Ueber Geradengewebe.

« Topologische Fragen der Differentialgeometrie » (65).

Von G. BOL (in Hamburg).

In einer vorigen Arbeit dieser Reihe ⁽¹⁾ behandelte ich die Invariantentheorie dreier Geradenscharen in der Ebene von Standpunkt der topologischen Differentialgeometrie. Es zeigte sich, dass ein solches Gewebe, falls es nicht Sechseckgewebe ist, im wesentlichen schon durch seine topologischen Invarianten auch projektiv gekennzeichnet wird:

Wenn ein Nicht-Sechseckgewebe sich überhaupt durch topologische Abbildung geradlinig machen lässt, so gibt es unter den Geradengeweben die ihm topologisch gleichwertig sind, höchstens 17 projektiv verschiedene.

Man kann sich nun fragen, ob statt dieser Vieldeutigkeit vielleicht überhaupt Eindeutigkeit besteht, sodass die fragliche Abbildung, und damit das geradlinige Abbild, projektiv eindeutig bestimmt wären ⁽²⁾. Eine Entscheidung darüber war damals der zu komplizierten Rechnungen wegen nicht möglich. Inzwischen ist es mir gelungen, die Rechenmethode erheblich zu vereinfachen, sodass man jetzt zwar noch nicht das allgemeine Problem, aber doch viele Beispiele zu Ende durchrechnen kann. Merkwürdigerweise war in jedem dieser Sonderfälle die fragliche Eindeutigkeit wirklich vorhanden.

In dieser Note möchte ich das angedeutete Rechenverfahren sowie die Beispiele bekanntgeben, vor allem in der Hoffnung, dass es einem besseren Rechner gelingen könnte, hieran anschliessend die vermutete Eindeutigkeit durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen.

§ 1. **Invariantentheorie der Gewebe.** — Um nicht auf die vorige Arbeit zurückgreifen zu müssen, seien zunächst die Hauptformeln kurz zusammen-

⁽¹⁾ *Topologische Fragen der Differentialgeometrie* 31, *Geradlinige Kurvengewebe*, « Hamb. Abhandlungen », Bd. 8, 1930, S. 264–270, im folgenden zitiert, T. 31.

⁽²⁾ Die Frage ist gleichbedeutend mit jener der eindeutigen Darstellbarkeit einer vorgegebenen Funktion durch ein geradliniges Nomogramm. Vgl. dazu W. BLASCHKE, *Ueber topologische Fragen der Differentialgeometrie*, « Jahresber. d. D. M. V. », 38 (1929), S. 193. Als erster hat derartige Fragen GRONWALL behandelt, « Journal de Liouville », 1912, *Sur les équations à trois variables*.

gestellt. Jede der drei Kurvenscharen eines Gewebes in der (u, v) -Ebene kann man darstellen als Bahnkurven eines linearen Differentialoperators

$$(1) \quad \Gamma_i = A(u, v)\partial_u + B(u, v)\partial_v \quad i = 1, 2, 3$$

wobei man von vornherein so normieren kann, dass

$$(2) \quad \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0.$$

Durch die Γ_i sind eindeutig zwei neue Operatoren Δ_1, Δ_2 bestimmt, für die

$$(3) \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &= \Delta_1 + \Delta_2, \\ \Gamma_2 &= \varepsilon \Delta_1 + \varepsilon^2 \Delta_2, \\ \Gamma_3 &= \varepsilon^2 \Delta_1 + \varepsilon \Delta_2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{mit } \varepsilon^3 = 1, \varepsilon \neq 1 \\ &\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0. \end{aligned}$$

Durch das Gewebe sind die Γ_i wie die Δ_i nur bis auf einen gemeinsamen Normungsfaktor σ festgelegt, es bleiben Umnormungen möglich von der Art

$$(4) \quad \text{« Sterntransformation » } \Gamma_i^* = \sigma \Gamma_i, \quad \Delta_i^* = \sigma \Delta_i.$$

Solche topologische Invarianten von Δ_1 und Δ_2 die auch bei (4) Invariant sind, sind Gewebeinvarianten.

Einfachste Invarianten von Δ_1 und Δ_2 sind die « Klammerkoeffizienten », drückt man den Klammerausdruck beider Operatoren aus des Linearkombination von beiden:

$$(5) \quad [\Delta_1 \Delta_2] = \Delta_1 \Delta_2 - \Delta_2 \Delta_1 = h_2 \Delta_1 - h_1 \Delta_2$$

so sind h_1 und h_2 topologisch Invariant mit Δ_1 und Δ_2 verknüpft. Bei der Sterntransformation (4) ändern sie sich so:

$$(6) \quad h_1^* = \sigma h_1 - \Delta_1 \sigma, \quad h_2^* = \sigma h_2 - \Delta_2 \sigma.$$

Setzt man

$$(7) \quad \rho = \Delta_2 h_1 - \Delta_1 h_2$$

so gilt

$$(8) \quad \rho^* = \sigma^2 \rho;$$

ρ ist eine Halbinvariante des Gewebes, wenn sie überall verschwindet, so ist das Gewebe ein Sechseckgewebe.

Wenn ρ nicht verschwindet, so kann man die Normung (4) so festlegen, dass $\rho^* = 1$ wird. Die so genormten Operatoren sind dann vom Gewebe (bis auf das Vorzeichen) eindeutig bestimmt, und ihre Invarianten sind auch Gewebeinvarianten. Das volle Invariantensystem des Gewebes besteht aus den Klammerkoeffizienten h_1^*, h_2^* der genormten Operatoren und allen ihren Ableitungen nach diesen, $\Delta_1^* h_1^*$ u. s. w. ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Vgl. G. BOL und G. HOWE, T. 27, *Invarianten von Differenziatorgespinsten*, « Hamb. Abhandlungen », Bd. 8, (1930), S. 194.

Es ist nun aber, und aus dieser Einsicht geht die erwähnte Vereinfachung der Rechnungen hervor, nicht zweckmassig, jene Normung von vornherein vorzunehmen. Viel besser ist es, den benutzten Differentiationsprozess so abzuwandeln, dass die Ableitung einer Halbinvariante stets wieder eine Halbinvariante wird. Sei etwa m eine Halbinvariante vom Gewicht s :

$$(9) \quad m^* = \sigma^s m,$$

dann wollen wir die « Halbinvariante Ableitung » von m nach unseren Operatoren, die gleich durch angehängte Indizes angedeutet werden sollen, so definieren:

$$(10) \quad \begin{aligned} m_1 &= \Delta_1 m + sh_1 m \\ m_2 &= \Delta_2 m + sh_2 m. \end{aligned}$$

Dann gilt in der Tat, wie man sofort nachrechnet:

$$(11) \quad \begin{aligned} (m_1)^* &= \Delta_1^* m^* + sh_1^* m^* = \sigma^{s+1} \{ \Delta_1 m + sh_1 m \} = \sigma^{s+1} m_1 \\ (m_2)^* &= \Delta_2^* m^* + sh_2^* m^* = \sigma^{s+1} \{ \Delta_2 m + sh_2 m \} = \sigma^{s+1} m_2 \end{aligned}$$

sodass m_1 und m_2 Halbinvarianten vom Gewicht $s+1$ sind. Es ist natürlich nur die Ableitung einer *Halbinvarianten* definiert und vom Gewicht abhängig, trotzdem gilt, wenn m und n Halbinvarianten vom gleichen Gewicht s sind:

$$(12) \quad (m+n)_i = m_i + n_i$$

und für zwei beliebige Halbinvarianten p und q hat man:

$$(13) \quad (pq)_i = pq_i + p_i q.$$

Beides folgt sofort aus der Definition des Differentiationsprozesses.

Schliesslich: Wenn $m=0$, so auch $m_i=0$; das braucht man, wenn Gleichungen differenziert werden sollen. Das Gewicht einer Halbinvariante darf auch gebrochen sein.

Normt man so, dass $\rho^* = 1$ wird, so ist nach (8) und (6):

$$(14) \quad h_i^* = \rho^{-\frac{3}{2}} (\Delta_i \rho + 2h_i \rho).$$

Die genormten Klammerkoeffizienten sind also bis auf den Faktor $\rho^{-\frac{3}{2}}$ mit den Halbinvarianten Ableitungen von ρ identisch, denn ρ hat nach (8) das Gewicht 2. Daher:

Die Halbinvariante ρ und ihre sämtlichen halbinvarianten Ableitungen bilden eine vollständiges System von Halbinvarianten für das Gewebe.

Denn jeder Ableitung der normierten h_i nach normierten Operatoren entspricht eine halbinvariante Ableitung von ρ , es kommen dabei nur Zusatzglieder niederer Differentiationsordnung vor.

Aus der Definition (10) folgt für eine beliebige Halbinvariante m :

$$(15) \quad (m_1)_2 - (m_2)_1 = s\rho m.$$

(15) kommt beim halbinvarianten Rechnen an die Stelle der übliche Integrierbarkeitsbedingungen. Insbesondere gibt (15):

$$(16) \quad \rho_{12} - \rho_{21} = 2\rho^2.$$

§ 2. Geradengewebe. — Seien

$$(17) \quad \begin{aligned} & x_1(u, v) \\ & x_2(u, v) \\ & x_3(u, v) \end{aligned}$$

die projektiven Koordinaten des Gewebepunktes (u, v) im Geradengewebe, wir fassen sie zu dem Vektor

$$(18) \quad X(u, v)$$

zusammen. Wir können X stets so normieren, dass die Determinante

$$(19) \quad D = |X, \Delta_1 X, \Delta_2 X| = 1$$

wird, denn in einem Gewebe sind ja die drei Punkte $X, \Delta_1 X, \Delta_2 X$ linear unabhängig. Soll die Gleichung (19) erhalten bleiben bei der Sterntransformation (4) so muss man setzen

$$(20) \quad X^* = \sigma^{-\frac{2}{3}} X$$

denn nur dann ist

$$(21) \quad D^* = |X^*, \Delta_1^* X^*, \Delta_2^* X^*| = D.$$

Es ist also, zweckmässig, X als Halbinvariante vom Gewicht $-\frac{2}{3}$ aufzufassen. Macht man das, so kann man X Halbinvariant differenzieren, und (19) schreibt sich dann

$$(22) \quad D = |X, X_1, X_2|,$$

weil ja die Zusatzglieder X enthalten, und also keinen Beitrag zur Determinante liefern.

Setzt man

$$(23) \quad X_{ik} = a_{ik}X + b_{ik1}X_1 + b_{ik2}X_2$$

so folgt aus der Integrierbarkeitsbedingung

$$(24) \quad X_{12} - X_{21} = -\frac{2}{3}\rho X$$

dass

$$b_{12k} = b_{21k}, \quad a_{12} - a_{21} = -\frac{2}{3}\rho$$

weiter erhält man durch Differenzieren der Halbinvariante nullter Ordnung D die beiden Bedingungen

$$b_{111} + b_{212} = 0, \quad b_{121} + b_{222} = 0.$$

Aus der Geradlinigkeit der ersten Schar folgt weil $X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22}$ eine Linearkombination von X und $X_1 + X_2$ sein soll, dass

$$b_{111} + 2b_{121} + b_{221} = b_{112} + 2b_{122} + b_{222}$$

und entsprechend für die zweite und dritte Schar.

Aus diesen sieben Bedingungen für b_{ikh} ergibt sich, dass nur b_{112} und b_{221} von Null verschieden sein können, und einander gleich sind. Wir setzen

$$b_{112} = b_{221} = \frac{1}{3}C.$$

Die weiteren Integrierbarkeitsbedingungen:

$$(25) \quad \begin{aligned} X_{112} - X_{121} &= \frac{1}{3}\rho X_1, \\ X_{212} - X_{221} &= \frac{1}{3}\rho X_2 \end{aligned}$$

liefern dann die Werte der α_{ik} . Die Gleichungen (23) erhalten so die Gestalt

$$(26) \quad \begin{aligned} X_{11} &= -\frac{1}{3}C_2X + \frac{1}{3}CX_2, \\ X_{22} &= -\frac{1}{3}C_1X + \frac{1}{3}CX_1, \\ X_{12} &= \left(\frac{1}{9}C^2 - \frac{1}{3}\rho\right)X, \\ X_{21} &= \left(\frac{1}{9}C^2 + \frac{1}{3}\rho\right)X \end{aligned}$$

und C muss den Gleichungen genügen:

$$(27) \quad \begin{aligned} C_{11} &= -CC_2 - \rho_2, \\ C_{22} &= -CC_1 + \rho_1. \end{aligned}$$

C ist offenbar eine Halbinvariante vom Gewicht 1; aus der dritten Gleichung (26) sieht man, dass C^2 dasselbe Gewicht wie ρ hat.

Wie man sieht, erhalten wir erheblich einfachere Gleichungen wie die entsprechenden (12), (14), (15) in T. 31, die Invariante C ist aber mit der dortigen identisch.

C und ρ mit ihren Ableitungen bilden ein vollständiges projektives Invariantensystem des Geradengewebes. Notwendig und hinreichend für die Abbildbarkeit eines vorgegebenen Gewebes auf ein geradliniges ist die Lösbarkeit der Gleichungen (27), zu verschiedenen Lösungsfunktionen gehören projektiv verschiedene geradlinige Bilder. Die vermutete Eindeutigkeit wäre bewiesen, wenn man zeigen könnte, dass das Gleichungssystem (27) für $\rho \neq 0$ höchstens eine Lösung haben kann.

§ 3. **Besondere Gewebe.** — Die geometrische Bedeutung der Invariante C ist leicht anzugeben. Suchen wir nämlich einmal den Schnittpunkt einer Schargeraden mit einer benachbarten, fragen wir also, wann der Punkt

$$(28) \quad P = \alpha X + (X_1 + X_2)$$

beim Uebergang zur Nachbargeraden festbleibt. Man hat

$$(29) \quad P_1 = \alpha_1 X + \alpha X_1 + X_{11} + X_{21} = \alpha P$$

setzt man hier nach (26) ein, so erhält man die Bedingungen:

$$(30) \quad \begin{aligned} \alpha &= \alpha = \frac{1}{3} C \\ \alpha_1 - \frac{1}{3} C_2 + \frac{1}{9} C^2 + \frac{1}{3} \rho &= \alpha \alpha. \end{aligned}$$

Es muss also $\alpha = \frac{1}{3} C$ gewählt werden. Darin ist die gesuchte geometrische Bedeutung von C enthalten, ist $C=0$, so liegen die drei Berührungspunkte der Schargeraden mit ihren Hüllkurven, die dann mit $X_1 + X_2$, $\varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2$, $\varepsilon^2 X_1 + \varepsilon X_2$, zusammenfallen, auf einer Geraden. Verschwindet C überall, so ist nach (27) $\rho_1 = \rho_2 = 0$, nach (16) verschwindet auch ρ , und nach (26) sind dann die Punkte X_1 und X_2 , also auch die eben genannten Berührungspunkte fest. Das Gewebe besteht dann offenbar aus drei Geradenbüscheln, deren Scheiteln auf einer Geraden liegen.

Aus (30) leitet man leicht die Bedingung dafür her, dass die erste Geradenschar ein Geradenbüschel wird. Das ist nämlich dann und nur dann der Fall, wenn unser Punkt P nicht mehr von der gewählten Geraden 1 abhängt, sämtliche Gleichungen (30) müssen also befriedigt sein, wenn wir für α den Wert $\frac{1}{3} C$ einsetzen. Aus der dritten Gleichung erhalten wir so die Bedingung:

Dann und nur dann ist die erste Schar ein Geradenbüschel, wenn die Invariante C der Bedingung genügt:

$$(31) \quad C_2 - C_1 = \rho.$$

Ebenso ist die zweite Schar ein Büschel, wenn

$$(32) \quad \varepsilon^2 C_2 - \varepsilon C_1 = \rho$$

und die dritte wenn

$$(33) \quad \varepsilon C_2 - \varepsilon^2 C_1 = \rho.$$

Ein weiterer wichtiger Fall ist der, dass zwei der Scharen, etwa die Scharen 2 und 3, einen Kegelschnitt berühren, und die dritte beliebig ist.

Um die entsprechenden Bedingungen aufzustellen, führen wir ein bewegliches Koordinatensystem ein, dessen Basispunkte die Punkte X und

$$(34) \quad \begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{3} CX + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2, \\ P_3 &= \frac{1}{3} CX + \varepsilon^2 X_1 + \varepsilon X_2 \end{aligned}$$

sind, diese letzteren Punkte sind offenbar die Berührungspunkte der Geraden 2 und 3 mit ihren Hüllkurven. Beim Uebergang zu benachbarten Gewebepunkten ist dann:

$$(35) \quad \begin{aligned} X_1 &= -\frac{1}{3} CX + \tau(\varepsilon P_2 - \varepsilon^2 P_3), & X_2 &= -\frac{1}{3} CX + \tau(\varepsilon P_3 - \varepsilon^2 P_2), \\ \varepsilon P_{21} &= \frac{1}{3} CP_2 + \frac{1}{3} XM_2, & \varepsilon^2 P_{22} &= \frac{1}{3} CP_2 - \frac{1}{3} XM_2, \\ \varepsilon^2 P_{31} &= \frac{1}{3} CP_3 + \frac{1}{3} XM_3, & \varepsilon P_{32} &= \frac{1}{3} CP_3 - \frac{1}{3} XM_3. \end{aligned}$$

Dabei ist gesetzt:

$$(36) \quad \begin{aligned} M_2 &= \varepsilon C_1 - \varepsilon^2 C_2 + \rho, & \tau &= \frac{1}{\varepsilon^2 - \varepsilon} = -\frac{1}{i\sqrt{3}}. \\ M_3 &= \varepsilon^2 C_1 - \varepsilon C_2 + \rho, \end{aligned}$$

Dementsprechend gilt für die Aenderung der Koordinaten ξ_0, ξ_2, ξ_3 einer festen Geraden beim Uebergang zum Koordinatensystem, das zu einem Nachbarpunkt gehört

$$(37) \quad \begin{aligned} d\xi_0 &= \omega_1 \left[-\frac{1}{3} C\xi_0 + \tau(\varepsilon\xi_2 - \varepsilon^2\xi_3) \right] + \omega_2 \left[-\frac{1}{3} C\xi_0 + \tau(\varepsilon\xi_3 - \varepsilon^2\xi_2) \right], \\ d\xi_2 &= \frac{1}{3} \varepsilon^2 \omega_1 [C\xi_2 + M_2\xi_0] + \frac{1}{3} \varepsilon \omega_2 [C\xi_2 - M_2\xi_0], \\ d\xi_3 &= \frac{1}{3} \varepsilon \omega_1 [C\xi_3 + M_3\xi_0] + \frac{1}{3} \varepsilon^2 \omega_2 [C\xi_3 - M_3\xi_0], \end{aligned}$$

wo ω_1 und ω_2 die « Verrückungen » in der Richtung der Operatoren Δ_1 und Δ_2 darstellen.

Ein Kegelschnitt, der die Geraden 2 und 3 durch den Gewebepunkt, und die Nachbargeraden dieser Schären berührt, lässt sich darstellen in der Form

$$(38) \quad F = \xi_2 \xi_3 + A \xi_0^2.$$

Soll dieser Kegelschnitt fest sein beim Uebergang zum Nachbarpunkt, so darf die Gleichungsform (38) sich nicht ändern, wenn die Koordinaten nach (37) variiert werden, also:

$$(39) \quad dF = \xi_2 d\xi_3 + \xi_3 d\xi_2 + 2A \xi_0 d\xi_0 + dA \xi_0^2 = F dv.$$

Hier sollen alle Koeffizienten links und rechts gleich sein bei beliebiger Wahl von ω_1 und ω_2 . Das gibt die acht Gleichungen

$$(40) \quad \begin{aligned} v_1 &= -\frac{1}{3} C, & v_2 &= -\frac{1}{3} C, \\ A v_1 &= +\frac{2}{3} AC + A_1, & A v_2 &= +\frac{2}{3} AC + A_2, & dv &= v_1 \omega_1 + v_2 \omega_2, \\ 0 &= \frac{1}{3} \varepsilon M_3 + 2A \tau \varepsilon, & 0 &= -\frac{1}{3} \varepsilon^2 M_3 + 2A \varepsilon^2 \tau, & dA &= A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2, \\ 0 &= \frac{1}{3} \varepsilon^2 M_2 - 2A \tau \varepsilon^2, & 0 &= -\frac{1}{3} \varepsilon M_2 + 2A \varepsilon \tau. \end{aligned}$$

Daraus kann man ablesen:

Dann und nur dann berühren die Geraden 2 und 3 einen festen Kegelschnitt, wenn

$$(41) \quad M_2 + M_3 = 0$$

und die Grösse

$$(42) \quad A = -\frac{1}{6} (\varepsilon^2 - \varepsilon) M_3 = +\frac{1}{6} (\varepsilon^2 - \varepsilon) M_2$$

den Bedingungen genügt:

$$(43) \quad A_1 = -AC, \quad A_2 = -AC.$$

(41) kann man auch so schreiben:

$$(44) \quad C_1 - C_2 = 2\rho$$

und für A hat man:

$$(45) \quad A = -\frac{1}{12} (\varepsilon^2 - \varepsilon) (M_3 - M_2) = -\frac{1}{12} (\varepsilon^2 - \varepsilon)^2 (C_1 + C_2) = -\frac{1}{4} (C_1 + C_2).$$

Also: Dann und nur dann berühren die Scharen 2 und 3 einen Kegelschnitt, wenn (44) gilt und

$$(46) \quad C_{11} + C_{21} = -(C_1 + C_2)C, \quad C_{12} + C_{22} = -(C_1 + C_2)C.$$

Ebenso berühren die Scharen 1 und 3 einen Kegelschnitt, wenn

$$(47) \quad \begin{aligned} \varepsilon C_1 - \varepsilon^2 C_2 &= 2\rho \\ \varepsilon(\varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2)_1 &= -C(\varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2) = \varepsilon^2(\varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2)_2 \end{aligned}$$

und die Scharen 1 und 2 wenn

$$(48) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 C_1 - \varepsilon C_2 &= 2\rho \\ \varepsilon^2(\varepsilon^2 C_1 + \varepsilon C_2)_1 &= -C(\varepsilon^2 C_1 + \varepsilon C_2) = \varepsilon(\varepsilon^2 C_1 + \varepsilon C_2)_2. \end{aligned}$$

§ 4. **Abbildungsfragen.** — Bei unseren Beispielen ist stets eine der Geradenscharen ausgezeichnet. Dann hat es aber keinen Sinn mehr, die Formeln so völlig symmetrisch zu halten, wie bisher, und wir wollen sie deshalb noch etwas anders schreiben. Wir setzen:

$$(49) \quad \begin{aligned} m_I &= \frac{1}{\rho}(m_1 + m_2), & m_I &= \frac{1}{2}\rho(m_I - m_{II}), \\ m_{II} &= \frac{1}{\rho}(-m_1 + m_2), & m_2 &= \frac{1}{2}\rho(m_I + m_{II}), \end{aligned}$$

wo m wieder eine Halbinvariante vom Gewicht s bedeuten soll. Offenbar sind m_I und m_{II} Halbinvarianten vom Gewicht $s - 1$. An Stelle der Integrierbarkeitsbedingung (15) kommt

$$(50) \quad (\rho m_I)_{II} - (\rho m_{II})_I = \frac{1}{\rho}(2m_{12} - 2m_{21}) = 2sm$$

oder auch

$$(51) \quad \rho(m_{I\ II} - m_{II\ I}) = 2sm + \rho_I m_{II} - \rho_{II} m_I.$$

Die Gleichungen (27) lauten umgeschrieben:

$$(52) \quad \begin{aligned} \rho(C_{I\ I} + C_{II\ II}) &= -(2C + \rho_I)C_I - \rho_{II}C_{II} - 2\rho_{II}, \\ \rho C_{I\ II} &= C - \rho_{II}C_I + CC_{II} + \rho_I, \\ \rho C_{II\ I} &= -C - \rho_I C_{II} + CC_{II} + \rho_I. \end{aligned}$$

Die erste Schar ist ein Büschel, wenn

$$(53)_1 \quad C_{II} = 1,$$

die zweite wenn

$$(53)_2 \quad (\varepsilon^2 - \varepsilon)C_I = 2 + C_{II},$$

die dritte wenn

$$(53)_3 \quad (\varepsilon - \varepsilon^2)C_I = 2 + C_{II}.$$

Die Scharen 2 und 3 berühren einen Kegelschnitt, wenn

$$(54) \quad C_{II} = -2, \quad (\rho C_{II})_{II} = 0, \quad (\rho C_{II})_I = -2C_I C.$$

Setzt man das in (37) ein, so ergibt sich dass

$$(55) \quad C = \rho_I$$

sein muss, und daher als notwendige und hinreichende Bedingungen:

$$(56) \quad \rho_{III} = -2, \quad (\rho \rho_{III})_{II} = 0, \quad (\rho \rho_{III})_I = -2\rho_I \rho_{III}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass hieraus beim Aufstellen der Integrierbarkeitsbedingungen keine neuen Gleichungen für ρ hervorgehen.

Dann und nur dann lässt sich ein Gewebe so geradlinig machen, dass die Scharen 2 und 3 einen Kegelschnitt berühren, wenn (56) erfüllt ist.

Ein Sonderfall tritt ein, wenn der Kegelschnitt in zwei Geradenbüschel zerfällt. Dann ist $A = 0$, und wir haben als zusätzliche Bedingung nach (45), (55):

$$(57) \quad \rho_{II} = 0.$$

In der Tat ist das ein Sonderfall von (56). Im Uebrigen kann man diese Bedingungen auch leicht aus (53) herleiten.

Aus (55) geht hervor:

Wenn ein Gewebe mit $\rho \neq 0$ sich so geradlinig machen lässt, dass die Geraden der zweiten und dritten Schar einen Kegelschnitt berühren, so ist die Abbildung, die dies leistet, bis auf Projektivitäten eindeutig bestimmt.

Im Sonderfall zweier Geradenbüscheln hat das schon DUBOURDIEU gezeigt⁽¹⁾. Es wäre nun denkbar, dass ein Gewebe dieser Art sich vielleicht auch in der Weise geradlinig machen liesse, dass die Scharen 1 und 3 einen Kegelschnitt einhüllen. Wäre das möglich, so wäre die Abbildung die das macht sicher nicht projektiv, es sei denn, dass das Gewebe aus drei Geradenbüscheln besteht, und also ein Sechseckgewebe ist. Man sieht nun aber leicht, dass auch dies unmöglich ist. Denn es müsste dann ausser (56) noch ein entsprechendes System von Gleichungen erfüllt sein, das sich auf die Scharen 1 und 3 bezieht. Man prüft leicht nach, dass die erste dieser Gleichungen die Form hat

$$(58) \quad -\frac{1}{4}(\epsilon^2 - \epsilon)\rho_{III} - \frac{1}{4}(\epsilon^2 - \epsilon)\rho_{III} + \frac{1}{4}\rho_{III} - \frac{3}{4}\rho_{III} = -2.$$

⁽¹⁾ J. DUBOURDIEU, *Questions topologiques de géométrie différentielle*, « Mémoires des Sciences Mathématiques », 78, Paris 1936.

Daraus ergibt sich wegen (56) und der (16) entsprechenden Gleichung

$$(59) \quad \rho_{i\,ii} - \rho_{ii\,i} = 4,$$

dass

$$(60) \quad \rho_{i\,i} + \rho_{ii\,ii} = -8i\sqrt{3}$$

und daher, wegen (56),

$$\begin{aligned} (\rho\rho_{ii\,ii})_{ii} &= 0, & (\rho\rho_{ii\,ii})_i &= 2\rho_i\rho_{i\,i}, \\ [\rho(\rho\rho_{ii\,ii})_i]_{ii} - [\rho(\rho_{ii\,ii})_{ii}]_i &= -4\rho\rho_{i\,i} + 2(\rho\rho_{i\,i})_{ii} = -4\rho\rho_{i\,i}. \end{aligned}$$

Nach (50) aber hat dieser Ausdruck den Wert

$$4\rho\rho_{ii\,ii}$$

and es wäre also

$$\rho_{i\,i} + \rho_{ii\,ii} = 0,$$

im Widerspruch zu (60). Man kann also den Satz aussprechen:

Eine Abbildung, die ein Nicht-Sechseckgewebe aus zwei Tangentenscharen eines Kegelschnitts und einer weiteren Geradenschar auf ein gleichartiges Gewebe abbildet, ist notwendig projektiv.

An zweiter Stelle wollen wir Gewebe betrachten, bei denen die erste Schar ein Geradenbüschel ist. Setzen wir die Bedingung $C_{ii} = 1$ aus (53)_i in (52) ein, so erhalten wir

$$(61) \quad \begin{aligned} \rho C_{i\,i} &= -(2C + \rho_i)C_i - 3\rho_{ii\,ii}, \\ \rho C_{i\,ii} &= 2C - \rho_{ii}C_i + \rho_i, \end{aligned}$$

während die dritte Gleichung identisch erfüllt ist. Der bequemen Rechnung halber setzen wir

$$(62) \quad D = 2C + \rho_i.$$

Dann gilt nach (53)_i

$$(63) \quad D_{ii} = 2 + \rho_{i\,ii}$$

und (61) geht über in:

$$(64) \quad \begin{aligned} \rho D_{i\,i} &= -DD_i + D\rho_{i\,i} - 6\rho_{ii} + \rho\rho_{i\,ii}, \\ \rho D_{i\,ii} &= -\rho_{ii}D_i + 2D + (\rho\rho_{i\,i})_{ii}. \end{aligned}$$

Nach (50) muss nun gelten

$$(\rho D_{i\,i})_{ii} - (\rho D_{i\,ii})_i,$$

dann D_i ist wie C_i eine Halbinvariante vom Gewicht Null. Wertet man das aus, so kommt

$$(65) \quad 8\rho D_i = -2D^2 + 6\rho\rho_{i\,i} - 3(\rho^2)_{ii}$$

wobei (59) benutzt wurde.

Rechnet man aus (65) den Wert von $D_{I\ II}$ aus, und vergleicht mit (64), so ergibt sich

$$(66) \quad 0 = D(24 + 4\rho_{I\ II}) + 3(\rho^2)_{I\ II\ II} + 2(\rho\rho_{I\ I})_{II}.$$

Aus dieser Gleichung kann man D , und damit auch C eindeutig auflösen, es sei denn dass

$$(67) \quad \begin{aligned} 24 + 4\rho_{I\ II} &= 0, \\ 3(\rho^2)_{I\ II\ II} + 2(\rho\rho_{I\ I})_{II} &= 0. \end{aligned}$$

Zeigen wir, dass in keinem Gewebe die beiden Gleichungen (67) gleichzeitig erfüllt sein können, so haben wir bewiesen:

Eine Abbildung, die ein Nichtsechseckgewebe, das besteht aus einem Geradenbüschel und zwei Geradenscharen abbildet auf ein ebensolches, wobei sich die beiden Geradenbüschel entsprechen sollen, ist stets projektiv.

Nun folgt aus (67) dass

$$(68) \quad \rho_{I\ II} = -6$$

also nach (59):

$$(69) \quad \rho_{II\ I} = -10.$$

Weiter ist

$$(70) \quad \begin{aligned} (\rho\rho_{I\ I})_{II} &= (\rho\rho_{I\ II})_I + 2\rho_I = -4\rho_I, \\ (\rho\rho_{II\ II})_I &= (\rho\rho_{II\ I})_{II} - 2\rho_{II} = -12\rho_{II}, \end{aligned}$$

$$(71) \quad \begin{aligned} (\rho^2)_{I\ I} &= 2\rho_I^2 + 2\rho\rho_{I\ I}, & (\rho^2)_{II\ II} &= 2\rho_{II}^2 + 2\rho\rho_{II\ II}, \\ (\rho^2)_{I\ II} &= 4\rho_I\rho_{I\ II} + 2(\rho_{I\ I})_{II} = -32\rho_I, & (\rho^2)_{II\ II} &= 4\rho_{II}\rho_{II\ I} + 2(\rho\rho_{II\ II})_I = -64\rho_{II}. \end{aligned}$$

Aus (67) und der ersten Gleichung (70) folgt

$$(72) \quad 3(\rho^2)_{II\ II\ II} = 8\rho_I.$$

Vergleicht man das mit der letzten Gleichung (72), so erhält man die Integrierbarkeitsbedingung

$$(73) \quad 27(\rho^2)_{II\ II} + (\rho^2)_{I\ I} = 0,$$

Das nach II differenziert, und das Ergebnis mit (72) und (71) verglichen gibt

$$27(\rho^2)_{II\ II\ II} = 72\rho_I = 32\rho_I,$$

also $\rho_I = 0$. Dann aber wäre $\rho_{I\ II} = 0$, während wir $\rho_{I\ II} = -6$ gefunden hatten. Damit ist die Unmöglichkeit von (67) gezeigt.

Es sei noch bemerkt, dass man jetzt leicht die Bedingungen angeben kann, damit ein vorgegebenes Gewebe sich so geradlinig machen lässt, dass die Schar I ein Büschel wird. Man braucht dazu nur den Wert von D , der sich aus (66) berechnen lässt, in (64) einzusetzen, und erhält sofort die notwendigen und hinreichenden Bedingungen. An Stelle der zweiten Gleichung

(64) kann man auch (65) nehmen. Die Bedingungen erhalten offenbar vierte Ableitungen von ρ . Möglicherweise würden sich daraus noch Integrierbarkeitsbedingungen in niedrigeren Ordnungen ergeben.

Auch hier haben wir keine nichtprojektive Abbildung gefunden, die drei Geradenscharen auf drei Geradenscharen abbildet. Als letztes wollen wir uns fragen, ob es vielleicht Gewebe gibt, die sich sowohl so geradlinig machen lassen, dass die erste Schar ein Büschel wird, als so, dass die Scharen 2 und 3 einen Kegelschnitt einhüllen. Auch dass wird sich nur als möglich herausstellen, wenn das Gewebe ein Sechseckgewebe ist.

Setzen wir nämlich einmal die Bedingungen (56) in unseren Gleichungen (62) bis (66) ein. Aus (66) wird dann

$$(74) \quad D = -\frac{3}{16}(\rho^2)_{IIII}.$$

Daher ist wegen (63)

$$(75) \quad (\rho^2)_{IIIIII} = 2 + \rho_{II} = 0.$$

Andererseits berechnet man aus (56), (59) der Reihe nach

$$(76) \quad \begin{aligned} (\rho^2)_{II} &= 2\rho_I\rho_{II} - 12\rho, \\ (\rho^2)_{IIII} &= 2\rho_I\rho_{IIII} - 16\rho_{II}, & (\rho^2)_{IIII} &= -40\rho_{II}, \\ (\rho^2)_{IIIIII} &= -40\rho_{IIII}, & \rho(\rho^2)_{IIIIII} &= -24(\rho^2)_{IIII} - \rho_I(\rho^2)_{IIIIII}. \end{aligned}$$

Aus (75) und der letzten Gleichung (76) erhält man aber die Integrierbarkeitsbedingung

$$2(\rho^3)_{IIII} = \{\rho(\rho^2)_{IIIIII}\}_{II} - \{\rho(\rho^2)_{IIIIII}\}_I = -22(\rho^2)_{IIIIII}.$$

Also ist

$$(77) \quad D = \frac{3}{16}(\rho^2)_{IIII} = 0.$$

Dieser Wert für D befriedigt nach (56) die zweite Gleichung (64); die erste liefert

$$(78) \quad 6\rho_{II} = \rho\rho_{III},$$

oder wegen (56):

$$(79) \quad \begin{aligned} 6\rho_{II} &= -3\rho_I\rho_{II} \\ (\rho^2)_{II} &= -\rho_I(\rho\rho_{II}). \end{aligned}$$

Das zuerst nach II, dann nach I differenziert liefert

$$(80) \quad \begin{aligned} (\rho^2)_{IIII} &= 2\rho\rho_{II} \\ (\rho^2)_{IIIIII} &= 2(\rho\rho_{II})_I = -4\rho_I\rho_{II}. \end{aligned}$$

Vergleicht man das mit (76), so sieht man:

$$40\rho_{II} = 4\rho_I\rho_{II}.$$

Auf Grund von der ersten Gleichung (79) ist dann aber

$$(81) \quad \rho_{11} = \rho_{111} = 0,$$

was

$$\rho_{111} = 0$$

liefert, im Widerspruch zum früher gefundenen Wert $\rho_{111} = -6$.

Wir können also den Satz aussprechen:

Eine topologische Abbildung, welche ein Gewebe, das besteht aus zwei Tangentenscharen eines Kegelschnittes und einer weiteren Geradenschar auf ein anderes Geradengewebe abbildet, und zwar so, dass die letztgenannte Schar des ersten Gewebes dabei in ein Geradenbüschel übergeht, ist notwendig projektiv.

Schliesslich seien noch ein Paar Fälle angegeben, in denen es aussichtsreich erscheint, die Rechnung zu versuchen. Erstens könnte man nachsehen, ob sich ein Gewebe, das zwei Tangentenscharen eines Kegelschnittes enthält, überhaupt noch in anderer Weise geradlinig darstellen lässt. Dazu müsste man feststellen, ob wenn (56) gilt, die Gleichungen (52) noch eine von (55) verschiedene Lösung haben können. Ist das möglich, so ist damit das gesuchte Beispiel gefunden. Gegebenenfalls könnte man die Rechnung noch durch den Ansatz $\rho_{11} = 0$, der bedeutet, dass der Kegelschnitt aus zwei Geradenbüscheln besteht, weiter vereinfachen.

Weiter könnte man versuchen, ob die Bedingungen, die bedeuten, dass eine solche geradlinige Abbildung möglich ist, dass die Schar 1 ein Büschel wird, mit den entsprechenden Bedingungen für die Scharen 2 und 3 verträglich sind, ohne dass $\rho = 0$ wird. In diesem Fall wäre wiederum das Beispiel da, denn wenn dieselbe Abbildung alle drei Scharen zu Geradenbüscheln macht, so muss das Gewebe ein Sechseckgewebe sein.

Ein rein formaler Ansatz wäre schliesslich, zu der Gleichung (27) eine neue von der Gestalt

$$(82) \quad \alpha C_1 + \beta C_2 = \gamma \rho$$

hinzuzunehmen, wo man α , β und γ konstant nehmen könnte. Gelangt man zu invarianten Bedingungen, in denen C nicht mehr vorkommt, und kann es sein, dass die Bedingungen dieser Art, die zu verschiedenen Wertsystemen für α , β , γ gehören, verträglich sind, so könnte man zu dem erwünschten Beispiel gelangen. Erwähnt sei noch, dass man mit dem Ansatz $C_1 = \alpha\rho$, $C_2 = \beta\rho$; α , β konstant, nicht durchkommt.

Ohne Zusatzgleichung wie (82) durchzukommen ist deshalb so schwer, weil man stetz zu algebraischen Gleichungen für C in sehr hoher Ordnung gelangt, die sich daher schlecht übersehen lassen.