Un teorema fondamentale della geometria sulle superficie algebriche ed il principio di spezzamento.

Memoria di BENIAMINO SEGRE (a Bologna).

Sunto. - *Si dimostra per la prima volta compiutamente con soli mezzi algebrico-geometrici il teorema sulla* completezza della serie caratteristica *di un sistema continuo completo di curve tracciate sopra una superficie algebrica, e se ne deduce un nuovo* principio di spezzamento *concernente i punti di collegamento di una curva riducibile, limite di una curva irriducibile variabile sopra una superficie algebrica, dal quale discende un* significato algebrico-topologico *pel genere geometrico della superficie.*

Prefazione.

1. La geometria sopra una superficie algebrica, F, si occupa precipuamente delle proprietà invariantive dei sistemi algebrici di curve tracciate su F. In tale studio si possono — anche dal punto di vista storico — nettamente distinguere due tempi, nel primo dei quali — culminante col quadriennio 1896-1900, e dominato dalle idee del CASTELNUOVO e dell'ENRIQUES — le ricerche sono per lo più limitate ai sistemi lineari, mentre nel secondo — sbocciato col quadriennio 1904-1908, e dominato dalle idee del SEVERI — gioca in modo essenziale la considerazione dei sistemi continui (ossia dei sistemi algebrici irriducibili, generalmente non lineari nè totalmente contenuti in alcun sistema lineare) e la fondamentale teoria della base dovuta allo stesso SEVERI [1].

Fra i risultati più salienti del primo periodo vi è il teorema di CASTELNUOVO (1897), da cui subito discende il teorema di RIEMANN-ROCH sulle superficie, che assegna l'irregolarità della superficie come valore massimo della deficienza della serie caratteristica dei sistemi lineari completi tracciati su essa (onde, in particolare, ogni sistema lineare completo è a serie caratteristica completa sempre e solo che la superficie sia regolare). La considerazione della serie caratteristica adempie qui all'ufficio importantissimo di ponte di passaggio fra la geometria sopra le superficie e la geometria sulle curve algebriche; per

[1] Ved. B. SEGRE, *La geometria in Italia, dal Cremona ai giorni nostri,* questi « Annali », serie IV, t. 11 (1933), p. 1.

i sistemi lineari di curve, tale nozione fondamentale è stata sfruttata da C. SEGRE (1887) e poi dal CASTELNUOVO sul piano, e quindi dall'ENRIQUES e dal CASTELNUOVO sulle superficie algebriche.

Al SEVERI è dovuto (1904) il potente strumento offerto dall'estensione di quel concetto ai sistemi continui di curve, nonchè l'introduzione — su ogni curva di F — della così detta serie caratteristica virtuale (la quale, naturalmente, può anche in particolare risultare effettiva). La potenza del nuovo concetto si dimostrò subito nella scoperta del primo legame generale, così a lungo cercato, che il SEVERI riescì a porre fra l'irregolarità di una superficie e l'esistenza su questa d'integrali semplici di 1ª specie.

Fra le applicazioni più immediate che lo stesso SEVERI fece del concetto medesimo, va mentovata la semplicissima dimostrazione del teorema, anteriormente stabilito dall'ENRIQUES, affermante la non regolarità di ogni superficie che contenga un sistema continuo di curve non appartenenti ad un medesimo sistema lineare. Questo risultato può senz'altro venire invertito (poggiando sul citato teorema di CASTELNUOVO), ove si ammetta che *ogni sistema continuo* c o m p l e t o *(ossia non ampliabile) di curve tracciate sopra una superficie algebrica,* F, *debba avere la serie caratteristica* c o m p l e t a: e ciò, come ha osservato l'ENRIQUES, fornisce una notevole caratterizzazione delle superficie algebriche irregolari.

Il teorema in corsivo (il cui reciproco è evidente), sussiste effettivamente sotto certe limitazioni, che sembra non si possano completamente evitare, ma che per nulla restringono la portata delle importantissime applicazioni che ne son state fatte; esso costituisce veramente un ganglio vitale, al quale fra l'altro si collegano alcune delle ricerche di SEVERI e quelle di CASTELNUOVO sull'esistenza degli integrali semplici di PICARD annessi ad una superficie irregolare, ed i molteplici risultati che dipendono dalla considerazione della varietà di PICARD di una superficie, la cui introduzione si deve al CASTELNUOVO. Lo diremo perciò brevemente il t e o r e m a f o n d a m e n t a l e; ad esso è principalmente dedicato il presente lavoro: onde non saranno fuori di luogo le particolareggiate indicazioni storiche e bibliografiche che lo concernono, che passiamo ad esporre nel n.° successivo [2].

2. Il precedente enunciato del teorema fondamentale trovasi in un lavoro di ENRIQUES [3], nel quale — mediante la rappresentazione di F su di un

---

[2] Cfr. in proposito (tranne che pel contenuto dell'ultimo capoverso del n. 2) O. ZARISKI, *Algebraic Surfaces*, « Ergebn. der Math. », t. III, 5 (Berlin, Springer, 1935), pp. 82-88.

[3] F. ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, « Rend. Acc. delle Scienze di Bologna », nuova serie, t, 9 (1904-5), p. 5.

piano multiplo — la determinazione dei sistemi continui completi sulla F viene ricondotta alla costruzione dei sistemi continui di curve piane dotate di certe singolarità ed aventi opportuni contatti con una curva fissa. La dimostrazione — di carattere infinitesimale — data ivi dall'ENRIQUES per il teorema fondamentale, è però soltanto valida per le superficie di genere geometrico $p_g = 0$, e precisamente per curve a serie caratteristica non speciale su esse tracciate, come assai più tardi pose in evidenza il SEVERI [4]; e che per stabilire tale teorema non bastino in generale considerazioni di carattere infinitesimale, risulterà ancora meglio dall'esempio — che qui addurremo nel n. 6 — di un sistema continuo completo di curve piane del tipo suddetto, la cui serie caratteristica è non speciale e completa sulla curva generica, mentre è incompleta e speciale su di una sua curva particolare (i cui caratteri proiettivi non differiscono da quelli della curva generica del sistema).

Poco dopo la comparsa del suddetto lavoro di ENRIQUES, il SEVERI espose un'altra costruzione, più semplice e diretta, dei sistemi continui completi di curve tracciate su di una superficie [5]; ma, anche coll'indagine del SEVERI, il teorema fondamentale restò acquisito solo per $p_g = 0$.

La prima dimostrazione rigorosa e generale del fatto che sopra una superficie algebrica di irregolarità $q = p_g - p_a > 0$ esiste sempre un sistema continuo ∞^q di curve, una generica delle quali risulta linearmente disequivalente con tutte le altre, si deve al POINCARÉ [6]; ed è opportuno notare che tale dimostrazione si vale in modo essenziale dello strumento trascendente, nonostante la natura algebrica del risultato. La costruzione del POINCARÉ, successivamente semplificata — sempre però coll'uso di mezzi trascendenti — dal SEVERI [4] e dal LEFSCHETZ [7], permise al primo di questi Autori di stabilire la completezza della serie caratteristica, sulla curva generica di ogni sistema continuo completo di curve generalmente irriducibili e aritmeticamente effettive. Da quest'ultima restrizione ci si può svincolare nel modo indicato da

---

(4) F. SEVERI, *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica* (Nota V), « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », serie V, t. 30 (1921), nota a piè di p. 297.

(5) F. SEVERI, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare,* « Rend. del Circolo mat. di Palermo », t. 20 (1905), p. 93.

(6) H. POINCARÉ, *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques,* « Ann. École norm. sup. », serie III, t. 27 (1910), p. 55; H. POINCARÉ, *Sur les courbes tracées sur une surface algébrique,* « Sitzungsber. Berlin. math. Ges. », t. 10 (1911).

(7) S. LEFSCHETZ, *L'Analysis situs et la Géométrie algébrique,* « Mém. des Sciences math. », n. 40 (Paris, Gauthier-Villars, 1924), § VI.

B. SEGRE [8], il quale (servendosi del precedente risultato di SEVERI) provò che, se esiste — effettiva — la serie caratteristica sopra una curva irriducibile di una superficie F, tale curva sta (almeno) in un sistema continuo completo di F, segante su essa la serie caratteristica completa.

Il teorema fondamentale restava così finora acquisito (colle limitazioni indicate), soltanto per via trascendente; ed una questione che si imponeva, di grandissima importanza per la Geometria algebrica, era quella di dare di esso una dimostrazione con mezzi algebrico-geometrici adeguati alla sua natura. Nuove ricerche in tale intento sono state fatte in questi ultimi anni dall'ENRIQUES [9]; pare però a chi scrive che le argomentazioni di questo Autore cadano sotto alcune serie obiezioni (qui specificate nel n. 6), onde la questione segnalata rimaneva tuttora in attesa di risposta.

3. Nella prima parte di questo lavoro daremo quella che, dopo quanto precede, ci può essere consentito di chiamare la prima dimostrazione algebrico-geometrica del teorema fondamentale. Tale dimostrazione muove dalla costruzione dei sistemi continui completi nella forma datale nel 1905 dal SEVERI — integrata col metodo dell'intersezione di falde lineari, esposto da questo Autore nel 1921 — e sfrutta l'importante nozione di serie di equivalenza su di una curva riducibile, introdotta e sviscerata dallo stesso SEVERI nel 1932 [10]. *L'idea nuova su cui essa s'impernia — e che costituisce l'elemento essenziale del successo — si vale di una opportuna serie di equivalenza su di una curva riducibile, definita come limite di una serie lineare sopra una curva irriducibile variabile,* e del fatto che la dimensione della prima non può risultare inferiore alla dimensione della seconda.

La suddetta dimostrazione conduce in pari tempo in modo spontaneo, e senza uscire dall'ordine d'idee algebrico-geometrico, al seguente principio

(8) B. SEGRE, *Sulla completezza della serie caratteristica di un sistema continuo di curve irriducibili tracciate su di una superficie algebrica*, « Rend. del Circolo mat. di Palermo », t. 55 (1931), p. 443.

(9) Cfr.: *a)* F. ENRIQUES, *Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero*, « Rend. Seminario mat. R. Univ. Roma », serie III, t. 1 (1931-33), p. 7, § 6; *b)* F. ENRIQUES, *La proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari e le curve infinitamente vicine*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », serie VI, t. 23 $(1936)_1$, p. 459; *c)* F. ENRIQUES, *Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica*, « Rend. Seminario mat. R. Univ. Roma », serie IV, t. 1 (1936-37), p. 1, con un'*Addizione* a p. 119; *d)* F. ENRIQUES, *Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », serie VI, t. 25 $(1937)_2$, p. 193. In *a)* la questione trovasi solo impostata; e *b)* non è che un riassunto di *c)*.

(10) F. SEVERI, *Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*, « Mem. R. Acc. d'Italia », t. 3 (1932), Mem. N. 5.

di spezzamento, stabilito in tutta la sua generalità nella seconda parte del lavoro:

Se una curva E *algebrica irriducibile — variando con continuità sopra una superficie algebrica* F, *di genere geometrico* p_g *— viene a spezzarsi in due distinte componenti irriducibili,* C *e* D, *di cui (almeno) una abbia la serie caratteristica effettiva, le* C, D *ammettono in generale di conseguenza non meno di* $p_g + 1$ ***punti di collegamento*** (ossia punti comuni, che non sono limiti di punti doppi di E). *Più precisamente, supposto — come accadrà in generale — che* (CD) *consti di punti distinti, i punti di collegamento possono essere in numero* $\leq p_g$ *solo s'essi risultano linearmente dipendenti rispetto alle curve canoniche impure di* F.

Questo principio di spezzamento permette intanto (n. 12) di dare una nuova definizione, di carattere algebrico-topologico, pel genere geometrico p_g. Esso arreca inoltre una notevole precisazione al principio di degenerazione di ENRIQUES, secondo cui, se una curva E algebrica irriducibile — variando con continuità sopra una superficie algebrica F — viene a spezzarsi in due componenti, C e D, queste ammettono necessariamente almeno un punto di collegamento. In base al principio di spezzamento si può infatti p. es. asserire, di più, che — se una (almeno) delle C, D possiede la serie caratteristica effettiva — C e D possono ammettere un unico punto di collegamento solo se è $p_g = 0$, oppure se — essendo $p_g > 0$ — il punto di collegamento cade in un punto base del sistema canonico impuro di F (il che, in particolare, senz'altro fornisce la nota proprietà di tale sistema, di contenere necessariamente come parti fisse tutte le curve eccezionali di 1ª specie della superficie).

Il **principio di degenerazione** è stato stabilito dall'ENRIQUES [11], mediante semplicissime considerazioni topologiche; dimostrazioni di carattere algebrico-geometrico sono state ottenute in seguito dal SEVERI (per curve variabili su di un piano) [12] e da B. SEGRE [13]. Qui (nel n. 4) diamo di esso un'altra dimostrazione puramente algebrico-geometrica, e di semplicità irriducibile, ispirata all'idea nuova a cui si è alluso in principio.

---

[11] Cfr. loc. cit. in [3]; oppure F. ENRIQUES-O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, t. III (Bologna, Zanichelli, 1924), pp. 404-405.

[12] F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, (Leipzig, Teubner, 1921), Anhang F, pp. 319-321.

[13] B. SEGRE, *Intorno ad un teorema di Hodge sulla teoria della base per le curve di una superficie algebrica*, questi « Annali », serie IV, t. 16 (1937), p. 157, n. 6.

PARTE PRIMA

Il teorema fondamentale.

4. Stabiliremo dapprima il principio di degenerazione (enunciato nel n. 3), ponendoci nelle condizioni più semplici. Consideriamo perciò in uno spazio S_k un sistema continuo Σ di curve E generalmente irriducibili e prive di punti multipli, al quale appartenga una curva spezzata in due componenti, C e D, esse pure irriducibili e prive di punti multipli; si tratta di dimostrare che, necessariamente, queste ammettono qualche punto di collegamento.

Suppongasi all'uopo, per assurdo, che C, D non abbiano alcun punto comune; denotando rispettivamente con n, n', n'' e π, π', π'' l'ordine ed il genere delle curve C, D, E, si avrà pertanto:

$$n'' = n + n', \quad \pi'' = \pi + \pi' - 1 \text{ (}^{14}\text{)}.$$

Il sistema lineare costituito dalle forme T di S_k di ordine t sufficientemente elevato, determina sulle curve C, D, E serie lineari g^{γ}_{nt}, $g^{\delta}_{n't}$, $g^{\varepsilon}_{n''t}$ complete e non speciali, le cui dimensioni valgono perciò ordinatamente

$$\gamma = nt - \pi, \quad \delta = n't - \pi', \quad \varepsilon = n''t - \pi''.$$

Orbene, quando E — variando in Σ — tende alla curva spezzata $C + D$, la serie lineare $g^{\varepsilon}_{n''t}$, ottenibile nel modo indicato sulla prima curva, tende manifestamente ad una serie di equivalenza contenuta totalmente nella serie di equivalenza completa della seconda che subordina sulle due componenti C, D le suddette serie lineari g^{γ}_{nt}, $g^{\delta}_{n't}$; e l'assurdità dell'ipotesi ammessa discende subito dal fatto che la dimensione della serie limite risulta i n f e r i o r e ad ε, valendo al più

$$\gamma + \delta = (n + n')t - (\pi + \pi') = n''t - (\pi'' + 1) = \varepsilon - 1.$$

Allo scopo di stabilire con tutto rigore l'assurdità di questa conclusione, rappresentiamo le curve E di Σ coi punti di una varietà algebrica M ([15]), ed i

([14]) La prima di queste due formule è ovvia; la seconda è caso particolare di una nota formula di Valentiner e Noether, per una dimostrazione algebrico-geometrica generale della quale ved. p. es. É. Picard-G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II (Paris, Gauthier-Villars, 1906), pp. 105-107.

([15]) Ciò può notoriamente farsi in molti modi, restando nel consueto dominio della geometria algebrica. Un altro modo semplice ed elegante, di carattere più strettamente algebrico, trovasi in W.-L. Chow e B. L. van der Waerden, *Ueber zugeordnete Formen und algebraische Systeme von algebraischen Mannigfaltigkeiten*. « Math. Ann. », t. 113 (1937), p. 692, § 1.

vari gruppi (ET) coi punti di una varietà algebrica N (che può p. es. pensarsi subordinata alla varietà di VERONESE generalizzata, i cui punti rappresentano i gruppi non ordinati di $n''t$ punti di S_k). Fra M ed N intercede allora una corrispondenza algebrica, manifestamente irriducibile, nella quale sono associati un punto di M ed uno di N che rispettivamente rappresentino una curva E di Σ ed un gruppo segato su essa da una T. Siccome ad un punto generico di M corrisponde su N una V_ε, così la dimensione della varietà che corrisponde ad un qualunque punto di M (e la dimensione delle singole parti di tale varietà, s'essa si spezza) non può scendere al disotto di ε [16]; mentre invece, per ciò che precede, la varietà di N omologa del punto rappresentante $C+D$ su M ha la dimensione non superiore ad $\varepsilon - 1$.

La dimostrazione che precede resta sostanzialmente valida — salvo modificazioni di dettaglio, sulle quali è superfluo insistere — se si suppone che la curva irriducibile E sia comunque dotata di punti multipli (nel qual caso si dovranno considerare forme T aggiunte alla E, e perciò generalmente variabili con questa curva), ed anche nell'ipotesi che le C, D ammettano qualche punto multiplo o non siano irriducibili.

5. Ci proponiamo ora d'indicare come — seguendo il SEVERI [17] — possa venire impostata la dimostrazione del teorema fondamentale.

Consideriamo sopra una superficie algebrica F, di genere aritmetico p_a e genere geometrico p_g, un sistema lineare regolare irriducibile privo di punti base, di cui C denoti una curva generica; e fissiamo ad arbitrio su F una curva irriducibile D, che determini un sistema lineare regolare e che seghi C secondo un gruppo

$$\Gamma = (CD) \qquad \text{di } c \text{ punti distinti } P_1, P_2, \ldots, P_c,$$

tale che — su C — la somma di questo con un gruppo caratteristico sia non speciale. Allora il sistema lineare

$$|E| = |C + D| \tag{1}$$

risulta irriducibile e regolare, e taglia sulla curva C (che certo non ammette come parte fissa) una serie lineare completa e non speciale; ne consegue che il gruppo Γ impone alle curve di $|E|$ (che debbano contenerlo) precisamente

---

(16) Questa proprietà — che può ovviamente venir dimostrata con tutto il rigore mediante argomentazieni algebrico-geometriche — trovasi pure stabilita, con mezzi puramente algebrici, da B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebraische Korrespondenzen und rationale Abbildungen* (Zur algebraische Geometrie, VI), « Math. Ann. », t. 110 (1935), p. 134, § 2.

(17) Ved. loc. cit. in (5), tenendo anche presente quanto è detto nei loc. cit. in (4) ed in (12).

$c - p_g$ condizioni linearmente indipendenti [18]. Se n, n', n'' e π, π', π'' ordinatamente denotano il grado ed il genere virtuali dei tre sistemi lineari regolari $|C|$, $|D|$, $|E|$, le dimensioni r, s, t di questi vengono espresse dalle

$$(2) \qquad r = p_a + n - \pi + 1, \quad s = p_a + n' - \pi' + 1, \quad t = p_a + n'' - \pi'' + 1;$$

e, in forza della (1), sussistono le

$$(3) \qquad n'' = n + n' + 2c, \quad \pi'' = \pi + \pi' + c - 1.$$

In base al principio di degenerazione di Enriques (qui dimostrato nel n.° precedente), la totalità Σ delle curve di $|E|$ — prossime alla $C + D$ — dotate di c punti doppi prossimi ai punti di Γ, coincide colla totalità delle curve di $|E|$ spezzate in una curva C_1 prossima a C ed in una curva D_1 prossima a D. Per effettuare nel modo migliore lo studio di Σ, ricorriamo alla rappresentazione proiettiva delle curve di $|E|$ coi punti di uno spazio S_t. In questo vi è luogo a considerare la V_{t-1} algebrica i cui punti corrispondono alle curve di $|E|$ dotate di punto doppio, e la V_α algebrica rappresentante la totalità delle curve di $|E|$ che si spezzano nel modo indicato; ed è chiaro che V_{t-1} passa per V_α colla molteplicità c, e che il punto O — imagine della curva spezzata $C + D$ — sta su V_α, ed anzi, sostituendo eventualmente a C, D opportune curve C_1, D_1 [19], può supporsi (generico su questa, e quindi) semplice per essa: onde Σ ammetterà come imagine in S_t la falda analitica Ψ di V_α — lineare e di dimensione α — avente per origine O.

Sopra l'ipersuperficie V_{t-1}, il punto O è origine di c falde lineari distinte, i punti di una qualunque Φ_i delle quali corrispondono alle curve di $|E|$ — prossime alla $C + D$ — aventi un punto doppio prossimo ad uno P_i determinato dei c punti di Γ (per $i = 1, 2, \ldots, c$); ed è noto che l'iperpiano tangente in O a Φ_i rappresenta il sistema lineare ∞^{t-1} costituito dalle curve di $|E|$ che passano per P_i. La falda lineare Ψ, risulta per ciò che precede l'intersezione delle c falde lineari

$$(4) \qquad \Phi_1, \; \Phi_2, \ldots, \; \Phi_c;$$

dunque lo spazio S_α ad essa tangente in O è subordinato allo spazio S_a lungo cui si segano gli iperpiani tangenti in O alle (4), o coincide con questo: e nei due casi, rispettivamente, si ha

$$(5) \qquad \alpha < a,$$

---

(18) Relativamente alle semplici proprietà dei sistemi lineari di cui qui si fa uso, si può p. es. vedere quanto è detto in seguito nel n. 8.

(19) In guisa naturalmente da non contraddire alle ipotesi iniziali sulle C, D, il che certo si verifica per le C_1, D_1 generiche.

oppure

$$\alpha = a. \tag{6}$$

Lo spazio S_a. d'altro canto, rappresenta il sistema lineare delle curve di $|E|$ passanti per Γ; ond'è:

$$a = t - (c - p_g). \tag{7}$$

Il sistema continuo $\{C\}$ che si ottiene prolungando analiticamente il sistema analitico costituito dalle suddette curve C_1, ammette su C la serie caratteristica completa, sempre e solo ch'esso abbia dimensione

$$\rho = p_g + n - \pi + 1. \tag{8}$$

Ebbene, questa relazione equivale precisamente alla (6). Invero, una qualunque delle ∞^ρ curve C_1 fa parte di infinite curve del sistema ∞^α Σ, la cui parte ulteriore è necessariamente una delle curve del sistema lineare $|D_1| = |E - C_1|$ prossime a D. Questo sistema lineare ammette gli stessi caratteri virtuali di $|D|$, onde, in virtù del teorema di Riemann-Roch, la sua dimensione dev'essere $\geq s$ [20]; ma poichè quando $C_1 + D_1$ — variando in Σ — tende a $C + D$, $|D_1|$ tende al sistema lineare ∞^s $|D|$, così in forza di un'argomentazione analoga a quella svolta nel penultimo capoverso del n. 4, anche $|D_1|$ dev'essere ∞^s. Si ha pertanto

$$\alpha = \rho + s;$$

e basta tenere conto di questa relazione e delle (2), (3), (7), per poter verificare la perfetta equivalenza fra la (6) e la (8).

6. Prima di procedere oltre nella dimostrazione del teorema fondamentale, sarà opportuno che ci si soffermi per giustificare quanto abbiamo asserito nel n. 2, a proposito delle ricerche dell'Enriques ivi citate in [9]. Ecco intanto la via seguita da questo Autore, a prescindere da modificazioni non sostanziali, introdotte solo per semplificare l'esposizione e ricollegarla a quanto precede.

In base al n. precedente, tutto sta nel dimostrare l'impossibilità della (5). Ammesso perciò che la limitazione (5) sussista, si tratta di stabilire l'assurdità di tale ipotesi. La (5) implica che le falde (4) si tocchino lungo tutta la Ψ, esistendo nell'intorno del 1° ordine del generico punto O di V_α qualche punto O' situato su dette falde ma non sulla Ψ [e cioè giacente in S_a ma non

---

[20] È ovvio che $|D_1|$ non può essere speciale, tale non essendo per ipotesi $|D|$.

in S_α] ([21]). L'ENRIQUES ritiene di poter dedurre da O ed O' una successione infinita di punti

$$(9) \qquad O'',\ O''',\ \dots,$$

appartenenti ad intorni di O degli ordini $2^o, 3^o, \dots$ e tutti situati su ciascuna delle (4); e ciò, qualora fosse dimostrato (il che l'Autore non fa) che la successione (9) definisce un ramo analitico, verrebbe a contraddire al fatto che le (4) non possono avere in O — lungo questo ramo — che un contatto d'ordine finito. Ma la stessa costruzione della successione (9) poggia in modo essenziale su certe ammissioni, che tosto esporremo, sulle quali vertono altre nostre riserve.

Al punto O', infinitamente vicino ad O e situato sulle (4), corrisponde su F una curva E' di $|E|$, infinitamente vicina alla $C+D$ ed avente c punti doppi infinitamente vicini ai punti di Γ. L'ENRIQUES applica ad essa il suo principio di degenerazione, e ne inferisce che la curva E' necessariamente *deve spezzarsi* in una curva C' infinitamente vicina (e non equivalente) a C ed in una curva D' infinitamente vicina (e non equivalente) a D; ma per l'applicabilità del suddetto principio dovrebbe la curva E' poter variare in un sistema continuo, mentre essa è stata solo definita come curva dell'intorno del 1^o ordine di $C+D$ in $|E|$. Per superare questa prima difficoltà, l'ENRIQUES dice che — nelle ipotesi ammesse — le curve $C+D$ ed E' stanno in un sistema continuo di curve E^*, di un conveniente spazio S_k in cui si può pensare immersa F, le E^* essendo tutte dotate di c punti doppi e quindi — per il principio di degenerazione — spezzate in due curve C^* e D^* [tendenti rispettivamente alle C, D quando $E^* \to C+D$] ([22]). Questa affermazione (che, per essere rigorosamente stabilita, necessiterebbe qualche indagine ulteriore), esprime soltanto che C' è curva consecutiva a C in un sistema continuo Ω (che può senza restrizione supporsi ∞^1) di curve C^* situate in S_k, ma non giacenti in generale sulla F; ed analogamente per D'. Nè certo si può far sì che le curve C^* (e, parimente, le D^*) appartengano tutte alla F, poichè se no il punto O' — dianzi considerato in S_t — verrebbe a stare (non solo in S_a, ma addirittura) in S_α, contro il supposto; senza contare che, qualora ciò fosse invece dimostrato sempre possibile, ne seguirebbe subito il teorema fondamentale, e la considerazione della successione (9) risulterebbe del tutto superflua.

([21]) Nel ragionamento dell'ENRIQUES si suppone anzi soltanto che O' appartenga alle (4) e non stia sulla varietà (contenuta in V_α) imagine delle curve di $|E|$ che si spezzano in una curva di $|C|$ ed in una curva di $|D|$.

([22]) Cfr. la nota a piè di p. 59 del lavoro *a*) cit. in ([9]). In *c*) la suddetta difficoltà vien superata (nel n. 3) mediante delicate considerazioni infinitesimali, poggianti sulla rappresentazione di F sopra un piano multiplo; ma, anche per la curva C' a cui in tal guisa si perviene, i rilievi che seguono continuano a sussistere.

È evidente che (non potendosi naturalmente supporre note le proprietà della varietà di PICARD di F, prima di aver stabilito il teorema fondamentale), dal semplice fatto che C' è la curva (sia pure situata su F) ***consecutiva*** a C nel sistema continuo Ω, la cui curva C^* generica non giace su F, *non può dedursi un significato per ogni operazione a cui si voglia assoggettare* C', la quale abbia un senso se applicata alle curve di F (intese nell'accezione solita), ma non lo abbia per le curve C^* di S_k non situate su F. Orbene, dalla possibilità di applicare a C' un'operazione di tale tipo (precisamente: la somma o sottrazione di C' con un qualunque sistema lineare di curve di F), dipende appunto in modo essenziale la dimostrazione indicata in (9), *d*) dall'ENRIQUES.

Un'analoga obiezione non può invece venir rivolta ad un'argomentazione, apparentemente consimile, su cui si basa la dimostrazione dell'ENRIQUES data in (9), *c*) [e riassunta in (9), *b*)]. Ivi infatti si considerano, sopra una curva K di F, i gruppi infinitamente vicini

$$G \equiv (CK), \quad G' = (C'K),$$

e da questi si deduce una successione

$$G'', \quad G''', \ldots \tag{10}$$

di gruppi di K, appartenenti ad intorni di G degli ordini 2°, 3°,..., tali che risulti

$$G' - G \equiv G'' - G' \equiv G''' - G'' \equiv \ldots;$$

e questa deduzione (alla quale si dà un preciso significato coll'introduzione su K dell'operazione infinitesima $+ G' - G$, generatrice di un gruppo nel senso di LIE) è perfettamente lecita, potendo venir fondata su note proprietà della varietà di JACOBI di K. Tuttavia anche la suddetta dimostrazione è infirmata da una lacuna, che non pare facilmente colmabile, ammettendosi in essa tacitamente che — quando K descrive su F un fascio lineare — ciascuno dei gruppi (10) generi una curva ***algebrica***: il che appare tutt'altro che ovvio, quando si osservi che si perviene sostanzialmente a tali gruppi applicando (ad elementi algebrici) un processo d'integrazione.

Diamo da ultimo l'esempio annunciato nel n. 2, provante che la *serie caratteristica* di un sistema continuo completo di curve piane algebriche — aventi un certo numero di contatti con una curva fissa — *può risultare incompleta* sopra una curva particolare del sistema (i cui caratteri proiettivi non differiscono da quelli della curva generica).

Sopra una quartica piana di genere 3, C, fissiamo 12 punti distinti Q_1, $Q_2, \ldots, Q_{12}$ segati da una cubica; e consideriamo, nel piano di C, una qualunque curva algebrica L che la tocchi semplicemente negli 11 punti $Q_2, \dots, Q_{12}$. Siccome questi punti presentano 11 condizioni indipendenti alle quartiche che debbano contenerli, le quali passano tutte di conseguenza per Q_1, così il sistema delle quartiche piane prossime a C e tangenti ad L in 11 punti prossimi a $Q_2, \dots, Q_{12}$ ha la dimensione 3, ed ammette Q_1 come punto caratteristico principale [23]. È noto che i punti caratteristici principali di un sistema continuo di curve piane non possono invadere un campo a due dimensioni [24]; se dunque fissiamo genericamente una curva algebrica L_1 che tocchi semplicemente C in Q_1, ed imponiamo alle curve del suddetto sistema ∞^3 di risultare tangenti alla L_1 in un punto prossimo a Q_1, veniamo a definire un sistema continuo completo Σ, ∞^2, contenente C. La serie caratteristica di Σ su C è una serie semplicemente infinita subordinata alla g_4^2 canonica, ed è quindi incompleta.

7. Riprendendo il filo delle considerazioni del n. 5, ci proponiamo ora di dimostrare che *il sistema continuo* $\{C\}$, *ivi definito, ammette la serie caratteristica su* C *completa*; per il che (n. 5) basterà stabilire la (6).

A tal uopo dividiamo (com'è certo sempre possibile) il gruppo $\Gamma = (CD)$ in due gruppi Γ_1 e Γ_2, il primo dei quali consti di $c - p_g$ punti — e siano, per fissare le idee, $P_1, P_2, \dots, P_{c-p_g}$ — che impongano $c - p_g$ condizioni linearmente indipendenti alle curve di $|E|$; mentre per il secondo gruppo (di p_g punti) non abbia a passare alcuna curva canonica impura di F. Le falde lineari

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{c-p_g}$$

ammettono conseguentemente in O $c - p_g$ iperpiani tangenti fra loro linearmente indipendenti (e quindi segantisi lungo S_a), onde — a norma di un classico teorema sulle funzioni implicite definite da un sistema di equazioni analitiche a matrice jacobiana non nulla — esse si segano lungo una falda analitica lineare Ξ, di origine O, avente la dimensione a. Raggiungeremo l'intento prefissoci, provando che — quando si scelga D opportunamente — la falda analitica Ξ concide colla Ψ, ossia (supposto $p_g > 0$) appartiene anche a ciascuna delle falde lineari

$$\Phi_{c-p_g+1}, \dots, \Phi_c. \tag{11}$$

Ragioniamo per assurdo, facendo l'ipotesi che una delle (11) non passi per Ξ; ed incominciamo col mostrare che, conseguentemente, nessuna delle (11) potrà

---

[23] Relativamente a questa nozione, ved. F. SEVERI e B. SEGRE, *L'inviluppo di un sistema più volte infinito di curve piane*, questi « Annali », serie IV, t. 8 (1930), p. 173, n. 1.

[24] Cfr. loc. cit. in [23], n. 2.

contenere Ξ, ove si ammetta — com'è lecito — che la curva D possa descrivere su F un fascio Λ che seghi C secondo una g_c^1 priva di punti fissi, non composta mediante un'involuzione, ed il cui gruppo jacobiano contenga qualche punto semplice. Il gruppo di monodromia del parametro da cui si possono far dipendere le curve di Λ, pensato come funzione algebrica di una generica funzione razionale del punto scorrente su C, contiene perciò qualche trasposizione ed è (transitivo per l'irriducibilità di C e) primitivo. Per una nota proposizione esso di conseguenza risulta il gruppo totale ([25]), il che significa che — mediante una circolazione di D in Λ — i punti di Γ possono venire permutati fra loro arbitrariamente; in particolare esisteranno circolazioni di D in Λ trasformanti in sè ciascuno dei gruppi Γ_1, Γ_2, e subordinanti fra i punti di Γ_2 una qualsiasi sostituzione. Associando la curva D — variabile in Λ nel modo suddetto — alla curva fissa C, si ottiene una curva — variabile in $|E|$ — la cui imagine in S_t descrive un ciclo, uscente da O e tracciato su V_α, seguendo il quale la falda Ξ viene trasformata in sè, mentre le (11) vengono fra loro permutate arbitrariamente: dunque effettivamente, poichè per ipotesi una delle (11) non passa per Ξ, lo stesso dovrà accadere per ciascuna di tali falde.

La conclusione a cui così siamo pervenuti, e di cui ci proponiamo di stabilire l'assurdità, mostra che su F — in corrispondenza a Ξ — si ha un sistema analitico di curve di $|E|$ prossime alla $C+D$, che ancora denoteremo colla lettera Ξ, una generica E^* delle quali ammette $c-p_g$ punti doppi — costituenti un gruppo $\Gamma_1{}^*$ prossimo a Γ_1 — e nessun punto doppio ulteriore; dunque E^* è necessariamente irriducibile (perchè, essendo vicina a $C+D$, non potrebbe spezzarsi che in una curva C_1 prossima a C ed in una curva D_1 prossima a D, onde verrebbe ad avere c punti doppi), ed il suo genere effettivo — uguale al genere virtuale di E^* coi $c-p_g$ punti doppi assegnati — vale

$$\pi^* = \pi'' - (c - p_g) = \pi + \pi' + p_g - 1.$$

Le curve di $|E|$ passanti per $\Gamma_1{}^*$ segano su E^* — fuori di $\Gamma_1{}^*$ — una g_{n^*}, di ordine

$$n^* = n - 2(c - p_g) = n + n' + 2p_g$$

ed indice di specialità $\geq p_g$ (in quanto essa ammette come residui rispetto

---

([25]) Cfr. p. es. L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois* (Pisa, Spoerri, 1900), § 13. — [Aggiunta fatta durante la correzione delle bozze]. Quest'argomentazione trovasi già in F. Enriques, *Sul gruppo di monodromia delle funzioni algebriche, appartenenti ad una data superficie di Riemann*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », serie V, t. 13 (1904), p. 382.

alla serie canonica i gruppi segati su E^* dalle curve canoniche impure di F). Quando E^* — muovendosi in Ξ — tende a $C+D$, la suddetta g_{n^*} tende alla serie di equivalenza segata su $C+D$ — fuori di Γ_1 — dalle curve di $|E|$ che contengono questo gruppo, e che perciò passano anche per Γ_2. Le serie lineari complete $g^{\gamma}_{n+p_g}$, $g^{\delta}_{n'+p_g}$ rispettivamente subordinate da tale serie di equivalenza sulle curve C, D, si hanno manifestamente sommando alle relative serie caratteristiche il gruppo Γ_2, il quale rimane fisso per ciascuna di esse (dato che Γ_2 non sta su alcuna curva canonica impura di F); risulta pertanto:

$$\gamma = n - \pi + p_g, \quad \delta = n' - \pi' + p_g.$$

Mostreremo fra un istante che la $g^{\varepsilon}_{n^*}$ ottenuta completando la g_{n^*} di E^* può farsi tendere con continuità ad una serie di equivalenza totalmente contenuta nella $g^{\gamma}_{n+p_g} + g^{\delta}_{n'+p_g}$ di $C+D$; dal che seguirà senz'altro (come nel n. 4) l'assurdità dell'ipotesi ammessa in principio, dato che si ha:

$$\varepsilon \geq n^* - \pi^* + p_g = n + n' + 2p_g - \pi - \pi' + 1 = \gamma + \delta + 1.$$

Per assodare il punto che ancora resta da stabilire, fissiamo su F una curva A di un sistema lineare $|A|$ così ampio, che le curve di $|A+E|$ passanti per il gruppo $\Gamma_1^* + (AE^*)$ seghino ulteriormente su E^* la $g^{\varepsilon}_{n^*}$ completa. È chiaro allora che, quando E^* — muovendosi in Ξ — tende alla $C+D$, le curve ultimamente considerate tendono alle curve di $|A+E|$ che passano pel gruppo $\Gamma_1 + (AC) + (AD)$, le quali appunto ordinatamente segano sulle C, D le suddette $g^{\gamma}_{n+p_g}$, $g^{\delta}_{n'+p_g}$.

Il risultato enunciato in principio di questo n.° è così compiutamente dimostrato (per via algebrico-geometrica). Da esso possono facilmente trarsi, come s'è detto nel n. 2, le forme date da Severi e da B. Segre pel teorema fondamentale.

PARTE SECONDA

Il principio di spezzamento.

8. Incominciamo col richiamare il seguente lemma [26], di cui poi faremo frequentemente uso.

Dato su di una superficie algebrica F *un sistema regolare* $|C|$, ∞^r $(r \geq 0)$, *ed una curva irriducibile* D, *non comune a tutte le* C *ed avente la serie caratteristica effettiva, se la somma della serie lineare segata da* $|C|$ *su* D *colla serie*

(26) Per la dimostrazione del quale ved. B. Segre, *Sui moduli delle superficie algebriche irregolari.* « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », serie VI, t. 19 $(1934)_1$, p. 488, n. 1.

caratteristica è non speciale, anche il sistema lineare $|E| = |C + D|$ *risulta regolare, ed inoltre sulla curva* D *— che non ammette certo come parte fissa — questi sega una serie completa (non speciale).*

Da qui discende — come ora appunto ci proponiamo di far vedere — che, se fissiamo in $|C|$ una qualunque curva C, eventualmente spezzata, ma non contenente D come parte, *il gruppo* $\Gamma = (C\, D)$ *impone alle curve di* $|E|$ *(che debbano contenerlo) precisamente* $c - d$ *condizioni*, dove c sta per indicare il numero dei punti di Γ e d (≥ 0) denota l'indice di specialità della serie caratteristica $|\Delta|$ di D (serie che per ipotesi risulta effettiva).

Conservando infatti per Γ, $|C|$, $|D|$, $|E|$ le notazioni del n. 5, talchè continueranno a valere le (2), (3), tranne al più la seconda delle (2) (dato che attualmente non abbiamo supposto che $|D|$ sia regolare), in virtù del lemma ricordato si può asserire che le curve di $|E|$ passanti per Γ segano ulteriormente su D la serie caratteristica $|\Delta|$ completa, di dimensione

$$n' - \pi' + d.$$

L'infinità τ del sistema lineare costituito da quelle curve si ha allora subito osservando che, per staccare D da esso, ottenendone come residuo il sistema lineare ∞^r $|C|$, occorre precisamente imporre $n' - \pi' + d + 1$ condizioni indipendenti. Risulta dunque

$$\tau = r + (n' - \pi' + d + 1) = p_a + (n + n') - (\pi + \pi') + d + 2 =$$
$$= (p_a + n'' - \pi'' + 1) - c + d = t - (c - d),$$

ciò che dimostra l'asserto.

9. Supporremo d'ora in poi, per semplicità, che il gruppo Γ consti di c punti distinti. Fra questi punti, in base al n. 8, ne esistono certo $c - d$ offrenti alle curve di $|E|$ $c - d$ condizioni indipendenti, e tali siano p. es. i punti

$$P_1,\ P_2, \ldots,\ P_{c-d}. \tag{12}$$

Consideriamo su F la totalità Θ delle curve di $|E|$ — prossime alla $C + D$ — che hanno $c - d$ punti doppi prossimi ai punti (12). Ricorrendo alla rappresentazione iperspaziale di $|E|$ già indicata nel n. 5, si vede facilmente che — nelle ipotesi attuali — Θ costituisce un unico sistema analitico, di dimensione

$$t - (c - d) = \tau.$$

Vogliamo dimostrare che *le curve di* Θ *sono tutte necessariamente spezzate in due parti, l'una prossima a* C *e l'altra prossima a* D.

Raggiungeremo tale intento constatando l'esistenza di un sistema continuo di curve di $|E|$ così spezzate, avente dimensione non inferiore (e quindi uguale) a quella τ di Θ.

Ora intanto, poichè per ipotesi su D esiste — effettiva — la serie caratteristica (avente, se completa, dimensione $n' - \pi' + d$), D dovrà stare (almeno) in un sistema continuo completo, $\{D\}$, di dimensione

$$n' - \pi' + d + 1 \quad (^{27}).$$

Se D_1 è una qualunque curva di $\{D\}$, la curva virtuale $E - D_1$ ha gli stessi caratteri virtuali della C, ond'è virtualmente effettiva; applicando ad essa il teorema di RIEMANN-ROCH, nella forma più generale ottenuta dal SEVERI [28], si ha pertanto che esiste — effettivo — il sistema lineare $|C_1| = |E - D_1|$, di dimensione $\geq r$. Si conclude così nel modo indicato, in quanto la dimensione del sistema continuo costituito dalle curve E spezzate in una somma del tipo $C_1 + D_1$ risulta proprio

$$\geq r + (n' - \pi' + d + 1) = \tau.$$

10. Conservando le precedenti ipotesi e notazioni, supponiamo che una curva E di $|E|$ — prossima alla $C + D$ — eventualmente spezzata, ma che *non consti di due parti prossime l'una a* C *e l'altra a* D [29], tenda alla $C + D$. I punti di Γ si potranno allora distinguere in due categorie, secondochè provengono o meno come limiti da punti doppi di E, ossia rispettivamente a seconda che non risultano oppure risultano punti di collegamento fra C e D; denotiamo ordinatamente con Γ_1, Γ_2 i gruppi costituiti dai punti del primo o del secondo tipo, e con c_1, c_2 il numero di tali punti, talchè sarà

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad c = c_1 + c_2.$$

In virtù del n. 9, non si dovranno poter trovare in Γ_1 dei punti che impongano alle curve di $|E|$ $c - d$ condizioni indipendenti (perchè, in caso contrario, la curva E considerata in principio dovrebbe risultare spezzata nel modo ch'è stato escluso), e quindi potranno solo presentarsi le seguenti due eventualità.

---

[27] Ved. B. SEGRE, loc. cit. in [8], n. 6.

[28] Cfr. F. SEVERI, *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », t. 40 (1905), p. 766.

[29] Le due contingenze possono verificarsi assieme, poichè (n. 8) *non è escluso che la curva* C *sia riducibile.*

I. — Sia $c_1 < c - d$, onde il gruppo Γ_2 dei punti di collegamento non può essere vuoto, poichè viene a constare di

$$c_2 = c - c_1 \geq d + 1$$

punti. Detto i l'indice di specialità di D su F, si ha sempre ovviamente

$$d \geq p_g - i$$

in quanto — supposto $p_g > 0$, $i < p_g$ — il sistema canonico impuro di F sega su D una serie lineare $\infty^{p_g - i - 1}$, contenuta totalmente in quella residua della serie caratteristica $|\Delta|$ (d'indice di specialità d) rispetto alla serie canonica di D. Dunque intanto, nell'ipotesi che sia $i = 0$, *necessariamente risulta*

$$c_2 \geq p_g + 1. \tag{13}$$

Mentre invece, se $i > 0$, si ottiene

$$p_g - c_2 \leq p_g - d - 1 < i;$$

questo implica che *i punti di* Γ_2 *offrano condizioni linearmente dipendenti alle curve canoniche impure di* Γ, dato che D — e perciò pure Γ_2 — sta in i di tali curve fra loro linearmente indipendenti.

II. — Sia $c_1 \geq c - d$, e (come s'è detto) i punti di Γ_1 impongano alle curve di $|E|$ meno di $c - d$ condizioni. Poichè (n. 8) i punti di $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ impongono invece a tali curve precisamente $c - d$ condizioni, così il gruppo Γ_2 non potrà risultare vuoto — onde per $p_g = 0$ *varrà la* (13) — ed in ogni caso dovrà esserci qualche curva di $|E|$ passante per Γ_1 e non contenente tutti i punti di Γ_2, p. es. escludente il punto P di questo gruppo.

I punti di Γ_2 che restano, in numero di

$$c_2 - 1 = c - c_1 - 1 \leq d - 1,$$

costituiscono un gruppo

$$\Gamma_2^* = \Gamma_2 - P,$$

eventualmente vuoto; ed è chiaro che su D la serie lineare $|\Delta + \Gamma_2^*|$ risulta speciale, $|\Delta|$ avendo per ipotesi l'indice di specialità d. D'altro canto, in base a ciò che precede, la serie lineare completa

$$|(\Delta + \Gamma_2^*) + P| = |\Delta + \Gamma_2|$$

— segabile su D mediante le curve di $|E|$ passanti per Γ_1 — non ammette P come punto fisso. Ne consegue, in forza del teorema di riduzione di Noether, che tutti i gruppi canonici di D contenenti un gruppo $\Delta + \Gamma_2^*$ debbono pure contenere P; onde — nell'ipotesi che sia $p_g > 0$ — ogni curva canonica impura di F passante per Γ_2^* deve anche passare per P, sicchè *il gruppo* $\Gamma_2 = \Gamma_2^* + P$

risulta costituito da punti linearmente dipendenti rispetto alle curve canoniche impure di F.

L'analisi precedente fornisce una dimostrazione del principio di spezzamento, enunciato nel n. 3, nell'ipotesi più ampia che C possa essere riducibile, ma colle due seguenti restrizioni, che però verranno tolte nel n.º successivo:

a) la curva E deve variare su F entro un sistema lineare;

b) le due componenti C, D della curva limite spezzata $C+D$ debbono soddisfare alle condizioni espresse nel lemma del n. 8.

11. Stabiliremo ora il summentovato principio di spezzamento in tutta la sua generalità, riconducendoci al risultato parziale già acquisito nel n. 10.

Consideriamo per ciò su di una superficie F una curva E irriducibile, che vari con continuità tendendo ad una curva spezzata in due distinte parti irriducibili, C, D; ed ammettiamo inoltre soltanto che p. es. su D esista — effettiva — la serie caratteristica, e che il gruppo (CD) consti di punti distinti.

Fissiamo su F (in uno qualunque degli infiniti modi possibili) un sistema lineare regolare, $|C_1|$, il quale non ammetta D come parte fissa, determini su questa curva una serie lineare non speciale, ed inoltre contenga parzialmente $|C|$ lasciando un residuo $|C_1 - C|$ a cui appartenga una curva A — virtualmente effettiva — incontrante D in un gruppo (AD) di punti distinti fra loro e dai punti di (CD). La curva $A+C+D-E$ è pertanto virtualmente effettiva, avendo gli stessi caratteri virtuali della A, alla quale si riduce quando $E \to C+D$; si può dunque scrivere l'equivalenza

$$A+C+D-E \equiv A_E,$$

dove A_E è una curva effettiva, variabile con continuità insieme alla E, e tendente ad A per $E \to C+D$.

Posto per abbreviare

$$E_1 = E + A_E, \quad C_1 = C + A,$$

è chiaro che la curva E_1 varia nel sistema lineare fisso $|A+C+D|$, riducendosi per $E \to C+D$ alla curva $C_1 + D$, senza però che esistano curve E_1 — prossime a quest'ultima — spezzate in una parte prossima a C_1 ed in una parte prossima a D. Di più, in base a ciò che precede, le due parti C_1 e D (di cui la seconda irriducibile) che costituiscono la curva limite $C_1 + D$ si incontrano in punti distinti, divisi nei due gruppi

$$(AD), \quad (CD),$$

e soddisfanno a tutte le condizioni espresse nel lemma del n. 8 (ove in luogo di C si legga C_1).

Nessuno fra i punti di (AD) può risultare di collegamento fra C_1 e D, in quanto ciascuno di tali punti è limite di un punto (comune alle curve A_E ed E, e perciò) doppio per E_1; mentre invece manifestamente un punto di (CD) è o non è punto di collegamento fra C_1 e D, a seconda ch'esso è o non è tale per la curva $C+D$ considerata come limite della E. Il gruppo dei punti di collegamento fra C e D coincide dunque col gruppo dei punti di collegamento fra C_1 e D, al quale sono applicabili le conclusioni del n. 10; sicchè effettivamente, come asserisce il principio di spezzamento, il gruppo suddetto consta di punti che o sono in numero $\geq p_g+1$, oppure risultano linearmente dipendenti rispetto alle curve canoniche impure di F.

12. Vogliamo da ultimo dimostrare che:

p_g+1 *è il minimo numero di punti assegnabili genericamente sulla* F, *quali punti di collegamento fra due sue curve irriducibili.*

A norma del principio di spezzamento, meno di p_g+1 punti non possono intanto venir assunti genericamente su F come punti di collegamento fra due curve irriducibili di F (dato che queste dovrebbero risultar variabili con quelli, epperciò dotate di serie caratteristiche effettive).

Preso invece comunque su F un gruppo Γ_2 di p_g+1 punti distinti, di cui (se $p_g>0$) p_g qualsiansi non stiano su di una medesima curva canonica impura di F, consideriamo su F due curve irriducibili, C, D, passanti per Γ_2 e segantisi ulteriormente in un gruppo Γ_1 di $c-(p_g+1)$ punti distinti fra loro e dai p_g+1 punti di Γ_2; e mostriamo che, p. es. nell'ipotesi che $|C|$, $|D|$ siano regolari e che non risulti speciale la somma della serie caratteristica (effettiva) di D colla serie lineare segata su questa curva da $|C|$, Γ_2 può venir assunto come gruppo dei punti di collegamento fra C e D.

La serie lineare $|\Delta+\Gamma_2|$ di D, ove Δ denota un gruppo caratteristico di tale curva, non può certo ammettere come fisso alcun punto di Γ_2. Ciò è evidente per $p_g=0$, nel qual caso — stante la supposta regolarità di $|D|$ — $|\Delta|$ riesce non speciale; mentre per $p_g>0$, se un siffatto punto P di Γ_2 esistesse, risulterebbe speciale la serie $|\Delta+(\Gamma_2-P)|$, onde i p_g punti del gruppo Γ_2-P dovrebbero stare (almeno) su una curva canonica impura di F, contro il supposto. Poichè (in virtù del lemma del n. 8) la serie lineare completa $|\Delta+\Gamma_2|$ può venir segata su D dalle curve del sistema lineare $|E|=|C+D|$ che passano per Γ_1, ne deriva che la generica di tali curve non potrà contenere alcuno dei punti di Γ_2. Da qui, sfruttando la rappresentazione iperspaziale del n. 5, si deduce facilmente che in $|E|$ esiste un sistema analitico di curve E^* — prossime alla $C + D$ — aventi $c - (p_g + 1)$ punti doppi prossimi ai punti di Γ_1, ma generalmente prive di punti doppi prossimi a qualche punto di Γ_2 (e perciò irriducibili): dunque, effettivamente, Γ_2 risulta il gruppo dei punti di collegamento della curva spezzata $C + D$, considerata come limite delle suddette curve E^*.

La proposizione enunciata in principio, e così dimostrata, porge una nuova definizione possibile per il genere geometrico p_g di una superficie algebrica F; a tale definizione può venir data veste topologica, rammentando che l'equivalenza algebrica fra due curve di F equivale all'omologia fra i cicli bidimensionali che ad esse corrispondono sulla riemanniana di F.

La suddetta proposizione potrà quindi fors'anche venir stabilita direttamente mediante considerazioni topologiche: nel qual caso da essa agevolmente si potrebbe dedurre una nuova dimostrazione del teorema fondamentale, di carattere algebrico-topologico.