Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante.

(Extrait d'une lettre à M. Beniamino Segre)

par Élie Cartan (à Paris).

.... Les résultats que vous avez obtenus sur les familles isoparamétriques d'hypersurfaces de l'espace euclidien à n dimensions [1] peuvent être étendus aux espaces à n dimensions à courbure constante négative et, en partie, aux espaces à courbure constante positive. Dans les deux cas on peut démontrer que le problème revient à la recherche des hypersurfaces dont toutes les courbures principales sont constantes, mais, alors que pour les espaces à courbure constante *négative* ou nulle, le nombre des courbures principales distinctes ne peut dépasser deux, il n'en est plus de même si l'espace est à courbure constante positive. Le problème dans ce dernier cas est compliqué, mais fort intéressant; j'ai pu le résoudre complètement pour l'espace à courbure constante positive à 4 dimensions; on peut du reste dans le cas général trouver une loi donnant les courbures principales, dès que l'on connaît leurs degrés de multiplicité.

La méthode que j'ai employée fait appel à une technique différente de la vôtre: c'est la méthode du repère mobile, apparentée, comme vous le savez, à la méthode des congruences normales de G. Ricci.

1. **Préliminaires.** — Je suppose la forme fondamentale de l'espace, à n dimensions et de courbure riemannienne constante C, décomposée en une somme de n carrés $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2$, avec les formules de structure

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_i' &= [\omega_k \, \omega_{ki}], \\ \omega_{ij}' &= [\omega_{ik} \, \omega_{kj}] - C[\omega_i \, \omega_j], \end{aligned} \right. \tag{1}$$

où l'on a

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} = \gamma_{ijk}\omega_k ; \tag{2}$$

les γ_{ijk} sont les coefficients de rotation de Ricci.

[1] « Rendic. Lincei », VI s., 27, 1938, p. 203-207.

Soit f une fonction jouissant de la propriété que ses deux paramètres différentiels $\Delta_1 f$ et $\Delta_2 f$ soient des fonctions de f. Je supposerai que le $n^{\text{ième}}$ vecteur du repère rectangulaire attaché à la décomposition en carrés est normal aux hypersurfaces de niveau de la fonction f; la différentielle df est alors un multiple $\varphi\omega_n$ de ω_n; φ est précisément la racine carrée de $\Delta_1 f$, donc une fonction de f, de sorte que ω_n est une différentielle exacte dt. D'où il résulte le résultat bien connu que les hypersurfaces de niveau de la fonction f forment une famille d'hypersurfaces parallèles et que cette famille est connue dès qu'on en connaît une hypersurface.

De la propriété de la forme ω_n d'être une différentielle exacte résulte $\omega_n' = 0$, et par suite, d'après (1),

$$[\omega_i \omega_{in}] = 0; \tag{3}$$

cela signifie que les ω_{in} sont des combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ avec un tableau de coefficients symétrique.

Or la forme quadratique $\omega_i \omega_{in}$, qui est la seconde forme fondamentale de l'hypersurface $t = C^{te}$, peut être ramenée à une somme de carrés par un choix convenable des $n-1$ premiers vecteurs du repère; on peut donc poser

$$\omega_{in} = a_i \omega_i \qquad \text{(ne pas sommer)}, \tag{4}$$

formule dans laquelle les a_i sont les $n-1$ courbures principales de l'hypersurface.

Introduisons maintenant le paramètre différentiel $\Delta_2 f$. Les dérivées covariantes f_i de la fonction f *par rapport au repère choisi* sont

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots,\ f_{n-1} = 0,\ f_n = \varphi;$$

on a d'autre part, en désignant par D le symbole de la différentiation covariante,

$$Df_i = df_i - f_k\omega_{ik} = df_i - f_k\gamma_{ikh}\omega_h = \begin{cases} -\varphi\gamma_{inh}\omega_h = -\varphi a_i\omega_i & \text{si } i = 1, 2, \ldots, n-1; \\ d\varphi = \psi\omega_n & \text{si } i = n; \end{cases}$$

ψ est évidemment une fonction de f. On a donc

$$\Delta_2 f = f_{11} + f_{22} + \cdots + f_{nn} = \psi - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})\varphi.$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour que Δ_2f *soit une fonction de* f, *en supposant que* Δ_1f *soit déjà une fonction de* f, *est que les hypersurfaces de niveau de la fonction* f *soient toutes à courbure moyenne constante.*

2. **Les courbures principales des hypersurfaces de niveau.** — La dérivation extérieure de l'équation (4) donne, en tenant compte de (1),

$$(a_k - a_i)[\omega_k \omega_{ki}] + [\omega_i(da_i - \overline{C + a_i^2}\,\omega_n)] = 0, \tag{5}$$

l'indice de sommation k variant seulement de 1 à $n-1$, comme du reste dans toutes les formules qui suivront. Comme la première somme du premier membre ne contient aucun terme en $[\omega_i \omega_n]$ puisque la forme ω_{ii} est identiquement nulle, on a

$$da_i = (C + a_i^2)\omega_n + \dots, \tag{6}$$

les termes non indiqués dépendant linéairement de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$. Mais comme $da_1 + da_2 + \dots + da_{n-1}$ ne dépend que de ω_n, nous en déduisons

$$d(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = [(n-1)C + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2]\omega_n;$$

par suite $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2$ est aussi une fonction de f. La considération de sa différentielle montre, en tenant compte de (6) et par un calcul analogue au précédent, que $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{n-1}^3$ est également une fonction de f, et ainsi de suite. D'où résulte le théorème:

Les hypersurfaces de niveau de la fonction f *ont toutes leurs courbures principales constantes.* On a de plus

$$da_i = (C + a_i^2)\omega_n = (C + a_i^2)dt. \tag{7}$$

Réciproquement soit Σ une hypersurface particulière à courbures principales constantes; les hypersurfaces parallèles forment une famille isoparamétrique. Il suffira de faire la démonstration dans un espace de courbure constante égale à 1. Si l'on pose $a_i = \operatorname{tg} \theta_i$, la courbure principale correspondante de l'hypersurface parallèle à Σ à la distance t est $\operatorname{tg}(\theta_i + t)$; elle est donc constante sur cette hypersurface.

3. **Une formule fondamentale.** — Revenons à l'équation (5) et annulons l'ensemble des termes en $[\omega_k \omega_h]$; nous obtenons

$$(a_k - a_i)\gamma_{kih} = (a_h - a_i)\gamma_{hik} \qquad \text{(ne pas sommer)},$$

formule d'où nous tirons deux conclusions:

1° le coefficient γ_{kih} est nul si $a_i = a_h \neq a_k$:

$$\gamma_{kih} = 0 \quad \text{si} \quad a_i = a_h \neq a_k \quad \text{ou} \quad a_k = a_h \neq a_i. \tag{8}$$

2° On a, pour a_i, a_k, a_h distincts,

$$(a_k - a_i)\gamma_{kih} = (a_i - a_h)\gamma_{ihk} = (a_h - a_k)\gamma_{hki} \quad (a_i, a_k, a_h \text{ distincts}), \tag{9}$$

ce qui permet de poser

$$\gamma_{ikh} = \frac{\lambda_{ikh}}{a_i - a_k}, \tag{10}$$

la quantité λ_{ikh} étant symétrique par rapport à ses trois indices [1].

Cela posé dérivons extérieurement l'équation (2)

$$\omega_{ij} = \gamma_{ijk}\omega_k, \tag{2}$$

où nous supposerons essentiellement $a_i \neq a_j$, et égalons dans les deux membres l'ensemble des termes en $[\omega_i\omega_j]$. En tenant compte des équations (1), dans lesquelles l'indice de sommation peut prendre la valeur n, nous obtenons

$$\sum_r (\gamma_{iri}\gamma_{rjj} - \gamma_{irj}\gamma_{rji}) - (C + a_i a_j) = \sum_r \gamma_{ijr}(\gamma_{irj} - \gamma_{jri}),$$

ou encore

$$C + a_i a_j = \sum_r (\gamma_{iri}\gamma_{rjj} + \gamma_{ijr}\gamma_{jri} + \gamma_{rij}\gamma_{ijr} + \gamma_{irj}\gamma_{jri}),$$

formule dans laquelle l'indice de sommation r varie de 1 à $n-1$.

Si dans le second membre on donne à r une valeur fixe telle que $a_r = a_i$, les coefficients γ_{rjj}, γ_{ijr}, γ_{jri} s'annulent en tenant compte de (8); il en est de même si $a_r = a_j$; il suffit donc de donner à r les valeurs pour lesquelles a_r est différent de a_i et de a_j. En tenant compte de (10), on trouve alors la *formule fondamentale*

$$C + a_i a_j = 2 \sum_r \frac{\lambda_{ijr}^2}{(a_i - a_r)(a_j - a_r)}, \tag{11}$$

la sommation étant effectuée par rapport aux indices r pour lesquels $a_r \neq a_i,\ a_j$.

4. Cas où l'hypersurface n'admet que deux courbures principales distinctes. — Dans ce cas, le second membre de l'équation (11) est nul et l'on voit que *le produit des deux courbures principales de l'hypersurface est égal à la courbure riemannienne changée de signe de l'espace ambiant.*

Changeons de notations et désignons par des lettres latines $i, j, \ldots,$ les indices correspondant à $a_i = a$ et par des lettres grecques $\alpha, \beta, \ldots,$ les indices correspondant à $a_\alpha = b$ $(ab = -C)$. D'après (8), tous les coefficients $\gamma_{i\alpha k}$, $\gamma_{i\alpha\beta}$ et $\gamma_{i\alpha n}$ sont nuls; on a donc

$$\omega_{i\alpha} = 0.$$

[1] On a aussi $\gamma_{kin} = 0$ si $a_k \neq a_i$. Cette relation sera utilisée au n° 4.

Les formules (1) donnent d'abord

$$(12)\qquad \begin{cases} \omega_i' = [\omega_k\,\omega_{ki}] + a[\omega_i\,\omega_n], \\ \omega_{ij}' = [\omega_{ik}\,\omega_{kj}] - (C + a^2)[\omega_i\,\omega_j], \end{cases}$$

puis

$$(13)\qquad \begin{cases} \omega_\alpha' = [\omega_\beta\,\omega_{\beta\alpha}] + b[\omega_\alpha\,\omega_n], \\ \omega_{\alpha\beta}' = [\omega_{\alpha\gamma}\,\omega_{\gamma\beta}] - (C + b^2)[\omega_\alpha\,\omega_\beta]. \end{cases}$$

Supposons d'abord la courbure de l'espace positive et égale à 1; on peut supposer, d'après (7),

$$a = \operatorname{tg} t, \quad b = -\cot t.$$

Posons

$$\omega_i = \cos t\,\tilde\omega_i, \quad \omega_\alpha = \sin t\,\tilde\omega_\alpha,$$

d'où

$$\omega_{in} = \sin t\,\tilde\omega_i, \quad \omega_{\alpha n} = -\cos t\,\tilde\omega_\alpha,$$

En remplaçant dans (12) et (13), on obtient

$$(12')\qquad \begin{cases} \tilde\omega_i' = [\tilde\omega_k\,\omega_{ki}], \\ \omega_{ij}' = [\omega_{ik}\,\omega_{kj}] - [\tilde\omega_i\,\tilde\omega_j], \end{cases}$$

et

$$(13')\qquad \begin{cases} \tilde\omega_\alpha' = [\tilde\omega_\beta\,\omega_{\beta\alpha}] \\ \omega_{\alpha\beta}' = [\omega_{\alpha\gamma}\,\omega_{\gamma\beta}] - [\tilde\omega_\alpha\,\tilde\omega_\beta]. \end{cases}$$

Ces formules montrent que les deux formes différentielles $\Sigma\,\tilde\omega_i^2$ et $\Sigma\,\tilde\omega_\alpha^2$ sont de courbure constante égale à 1. Supposons la première forme à p variables et la seconde à q variables $(p + q = n - 1)$. On pourra réaliser la première au moyen de $p + 1$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_{p+1}$ dont la somme des carrés est égale à 1, et la seconde au moyen de $q + 1$ nouvelles variables $u_{p+2}, u_{p+3}, \ldots, u_{n+1}$ dont la somme des carrés est aussi égale à 1. On aura alors

$$\tilde\omega_1^2 + \tilde\omega_2^2 + \ldots + \tilde\omega_p^2 = du_1^2 + du_2^2 + \ldots + du_{p+1}^2,$$
$$\tilde\omega_{p+1}^2 + \tilde\omega_{p+2}^2 + \ldots + \tilde\omega_{n-1}^2 = du_{p+2}^2 + du_{p+3}^2 + \ldots + du_{n+1}^2$$

et par suite, pour le ds^2 de l'espace,

$$ds^2 = \cos^2 t\,(du_1^2 + \ldots + du_{p+1}^2) + \sin^2 t\,(du_{p+2}^2 + \ldots + du_{n+1}^2) + dt^2.$$

Posons enfin

$$x_i = \cos t\,u_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p+1), \qquad x_\alpha = \sin t\,u_\alpha \quad (\alpha = p+2, \ldots, n+1);$$

on constate immédiatement que l'on a

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_{n+1}^2,$$

la somme des carrés des $n+1$ variables étant égale à 1. On retrouve le ds^2 de l'hypersphère de rayon 1 de l'espace euclidien à $n+1$ dimensions, c'est-à-dire le ds^2 de l'espace sphérique à n dimensions, et l'on voit que les hypersurfaces isoparamétriques sont données par l'équation

$$x_{p+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2 = \operatorname{tg}^2 t\,(x_1^2 + \dots + x_{p+1}^2), \tag{14}$$

ou encore

$$\cos 2t = x_1^2 + \dots + x_{p+1}^2 - (x_{p+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2). \tag{14'}$$

Parmi ces hypersurfaces deux sont singulières, c'est celles qui correspondent à $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$; la première donne

$$x_{p+2} = \dots = x_{n+1} = 0;$$

la seconde donne

$$x_1 = \dots = x_{p+1} = 0:$$

ce sont deux variétés totalement géodésiques complèment orthogonales et complémentaires.

Supposons maintenant la courbure de l'espace négative et égale à -1. On peut poser

$$a = -\operatorname{th} t, \quad b = -\operatorname{cth} t,$$

de manière à respecter la relation (7). Nous poserons encore

$$\begin{aligned} \omega_i &= \operatorname{ch} t\,\tilde\omega_i, & \omega_\alpha &= \operatorname{sh} t\,\tilde\omega_\alpha, \\ \omega_{in} &= -\operatorname{sh} t\,\tilde\omega_i, & \omega_{\alpha n} &= -\operatorname{ch} t\,\tilde\omega_\alpha. \end{aligned}$$

Les formules (12) et (13) prennent maintenant la forme

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde\omega_i' &= [\tilde\omega_k\,\omega_{ki}], \\ \omega_{ij}' &= [\omega_{ik}\,\omega_{kj}] + [\tilde\omega_i\,\tilde\omega_j]; \end{aligned} \right. \tag{12''}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde\omega_\alpha' &= [\tilde\omega_\beta\,\omega_{\beta\alpha}], \\ \omega_{\alpha\beta}' &= [\omega_{\alpha\gamma}\,\omega_{\gamma\beta}] - [\tilde\omega_\alpha\,\tilde\omega_\beta]. \end{aligned} \right. \tag{13''}$$

Les deux formes différentielles $\Sigma\,\tilde\omega_i^2$ et $\Sigma\,\tilde\omega_\alpha^2$ sont la première à courbure constante -1, et la seconde à courbure constante $+1$. On les réalisera en posant

$$\Sigma\,\tilde\omega_i^2 = du_1^2 + \dots + du_p^2 - du_{n+1}^2, \quad \Sigma\,\tilde\omega_\alpha^2 = du_{p+1}^2 + \dots + du_n^2,$$

avec $n+1$ variables liées par les relations

$$u_{n+1}^2 - u_1^2 - \dots - u_p^2 = 1, \quad u_{p+1}^2 + \dots + u_n^2 = 1.$$

On aura alors pour le ds^2 de l'espace

$$ds^2 = \mathrm{ch}^2 t (du_1^2 + \dots + du_p^2 - du_{n+1}^2) + \mathrm{sh}^2 t (du_{p+1}^2 + \dots + du_n^2) + dt^2.$$

Il suffira de poser

$$x_i = \mathrm{ch}\, t\, u_i \quad (i = 1, \dots, p, n+1), \qquad x_\alpha = \mathrm{sh}\, t\, u_\alpha \quad (\alpha = p+1, \dots, n),$$

et l'on aura

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2,$$

avec

$$x_{n+1}^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 = 1.$$

On a retrouvé la représentation de Cayley-Klein avec l'*absolu*

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0.$$

Les hypersurfaces de niveau sont données par l'équation

$$(15) \qquad x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2 = \mathrm{th}^2 t (x_{n+1}^2 - x_1^2 - \dots - x_p^2),$$

qu'on peut encore écrire sous la forme

$$(15') \qquad \mathrm{ch}\, 2t = x_{n+1}^2 - x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2,$$

le second membre étant une fonction f dont les deux premiers paramètres différentiels sont des fonctions de f.

Pour $t = 0$ on a une hypersurface singulière d'équations

$$x_{p+1} = x_{p+2} = \dots = x_n = 0;$$

c'est une variété linéaire totalement géodésique à p dimensions.

5. **Cas où les courbures principales sont toutes égales entre elles.** — Si $C = 1$, on peut poser la courbure principale $a = \mathrm{tg}\, t$ et on retombe sur les formules (14) en supposant $p = n - 1$: on obtient les hypersphères de centre fixe

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \cot^2 t\, x_{n+1}^2;$$

pour $t = \frac{\pi}{2}$, on trouve le point $x_1 = \dots = x_n = 0$, centre commun des hypersphères.

Si $C = -1$, on trouve en posant soit $a = -\mathrm{th}\, t$, soit $a = \mathrm{cth}\, t$, les hypersurfaces obtenues en donnant dans (15) à p la valeur $n-1$ et la valeur 0, à savoir

$$(16) \qquad x_n^2 = \mathrm{th}^2 t (x_{n+1}^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2),$$

et

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \text{th}^2\, t\, x_{n+1}^2. \tag{17}$$

Les hypersurfaces (17) sont des hyperspères de centre $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$; les hypersurfaces (16) sont les *équidistantes* de l'hyperplan $x_n = 0$.

Mais il y a encore une solution qui ne se déduit pas des résultats du n° 4, c'est celle qui correspond à $a = 1$ (le cas $a = -1$ n'en est pas distinct). En posant

$$\omega_i = e^{-t}\tilde{\omega}_i, \quad \omega_{in} = e^{-t}\tilde{\omega}_i,$$

les équations (1) deviennent

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_i' = [\omega_{ik}\tilde{\omega}_k], \\ \omega_{ij}' = [\omega_{ik}\omega_{kj}]; \end{cases} \tag{18}$$

elles prouvent que la forme $\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \dots + \tilde{\omega}_{n-1}^2$ est de courbure nulle; on peut donc poser

$$ds^2 = e^{-2t}(du_1^2 + du_2^2 + \dots + du_{n-1}^2) + dt^2,$$

ou encore, en posant $e^t = u_n$,

$$ds^2 = \frac{du_1^2 + du_2^2 + \dots + du_n^2}{u_n^2}.$$

Les hypersurfaces $u_n = C^{te}$ sont des *horisphères*. Dans la représentation de CAYLEY-KLEIN, l'absolu étant la quadrique

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0,$$

la famille d'hypersurfaces isoparamétriques correspondante peut s'écrire

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 + e^{2t}(x_{n+1} - x_n)^2 = 0. \tag{19}$$

6. Généralités sur le cas où il existe plus de deux courbures principales distinctes. — Reprenons la formule fondamentale (11)

$$C + a_i a_j = 2 \sum_r \frac{\lambda_{ijr}^2}{(a_i - a_r)(a_j - a_r)}. \tag{11}$$

Nous allons en déduire que *le cas où les hypersurfaces admettent plus de deux courbures principales distinctes ne peut se présenter que dans un espace à courbure positive.*

Supposons qu'il y ait p courbures principales distinctes, par exemple $a_1, a_2, \dots, a_p$ et soient $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p$ leurs degrés de multiplicité respectifs

$(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_p = n - 1)$. Posons

$$\rho_{ijk} = \frac{2 \Sigma \lambda^2_{\alpha\beta\gamma}}{(a_i - a_k)(a_j - a_k)(a_i - a_j)} \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, p;\ i \neq j \neq k), \tag{20}$$

la somme étant étendue à tous les indices $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$ pour lesquels $a_\alpha = a_i$, à tous les indices $\beta = 1, 2, \ldots, n-1$ pour lesquels $a_\beta = a_j$, à tous les indices $\gamma = 1, 2, \ldots, n-1$ pour lesquels $a_\gamma = a_k$. Les ρ_{ijk} sont évidemment antisymétriques par rapport à leurs trois indices. Nous poserons en outre

$$\rho_{ij} = -\rho_{ji} = \sum_k^{k \neq i, j} \rho_{ijk};$$

on a évidemment

$$\sum_j^{i \neq j} \rho_{ij} = 0. \tag{21}$$

Cela posé l'équation (11) peut s'écrire

$$\nu_i \nu_j (C + a_i a_j) = \rho_{ij}(a_i - a_j). \tag{22}$$

Si l'on y regarde ρ_{ij} comme donnée, on obtient une relation homographique entre a_i et a_j, et toutes ces relations homographiques ont les mêmes points unis $\pm \sqrt{-C}$. Il en résulte a priori l'existence d'une relation entre ρ_{ij}, ρ_{jk}, ρ_{ki}. En éliminant en effet a_k entre les équations (ik) et (jk) et comparant à l'équation (ij), on trouve

$$\nu_i^2 \nu_j^2 \nu_k^2 C = \nu_j \nu_k \rho_{ki} \rho_{ij} + \nu_k \nu_i \rho_{ij} \rho_{jk} + \nu_i \nu_j \rho_{jk} \rho_{ki}. \tag{23}$$

C'est cette relation qui va nous fournir le théorème annoncé.

Remarquons d'abord que les quantités ρ_{ij} ne peuvent être toutes nulles, sinon en effet on aurait $a_i a_j = -C$; il existe au moins une courbure a_i non nulle, et on aurait alors $a_i(a_j - a_k) = 0$, d'où $a_j = a_k$, cas exclu. Supposons donc $\rho_{12} > 0$. La relation (21) pour $i = 2$, combinée avec l'inégalité $\rho_{21} < 0$, montre que l'une des quantités $\rho_{23}, \ldots, \rho_{2p}$ est positive, soit $\rho_{23} > 0$. De même *si nous supposons* $\rho_{31} < 0$, on peut supposer $\rho_{34} > 0$ et ainsi de suite. Il arrivera nécessairement un moment où l'on aura la suite d'inégalités $\rho_{12} > 0$, $\rho_{23} > 0, \ldots, \rho_{q-1,q} > 0$, avec $\rho_{qi} > 0$ pour un indice $i < q-1$, aucune des quantités $\rho_{q-1,k}$ n'étant positive pour $k < q-1$. Mais alors la formule (23) pour les indices $i, q-1, q$ montre immédiatement que C est positif. C. Q. F. D.

Nous avons donc résolu complètement le problème pour C négatif et les solutions sont données par les formules (15) et (19). Mais il n'est pas résolu complètement pour C positif.

7. On peut cependant donner le moyen de trouver la loi qui fournit en fonction de t les courbures principales des hypersurfaces isoparamétriques, connaissant le nombre p des courbures distinctes et leurs degrés de multiplicité $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$. Supposons $C=1$; nous posons, d'après (7),

$$a_i = \operatorname{tg} t_i,$$

où t_i ne diffère de t que par une constante. L'équation (22) s'écrit alors

$$\rho_{ij} = \nu_i \nu_j \cot(t_i - t_j), \tag{22'}$$

et les relations (21) deviennent

$$\sum_j^{j \neq i} \nu_i \nu_j \cot(t_i - t_j) = 0. \tag{21'}$$

Le problème consiste à résoudre ces p équations, qui se réduisent du reste à $p-1$, aux $p-1$ inconnues $t_i - t_j$.

Figurons dans un plan les p droites Δ_i de coefficients angulaires a_i passant par un point fixe O, et donnons-nous l'ordre dans lequel elles se succèdent quand on tourne autour de O dans un sens déterminé. Supposons qu'on rencontre successivement les droites $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$: on aura les inégalités

$$0 < t_2 - t_1 < t_3 - t_1 < \ldots < t_p - t_1 < \pi. \tag{24}$$

Considérons p variables réelles $u_1, u_2, \ldots, u_p$ assujetties à satisfaire aux mêmes inégalités

$$0 < u_2 - u_1 < u_3 - u_1 < \ldots < u_p - u_1 < \pi,$$

et formons la fonction essentiellement positive

$$F(u) = \prod_{i<j}^{1,2,\ldots,p} [\sin(u_j - u_i)]^{\nu_i \nu_j};$$

les équations (21') expriment que toutes les dérivées partielles du premier ordre de cette fonction s'annulent pour $u_i = t_i$. Il est facile de voir que la fonction F atteint son maximum absolu pour ces valeurs (supposées exister). En effet la formule de Taylor donne

$$F(u) - F(t) = \frac{1}{2}(u_i - t_i)(u_j - t_j)\frac{\partial^2 F(v)}{\partial v_i \partial v_j}, \quad \text{avec} \quad v_i = t_i + \theta(u_i - t_i) \quad (0 < \theta < 1).$$

Mais le calcul des dérivées partielles de F conduit pour le second membre à la valeur

$$-\frac{1}{2}\sum_{i<j} \frac{\nu_i \nu_j [(u_i - t_i) - (u_j - t_j)]^2}{\sin^2(v_i - v_j)}.$$

On a donc $F(u) < F(t)$, sauf si $u_i - t_i = u_j - t_j$, c'est-à-dire sauf si on augmente les t_i d'une même constante arbitraire.

Il résulte de là que le système (18') ne peut admettre qu'une solution pour les différences $t_i - t_j$, si l'on suppose les t_i assujetties aux inégalités (21). Mais la fonction $F(u)$ admet évidemment un maximum absolu lorsqu'on assujettit les u_i à ces inégalités; *il y a donc une loi et une seule qui donne les courbures principales des hypersurfaces isoparamétriques lorsqu'on se donne l'ordre dans lequel se succèdent les droites* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$. Il est clair que si toutes les courbures principales sont simples, les angles t_i consécutifs diffèrent entre eux de $\frac{\pi}{n-1}$, et on peut supposer

$$a_i = \operatorname{tg}\left(t + \frac{i\pi}{n-1}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si l'on se donne simplement les ν_i, il y aura autant de solutions qu'il existe d'ordres différents pour les droites Δ_i, deux ordres n'étant pas regardés comme différents si, en inscrivant à côté de chaque droite Δ_i l'entier ν_i correspondant, les deux figures considérées présentent la même suite d'entiers et dans le même ordre, soit qu'on suive les droites les deux fois dans le même sens de rotation, soit qu'on les suive la première fois dans un sens la seconde fois dans le sens contraire. Si tous les entiers ν_i sont égaux, il n'y a évidemment qu'une solution, celle qui a été indiquée plus haut; pour $p = 4$, il y a 3 solutions si les 4 indices de multiplicité ν_i sont distincts, deux solutions s'ils sont au nombre de 3 ou de 2 distincts, une solution s'ils sont égaux entre eux.

8. **Le cas de l'espace sphérique à quatre dimensions.** — Il n'est pas évident à priori qu'à une des lois qui viennent d'être indiquées il corresponde toujours une famille d'hypersurfaces isoparamétriques. On peut montrer facilement qu'il en est ainsi pour $n = 4$; cela résoudra en même temps complètement le problème des familles d'hypersurfaces isoparamétriques dans l'espace sphérique à 4 dimensions.

Nous avons ici $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$ et on peut supposer

$$a_1 = \operatorname{tg}\left(t - \frac{\pi}{3}\right), \quad a_2 = \operatorname{tg} t, \quad a_3 = \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Les formules (22') donnent

$$\rho_{23} = \rho_{31} = \rho_{12} = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \rho_{123},$$

d'où, d'après (20),

$$\lambda_{123}^2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{\sin(t_1 - t_2)\sin(t_2 - t_3)\sin(t_3 - t_1)}{\cos^2 t_1 \cos^2 t_2 \cos^2 t_3} = \frac{3}{16\cos^2 t_1 \cos^2 t_2 \cos^2 t_3}.$$

Nous pourrons prendre

$$\lambda_{123}\cos t_1 \cos t_2 \cos t_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

On a alors, d'après (2) et (10),

$$\omega_{23} = \frac{\lambda_{123}}{a_2 - a_3}\omega_1 = \frac{\lambda_{123}\cos t_2 \cos t_3}{\sin(t_2 - t_3)}\omega_1 = -\frac{1}{2}\frac{\omega_1}{\cos t_1},$$

$$\omega_{31} = \frac{\lambda_{123}}{a_3 - a_1}\omega_2 = \frac{\lambda_{123}\cos t_3 \cos t_1}{\sin(t_3 - t_1)}\omega_2 = \frac{1}{2}\frac{\omega_2}{\cos t_2},$$

$$\omega_{12} = \frac{\lambda_{123}}{a_1 - a_2}\omega_3 = \frac{\lambda_{123}\cos t_1 \cos t_2}{\sin(t_1 - t_2)}\omega_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\omega_3}{\cos t_3}.$$

Il est donc naturel de poser

(25) $$\omega_1 = 2\tilde{\omega}_1 \cos t_1, \quad \omega_2 = 2\tilde{\omega}_2 \cos t_2, \quad \omega_3 = 2\tilde{\omega}_3 \cos t_3,$$

d'où

(26) $$\omega_{14} = 2\tilde{\omega}_1 \sin t_1, \quad \omega_{24} = 2\tilde{\omega}_2 \sin t_2, \quad \omega_{34} = 2\tilde{\omega}_3 \sin t_3,$$

avec

(27) $$\omega_{23} = -\tilde{\omega}_1, \quad \omega_{31} = \tilde{\omega}_2, \quad \omega_{12} = -\tilde{\omega}_3.$$

Les formules de structure (1) donnent, après simplifications,

(28) $$\tilde{\omega}_1' = [\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3], \quad \tilde{\omega}_2' = [\tilde{\omega}_3\tilde{\omega}_1], \quad \tilde{\omega}_3' = [\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2];$$

la forme différentielle quadratique $\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_3^2$ est de courbure 1.

On peut arriver aux hypersurfaces cherchées en cherchant celle pour laquelle l'un des $\cos t_i$ est nul, par exemple $\cos t_3$, car alors le ds^2

$$ds^2 = 4\cos^2 t_1 \tilde{\omega}_1^2 + 4\cos^2 t_2 \tilde{\omega}_2^2 + 4\cos^2 t_3 \tilde{\omega}_3^2$$

se réduira à une somme de deux carrés, à savoir

$$ds^2 = 3(\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2).$$

On aura du reste pour la surface ainsi considérée

(29) $$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{3}\,\tilde{\omega}_1, & \omega_2 = \sqrt{3}\,\tilde{\omega}_2, \\ \omega_3 = 0, & \omega_4 = 0, \\ \omega_{13} = -\tilde{\omega}_2, & \omega_{23} = -\tilde{\omega}_1, \\ \omega_{14} = \tilde{\omega}_1, & \omega_{24} = \tilde{\omega}_2. \end{cases}$$

Les deux formes asymptotiques de cette surface sont

$$\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = -2\sqrt{3}\,\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2,$$
$$\omega_1\omega_{14} + \omega_2\omega_{24} = \sqrt{3}\,(\tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_1^2),$$

de sorte que la courbure normale d'une courbe quelconque tracée sur la surface est

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2)^2 + 4\tilde{\omega}_1^2\tilde{\omega}_2^2}}{3(\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

elle est constante. Or M. Boruvka a demontré [1] que toutes les surfaces de l'espace elliptique à 4 dimensions dont toutes les courbes ont la même courbure normale constante sont les surfaces représentatives des polynomes harmoniques du second degré à trois variables et sont applicables sur la sphère, ou plutôt sur le plan elliptique. Nous pourrons prendre dans l'espace sphérique à 4 dimensions rapporté aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, dont la somme des carrés est égale à 1, pour représenter la surface considérée, les formules

$$\begin{gathered} x_1 = \sqrt{3}\,vw, \quad x_2 = \sqrt{3}\,wu, \quad x_3 = \sqrt{3}\,uv, \\ x_4 = \sqrt{3}\,\frac{u^2 - v^2}{2}, \quad x_5 = w^2 - \frac{u^2 + v^2}{2}; \end{gathered} \tag{30}$$

où u, v, w sont trois paramètres liés par la relation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1. \tag{31}$$

Les hypersurfaces parallèles s'obtiendront en cherchant l'enveloppe, dans l'espace sphérique à 4 dimensions, des hypersphères de rayon t ayant leurs centres aux différents points de la surface. Ces hypersphères ont pour équation générale

$$\sqrt{3}\,vwx_1 + \sqrt{3}\,wux_2 + \sqrt{3}\,uvx_3 + \sqrt{3}\,\frac{u^2 - v^2}{2}\,x_4 + \left(w^2 - \frac{u^2 + v^2}{2}\right)x_5 = \cos t. \tag{32}$$

Leur enveloppe est fournie par les relations

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\,wx_2 + \sqrt{3}\,vx_3 + \sqrt{3}\,ux_4 - ux_5 &= \lambda u, \\ \sqrt{3}\,wx_1 + \sqrt{3}\,ux_3 - \sqrt{3}\,vx_4 - vx_5 &= \lambda v, \\ \sqrt{3}\,vx_1 + \sqrt{3}\,ux_2 + 2wx_5 &= \lambda w; \end{aligned}$$

en tenant compte de (32), on trouve $\lambda = 2\cos t$. Par suite l'enveloppe a pour

[1] « Comptes rendus », 187, pp. 334-336, 1928.

équation

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3}\,x_4 - x_5 - 2\cos t & \sqrt{3}\,x_3 & \sqrt{3}\,x_2 \\ \sqrt{3}\,x_3 & -\sqrt{3}\,x_4 - x_5 - 2\cos t & \sqrt{3}\,x_1 \\ \sqrt{3}\,x_2 & \sqrt{3}\,x_1 & 2x_5 - 2\cos t \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, en développant,

$$\cos 3t = x_5^3 + \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2)x_5 - 3(x_3^2 + x_4^2)x_5 + \frac{3\sqrt{3}}{2}(x_1^2 - x_2^2)x_4 + 3\sqrt{3}\,x_1x_2x_3. \tag{33}$$

Telle est l'équation des hypersurfaces isoparamétriques cherchées. On voit que si l'on est dans l'espace *sphérique*, on retrouve la même hypersurface quand on augmente t de $\frac{2\pi}{3}$; si l'on est dans l'espace *elliptique*, il suffit d'augmenter t de $\frac{\pi}{3}$. Dans ce dernier cas il n'y a qu'une hypersurface singulière, c'est la surface (31). Dans le premier cas, il y en a deux, à savoir la surface (31) et son antipode. Les équations de ces surfaces peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} \mp 3x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots 5),$$

en désignant par P le polynome qui est au second membre de (33).

On peut vérifier à posteriori d'une manière simple l'isoparamétrisme des hypersurfaces (33). Pour que le polynome P jouisse, dans l'espace sphérique à quatre dimensions, de la propriété que $\Delta_1 P$ et $\Delta_2 P$ sont des fonctions de P, il suffit que les deux paramètres différentiels $\Delta_1 P$ et $\Delta_2 P$, *calculés dans l'espace euclidien à 5 dimensions*, deviennent, sur l'hypersphère de rayon 1, des fonctions de P. Or on trouve facilement

$$\sum_i \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2 = 9(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2)^2 = 9,$$

$$\sum_i \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = 0;$$

la vérification est ainsi faite. Cette remarque suggère le problème de trouver, dans l'espace euclidien à n dimensions, tous les polynomes homogènes P tels que $\Delta_1 P$ et $\Delta_2 P$ soient, à des facteurs constants près, des puissances de $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$; si n est impair, cela exige du reste que $\Delta_2 P$ soit nul. Les polynomes qui se sont présentés au N° 4 (formule 14'), jouissent évidemment des deux propriétés en question.

J'ajouterai enfin que les hypersurfaces (33) admettent un groupe de déplacements transitif à trois paramètres de l'espace ambiant. Il serait intéressant de savoir si toute hypersurface à courbures principales constantes d'un espace à courbure constante positive admet un groupe de déplacements rigides transitif; il en est ainsi si les courbures principales sont au nombre de deux au plus distinctes, mais cela n'est pas évident dans le cas contraire [1].

---

[1] Pendant l'impression, j'ai pu déterminer toutes les familles isoparamétriques à trois courbures principales distinctes; elles n'existent que dans les espaces à 4, 7, 13 et 25 dimensions. Elles feront l'objet d'un prochain article.