elementi di una opportuna suddivisione simpliciale del piano.

1. **Preliminari. Richiami.** - In questo numero ricorderò, per comodità del lettore, i teoremi cui dovremo far ricorso, esponendoli in un ordine nel quale essi si posson dedurre logicamente (2); inoltre fisserò alcune convenzioni, che dovranno esser mantenute nel seguito.

---

(1) La mia Memoria *Sugli autoomeomorfismi del piano privi di punti uniti*, « Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova », vol. XVIII (1949), pagg. 1-53, si chiude con una ampia bibliografia sull'argomento. Ai lavori là citati, si aggiungano:

G. TREVISAN, *Punti uniti in trasformazioni del cerchio*, « Giornale di matematiche di Battaglini », vol. 79 (1949-50), pagg. 127-131;

A. TOSO, *A proposito di alcuni teoremi di Trevisan e von Kerékjártó*, « Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova », vol. XX (1951), pagg. 224-231;

T. HOMMA e H. TERASAKA, *On the structure of the plane translation of Brouwer*, « Osaka mathematical Journal », vol. 5 (1953), pagg. 233-266;

T. HOMMA a S. KINOSHITA, *On a topological characterization of the dilatation in E^3*, « Osaka mathematical Journal », vol. 6 (1954), pagg. 135-143.

(2) Questi teoremi sono dovuti sostanzialmente tutti a BROUWER. Le dimostrazioni, che permettono di dedurli nell'ordine indicato nel testo, si possono desumere dai seguenti lavori:

G. SCORZA DRAGONI, *Criteri per l'esistenza di elementi uniti in trasformazioni topolo-*

Lo spazio ambiente è il piano (reale) euclideo. E t è una trasformazione topologica del piano in tutto se stesso. La t conserva il senso delle rotazioni e non ammette punti uniti; brevemente: t è una traslazione generalizzata del piano.

Un arco di traslazione (di t) è una curva semplice ed aperta, λ, che abbia comune con la propria immagine, $t(\lambda)$ [3], nella t soltanto un punto, estremo sia per λ che per $t(\lambda)$. Il punto comune a $t^{-1}(\lambda)$ e λ verrà chiamato l'origine di λ e quello comune a λ e $t(\lambda)$ il termine di λ; ed il verso di λ dall'origine al termine verrà assunto come positivo.

L'origine di un arco di traslazione della t è ovviamente trasformata, dalla t medesima, nel termine di quell'arco. Inoltre è noto che una curva semplice ed aperta, la quale abbia uno dei due estremi immagine dell'altro nella t e la quale non contenga nel proprio interno il trasformato di nessuno dei suoi punti interni, è addirittura un arco di traslazione (della t); ma per noi, attualmente, ha maggiore interesse ricordare soltanto che:

I) *Ogni punto del piano è interno ad infiniti archi di traslazione della t.*

Se λ è un arco di traslazione (per t), le immagini di λ nelle successive potenze della t costituiscono (per t) la traiettoria,

$$\sigma(\lambda) = \ldots + t^{-1}(\lambda) + \lambda + t(\lambda) + \ldots,$$

generata da λ. Ed è noto che:

II) *Una traiettoria di una traslazione piana generalizzata è una linea semplice, vale a dire è immagine biunivoca e continua di una retta euclidea,*

il teorema I) equivalendo allora ad affermare che la totalità delle traiettorie di una traslazione piana generalizzata ricopre completamente il piano · ed è noto del pari che:

III) *La curva semplice ed aperta c incontra (anzi taglia) la propria immagine nella t, se l'arco staccato dagli estremi di c su una conveniente traiettoria della t contiene, nel proprio interno, almeno un arco* [4] *di traslazione della t e costituisce, insieme con c, una curva semplice e chiusa.*

---

giche del cerchio e loro applicazioni, «Annali di matematica pura ed applicata», serie 4, vol. XXV (1946), pagg. 43-65;

S. Ghezzo, *Sulla teoria delle traiettorie di una traslazione piana generalizzata*, «Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova», vol. XVI (1947), pagg. 73-85;

G. Trevisan, *Sui campi adiacenti ad una traiettoria di una traslazione piana generalizzata*, «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», serie 8, vol. III (1947), pagg. 199-203.

(3) Secondo la solita convenzione, se F è un punto o un insieme di punti del piano ed n un intero relativo, $t^n(F)$ è l'immagine di F nella potenza n-esima di t.

(4) E quindi infiniti archi.

Da questo fondamentale risultato si deduce facilmente che:

IV) *Se P è un punto della traiettoria σ, interno al sottoarco s di σ, il punto P ha una distanza positiva dall'insieme $\sigma - s$;*

e quindi che:

V) *Una traiettoria di una traslazione piana generalizzata è omeomorfa ad una retta euclidea, vale a dire è immagine biunivoca e bicontinua di una tal retta;*

e non sarà forse inopportuno ricordare pure che nessuna delle due semilinee in cui una traiettoria è divisa da un suo punto può mantenersi tutta in una regione limitata.

Sia di nuovo σ una traiettoria della t. L'insieme di quei punti che son d'accumulazione per σ e che non appartengono a σ è chiuso, eventualmente vuoto, a norma del teorema IV); epperò esso divide il piano in uno o più insiemi aperti connessi non vuoti e disgiunti a due a due, cioè in uno o più campi a due a due disgiunti. E σ appartiene interamente a uno di questi campi; anzi:

VI) *La traiettoria σ divide quel campo in altri due, campi i quali hanno entrambi σ come linea di frontiera,*

e si chiamano i campi adiacenti a σ. La nozione di campi adiacenti ad una traiettoria σ ci autorizza, in modo ovvio, a parlare di bande di quella traiettoria. La traiettoria σ non esaurisce, in generale, la frontiera dei propri campi adiacenti; tuttavia:

VII) *I punti che non appartengono alla traiettoria σ e posson esser congiunti con σ mediante una curva semplice ed aperta, avente su σ soltanto un estremo, si distribuiscono appunto nei due campi adiacenti alla traiettoria, esaurendoli.*

Naturalmente:

VIII) *Le traiettorie di una traslazione piana generalizzata son invarianti, in quanto insiemi, rispetto alla traslazione;*

e di qui e dalla invarianza, rispetto alla traslazione, dei sensi delle rotazioni, si trae che:

IX) *Insiemi invarianti rispetto ad una traslazione piana generalizzata son anche i singoli campi adiacenti alle diverse traiettorie della traslazione.*

Inoltre è facile provare che:

X) *Se la curva semplice e chiusa j e l'arco λ, di traslazione per la t, hanno punti comuni, se l'insieme connesso chiuso e limitato J, delimitato da j, non ha punti comuni con la propria immagine nella t e con quelle di λ nella t e nella t^{-1} e non contiene nell'interno punti di λ, i punti dell'insieme $J - J \cdot \lambda$ (e in particolare quelli interni a J) son tutti interni ad uno medesimo dei due campi adiacenti alla traiettoria $\sigma(\lambda)$ generata da λ, mentre quelli dell'insieme $J \cdot \lambda$ son tutti interni a λ;*

nel fatto, i punti comuni a j e λ sono, intanto, tutti interni a λ; se A è un punto comune a j e λ, ogni punto B di $J - J \cdot \lambda$ può esser notoriamente unito ad A mediante una curva semplice ed aperta d contenuta, a meno degli estremi A e B, nell'interno di J; allora d non ha punti comuni con $t(d)$ e nemmeno con $t^{-1}(\lambda)$ e $t(\lambda)$, mentre con λ ha comune soltanto il punto A; di qui e dal teorema III) è facile dedurre che d e $\sigma(\lambda)$ hanno soltanto A come punto comune; epperò B appartiene ad un campo adiacente a $\sigma(\lambda)$, il quale non può variare al variare di B, perché $J - J \cdot \lambda$ è connesso, al pari di quel campo adiacente.

2. **Posizione del problema.** - Per semplicità discorsiva, è opportuno convenire in quanto segue: un'immagine topologica di una retta (semiretta) euclidea è una linea (semilinea) semplice e propria, qualora essa contenga tutti i suoi punti d'accumulazione (ovvia essendo la nozione di origine della semilinea), ed un insieme di punti del piano è libero (rispetto alla t), se esso e la sua immagine, nella t, son disgiunti.

Allora un campo di traslazione della t è un campo libero, delimitato da una linea semplice propria libera e dalla immagine di questa nella t, immagine anch'essa semplice libera e propria.

E il teorema di Brouwer sulle traslazioni piane generalizzate si può dedurre dal fatto che:

Se Σ_0 è uno dei due campi adiacenti alla traiettoria σ_0 generata dall'arco di traslazione λ_0, si può costruire una semilinea semplice propria e libera, contenuta in Σ_0 a meno dell'origine, l'origine risultando interna a λ_0.

Esponiamo rapidamente questa deduzione, che peraltro non è nuova.

Sia C un punto interno all'arco di traslazione λ_0, di guisa che C può pensarsi come un punto qualunque del piano, a norma del teorema I); e siano Σ_0 e Σ_0' i due campi adiacenti alla traiettoria σ_0, generata da λ_0. Siano l ed l' due semilinee semplici proprie e libere, di origini rispettive R ed R'; gli insiemi $l - R$ ed $l' - R'$ siano rispettivamente contenuti in Σ_0 e Σ_0'; i punti R ed R' risultino interni a λ_0 ed s sia il sottoarco di λ_0 di estremi R ed R', e pertanto libero. Allora gli insiemi $l - R$ ed s ed $l' - R'$ son liberi e contenuti, rispettivamente, negli insiemi Σ_0 e σ_0 e Σ_0', disgiunti a due a due ed invarianti nella t; sicché quelli e le loro immagini sono a due a due privi di punti comuni. In definitiva $l + s + l'$ è una linea semplice propria e libera. Se la linea $l + s + l'$ non passa per C, essa e la sua immagine nella t, oppure essa e la sua immagine nella t^{-1}, delimitano un campo, che è di traslazione per la t e che contiene C; se $l + s + l'$ passa per C, basta modificarla leggermente nell'intorno di C, per giungere alla conclusione desiderata anche in questo caso.

3. **Dimostrazione del teorema.** - E dimostriamo ora il teorema del numero precedente.

Possiamo supporre che λ_0 sia una poligonale a lati rettilinei (poligonale di traslazione), o addirittura un segmento (segmento di traslazione).

Ma non faremo uso della seconda ipotesi nelle deduzioni di questo numero, appunto per poterle applicare a tutte le poligonali di traslazione che incontreremo; la utilizzeremo nel numero successivo per definire, con maggiori comodità di linguaggio, una tal suddivisione simpliciale K del piano ([5]), che:

1) *l'origine P, ed il termine $t(P)$, di λ_0 siano vertici di K;*

che:

2) *ogni lato di K o giaccia per intero su λ_0, od abbia su λ_0 al più un estremo soltanto;*

cioè che:

3) *il complesso dei lati e dei vertici di K subordini su λ_0 una suddivisione simpliciale, k_0, di λ_0;*

e che:

4) *ogni stella di K sia libera rispetto alla t,*

una stella di K essendo qui intesa come la somma di tutti i triangoli ([6]) di K, con un certo vertice di K (il centro della stella) come vertice comune. In particolare, allora:

5) *un punto e la sua immagine non possono mai appartenere ad una medesima stella di K.*

Accettata l'esistenza del complesso K, ogni lato di K sito su λ_0, cioè ogni segmento di k_0, è lato di due triangoli di K, uno rivolto, rispetto a λ_0, dalla stessa banda di Σ_0 ([7]) e l'altro dalla stessa banda dell'altro, Σ_0', dei due campi adiacenti a σ_0. I triangoli del primo tipo (del secondo tipo) saranno i triangoli adiacenti a λ_0 e rivolti verso Σ_0 (verso Σ_0'). Essi si presentano in un certo ordine, se si percorre λ_0 nel verso positivo e si trasporta ai triangoli l'ordine in cui si incontrano i rispettivi lati di adiacenza, e:

a) *il primo, in quest'ordine, ha un vertice in P e l'ultimo un vertice in $t(P)$,*

epperò, a norma della 5), quel primo e quest'ultimo triangolo non possono avere vertici comuni, pertanto:

b) *i triangoli di K adiacenti a λ_0 e rivolti verso Σ_0 sono almeno tre, vale a dire λ_0 contiene almeno tre lati di K.*

Noi dimostreremo ora che:

c) *almeno uno dei triangoli (di K) adiacenti a λ_0 e rivolti verso Σ_0 è privo di punti comuni sia con $t^{-1}(\lambda_0)$ che con $t(\lambda_0)$,*

e diremo eccezionali, per λ_0 e Σ_0, i triangoli di questo tipo.

([5]) Adotto la terminologia seguita da P. ALEXANDROFF ed H. HOPF nella loro *Topologie*, Springer, Berlino, 1935. Talvolta identificheremo un complesso col poligono ricoperto, ma ciò non darà mai luogo ad equivoci.

([6]) Triangoli, nel senso di superficie triangolari.

([7]) Il senso della frase è evidente, e può essere ovviamente precisato con tutto rigore.

Attesa la a), per dimostrare la c) basta provare che se due triangoli di K, adiacenti a λ_0 e rivolti verso Σ_0, hanno un vertice, W, comune, essi o sono entrambi privi di punti comuni con $t^{-1}(\lambda_0)$, o sono entrambi privi di punti comuni con $t(\lambda_0)$.

Ed infatti, sia, nel caso contrario, U un punto di $t^{-1}(\lambda_0)$ contenuto in uno di quei due triangoli e V un punto di $t(\lambda_0)$ contenuto nell'altro, di guisa che U e V non posson essere simultaneamente uguali a P e $t(P)$, rispettivamente, in virtù della 4). Poiché quei triangoli sono rivolti dalla stessa banda di λ_0 e poiché ogni punto di λ_0 appartiene al complesso dei lati e dei vertici di K, U e V si possono unire mediante una curva semplice ed aperta, c, priva di punti comuni con λ_0, eccettuato al massimo uno dei suoi estremi U e V, e contenuta nella stella di K col centro in W. Allora c è anche una curva libera. Si percorra c, a partire da U, fino al primo punto, V^*, comune a c e $t(\lambda_0)$; a partire da V^*, si torni indietro, sempre su c, e ci si arresti non appena si incontri di nuovo $t^{-1}(\lambda_0)$, nel punto U^*. I punti U^* e V^* individuino su c il sottoarco c^* e su σ_0 il sottoarco s^*. Allora c^* ed s^* hanno soltanto gli estremi comuni; inoltre s^* contiene, nel proprio interno, almeno uno dei punti P e $t(P)$ e quindi almeno un arco di traslazione della t; epperò c^*, secondo il teorema III), incontra la propria immagine. Ed a più forte ragione non è libera nemmeno la curva c. L'esser giunti all'assurdo, dimostra il teorema.

Sia $A_0B_0C_0$, per λ_0 e Σ_0, il primo triangolo eccezionale che si incontra quando si percorre λ_0 nel verso positivo, a partire da P; e se $A_0B_0C_0$ ha due lati su λ_0, sia A_0B_0 quello che si incontra per primo. I punti A_0, B_0 e C_0 son tutti e tre diversi tanto da P quanto da $t(P)$; quindi A_0 e B_0 sono in ogni caso interni a λ_0 e C_0 o è interno o è esterno a λ_0. Inoltre il punto A_0 si può sempre supporre compreso, su λ_0, fra P e B_0; invece il punto C_0, se appartiene a λ_0, può esser, su λ_0, compreso sia fra P ed A_0 che fra B_0 e $t(P)$. Insomma, i casi possibili sono quelli schematizzati nelle figure 1, 2, 3 e 4, rispettivamente primo, secondo, terzo [8] e quarto caso.

Ed in ogni caso i punti interni al triangolo $A_0B_0C_0$ non appartengono mai a λ_0 perché i segmenti di k_0 ed il triangolo $A_0B_0C_0$ son simplessi dello stesso complesso K. Sicché, in ogni caso, secondo il teorema X), i singoli punti del triangolo libero $A_0B_0C_0$ o sono interni a λ_0 o sono interni a Σ_0, e quelli interni al triangolo sono senz'altro interni a Σ_0. Pertanto il triangolo $A_0B_0C_0$ e tutte le sue immagini nelle diverse potenze della t [9] appartengono all'insieme $\Sigma_0 + \sigma_0$.

Inoltre, nel primo caso, la spezzata libera $A_0C_0 + C_0B_0$ non incontra $t(\lambda_0)$ e $t(A_0C_0 + C_0B_0)$ non incontra λ_0; quindi, se ε_0 è il sottoarco di λ_0 di

[8] Veramente nel terzo caso $A_0B_0C_0$ non sarebbe, nell'ordinamento prescelto, il primo triangolo, per λ_0 e $\Sigma(\lambda_0)$ eccezionale, che si incontri percorrendo λ_0 a partire da P.

[9] Potenze secondo esponenti positivi e negativi.

estremi P ed A_0 e δ_0 quello di estremi B_0 e $t(P)$, la poligonale semplice $\lambda_1 = \varepsilon_0 + A_0C_0 + C_0B_0 + \delta_0$ è una poligonale di traslazione di origine P e termine $t(P)$; e la traiettoria σ_1, generata da λ_1, appartiene a $\Sigma_0 + \sigma_0$ ed ha comuni con σ_0 soltanto le spezzate non degeneri ε_0 e δ_0 e le immagini di queste nelle diverse potenze della t. Il teorema X) può essere ovviamente applicato al triangolo $A_0B_0C_0$ ed alla poligonale λ_1, per concludere che tutti

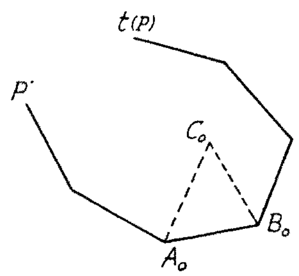

Fig. 1.

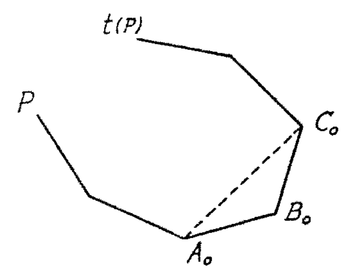

Fig. 2.

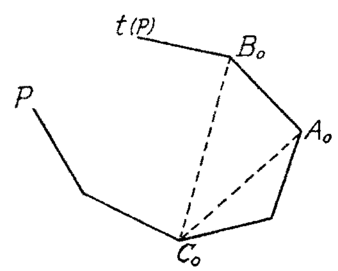

Fig. 3.

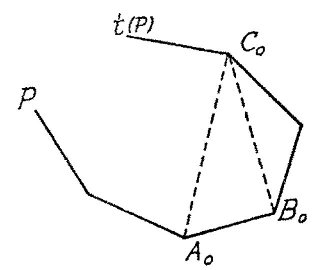

Fig. 4.

i punti di quel triangolo appartengono a uno medesimo, Σ'_1, dei due campi adiacenti a σ_1, se si eccettuano naturalmente quelli che appartengono proprio a λ_1; ed a Σ'_1 appartengono ovviamente anche quei punti di σ_0 che non appartengono a σ_1. E sia Σ_1 quel campo adiacente a σ_1 che non contiene punti del triangolo $A_0B_0C_0$ e nemmeno di σ_0. Allora Σ_1 è contenuto in Σ_0 e Σ_1' contiene Σ_0': infatti, ogni punto di Σ_1 può esser unito ad un certo punto D, interno alla spezzata $A_0C_0 + C_0B_0$ e quindi a Σ_0, mediante una curva semplice ed aperta, che ha soltanto D su σ_1 e tutti gli altri punti entro Σ_1; pertanto quella curva non incontra σ_0; vale a dire tutti i punti di Σ_1 appartengono a Σ_0; un ragionamento analogo, nel quale D si supporrà interno ad A_0B_0, prova la seconda affermazione. Finalmente: il complesso dei lati e dei vertici di K subordina, su λ_1, una suddivisione simpliciale, k_1, di λ_1.

Il secondo caso non è topologicamente diverso dal primo. In questo caso basta porre $\lambda_1 = \varepsilon_0 + A_0C_0 + \delta_0$, ε_0 avendo sempre lo stesso significato e δ_0 essendo il sottoarco di λ_0 di estremi C_0 e $t(P)$, per ritrovare le stesse conclusioni.

Nel terzo caso, si dica ε_0 la spezzata individuata su λ_0 da P e C_0 e δ_0 quella individuata da B_0 e $t(P)$; allora $\lambda_1 = \varepsilon_0 + C_0B_0 + \delta_0$ è ancora una poligonale di traslazione per la quale valgono sempre le stesse conclusioni, come si riconosce con ragionamenti analoghi, l'unica variante potendosi se mai incontrare nello stabilire che anche i punti di $\sigma_0 - \sigma_0 \cdot \sigma_1$ appartengono a quello stesso campo adiacente a σ_1 che contiene tutti i punti del triangolo $A_0B_0C_0$, esclusi quelli del lato C_0B_0; ma si tratta sempre di una variante di poco conto: basta osservare che l'interno dell'arco individuato su λ_0 da C_0 e B_0 non ha punti su σ_1 e contiene A_0, che appartiene a Σ_1', il significato dei simboli essendo ovvio.

Il quarto caso non è topologicamente diverso dal terzo; in questo caso, per giungere alle stesse conclusioni, basta porre $\lambda_1 = \varepsilon_0 + A_0C_0 + \delta_0$, se ε_0 è il sottoarco di λ_0 di estremi P ed A_0 e δ_0 quello di estremi C_0 e $t(P)$.

Sia ora $A_1B_1C_1$, per λ_1 e Σ_1, il primo triangolo eccezionale che si incontra quando si percorre λ_1 a partire dalla sua origine P. Allora è ovvio che $A_0B_0C_0$ ed $A_1B_1C_1$ hanno un lato comune, oppure uno dei lati di $A_1B_1C_1$ appartiene a λ_0, le due alternative non escludendosi a vicenda; ed è ovvio che si possono ripetere le considerazioni precedenti, definire $\lambda_2, \ldots$; e così via, per induzione completa.

Le poligonali di traslazione $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, le relative suddivisioni simpliciali $k_0, k_1, k_2, \ldots$, le traiettorie $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$, i rispettivi campi adiacenti Σ_0 e Σ_0', Σ_1 e Σ_1', Σ_2 e $\Sigma_2', \ldots$ ed i triangoli liberi $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2, \ldots$ godono delle seguenti proprietà:

α) la successione $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ è decrescente; la successione $\Sigma_0', \Sigma_1', \Sigma_2', \ldots$ è crescente;

β) gli archi di traslazione λ_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ hanno tutti la stessa origine P e lo stesso termine $t(P)$; i punti P e $t(P)$ sono esterni ai triangoli $A_mB_mC_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$;

γ) il triangolo $A_mB_mC_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ ha almeno un lato su k_m;

δ) un segmento di k_n $(n = 1, 2, \ldots)$ o è un lato di $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$, o è un segmento di k_{n-1};

ε) i punti interni ad $A_mB_mC_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ sono interni a Σ_m, e quindi a Σ_0, del pari che a Σ'_{m+1};

ζ) il triangolo $A_mB_mC_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ è privo di punti comuni sia con Σ'_m, e quindi con Σ'_0, che con Σ_{m+1};

la α), la ε) e la ζ) porgono che:

η) i triangoli $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2, \ldots$ sono a due a due distinti, e quindi anche a due a due privi di punti interni comuni, perchè triangoli di uno stesso complesso simpliciale;

e di qui e dalla ζ) non è difficile dedurre che:

ϑ) se $A_mB_mC_m$ e $A_{m+1}B_{m+1}C_{m+1}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ hanno un lato comune, l'interno di quel lato appartiene a Σ_m, e quindi a Σ_0;

e la α), la ε) e la ζ), insieme con la β), dànno che:

ι) i triangoli $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... non sono soltanto liberi, ma ciascuno di essi non incontra nemmeno le immagini degli altri;

come si riconosce con un ragionamento simile a quello svolto nel numero precedente in una circostanza analoga.

Sia K^* il complesso dei triangoli $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... dei loro lati e dei loro vertici; di guisa che, in conformità della ι), *il complesso K^* è libero.*

E sia H un componente connesso in senso forte [10] di K^* ed $A_rB_rC_r$ un triangolo di H. Il triangolo $A_rB_rC_r$ ha almeno un lato su k_r, a norma della γ); e, se $r > 0$, questo lato, secondo la δ), o è un lato di $A_{r-1}B_{r-1}C_{r-1}$, o è un segmento di k_{r-1}; nel secondo caso, in conformità della δ), quel lato o è anche un lato di $A_{r-2}B_{r-2}C_{r-2}$, o è un segmento di k_{r-2}; .... Insomma: o uno dei lati $A_rB_rB_r$ appartiene a k_0, oppure $A_rB_rC_r$ ha un lato comune con uno (almeno) dei triangoli $A_{r-1}B_{r-1}C_{r-1}$, ..., $A_0B_0C_0$; ed allora H contiene questo tal triangolo, appunto perché H è un componente connesso in senso forte di K^*; e si può ripetere tutto il ragionamento a partire da questo tal triangolo. In definitiva: *ogni componente connesso in senso forte di K^* contiene un segmento di k_0.*

Due componenti di K^*, connessi in senso forte e distinti, hanno al massimo dei vertici in comune; pertanto *il numero dei componenti di K^* connessi in senso forte non può superare il numero dei segmenti di k_0* [11].

Indi *uno almeno di quei componenti contiene infiniti triangoli di K^*.* E siano appunto

$$A_{n_0}B_{n_0}C_{n_0},\ A_{n_1}B_{n_1}C_{n_1},\ A_{n_2}B_{n_2}C_{n_2}, \ldots \qquad (n_0 < n_1 < n_2 < \ldots) \tag{1}$$

gli infiniti triangoli di un tal componente.

Dalla (1) si può estrarre una tal successione

$$A_{m_0}B_{m_0}C_{m_0},\ A_{m_1}B_{m_1}C_{m_1},\ A_{m_2}B_{m_2}C_{m_2}, \ldots \qquad (m_0 < m_1 < m_2 < \ldots), \tag{2}$$

che il primo dei triangoli (2) abbia un lato comune con il secondo, il secondo con il terzo, il terzo con il quarto, e così via; e che il primo di quei triangoli abbia un lato almeno, per esempio $A_{m_0}B_{m_0}$, su λ_0 [12]. E siano U_{m_0} il baricentro del lato comune a λ_0 ed $A_{m_0}B_{m_0}C_{m_0}$, $U_{m_{p+1}}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ quello del lato comune ad $A_{m_p}B_{m_p}C_{m_p}$ ed $A_{m_{p+1}}B_{m_{p+1}}C_{m_{p+1}}$ e V_{m_p} quello di $A_{m_p}B_{m_p}C_{m_p}$.

---

[10] Cioè una *starke Komponente di K^**; cfr. ALEXANDROFF ed HOPF, loc. cit., pagg. 189-190.

[11] Anzi si mantiene minore di quel numero di due unità almeno.

[12] Ecco forse il modo più rapido per ottenere questo risultato: vi sono ovviamente infinite catene costituite da un numero finito di triangoli soddisfacenti alle condizioni imposte a quelli della successione (2); i triangoli di K adiacenti a λ_0 sono in numero finito, quindi almeno uno, $A_{m_0}B_{m_0}C_{m_0}$, dei triangoli (1) ha un lato su λ_0 ed appartiene a infinite di quelle catene; epperò anche almeno uno, $A_{m_1}B_{m_1}C_{m_1}$, dei triangoli (1), con $m_1 > m_0$, ha un lato su $A_{m_0}B_{m_0}C_{m_0}$ ed appartiene a infinite di quelle catene; epperò almeno uno, $A_{m_2}B_{m_2}C_{m_2}$ con $m_2 > m_1 > m_0$, ha un lato su $A_{m_1}B_{m_1}C_{m_1}$ ....

La semilinea $l = U_{m_0}V_{m_0} + V_{m_0}U_{m_1} + U_{m_1}V_{m_1} + \ldots$ è contenuta in Σ_0, a meno dell'origine, interna a λ_0; e la cosa è una conseguenza ovvia della ε) e della δ).

La semilinea l è libera, perché tale è il complesso K^*.

La semilinea l è semplice, perché i triangoli (2) sono a due a due distinti e privi a due a due di punti interni comuni.

E di qui la conclusione desiderata, perché l è anche propria, visto che i triangoli (1), in quanto triangoli di una suddivisione simpliciale del piano, abbandonano definitivamente ogni regione limitata.

4. Compimento della dimostrazione. - Perché la dimostrazione sia completa, basta costruire il complesso K. La cosa è facile e si ottiene con ragionamenti di tipo noto.

Supponiamo che $\lambda_0 (= Pt(P))$ sia un segmento e consideriamo una suddivisione simpliciale del piano in tanti triangoli equilateri, tutti coi lati uguali a λ_0, e λ_0 sia anzi un lato di questa decomposizione.

I triangoli della suddivisione, che hanno un vertice in P, costituiscono un primo complesso Π_1, insieme coi loro lati e i loro vertici. Quelli che non compaiono in Π_1, ma hanno un vertice in Π_1, ne costituiscono, insieme coi loro lati ed i loro vertici, un secondo, Π_2. In guisa analoga si ottiene Π_3, ecc., ecc.

Consideriamo ora la suddivisione baricentrica di Π_1, e poi quella della suddivisione baricentrica di Π_1, e così via, fino ad ottenere una suddivisione simpliciale, K_1, di Π_1 siffatta, che le sue stelle siano libere rispetto alla t. La cosa è possibile, perché la distanza del punto corrente di Π_1 dalla propria immagine ha un minimo positivo, mentre il massimo dei diametri delle stelle di K_1 e delle loro immagini si può supporre piccolo a piacere.

Consideriamo ora la suddivisione baricentrica di Π_2, e poi quella della suddivisione baricentrica di Π_2, e così via fino ad ottenere una suddivisione simpliciale, K_2, di Π_2 siffatta, che le stelle di K_2 siano libere e siano libere tutte quelle somme, di una stella di K_1 e di una stella di K_2, che risultino connesse. Se un lato di un triangolo di K_1 risulta suddiviso in K_2, dal baricentro di quel triangolo si proiettino i vertici di K_2 interni a quel lato; analogamente, se un lato di un triangolo di K_2 risulta suddiviso in K_1. Si ottiene così una suddivisione simpliciale di $\Pi_1 + \Pi_2$; e le stelle di questa decomposizione sono libere.

Dopo di che si passa a Π_3, e si opera in guisa analoga. E in questo passo (e nei passi successivi) la suddivisione già trovata per Π_1 non viene più toccata. Indi si passa a Π_4, e si opera allo stesso modo; in questo passo (e nei successivi) non viene più toccata la suddivisione di Π_2.

Ma allora è chiaro che così proseguendo si perviene allo scopo desiderato. E la dimostrazione è completa.