

SALVATORE PINCHERLE

Commemorazione di UGO AMALDI (a Roma) (4).

SALVATORE PINCHERLE si è spento in Bologna la sera del 10 luglio dello scorso anno. Corrispondente Linceo dal 1887, Socio Nazionale dal 1901, era oramai il decano dei matematici italiani e, fra le nuove generazioni, recava ancora l'eco diretta degli elevati insegnamenti dei grandi promotori della rinascita matematica in Italia.

Nato l'11 marzo 1853 a Trieste, era stato portato nella prima infanzia a Marsiglia, dove il padre, per sottrarsi alle crescenti vessazioni poliziesche, cui nella città nativa lo esponevano i suoi sentimenti d'italianità, apertamente manifestati e difesi, si era indotto a cercare un nuovo centro ai suoi commerci; ed ivi il PINCHERLE trascorse la fanciullezza e l'adolescenza, in un ambiente familiare modesto e raccolto, dove l'intimità degli affetti era rinsaldata dalla tristezza dell'esilio e dall'appassionata attesa degli eventi storici, che in quegli anni, fra il '59 e il '70, preparavano l'unificazione della Patria. Compiuti i primi studi sotto la guida della madre, donna di alto sentire e di fine cultura, s'iscrisse a quel Liceo Imperiale, e, mentre dapprincipio pareva inclinare verso le discipline umanistiche, acquistò, verso la fine delle Classi speciali, la consapevolezza della Sua vocazione per le scienze esatte. Scelta la via, fu senza incertezze deciso in famiglia ch'Egli dovesse continuare gli studi presso un'Università italiana; e, sul finire del '69, appena sedicenne, lasciò la casa paterna per raggiungere Pisa, dove per concorso si aggiudicò un posto di alunno interno in quella Scuola Normale Superiore.

Vi dominava l'alta figura del BETTI, che, in quegli anni, tornando dalla Fisica matematica all'Analisi, poneva le basi della Topologia generale, mentre, accanto a lui, il DINI, conchiuso ancor giovanissimo il primo ciclo della sua attività nel campo della Geometria differenziale, si era volto con fervore alla elaborazione dei suoi *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale* e a quel nuovo indirizzo ispirava il suo geniale insegnamento. Le elevate

(4) Commemorazione letta davanti alla Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della Reale Accademia Nazionale dei Lincei nell'adunanza del 5 dicembre 1937-XVI.

suggerzioni di quei Maestri insigni trovarono immediata rispondenza nella mente aperta e versatile, nell'entusiasmo speculativo del PINCHERLE, che, compiuto brillantemente il Suo quadriennio di studi, conseguì nel 1874 la Laurea in Scienze fisico-matematiche e l'Abilitazione all'insegnamento con le due successive parti di una dissertazione teorico-sperimentale sulle superficie di capillarità e le relative costanti caratteristiche.

Gli si apriva così, larga di promesse, la via alla carriera scientifica; ma per proseguirla tranquillamente avrebbe dovuto ricorrere ancora agli aiuti paterni, e, posto dinnanzi al dilemma di chiedere nuovi sacrifici ai Suoi Cari o d'imporre a se stesso la via più dura, prescelse decisamente di entrare nell'insegnamento secondario.

Per Sua ventura fu destinato a Pavia, dove la Facoltà di Scienze doveva l'anno seguente accogliere nel suo seno il BELTRAMI e già contava fra i suoi Maestri il CASORATI, che, al pari del BETTI, era conoscitore profondo e divulgatore geniale delle concezioni del RIEMANN e, d'altra parte, per una certa propensione a problemi di natura operatoria, direttamente rispondenti alla mentalità del PINCHERLE, era destinato ad esercitare su di Lui un fascino particolare. Così, in quella sede tranquilla, il PINCHERLE trovava nuovi sussidi culturali, nuove suggerzioni al Suo orientamento scientifico; e, nella freschezza delle Sue energie giovanili, apprendeva ad imporsi quella severa disciplina di lavoro, che poi costantemente osservò nella Sua lunga vita e che allora Gli consentì di non deviare dalla ricerca, pur tra le cure dell'insegnamento liceale, cui dedicava quell'infessato fervore, che sempre Egli recò nella Scuola.

Decisivo fu per Lui l'anno accademico 1877-78, che, grazie ad una borsa di perfezionamento, potè passare a Berlino. Al Suo appassionato interesse culturale quel grande centro scientifico offriva le più larghe soddisfazioni; ma Egli si concentrò soprattutto nel seguire le lezioni del WEIERSTRASS, alle quali gli studi precedenti Lo avevano particolarmente preparato; e, tornato a Pavia, vi tenne, per invito dei professori di quell'Università, un corso, in cui, per la prima volta in Italia, venivano sistematicamente esposti i principi dell'Analisi secondo il WEIERSTRASS, fino all'applicazione della teoria generale delle funzioni analitiche alle funzioni ellittiche. Quel corso, da Lui riassunto in un *Saggio*, pubblicato nel *Giornale* del BATTAGLINI, ebbe larga risonanza e richiamò vivamente l'attenzione dei matematici italiani sulla forte tempra del giovane autore, che, conseguita per concorso nella primavera del 1880 la cattedra di Algebra complementare e Geometria analitica nell'Università di Palermo, era, nel successivo autunno, chiamato, per lo stesso insegnamento, a quella di Bologna.

Ancora era viva in quelle aule l'eco della parola incitatrice del CREMONA; e il PINCHERLE, formatosi nelle elevate tradizioni delle Scuole di Pisa e di Pavia, accolse come una missione, cui poi sempre tenne fede, il proposito di restituire anche la Scuola matematica di Bologna all'antico prestigio. Gli erano compagni in quel fervore di entusiasmo giovanile due Suoi condiscipoli di Pisa, pur essi giunti allora alla cattedra in quello stesso Ateneo, C. ARZELÀ e L. DONATI; e i tre giovani, associando i loro sforzi, ottennero anche a Bologna quel completamento dell'ordine degli studi per la Laura in Matematica, che già era stato promosso, ma non raggiunto, dal CREMONA, dal CHELINI, dal BELTRAMI.

Così nel 1882 il PINCHERLE assumeva per incarico quell'insegnamento di secondo biennio, che poi conservò ininterrottamente per quarantasette anni. Sorretto da una cultura eccezionale, che mai cessò di approfondire e di estendere, anche fuori del Suo campo preferito di lavoro ed oltre i confini stessi della Matematica, variava di anno in anno l'argomento delle Sue lezioni, pur mirando sempre allo scopo d'illustrare la teoria generale delle funzioni analitiche nel suo sviluppo storico, nei suoi diversi orientamenti, nei suoi rapporti con gli altri rami dell'Analisi. Alle trattazioni strettamente monografiche preferì generalmente lo sviluppo a grandi linee di intere dottrine, spesso di due teorie che a vicenda s'illuminassero; e, pronto com'era a cogliere ogni nuovo atteggiamento di pensiero, recava nella Scuola i più recenti apporti di metodi e di risultati, dopo averli sottoposti ad una profonda rielaborazione personale. Le lezioni così accuratamente preparate esponeva con impeccabile nobiltà di forma e vi trasfondeva un fervore di entusiasmo, un calore di emozione estetica, che risultavano tanto più comunicativi quanto più erano contenuti e quasi dissimulati.

Altrettanto meditati e suggestivi erano i Suoi corsi di primo biennio, che Egli, costantemente dominato dalla preoccupazione delle contrastanti esigenze degli allievi ingegneri e degli aspiranti alle Laure scientifiche, non si stancò mai di rimaneggiare e perfezionare sia nell'assetto generale, che in ogni più minuta particolarità di sviluppo; e la Sua raffinata perizia didattica resta documentata dalla serie di trattati, in cui via via riassunse le linee fondamentali del Suo insegnamento di ogni grado, dalle Matematiche elementari alla teoria delle funzioni analitiche, dalle lezioni di Algebra complementare a quelle di Calcolo, che, già preparate di lunga mano, pubblicò quando, scomparso prematuramente, nel 1912, l'ARZELÀ, ne assunse la cattedra di Analisi infinitesimale.

Col volgere degli anni, il crescente prestigio personale e la rinomanza scientifica via via più larga Lo designavano a sempre nuovi e più gravi

doveri di uffici accademici; ma trovava tempo a tutto e mai negò di assecondare fattivamente qualsiasi iniziativa diretta al vantaggio della Scienza o della Scuola. Dal 1918 in poi partecipò con assidua cura alla direzione degli « Annali di Matematica »; nel 1922 promosse la costituzione dell'*Unione Matematica Italiana*, di cui tenne per un decennio la presidenza e sempre diresse il « Bollettino »; nel 1928, su mandato conferitogli a Toronto dai Delegati dei Comitati aderenti all'Unione Matematica Internazionale, organizzò e presiedette il Congresso di Bologna.

E, intanto, Gli erano venuti, dall'Italia e dall'estero, molteplici onori accademici; e, come già nel 1889 l'Accademia dei Lincei Lo aveva designato a dividere con L. BIANCHI il Premio Reale, che, per la prima volta, si assegnava a matematici; così, al Suo collocamento a riposo il Comune di Bologna Gli conferiva il Premio « SACCHETTI »; destinato ad onorare i Maestri più insigni e più benemeriti di quello Studio glorioso.

Ma a chi ebbe la ventura di conoscerNe a fondo l'animo e le intime aspirazioni, tutto ciò non appare che estrinseco episodio in una vita, che, fuori di ogni preoccupazione di personale interesse, fu tutta raccolta e tesa in un perenne sforzo di elevazione intellettuale, in una completa dedizione alla ricerca scientifica.

Come generalmente accade, anche il PINCHERLE, nei primi passi della Sua attività scientifica, aveva traversato un periodo d'incerto orientamento, e, pur essendosi decisamente volto dalla Fisica, cui s'era dappprincipio indirizzato, all'Analisi pura, aveva cercato la Sua via in direzioni svariate: superficie ad area minima ed equazioni algebrico-differenziali; relazioni fra coefficienti e radici di una trascendente intera, riprese più tardi dal MAILLET; funzioni monodrome dotate di un teorema di moltiplicazione bilineare e funzioni a moltiplicatori, quali punto di partenza per una teoria delle funzioni ellittiche, che per quella stessa via fu, molti anni dopo, sviluppata dal RAUSENBERGER.

Ma la Sua personalità matematica si delinè precisa dopo il viaggio a Berlino. Del WEIERSTRASS Egli amò sempre considerarsi discepolo; e in verità ne risentì fortemente l'influsso; tuttavia gli impulsi, che ne aveva tratto, si erano in Lui composti con quelli, che, a Pisa e a Pavia, aveva ricevuto dal BETTI e dal CASORATI in senso prevalentemente riemanniano; mentre già la Sua prima formazione culturale Lo aveva naturalmente condotto, fin dall'inizio dei Suoi studi matematici, a famigliarizzarsi con gli indirizzi della Scuola francese. Di qui il largo eclettismo di metodi e di vedute, che Egli sempre recò nella teoria delle funzioni di variabile complessa e che, in particolare, si rispecchia nel tipo dei problemi, da Lui

affrontati nel dodicennio dall'82 al '94, in cui il Suo pensiero matematico, traverso una progressiva evoluzione, doveva raggiungere la sua piena maturità.

Era apparsa nell'80 la classica Memoria del WEIERSTRASS *Zur Funktionenlehre*, che col celebre teorema sulle serie uniformemente convergenti di funzioni analitiche aveva aperto la via a superare il tecnicismo delle serie di potenze; e il PINCHERLE, intuendo acutamente i nessi profondi, che intercedono fra il problema, così sollevato, dello sviluppo di una funzione in serie ordinata secondo le funzioni di un sistema prestabilito e il problema dell'inversione degli integrali definiti nel campo complesso, concepì un vasto programma di ricerche, dirette a indagare sistematicamente i rapporti fra le singolarità di una funzione e quelle degli elementi funzionali di riferimento adottati per una sua rappresentazione analitica sia mediante lo sviluppo in serie di funzioni prefissate, sia mediante un integrale curvilineo. E si può notare come nella natura stessa di tali questioni Egli trovasse un incentivo ad applicare considerazioni di quel tipo operatorio, verso cui doveva in seguito orientarsi sempre più decisamente.

Degli sviluppi in serie, sotto ipotesi svariate circa il sistema base, si occupò in tutta una ricca serie di lavori, che per lo stesso tipo dei problemi e dei risultati, sfuggono alla possibilità di un rapido riassunto; ma già in quelle ricerche giovanili colpisce l'ingegnosa novità di taluni concetti e di taluni spedienti, che assai più tardi dovevano entrare nell'uso corrente: tali la nozione di successione di funzioni equilimitate, l'intervento di relazioni nettamente pertinenti alla teoria dei determinanti infiniti, in quel tempo nemmeno abbozzata, l'esplicito enunciato e l'applicazione, nel caso delle regioni piane, di quel *teorema di copertura*, che un ventennio dopo fu ritrovato e messo in valore dal BOREL.

Seguono in quello stesso periodo di tempo — e più precisamente dall'85 in poi — le ricerche sull'inversione degli integrali definiti nel campo complesso. Secondo la nomenclatura odierna, i problemi da Lui affrontati per primi in questo campo si riconnettono alla risoluzione di notevoli classi di equazioni integrali di prima specie; ma in ogni singolo caso Egli fissa più particolarmente la Sua attenzione sull'operazione funzionale, rappresentata dall'integrale a primo membro, e ne indaga le proprietà analitiche sia in rapporto al nucleo — o, com'Egli allora diceva, della *funzione caratteristica* —, sia in relazione al campo funzionale, cui l'operazione s'intende applicata. Ed anche qui taluni Suoi risultati precorsero i tempi: cercando le operazioni integrali, la cui inversa ammette una analoga rappresentazione analitica, fu condotto a quei nuclei, che conservano la derivazione, e che più tardi, nel

campo reale, si ripresentarono nella teoria della composizione del VOLTERRA, il quale, com'è ben noto, li chiamò *del ciclo chiuso*.

Ma sull'ulteriore sviluppo del pensiero del PINCHERLE un più decisivo influsso ebbero gli studi da Lui compiuti sulle proprietà intrinseche e sulle applicazioni di talune fra le più importanti operazioni funzionali classiche, in ispecie sulla trasformazione di LAPLACE-ABEL. Egli per primo riconobbe come questa trasformazione, indipendentemente da ogni sua espressione analitica, si possa univocamente definire per mezzo di certe due proprietà operatorie — relative al suo comportamento di fronte alla derivazione e alla moltiplicazione per la variabile indipendente — e mise in luce come l'espressione, che per tale operazione va adottata, dipenda caso per caso dalla natura analitica della classe funzionale, in cui essa è destinata ad operare. Così svincolata da contingenti particolarità di forma, la trasformazione acquista una maggiore agilità algoritmica e una più larga possibilità di applicazioni, che il PINCHERLE illustrò in direzioni svariate; e fra i molti e notevoli risultati così conseguiti va ricordata una inattesa e riposta dualità fra le due generalizzazioni dell'equazione differenziale lineare ipergeometrica, dovute al POCHHAMMER e al GOURSAT, alla quale Egli pervenne, movendo dall'osservazione (da Lui per primo rilevata nella sua forma esplicita e generale) che la trasformazione di LAPLACE-ABEL stabilisce una corrispondenza biunivoca fra le equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali e le analoghe equazioni alle differenze.

Ritrovava così sul Suo cammino il vecchio Calcolo delle differenze, al quale, in quegli stessi anni, era stato ricondotto anche il POINCARÉ nelle sue celebri ricerche sulle equazioni differenziali lineari a integrali irregolari; e il PINCHERLE, riesumando quell'antico ordine di questioni alla luce dei metodi e delle vedute della teoria delle funzioni di variabile complessa, vi conseguì taluni dei Suoi risultati più importanti e più originali.

Tornando dapprima sugli sviluppi in serie secondo le funzioni di un sistema prestabilito, ravvisò nella *ricorrenza lineare*, quale risulta definita fra le funzioni di un tale sistema da un'equazione lineare alle differenze, un presupposto particolarmente atto a consentire, nello studio di quegli sviluppi, conclusioni precise; ed, esaurito rapidamente il caso delle ricorrenze del primo ordine, si trovò, con quelle del secondo, di fronte all'algoritmo delle frazioni continue algebriche, che indagò in senso inverso a quello prima di Lui considerato, cioè mirando a risalire dalle proprietà analitiche delle ridotte di una frazione continua convergente, data a priori, a quelle della funzione così definita. Ma ben più ardue difficoltà si presentavano nel caso delle ricorrenze d'ordine superiore, dove si trattava di scoprire la via

a quella generalizzazione dell'algoritmo delle frazioni continue algebriche, che già era stata inutilmente cercata da E. HEINE, sulla traccia del tentativo compiuto in senso strettamente aritmetico dallo stesso JACOBI; e il PINCHERLE risolse la questione in modo definitivo e geniale, introducendo, come analogo del valore della frazione continua, l'integrale da Lui chiamato *distinto*, che è quell'integrale dell'equazione lineare alle differenze, caratteristica della ricorrenza considerata, il cui rapporto ad ogni altro integrale della stessa equazione converge allo zero al tendere all'infinito dell'indice. Non è qui possibile render conto degli importanti sviluppi, che il PINCHERLE dedicò alla determinazione di siffatto integrale e alla sua applicazione al problema della migliore approssimazione di una data funzione per mezzo di combinazioni lineari, a coefficienti polinomiali, di prefissate serie di potenze. Basti ricordare, come una delle più profonde Memorie del PINCHERLE, quella del tomo 16° degli *Acta Mathematica* sulla generazione di sistemi ricorrenti per mezzo di equazioni differenziali lineari, nella quale estende agli sviluppi di una funzione analitica secondo serie procedenti per gli elementi di un sistema ricorrente le condizioni per la sviluppabilità secondo i denominatori delle ridotte di una frazione continua algebrica e pone in evidenza le proprietà asintotiche dei sistemi ricorrenti costituiti dai coefficienti dello sviluppo del TAYLOR degli integrali delle equazioni differenziali lineari di tipo regolare.

In tutte queste ricerche le equazioni lineari alle differenze, pur considerate nel campo complesso, intervenivano ancora sotto il loro originario aspetto di semplici relazioni di ricorrenza; ma il PINCHERLE, seguendo il naturale orientamento del Suo pensiero, fu condotto a superare quella concezione ristretta del Calcolo delle differenze e a considerarlo un particolare capitolo del Calcolo funzionale nel campo complesso. Come tale lo ricostruì sistematicamente, raccogliendo dapprima le teorie formali in un'*Algebra delle forme lineari alle differenze*, poi volgendosi ai problemi analitici veri e propri, fino ad una prima risoluzione analitica delle equazioni lineari alle differenze, da Lui conseguita per mezzo di serie operatorie, di accertata convergenza, ordinate secondo le potenze dell'operatore del CASORATI.

Con questo vasto e ben connesso gruppo di ricerche il PINCHERLE contribuì, forse più di ogni altro, a promuovere ed avviare quell'indirizzo, per cui il Calcolo delle differenze, uscendo dal primitivo suo stadio puramente formale ed aritmetico, è oramai entrato in modo organico nel quadro della teoria generale delle funzioni analitiche; e, se a quel nuovo ordine d'indagini più decisivi contributi sono stati in seguito recati da tutta una schiera di altri ricercatori, fra cui primeggia il NÖRLUND; basta scorrere le magistrali

Vorlesungen über Differenzenrechnung dell'insigne matematico danese per riconoscere come, anche in un assetto definitivo della teoria, le vedute e i risultati del PINCHERLE conservino immutata la loro fondamentale importanza.

Tuttavia, nella progressiva evoluzione del Suo pensiero, le ricerche da Lui compiute sino allora costituirono soprattutto il prodromo ad una più larga visione di problemi e a un più elevato programma di lavoro. Sulla base del ricco materiale di osservazioni, di raffronti, di risultati concreti, raccolto nei precedenti Suoi studi su svariate classi di operazioni funzionali, e attraverso una larga indagine storica sui vecchi metodi di Calcolo simbolico, il PINCHERLE concepì, intorno al 1894, il disegno di costruire nel campo complesso una teoria generale delle operazioni funzionali lineari, o, come Egli preferì dire, *distributive*, la quale, conservando l'agilità di quegli antichi metodi formali, conducesse a procedimenti di effettiva validità, controllabile, quanto meno caso per caso, così da costituire un nuovo ramo della teoria delle funzioni analitiche. Fu quello per Lui il periodo di più acceso fervore di ricerca, sicchè già nel 1897 poté presentare nel *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif* (« Math. Annalen », XLIX) lo schema organico della Sua teoria sintetica delle operazioni funzionali; poi, sperimentato in ripetuti corsi universitari lo sviluppo sistematico delle Sue idee, ne curò una trattazione divulgativa nel volume su *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*, pubblicato nel 1901.

A fondamento della Sua teoria Egli pose quel concetto di *spazio funzionale*, che, da Lui per primo definito e fecondamente studiato, doveva poi evolversi in forme più larghe o più determinate, fino a costituire oramai una delle nozioni fondamentali e, in un certo senso, caratteristiche dell'Analisi contemporanea. Per il PINCHERLE si trattava di quegli *spazi affini*, o meglio *vettoriali*, ad una infinità numerabile di dimensioni, che costituiscono un'immagine geometrica degli insiemi lineari di funzioni analitiche sviluppabili secondo le funzioni di un prestabilito sistema, quando agli elementi di un tale sistema si attribuisca l'ufficio di vettori fondamentali di una base di riferimento.

Già nel caso di un numero finito di dimensioni sorgono per le operazioni distributive, che trasformano in sè un tale spazio — e che i vettorialisti chiamarono più tardi *omografie vettoriali* —, interessanti problemi di classificazione; e, per quanto, astrazione fatta dalla particolare interpretazione, tutto sostanzialmente si riduca alla classica discussione dell'equazione caratteristica di una sostituzione lineare, la trattazione sintetica datane dal PINCHERLE e, in ispecie, una Sua caratterizzazione operatoria dei divisori elementari presentano, rispetto alle molte trattazioni congeneri, singolari pregi di semplicità e di eleganza.

Negli spazi funzionali ad un'infinità di dimensioni, e, in particolare, in quello delle serie di potenze, cui più spesso si riferiva il PINCHERLE, ogni operazione distributiva assume la forma di un'affinità omogenea su infinite variabili, onde risulta, per l'operazione, una prima rappresentazione analitica per mezzo di una *matrice infinita*; e di questo tipo di rappresentazione (divenuta più tardi familiare, oltre che ai matematici, ai fisici teorici) Egli si valse a più riprese, soprattutto per caratterizzare e studiare quelle operazioni, da Lui dette *normali*, che generalizzano sotto l'aspetto geometrico le cosiddette deformazioni pure, sotto l'aspetto analitico le forme differenziali lineari della classe del FUCHS, e che, nel gruppo totale delle operazioni distributive, costituiscono un sottogruppo di particolare interesse per le eleganti proprietà, di cui gode, e per le applicazioni, largamente illustrate dal PINCHERLE, di cui è suscettibile. E va rilevato come fin dal 1897 il PINCHERLE, in base a siffatta rappresentazione di un'operazione per mezzo di una matrice infinita, associasse sistematicamente, sotto ipotesi di larga generalità, al fascio dell'operazione e dell'identità quel determinante infinito, che doveva poi assumere un ufficio essenziale nella teoria del FREDHOLM; e, assodato il carattere di trascendente intera rispetto al parametro del fascio, ne deducesse quegli elementi, che oggi diconsi gli *autovalori* e le *autofunzioni* dell'operazione.

Ma allo sviluppo della teoria occorre si assegnasse per le operazioni distributive qualche altra rappresentazione più maneggevole; e il PINCHERLE vi pervenne, movendo da una geniale osservazione algoritmica. Notò che, se per una qualsiasi operazione distributiva si valuta lo scarto dalla permutabilità rispetto ad un'operazione fissa, si perviene ad una nuova operazione, la cui deduzione da quella di partenza presenta una completa analogia algoritmica con l'ordinaria derivazione delle funzioni. Assumendo, perciò, come *derivata funzionale* di un'operazione il suo scarto dalla permutabilità rispetto alla moltiplicazione per la variabile indipendente, poté stabilire che ogni operazione distributiva, nell'intorno di una generica funzione, è rappresentabile formalmente con una serie di potenze operatorie della derivazione ordinaria, perfettamente analoga alla serie del TAYLOR per le funzioni.

Non sfuggì naturalmente al PINCHERLE che tali serie operatorie, già da Lui prima incontrate nell'inversione delle forme differenziali lineari (o, se si vuole, nell'integrazione delle equazioni differenziali lineari non omogenee), hanno di regola un campo funzionale di effettiva validità piuttosto ristretto; ma non mancò di mostrare (e di questo essenziale complemento non si è sempre tenuto il debito conto) che, con un ingegnoso trasporto di quegli stessi spedienti, che al WEIERSTRASS e al MITTAG-LEFFLER avevano con-

sentito di assicurare la convergenza degli sviluppi di una funzione analitica in prodotto infinito e in serie di frazioni semplici, è possibile, caso per caso, ampliare quel primitivo campo funzionale di convergenza.

Ad ogni modo a questa rappresentazione di un'operazione con una serie di potenze della derivazione spetta, nella teoria del PINCHERLE, un ufficio in qualche modo sussidiario, giacchè per Lui ogni operazione è un'entità astratta, caratterizzata, indipendentemente da ogni espressione analitica, dalle sue proprietà operatorie intrinseche, che, quanto meno nei casi più noti, si traducono in equazioni simboliche assai semplici; e la *legge di permanenza* di tali proprietà consente, in generale, di *prolungare* l'operazione oltre i limiti del suo primitivo campo funzionale di definizione. Di queste Sue vedute, cui giustamente il PINCHERLE annetteva particolare importanza, diede un'espressiva applicazione, discutendo in modo esauriente il problema della derivazione di indice complesso qualsiasi, su cui già avevano fermato la loro attenzione, fra gli altri, il LIOUVILLE, il RIEMANN, l'HOLMGREN, il BOURLET.

D'altro canto, uno studio approfondito delle analogie, che intercedono fra le affinità vettoriali ordinarie e le operazioni distributive agenti in uno spazio ad infinite dimensioni condusse il PINCHERLE a riconoscere fra i due casi una differenza essenziale, che, rimasta allora pressochè inavvertita, fu nuovamente rilevata per le operazioni integrali da HELLINGER e TOEPLITZ quindici anni più tardi. In uno spazio ad un numero finito di dimensioni ogni operazione distributiva degenera gode insieme delle due proprietà di trasformare l'intero spazio in uno spazio ad un numero minore di dimensioni e di possedere, come il PINCHERLE diceva, qualche vettore *radice*, cioè qualche vettore, cui corrisponde il vettore nullo. Orbene, quando si passa alle operazioni distributive in uno spazio ad infinite dimensioni, queste due proprietà, pur trovandosi talvolta associate, possono anche presentarsi separatamente, talchè si hanno due tipi distinti di degenerazione; ed è manifesto come risulti essenzialmente diverso il problema d'inversione per le operazioni degeneri dell'una o dell'altra specie. Di queste operazioni degeneri il PINCHERLE indagò largamente le proprietà. In particolare, introdotta nello spazio funzionale l'omogeneità e sostituita all'immagine vettoriale quella puntuale, stabili, pel tramite di convenienti operazioni degeneri, l'esistenza di spazi lineari, pur essi a infinite dimensioni, ma meno comprensivi di quello totale, cui competono tutte le proprietà di incidenza e di appartenenza che caratterizzano gli iperpiani ordinari; e, definite per questi *iperpiani* dello spazio funzionale purteggiate opportune coordinate omogenee, aventi carattere contragrediente rispetto a quelle puntuali, pervenne ad una corrispondenza per

dualità, che Gli consentì di associare ad ogni operazione un'operazione correlativa, la quale generalizza, con le rispettive proprietà caratteristiche, tanto l'*aggiunta* del LAGRANGE, quanto quell'altra operazione analoga, che, sotto il medesimo nome, lo stesso PINCHERLE aveva introdotto nel Calcolo delle differenze.

Della Geometria dello spazio funzionale considerò anche altri problemi, più tardi ripresi, sotto punti di vista diversi, da vari ricercatori (curve e varietà non lineari dello spazio funzionale, loro spazi osculatori dei vari ordini, gruppi continui di operazioni e loro operazioni infinitesime, ecc.); ma non vi si indugiò, giacchè rifuggiva dalle generalizzazioni, che potessero apparire scopo a se stesse; e si volse, invece, ad illustrare operosamente le applicazioni, di cui la Sua teoria era suscettibile nel campo delle funzioni analitiche: operazioni normali, come atte ad aggiungere o togliere ad una funzione singolarità di natura determinata, onde risultarono chiariti nella loro origine profonda i teoremi dell'HADAMARD e del DARBOUX sulle singolarità delle serie di potenze; indagine approfondita delle dipendenze fra le singolarità di una *funzione determinante* e quelle della corrispondente *generatrice*; teoria generale dell'inversione delle operazioni integrali del ciclo chiuso nel campo complesso; classificazione delle equazioni funzionali lineari di seconda specie nei tre grandi tipi del VOLTERRA, del FREDHOLM, dell'HILBERT.

A queste ricerche, direttamente legate al progressivo sviluppo delle Sue idee, altre ne intercalava di carattere collaterale o, in qualche modo, sussidiario. Così, in relazione alla risoluzione analitica delle equazioni lineari alle differenze, riprendeva quelle serie di fattoriali e del NEWTON, che già aveva incontrate in un Suo precedente studio sulla interpolazione nel campo complesso, e ne indagava le proprietà di convergenza, pervenendo per primo alle condizioni necessarie e sufficienti, affinchè una data funzione ammetta uno sviluppo in serie newtoniana. Inoltre, da una ricerca, per se stessa molto notevole, su taluni nuclei analitici era condotto a svariati problemi d'iterazione, in particolare a quello fondamentale dell'iterazione « in grande » delle funzioni razionali, che doveva poi essere ulteriormente approfondito dal JULIA, dal FATOU, dal RITT.

Nell'ultimo periodo della Sua vita ebbe l'intimo compiacimento di veder confermate l'importanza e la vitalità delle Sue vedute sintetiche sulle operazioni funzionali non soltanto da recenti sviluppi di Analisi, ma più ancora da nuovi e inaspettati nessi coi concetti e i procedimenti algoritmici imposti ai teorici della nuova Fisica. Con rinnovata fiducia tornò sui principi della Sua teoria e forse vagheggiò l'idea di rielaborarla su basi più larghe, che

ad un tale disegno sembra rispondere l'ultima Sua Memoria, che la morte interruppe e fu pubblicata postuma ⁽¹⁾, quasi auspicio di ulteriori sviluppi per il Suo retaggio d'idee.

Quale posto Egli attribuisse alle Sue ricerche e ai Suoi contributi nel quadro generale degli indirizzi congeneri fu da Lui stesso chiarito nel magistrale articolo sulle equazioni e operazioni funzionali per la grande Enciclopedia delle Scienze matematiche ⁽²⁾. Ma nella rigida Sua obbiettività scientifica, nel Suo scrupoloso senso delle proporzioni finì con l'essere severo con se stesso; e ben più alta e più giusta valutazione dell'opera Sua fu solennemente espressa a Bologna, nel 1928, da J. HADAMARD, che, delineando da par suo in una larga sintesi le origini, gli sviluppi, i futuri presumibili orientamenti del Calcolo funzionale ⁽³⁾, additò nel PINCHERLE uno degli iniziatori ed uno dei cultori più insigni di quel promettente e caratteristico indirizzo della Matematica contemporanea.

A questo giudizio autorevolissimo null'altro andrebbe aggiunto; ma il vecchio discepolo, chiamato all'onore di parlare di Lui in quest'alta sede, non può negare a se stesso di rievocarne qui la luminosa figura morale, quale gli apparve fin dagli anni lontani della giovinezza. Pensoso e parco di parole, pareva che, soprattutto di fronte ai discepoli, amasse nascondere la Sua personalità dietro un fitto velo di geloso riserbo. Ma appunto per questo i giovani, con più intenso sforzo di comprensione e di reverente simpatia, scrutavano oltre quel velo le sue note profondamente umane: il culto tenerissimo degli affetti famigliari, il fervido amor patrio, il multiforme interesse per ogni indirizzo speculativo, la raffinata sensibilità per ogni forma d'Arte, particolarmente per la Musica. Era ambito privilegio di pochissimi l'essere ammessi nell'intimità della Sua casa, dove, in piccola cerchia, recava nella conversazione, con arguzia garbata e senz'ombra di pesantezza, tutte le risorse della Sua vastissima cultura; e talvolta sedeva al pianoforte per interpretarvi, con una Sua caratteristica finezza di passione contenuta, le musiche classiche,

⁽¹⁾ *Contributo alla teoria degli operatori lineari*, in questi « Annali », serie IV, t. XV, 1936-XV, pp. 243-308. Solo ora (febbraio 1938) dalla elevata ed esauriente Commemorazione, che del PINCHERLE tenne il prof. ETTORE BORTOLOTTI all'Accademia di Bologna (« Rendiconto delle Sessioni, Sez. di Sc. Fis. e Mat. », anno 1936-37), apprendo che fra i manoscritti inediti del PINCHERLE furono trovati i primi otto Capitoli di una nuova opera sulla teoria generali delle operazioni lineari.

⁽²⁾ Vedasi specialmente l'edizione francese: *Équations et opérations fonctionnelles*, t. III, 5^{me} vol., pp. 1-81, Paris 1912.

⁽³⁾ *Le développement et le rôle scientifique du Calcul fonctionnel*, « Atti del Congresso Intern. dei Matematici », Bologna 1928-VI, tomo I, pp. 143-161.

che più Gli erano care, e alle quali mai cessò di dedicar quotidianamente qualche ora, nemmeno nei periodi di più intensa attività scientifica, quasi vi cercasse, più che uno svago, una fonte d'ispirazione intellettuale. In ogni circostanza Egli conservava quel Suo contegno di composta superiorità, in cui si rifletteva l'interiore equilibrio, da Lui raggiunto fra le ingenite inclinazioni di un'indole affettiva e sensibilissima e la concezione elevata ed austera, che della vita e dei rapporti umani aveva imposto a se stesso. Così alla profonda modestia, che Gli era istintiva, si associava in Lui un alto senso di dignità personale; l'estrema mitezza dell'animo si armonizzava con la sicura fermezza delle convinzioni, con la severità rettilinea dei criteri morali; e chi più Gli era vicino ben sapeva come, ad ogni richiamo della coscienza, Egli fosse pronto ad assumere la responsabilità di atteggiamenti o di decisioni, che pur ferivano la Sua sensibilità. Ma non ebbe nemici, nè mai suscitò intorno a sè risentimento o rancore, perchè la rigidità della Sua dirittura era temperata dalla larga tolleranza di chi dalla stessa saldezza delle proprie convinzioni sa trar motivo a comprendere chiunque batta altre vie con pari purezza di cuore, e da ogni Suo atto traspariva limpidamente, come unica norma, l'ossequio incondizionato al dovere, cui sempre seppe sacrificare per primo se stesso.

Fu soprattutto per sentimento del dovere che, alieno per indole da ogni ufficio di comando e già quasi settantacinquenne, accettò a Toronto l'arduo compito di preparare e presiedere il Congresso di Bologna, col preciso mandato, confermato Gli dal Governo Nazionale, di restaurarvi, per la prima volta dopo la Grande Guerra, la completa internazionalità delle adesioni e degli interventi. Gli animi erano turbati e divisi; e al di là delle Alpi parve dapprima che, sull'una e sull'altra sponda, quel tentativo di riavvicinamento non fosse destinato che ad esasperare le mal sopite passioni, ad approfondire i dissensi tenacemente superstiti. Ma il PINCHERLE, convinto di servire insieme la causa della Scienza e la secolare tradizione di universalità culturale dell'Italia, non si scoraggiò. Ai contrasti e alle amarezze, che non Gli furono risparmiate, oppose la Sua dignitosa serenità; le difficoltà ostinatamente risorgenti dominò e superò con un mirabile sforzo di tatto, di energia, di saggezza; e mai si ebbe, in quest'Europa senza pace, un più largo e più concorde raduno di scienziati di ogni nazione. Fu quello il coronamento ideale della Sua vita; e, assolto il nobile mandato, scese, in silenzioso accoramento, dalla cattedra, che aveva onorato per quasi cinquant'anni.

Giusto compenso alla Sua perenne spiritualità, non conobbe l'angoscioso declinare dell'attività intellettuale; e conservò intatti, nella vegeta vecchiezza, l'interesse per la ricerca, la gioia del lavoro, la fede nella missione pro-

gressiva della Scienza. Così, anche nell'ultimo Suo giorno, incurante di qualche oscuro presagio dell'incombenté ora suprema, tornò all'usato lavoro, si raccolse ancora una volta a meditare sulla Memoria che doveva lasciare incompiuta, ancora una volta nella serena intimità domestica irradiò fra i Suoi Cari l'inesausta Sua affettività, quando, al calar della notte sulla giornata operosa, quasi d'improvviso il puro e fervido cuore si arrestò.

Ma Egli vive nella Sua opera di Scienziato e di Maestro, vive nella luce della incontaminata Sua nobiltà morale.

Elenco cronologico delle pubblicazioni di Salvatore Pincherle (1).

- 1874 - *Sulle superficie di capillarità*. (Il Nuovo Cimento, s. 2^a, vol. XII, Pisa).
 1875 - *Sulle costanti di capillarità*. (Il Nuovo Cimento, s. 2^a, vol. XIV, Pisa).
 1876 - *Sulle superficie d'area minima*. (Programma del R. Liceo « Foscolo », Pavia).
 » - *Sopra alcuni problemi relativi alle superficie d'area minima*. (Rend. Lomb., s. 2^a, t. IX).
 1877 - *Sulle equazioni algebrico-differenziali di prim'ordine e primo grado a primitiva generale algebrica*. (Rend. Lomb., s. 2^a, t. X).
 1878 - *Relazioni fra i coefficienti e le radici di una funzione intera trascendente*. (Rend. Lomb., s. 2^a, t. XI).
 1879 - *Sulle funzioni monodrome aventi un'equazione caratteristica*. (Rend. Lomb., s. 2^a, t. XII).
 » - *Ricerche sopra una classe importante di funzioni monodrome*. (Giorn. di Mat., XVII, Napoli).
 1880 - *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi di C. WEIERSTRASS*. (Giorn. di Mat., XVIII, Napoli).
 1881 - *Geometria pura elementare*. Milano, Hoepli; 8^a ediz., 1918.
 1882 - *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche*. (Mem. Bol., s. IV, t. III).
 » - *Geometria metrica e trigonometria*. Milano, Hoepli; 9^a ediz., 1922.
 » - *Alcuni teoremi sopra gli sviluppi in serie per funzioni analitiche*. (Rend. Lomb., s. 2^a, t. XV).
 1883 - *Sopra una applicazione delle funzioni sferiche al teorema di MITTAG-LEFFLER, e alla determinazione di funzioni a spazi lacunari*. (Rend. Bol., anno accad. 1882-83).
 » - *Una formula sui determinanti*. (Rend. Bol., anno accad. 1882-83).
 » - *Sui prodotti infiniti per funzioni analitiche*. (Rend. Bol., anno accad. 1882-83).
 » - *Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate coi medesimi*. Memoria I. (Ann. di Mat., s. II, t. XII, Milano).
 » - *Di una generalizzazione della derivazione nelle funzioni analitiche*. (Giorn. di Mat., XXII, Napoli).
 » - *Algebra elementare*. Milano, Hoepli; 13^a ediz., 1920.
 1884 - *Alcune osservazioni sugli ordini d'infinito delle funzioni*. (Mem. Bol., s. IV, t. V).

(1) Abbreviazioni: Boll. U. M. I. = Bollettino della Unione Matematica Italiana; Mem. Bol. = Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; Rend. Bol. = Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; Rend. Lincei = Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali; Rend. Lomb. = Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere; Rend. Pal. = Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Ringrazio vivamente il prof. A. MAMBRIANI, che cortesemente ha colmato alcune lacune rimaste nell'elenco da me primitivamente preparato.

- 1884 - *Sui gruppi lineari di funzioni.* (Mem. Bol., s. IV, t. VI).
 » - *Sui sistemi di funzioni analitiche e gli sviluppi in serie formati coi medesimi.* Memoria II. (Ann. di Mat., s. II, t. XII, Milano).
- 1885 - *Note sur une intégrale définie.* (Acta Math., VII, Stockholm).
 » - *Sopra una formula del sig. HERMITE.* (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. I).
 » - *Alcune osservazioni generali sui gruppi di funzioni.* (Mem. Bol., s. IV, t. VI).
- 1886 - *Alcune osservazioni sui polinomi del prof. APPELL.* (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. II).
 » - *Studi sopra alcune operazioni funzionali.* (Mem. Bol., s. IV, t. VII).
 » - *Sur une formule dans la théorie des fonctions.* (Ofversigt af K. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, n.º 3, Stockholm).
 » - *Sopra una trasformazione delle equazioni differenziali lineari in equazioni alle differenze, e viceversa.* (Rend. Lomb., s. 2^a, t. XIX).
- 1887 - *Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies.* (Acta Math., X, Stockholm).
 » - *Costruzioni di nuove espressioni analitiche atte a rappresentare funzioni con un numero infinito di punti singolari.* (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. III).
 » - *Sul confronto delle singolarità di due funzioni analitiche.* (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. III).
 » - *Della trasformazione di LAPLACE e di alcune sue applicazioni.* (Mem. Bol., s. IV, t. VIII).
 » - *Sulla risoluzione dell'equazione $\sum h_\nu \varphi(x + a_\nu) = f(x)$ a coefficienti costanti.* (Rend. Bol., anno accad. 1887-88).
 » - *Sull'inversione degli integrali definiti.* (Rend. Lomb., s. 2^a, t. XX).
- 1888 - *Sul carattere aritmetico dei coefficienti delle serie che soddisfano ad equazioni differenziali o alle differenze.* (Rend. Pal., II).
 » - *Una trasformazione di serie.* (Rend. Pal., II).
 » - *Sopra certi integrali definiti.* (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. IV).
 » - *Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate.* Note I e II. (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. IV).
 » - *Sulla risoluzione dell'equazione funzionale $\sum h_\nu \varphi(x + z_\nu) = f(x)$ a coefficienti costanti.* (Mem. Bol., s. IV, t. IX).
 » - *Sulla risoluzione dell'equazione funzionale $\sum h_\nu \varphi(x + a_\nu) = f(x)$ a coefficienti razionali.* (Mem. Bol., s. IV, t. IX).
 » - *Sur une généralisation des fonctions eulériennes.* (Comptes Rendus, 23 janvier, Paris).
 » - *Sur le développement d'une fonction analytique en série de polynômes.* (Comptes Rendus, 17 décembre, Paris).
 » - *Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires.* (Crelle, CIII, Berlin).
- 1889 - *I sistemi ricorrenti di primo ordine e di secondo grado.* (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. V).
 » - *Nuove osservazioni sui sistemi ricorrenti di primo e di secondo grado.* (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. V).
 » - *Alcuni teoremi sulle frazioni continue.* (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. V).
 » - *Su alcune forme approssimate per la rappresentazione di funzioni.* (Mem. Bol., s. IV, t. X).
 » - *Quelques applications des fractions continues.* (Comptes Rendus, 29 avril, Paris).
 » - *Di un'estensione dell' algoritmo delle frazioni continue.* (Rend. Lomb., s. 2^a, vol. XXII).
 » - *Sur les fractions continues algébriques.* (Ann. scient. de l'Éc. Norm. Sup., s. III, t. VI, Paris).
- 1890 - *Sulla trasformazione di HEINE.* (Rend. Pal., IV).
 » - *Su alcuni integrali particolari delle equazioni differenziali lineari non omogenee.* (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. VI).
 » - *Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche.* (Mem. Bol., s. IV, t. X).

- 1890 - *Sulla rappresentazione approssimata di una funzione mediante irrazionali quadratici.* (Rend. Lomb., s. 2^a, t. XXIII).
- 1891 - *Un teorema sulle frazioni continue.* (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. VII).
- » - *Un sistema d'integrali ellittici considerati come funzioni dell'invariante assoluto.* (Rend. Lincei, s. 4^a, vol. VII).
 - » - *Una nuova estensione delle funzioni sferiche.* (Mem. Bol., s. V, t. I).
 - » - *Sulla generalizzazione delle funzioni sferiche.* (Rend. Bol., anno accad. 1891-92).
 - » - *Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche.* (Ann. di Mat., s. II, t. XIX).
 - » - *Sopra certe superficie razionali che s'incontrano in questioni d'analisi.* (Rend. Lomb., s. 2^a, t. XXIV).
 - » - *Sopra una trasformazione nelle equazioni differenziali lineari.* (Rend. Lomb., s. 2^a, t. XXV).
 - » - *Gli elementi di aritmetica* ad uso delle scuole secondarie inferiori. Bologna, Zanichelli.
- 1892 - *Sur la génération de systèmes récurrents au moyen d'une équation différentielle.* (Acta Math., XVI).
- » - *Sulle forme differenziali lineari.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. I).
 - » - *Contributo alla integrazione delle equazioni differenziali lineari mediante integrali definiti.* (Mem. Bol., s. V, t. II).
 - » - *Applicazione alla geometria di una osservazione di aritmetica.* (Rend. Bol., anno accad. 1892-93).
- 1893 - *Sull'interpolazione.* (Mem. Bol., s. V, t. III).
- » - *Sulle serie di potenze.* (Ann. di Mat., s. II, t. XXI).
 - » - *Sur les séries de fonctions.* (Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, Coimbra, XI).
 - » - *Considerazioni geometriche sul numero delle radici reali di un'equazione algebrica.* (Rivista di Mat., III).
 - » - *Algebra Complementare, I: Analisi algebrica.* Milano, Hoepli; 4^a ediz., 1920.
- 1894 - *Sulle equazioni alle differenze.* Note I e II. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. III).
- » - *Contributo alla generalizzazione delle frazioni continue.* (Mem. Bol., s. V, t. IV).
 - » - *L'Algebra delle forme lineari alle differenze.* (Rend. Bol., anno accad. 1894-95).
 - » - *Delle funzioni ipergeometriche, e di varie questioni ad esse attinenti.* (Giorn. di Mat., XXXII).
 - » - *Algebra Complementare, II: Teoria delle equazioni.* Milano, Hoepli; 4^a ediz., 1920.
- 1895 - *Sulle operazioni funzionali distributive.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. IV).
- » - *Sulle soluzioni coniugate nelle equazioni differenziali e alle differenze.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. IV).
 - » - *L'Algebra delle forme lineari alle differenze.* (Mem. Bol., s. 5^a, t. V).
 - » - *Sopra alcune equazioni simboliche.* (Mem. Bol., s. 5^a, t. V).
 - » - *Sulle operazioni distributive commutabili con una operazione data.* (Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino, vol. XXX).
- 1896 - *Sullo spirito aritmetico nella Matematica.* Traduzione di un opuscolo di F. KLEIN. (Rend. Pal., X).
- » - *Della validità effettiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. V).
 - » - *Operazioni distributive: l'integrazione successiva.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. V).
 - » - *Operazioni distributive: le equazioni differenziali lineari non omogenee.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. V).
 - » - *Sulle equazioni differenziali lineari non omogenee e le operazioni funzionali che esse definiscono.* (Rend. Bol., anno accad. 1895-96).
 - » - *Le operazioni distributive e le omografie.* (Rend. Lomb., s. 2^a, t. XXIX).
 - » - *Résumé de quelques résultats relatifs à la théorie des systèmes récurrents de fonctions.* (Math. papers read at the Int. math. congress, Chicago).

- 1896 - *Esercizi sull'Algebra elementare*. Milano, Hoepli; 3^a ediz., 1921.
- 1897 - *Sulle serie precedenti secondo le derivate successive di una funzione*. (Rend. Pal., XI).
- » - *Sulla generalizzazione della proprietà del determinante wronskiano*. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. VI).
- » - *Cenno sulla Geometria dello spazio funzionale*. (Rend. Bol., N. S., I).
- » - *Commemorazione di C. WEIERSTRASS*. (Rend. Bol., N. S., I).
- » - *Appunti di calcolo funzionale distributivo*. (Rend. Lomb., s. 2^a, vol. XXX).
- » - *Mémoire sur le Calcul fonctionnel distributif*. (Math. Annalen, XLIX).
- » - *Esercizi sulla Geometria elementare*. Milano, Hoepli; 2^a ediz., 1915,
- 1898 - *Di una estensione del concetto di divisibilità per un polinomio*. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. VII).
- » - *Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze*. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. VII).
- » - *Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni*. (Rend. Bol., N. S., II).
- » - *Sul confronto delle singolarità delle funzioni analitiche*. (Rend. Bol., N. S., II).
- » - *Sull'operazione aggiunta*. (Rend. Bol., N. S., II).
- » - *Sur la transformée d'EULER*. (Crelle, CXIX).
- 1899 - *Sopra un problema d'interpolazione*. (Rend. Pal., XIV).
- » - *Di un'equazione funzionale simbolica e di alcune sue conseguenze*. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. VIII).
- » - *Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date*. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. VIII).
- » - *A proposito di un recente teorema del sig. HADAMARD*. (Rend. Bol., N. S., III).
- » - *Sur les séries de puissances toujours divergentes*. (Comptes Rendus, 13 fevrier, Paris).
- » - *Pour la bibliographie de la théorie des opérations distributives*. (Bibliotheca Mathematica, nouv. s., XIII).
- » - *Sulla continuità delle funzioni*. (Rend. Bol., N. S., IV).
- 1900 - *Commemorazione di E. BELTRAMI*. (Rend. Bol., N. S., V).
- » - *Sulla scomposizione di una forma differenziale lineare in un prodotto di operazioni*. (Rend. Bol., N. S., V).
- » - *Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica*. (Ann. di Mat., s. 3^a, t. IV).
- 1901 - *Commemorazione di CH. HERMITE*. (Rend. Bol., N. S., V).
- » - *La trasformazione di LAPLACE e le serie divergenti*. (Rend. Bol., N. S., V).
- » - *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*, in collab. con U. AMALDI. Bologna, Zanichelli.
- 1902 - *Sulle serie di fattoriali*. Note I e II. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XI).
- » - *Sulle derivate ad indice qualunque*. (Mem. Bol., s. 5^a, t. IX).
- » - *Alcune formule di Analisi combinatoria*. (Giorn. di Mat., XL).
- 1903 - *Sur une série d'ABEL*. (Acta Math., XXVIII).
- » - *Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali*. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XII).
- » - *Sulle funzioni meromorfe*. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XII).
- » - *Di una nuova operazione funzionale e di qualche sua applicazione*. (Rend. Bol., N. S., VII).
- » - *Sopra un'estensione della formula di TAYLOR nel calcolo delle operazioni*. (Rend. Bol., N. S., VII).
- » - *Sur l'approximation des fonctions par des irrationnelles quadratiques*. (Comptes Rendus, 9 novembre, Paris).
- 1904 - *Risoluzione di una classe di equazioni funzionali*. (Rend. Pal., XVIII).

- 1904 - *Sugli sviluppi asintotici e le serie sommabili.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XIII).
 » - *Sui limiti della convergenza di alcune espressioni analitiche.* (Rend. Bol., N. S., VIII).
- 1905 - *Studio sopra un teorema del POINCARÉ relativo alle equazioni ricorrenti.* (Rend. Bol., N. S., IX).
 » - *Sur les fonctions déterminantes.* (Ann. sc. de l'Éc. Norm. Sup., s. 3^a, t. XXII).
 » - *Sulle equazioni funzionali lineari.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XIV).
- 1906 - *Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XV).
 » - *Sulle equazioni funzionali lineari.* (Mem. Bol., s. 6^a, t. III).
 » - *Sull'inversione analitica degli integrali definiti.* (Rend. Bol., N. S., XI).
 » - *Funktionaloperationen und Gleichungen.* (Enc. der math. Wiss., Bd. II, A. 11).
 » - *Lezioni di Algebra complementare: Analisi algebrica.* Bologna, Zanichelli; 3^a ediz., 1924.
- 1907 - *Sopra l'estensione agli sviluppi asintotici di un teorema del sig. HURWITZ.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XVI).
 » - *Sull'inversione degli integrali definiti.* (Atti della Soc. It. delle Sc., detta dei XL, s. 3^a, t. XV).
- 1908 - *Commemorazione di F. P. RUFFINI.* (Rend. Bol., N. S., XII).
 » - *Sui fasci di omografie.* (Rend. Lomb., s. 2^a, t. XLI).
 » - *Sulla teoria dei limiti.* (Per. di Mat. e Boll. di « Mathesis », anno XXIII).
 » - *Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti.* (Atti del IV Congr. Intern. dei Matematici (Roma, 1908), vol. II).
 » - *Sul nuovo sistema per i Concorsi alle Cattedre delle Scuole Medie.* (Boll. di Mat., Anno VII).
- 1909 - *Alcune osservazioni sulle funzioni determinanti.* (Rend. Bol., N. S., XIII).
 » - *Sopra certe equazioni integrali.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XVIII).
 » - *Lezioni di Algebra complementare: Teoria delle equazioni.* Bologna, Zanichelli; 2^a ediz., 1921.
- 1910 - *Sul concetto di divisibilità in generale.* (Rend. Bol., N. S., XIV).
- 1911 - *Sopra alcune omografie dello spazio funzionale.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XX).
 » - *Appunti di Calcolo funzionale.* (Mem. Bol., s. 6^a, t. VIII).
 » - *Sopra un'estensione del concetto di divisibilità.* (Giorn. di Mat., XLVIII).
 » - *Sugli studi per la Laurea in matematica e sulla Sezione delle Scuole di magistero.* Comm. intern. per l'insegnamento matematico. (Atti della Sottocomm. italiana).
- 1912 - *Quelques observations sur les fonctions déterminantes.* (Acta Math., XXXVI).
 » - *Sulle operazioni lineari, e sulla teoria delle equazioni integrali.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XXI).
 » - *Alcune osservazioni sopra i sistemi di funzioni associate e sopra un gruppo di operazioni lineari.* (Mem. Bol., s. 6^a, t. IX).
 » - *Commemorazione di C. ARZELÀ.* (Rend. Bol., N. S., XVI).
 » - *Lo spazio funzionale e le sue omografie.* (Giorn. di Mat., L).
 » - *Équations et opérations fonctionnelles.* (Enc. des Sc. mathématiques, t. II, 5^{me} vol., Paris-Leipzig).
 » - *Recensione dell'opera: « Theorie der linearen Differenzgleichungen » di WALLENBERG e GULDBERG.*
- 1913 - *Un'applicazione della convergenza in media.* (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XXII).
 » - *Alcune osservazioni ed una rettifica alla Memoria: « Appunti di Calcolo funzionale ».* (Rend. Bol., N. S., XVIII).
 » - *Sull'operazione aggiunta di LAGRANGE.* (Ann. di Mat., s. 3^a, t. XXI).
- 1914 - *Alcune osservazioni sull'iterata di una funzione data.* (Rend. Bol., N. S., XVIII).
 » - *Sulle serie di fattoriali generalizzate.* (Rend. Pal., XXXVII).

- 1915 - *La Matematica e il futuro*. Discorso inaugurale. (Annuario della R. Univ. di Bologna).
 » - *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*. Bologna, Zanichelli; 3^a ediz. in due voll., 1926-27.
- 1916 - *Sopra alcuni nuclei analitici*. (Rend. Bol., N. S., XX).
 » - *Il Calcolo delle probabilità e l'intuizione*. (Rivista « Scientia », XIX).
- 1917 - *Appunti su alcuni problemi d'iterazione*. (Rend. Bol., N. S., XXI).
- 1918 - *Sulle radici reali delle equazioni iterate di un'equazione quadratica*. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XXVII).
 » - *Sull'iterazione della funzione $x^2 - a$* . (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XXVII).
 » - *Sulle catene di radicali quadratici*. (Rend. Bol., N. S., XXII).
 » - *Sulle catene di radicali quadratici*. (Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino, vol. LIII).
 » - *Commemorazione di E. E. LEVI*. (Semin. Mat. dell'Univ. di Roma).
 » - *La crisi della Scuola media*. (Rivista pedagogica, anno XI).
- 1919 - *Un teorema sull'iterazione della funzione quadratica*. (Rend. Bol., N. S., XXIII).
 » - *Commemorazione di U. DINI*. (Period. di Mat. e Boll. di « Mathesis »).
- 1920 - *L'iterazione completa di $x^2 - 2$* . (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XXIX).
 » - *Sulla funzione iterata di una razionale intera*. Note I e II. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XXIX).
 » - *Sopra alcune equazioni funzionali*. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XXIX).
 » - *Sull'iterata di un polinomio razionale intero*. (Rend. Bol., N. S., XXIV).
 » - *Commemorazione di A. RAZZABONI*. (Rend. Bol., N. S., XXV).
- 1921 - *Sur une équation intégrale dans le domaine complexe*. (Comptes Rendus, 6 juin, Paris).
 » - *Sobre la iteracion analitica*. (Revista matemática hispano-americana, Madrid).
 » - *Un'interpretazione geometrica e un'estensione della divisibilità dei polinomi*. (Per. di Mat., s. IV, vol. I).
 » - *Spigolature nel campo del Calcolo funzionale*. (Atti della Soc. It. per il Progr. delle Sc., XI Riunione, Trieste).
 » - *Sulla preparazione degli Insegnanti*. (Rivista Pedagogica, anno XIV).
- 1922 - *Struttura di uno spazio invariante nella teoria delle operazioni lineari*. (Rend. Bol., N. S., XXVI).
 » - *Sulle operazioni lineari permutabili colla derivazione*. (Rend. Bol., N. S., XXVIII).
 » - *Recensione dell'opera: « Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie » di E. LANDAU*. (Boll. U. M. I., anno I).
 » - *Sulle operazioni lineari permutabili colla derivazione*. (Boll. U. M. I., anno I).
 » - *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*. T. I, Bologna, Zanichelli.
- 1923 - *Operazioni funzionali permutabili colla derivazione*. (Boll. U. M. I., anno II).
- 1924 - *Sulle funzioni trascendenti semplici*. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XXXIII).
 » - *Ancora sulle funzioni trascendenti semplici*. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XXXIII).
 » - *Su una separazione di singolarità in una funzione analitica*. (Rend. Lincei, s. 5^a, vol. XXXIII).
 » - *Sulla generalizzazione di alcune trascendenti classiche*. (Rend. Bol., N. S., XXVIII).
 » - *Relazione del Presidente all'adunanza pubblica solenne dell'Accademia del 22 giugno 1924*. (Mem. Bol., s. VIII, t. I).
 » - *Recensione dell'opera: « Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen » di H. W. E. JUNG*. (Boll. U. M. I., anno III).
- 1925 - *Di alcune trasformazioni funzionali*. (Rend. Lincei, s. 6^a, vol. I).
 » - *Recensione dell'opera: « Le calcul des probabilités à la portée de tous » di FRÉCHET e HALBWACHS*. (Boll. U. M. I., anno IV).
 » - *Commemorazione di A. MERLANI*. (Rend. Bol., N. S., XXIX).
- 1926 - *Sur la résolution de l'équation fonctionnelle $\sum h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x)$ à coefficients constants*. (Acta Math., XLVIII).

- 1926 - *Sulle serie di potenze negative di una variabile.* (Rend. Bol., N. S., XXX).
 » - *Il Calcolo delle differenze finite.* (Boll. U. M. I., anno V).
 » - *Notice sur les travaux de S. PINCHERLE.* (Acta Math., XLVI).
- 1927 - *Una classe speciale di forme differenziali lineari d'ordine infinito.* (Mem. Bol., s. 8^a, IV).
- 1928 - *Recensione dell'opera:* « Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications » di P. MONTEL. (Boll. U. M. I., anno VII).
 » - *Sulle operazioni funzionali lineari.* (Proceedings Congress Toronto, I).
 » - *Discorso d'apertura del Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna.* (Atti, tomo I).
 » - *Recensione dell'opera:* « Les espaces abstraits » di M. FRÉCHET. (Boll. U. M. I., anno VII).
- 1929 - *Recensione dell'opera:* « Leçons sur l'intégration » di H. LEBESGUE. (Boll. U. M. I., anno VIII).
 » - *Recensione dell'opera:* « Leçons sur les équations linéaires aux différences finies » di N. E. NÖRLUND. (Boll. U. M. I., anno VIII).
 » - *Operazioni funzionali lineari e sviluppi dello zero.* (Rend. Lincei, s. 6^a, vol. IX).
 » - *Sopra un'estensione del concetto di divisibilità.* (Rend. del Semin. Mat. di Milano, III).
 » - *Una generalizzazione della divisibilità algebrica* (con relativa traduzione in francese) Bologna, Zanichelli.
 » - *Commemorazione del socio FRANCESCO BRIOSCHI.* (Atti della Soc. It. delle Sc., detta dei XL, s. 3^a, t. XXIII).
 » - *Osservazioni sulla trasformazione di EULER-LINDELÖF.* (Rend. Bol., N. S., XXXIII).
 » - *Osservazioni sopra una classe di operazioni lineari.* (Atti del Congr. Int. dei Mat. (Bologna-1928), t. III).
- 1930 - *Sui coefficienti di fattoriali.* (Ann. di Mat., s. 4^a, t. VII).
 » - *Sulle serie ordinate per le potenze successive dell'integrazione.* (Rend. Bol., N. S., XXXIV).
 » - *Sugli autotrasformatori.* (Rend. Bol., N. S., XXXIV).
 » - *Recensione dell'opera:* « Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (Zweite Auflage) » di E. LANDAU. (Boll. U. M. I., anno IX).
 » - *Parole d'apertura all'adunanza pubblica dell'Accademia del 30 novembre 1930.* (Mem. Bol., s. VIII, t. VIII).
- 1931 - *Sopra uno speciale operatore lineare.* Note I, II e III. (Rend. Lincei, s. 6^a, voll. XIII, XIV).
 » - *Le funzioni analitiche da un punto di vista elementare.* (Enciclopedia Matem. elementari, vol. I).
 » - *Sullo scarto della permutabilità nelle operazioni lineari.* (Rend. Bol., N. S., XXV).
 » - *Sulla permutabilità negli operatori lineari.* (Atti Società Italiana Progr. Scienze, XX Riunione, vol. II).
 » - *Determinanti.* (Enciclopedia Italiana, vol. XII).
 » - *Recensione dell'opera:* « Integralgleichungen », di G. KOWALEWSKI. (Boll. U. M. I., anno X).
- 1932 - *Un'applicazione del metodo simbolico.* (Boll. U. M. I., anno XI).
 » - *Generalizzazione della teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.* (Mem. Bol., s. VIII, t. IX).
 » - *Recensione dell'opera:* « Leçons sur les fonctions entières ou monodromes » di P. MONTEL. (Boll. U. M. I., anno XI).
 » - *Commemorazione di GIUSEPPE VITALI.* (Rend. Bol., N. S., XXXVI).
 » - *Recensione dell'opera:* « Knotentheorie » di K. REIDEMEISTER. (Boll. U. M. I., anno XI).

- 1933 - *Sull' iterazione dell' operatore $\times D$* . (Boll. U. M. I., anno XII).
- » - *Operatori lineari e coefficienti di fattoriali*. (Rend. Lincei, s. 6^a, vol. XVIII).
 - » - *Operatori normali di rango uno nello spazio delle serie di potenze*. (Rend. Bol., N. S., XXXVII).
 - » - *Recensioni delle opere*: « The theorie of matrices » di C. C. MAC-DUFFEE; « Einführung in die höhere Mathematik für Studierende und zum selbst Studium » di H. V. MANGOLDT'S (vol. III, edizione curata da K. KNOPP); « Cours d'Algèbre (à l'usage des classes de 3^{ème}, 2^{de} et 1^{ère} de l'enseignement secondaire) » di R. ESTÈVE e H. MITAULT. (Boll. U. M. I., anno XII).
 - » - *Funzioni notevoli*. (Enciclopedia italiana, vol. XVI).
- 1934 - *Su una decomposizione in fattori degli operatori normali* (Rend. Bol., s. 2^a, t. XXXVIII).
- » - *Recensione dell' opera*: « Topologie I. Espaces of matrices » di C. C. MAC-DUFFEE. (Boll. U. M. I., anno XIII).
- 1935 - *Una generalizzazione del concetto di divisibilità*. (Boll. U. M. I., anno XIV).
- » - *Alcune osservazioni sugli operatori normali nello spazio delle serie di potenze*. (Rend. Bol., N. S., XXXIX).
 - » - *Recensione dell' opera*: « Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. I; Arithmetik, Algebra und Analysis » di H. WEBER, nuova ediz. di P. EPSTEIN. (Boll. U. M. I., anno XIV).
 - s - *Recensioni delle opere*: « Curvas definidas por una ecuacion diferencial de primer orden y de primer grado » di H. DULAC; « Cours de Géométrie, t. I (Géométrie plane) » di R. ESTÈVE e H. MITAULT. (Boll. U. M. I., anno XIV).
 - » - *Recensioni delle opere*: « Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théorie de l'Algèbre moderne » di P. DUBREUIL; « Ueber die Darstellung von Gruppen in Galois-Feldern » di R. BRAUER; « Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators » di J. von NEUMANN; « Cours de Géométrie, t. II (Géométrie dans l'espace) » di R. ESTÈVE e H. MITAULT; « Leçons d'Algèbre et de Géométrie (à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences), t. I » di R. GARNIER. (Boll. U. M. I., anno XIV).
- 1936 - *Le dilatazioni nello spazio delle serie di potenze*. (Ann. di Mat., s. 4^a, t. XIV).
- » - *Un operatore normale e la divisibilità*. (Rend. Bol., N. S., XL).
 - » - *Recensioni delle opere*: « Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain » di J. L. WALSH; « General analysis » di E. H. MOORE; « Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions » di S. MANDELBROJT. (Boll. U. M. I., anno XV).

PUBBLICAZIONI POSTUME

- 1936 - *Sulla permutabilità negli operatori lineari* (redatta su appunti manoscritti dell'A. da B. LEVI). (Boll. U. M. I., anno XV).
- » - *Alcune osservazioni sulle serie di potenze del simbolo di derivazione*. In « Scritti Matematici offerti a L. BERZOLARI ». (Pavia, Istituto Matematico della R. Università).
 - » - *Contributo alla teoria degli operatori lineari*. (Ann. di Mat., s. 4^a, t. XV).
- 1937 - WEIERSTRASS. (Enciclopedia Italiana, vol. XXXV).