La densità di probabilità come flusso di probabilità.

Memoria di Carlo Bonferroni (a Firenze)

A Giovanni Sansone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Definito il flusso d'area attraverso una linea, di volume attraverso una superficie, ecc..., viene definita per analogia — riferendosi all'ordinaria rappresentazione geometrica di un campo di probabilità — la densità di probabilità come flusso di probabilità, dandone l'espressione come flusso di un vettore attraverso una linea, o una superficie, ecc..., secondo le dimensioni del campo di probabilità.*

Data la curva di probabilità definita dalla funzione (limitata) $y = f(x)$ sull'intervallo lineare $a \frown b$, la probabilità di un punto d'ascissa x è nulla, mentre $f(x)$ è considerata — in analogia a noti concetti fisici — come *densità di probabilità nel punto x*.

Passando ad una superficie di probabilità, definita da $z = f(x, y)$ sul campo piano U, la $f(x, y)$ è ancora considerata come *densità di probabilità nel punto* (x, y), punto che ha probabilità nulla; ora, però, anche la probabilità di cadere su una data linea L (arco o linea chiusa) di U è nulla (si suppone che L possa racchiudersi in una regione di area arbitrariamente piccola, come avviene per le comuni linee), onde sorge il problema di definire la *densità di probabilità sulla linea L*. Tale densità viene determinata — anche senza metterla esplicitamente in evidenza — nella ricerca della legge di distribuzione di una funzione di due o più variabili stocastiche normali (1); in modo esplicito, invece, il problema è stato recentemente studiato da P. Pagni, nell'ipotesi che L sia linea coordinata in un sistema regolare di coordinate curvilinee (2).

La definizione che darò in seguito prescinde da tale condizione, ma riporta, quando sia verificata, agli stessi risultati; e, di più, conduce a diverse e notevoli espressioni della densità, le quali ne precisano il carattere.

---

(1) Nel caso di combinazione lineare, la ricerca è esposta in quasi tutti i trattati di Calcolo delle probabilità o di Statistica matematica. V. anche E. V. Huntington, *Frequency distribution of product and quotient*, «Annals of Math. Statistics», June 1939, University of North Caroline (U. S. A.).

(2) P. Pagni, *La densità di probabilità lungo le linee di un campo piano*, Comunicaz. all'Acc. Toscana «La Colombaria», Atti e Memorie, Firenze, 1955. V. anche G. Mulè, *Osservazioni sulla densità di probabilità lungo una linea*, Pubblicaz. dell'Ist. di Matem. finanziaria, Università di Genova, 1957: studio che si riferisce al precedente e ne conferma alcuni risultati. A questi studi avrò occasione di riferirmi anche in seguito.

Le considerazioni che esporrò si possono poi riferire, com'è ovvio, anche a distribuzioni e densità di frequenza.

1. Conviene analizzare anzitutto il significato di $f(x)$ nella curva C di probabilità d'equazione $y = f(x)$ sull'intervallo $a \frown b$. Essa si presenta come *funzione che integrata da x_0 ad x_1 esprime la probabilità che x cada fra x_0 e x_1*. Riferendosi alla rappresentazione geometrica, si può dire: al variare di x, il segmento-ordinata in x (sino a C) descrive un'area (compresa nell'area corrispondente a C), e la densità $f(x)$ è una *funzione che integrata da x_0 ed x_1 fornisce l'area descritta dall'ordinata quando x varia da x_0 ad x_1*. Consideriamo, ora, l'area $A(x)$ sull'intervallo $a \frown x$: se questa — come avviene nei casi comuni — è funzione derivabile di x e la derivata è integrabile in senso ordinario, si può assumere per $f(x)$ *la derivata di $A(x)$ rispetto ad x* ed eseguire integrali ordinari.

Siamo condotti, così, a considerare un segmento, la variabile x da cui dipende la sua posizione, l'area descritta dal segmento e la derivata di questa rispetto ad x: ne segue spontanea la seguente estensione.

2. Sia U una regione piana d'area 1, e la probabilità d'ottenere un punto di U appartenente ad una sua regione d'area R sia la stessa R (e quindi sia nulla la probabilità di cadere su una data linea L): se, facendo dipendere L da un parametro u, al variar di questo da u_0 ad u_1 la L_u descrive una regione, *una funzione $\varphi(u)$ che integrata da u_0 ad u_1 esprima la probabilità di cadere nella regione, sarà la densità di probabilità su L_u*. Calcolando l'area $A(u)$ della regione a partire da u_0 (fissato) fino ad u, la densità sarà anche (d'ordinario) *la derivata di $A(u)$ rispetto ad u*. Il segno della derivata ha un significato, e sarà chiarito anche dal seguito. Risulta, poi, che *la densità dipende dal parametro u che determina L_u*; perciò l'indicherò con φ_u. Ponendo $u = u(v)$, con v nuovo parametro, sarà

$$\varphi_v(v) = \varphi_u(u) \frac{du}{dv}. \tag{1}$$

3. Possiamo trattare la questione in termini puramente geometrici. Un arco L, nel piano, ha area nulla, ma facendolo variare in funzione di un parametro u descrive un'area funzione di u; alla funzione φ_u considerata daremo il nome di *flusso di area attraverso ad L_u*. Perciò, invece che « densità di probabilità » dirò anche » flusso di probabilità »: e questa denominazione appare, anzi, più appropriata, in quanto la « densità » richiama un concetto statico, mentre il « flusso » è un concetto dinamico, che tien conto — come dev'essere — del *movimento* impresso alla linea.

Se L_u si mantiene su una linea fissa, il flusso è nullo.

Quanto ad u, potrebbe essere il *tempo*: allora φ_u diviene una *velocità d'area.*

4. La questione, così trasformata, si presenta anche sulla retta. Un punto P di essa ha lunghezza nulla, ma, ponendolo funzione di u, descrive un segmento di lunghezza l_u: e la suddetta funzione $\varphi_u(u)$ (che, integrata, dà l_u, ed è anche, d'ordinario, la derivata di l_u) sarà il *flusso di lunghezza attraverso al punto* P_u. Questo flusso diviene la *velocità* (lineare) quando u sia il tempo t. Cambiando la misura del tempo, cambierà la misura della velocità di P.

5. Consideriamo nel piano una linea chiusa $L(u)$ dipendente da u, e sia definita l'area $A(u)$ di cui $L(u)$ è contorno: al variare di u da u_0 ad u_1 non sempre resta definita l'*area compresa fra* $L(u_0)$ *ed* $L(u_1)$: si effettui, p. es., una traslazione di $L(u)$. Perciò definiremo il flusso d'area riferendoci, più in generale, alla *differenza* delle aree A; cioè: *una funzione* $\varphi_u(u)$ *che, integrata da* u_0 *ad* u_1 *fornisca la differenza* $A(u_1) - A(u_0)$ *delle aree racchiuse da* $L(u_0)$ *ed* $L(u_1)$, *sarà il flusso d'area attraverso ad* $L(u)$; e, d'ordinario, si potrà assumere *la derivata di* $A(u)$.

Il segno di φ_u dice, dunque, se l'area racchiusa aumenta o diminuisce al crescer di u.

Quando l'area racchiusa rappresenta una probabilità, la φ_u acquista il significato di *flusso* o *densità di probabilità.*

5.1. Se la linea L_u è un arco aperto, ci riporteremo al caso di linea chiusa nel seguente modo. Osserveremo che, variando u da u_0 ad u, gli estremi P_0Q_0 dell'arco $L(u_0)$ si sposteranno su due linee determinate, percorrendone due archi P_0P, Q_0Q: per area descritta da L_u intenderemo la variazione di area del quadrilatero curvilineo chiuso $(P_0PQQ_0P_0)$. In esso i lati P_0Q_0, P_0P, Q_0Q non dànno flusso d'area (il primo è invariabile e gli altri due restano su una linea), sicchè il flusso attraverso al quadrilatero si riduce a quello attraverso PQ. Occorre, naturalmente, stabilire che cosa s'intende per area contornata dal quadrilatero suddetto. È questo, appunto, il procedimento applicato (in condizioni particolari) all'ordinata in una curva di probabilità (n. 1).

5.2. Se la linea chiusa $L(u)$ si sposta in modo da lasciare invariata l'area, il flusso attraverso $L(u)$ risulta nullo. Per chiarire questo fatto, si consideri il cerchio di centro $(x, 0)$ e raggio 1, variabile con x, ma di area costante, e quindi a flusso nullo; quando x passa da x_0 ad $x_1 > x_0$, il semicerchio che si proietta sul tratto x_0x_1 dà luogo ad un flusso di area che *entra* nel cerchio, mentre per l'altro semicerchio l'area *esce* dal cerchio; i due flussi, manifestamente eguali in valore assoluto, s'intenderanno presi con segno contrario, onde la loro somma (algebrica) darà il flusso totale nullo. Occorre, dunque, poter distinguere fra regione esterna ed interna ad L_u. Troveremo, in seguito, alcune formule basate su tale distinzione; dalle quali, più in generale, risulterà che, divisa $L(u)$ in parti, il flusso attraverso $L(u)$ è somma dei flussi attraverso alle parti.

6. Quanto precede può applicarsi anche sulla retta. Dato un segmento $l(u)$ di essa, il flusso di lunghezza attraverso ad esso sarà la derivata $l'(u)$ rispetto ad u; ma se x_0, x_1 sono le ascisse degli estremi P_0, P_1 di $l(u)$, è $l'(u) = x_1' - x_0'$, differenza dei flussi attraverso OP_0, OP_1. Essendo fissa l'origine O delle ascisse, questi sono anche flussi su P_0, P_1: dunque *il flusso di lunghezza attraverso un segmento è differenza dei flussi attraverso i suoi estremi.* Se questi flussi sono positivi, quello di P_1 resta positivo perchè corrisponde a lunghezza che *entra* nel segmento, mentre quello di P_0 viene sottratto perchè da P_0 *esce* lunghezza.

6.1. Dato sulla retta un segmento U di lunghezza 1, la lunghezza del segmento P_0P_1, contenuto in U, sia anche probabilità che un punto appartenga a P_0P_1: il flusso di lunghezza, variando P_0P_1, s'interpreterà come *flusso o densità di probabilità agli estremi del segmento* (complessivamente).

7. Come esempio di flusso d'area, consideriamo un sistema di cerchi di centro $O(0, 0)$ e raggio $\sqrt{a^2+u}$, dipendente dal parametro u: sarà

$$A_u(u) = \pi(a^2+u), \quad \varphi_u(u) = \frac{dA_u}{du} = \pi .$$

Se il raggio è av (parametro v), avremo invece

$$A_v(v) = \pi a^2 v^2, \quad \varphi_v(v) = \frac{dA_v}{dv} = 2\pi a^2 v .$$

Si verifica la (1), tenendo conto che $u = a^2(v^2-1)$. Poichè i due parametri sono legati da una relazione, i due sistemi di linee parametriche coincidono (cerchi concentrici).

7.1. Sia dato, ora, un sistema di ellissi di semiassi $\sqrt{a^2+u}$, $\sqrt{b^2+u}$ con $a > b$: risulterà

$$A_u(u) = \pi\sqrt{a^2+u}\sqrt{b^2+u}, \quad \varphi_u(u) = \frac{1}{2}\pi\frac{a^2+b^2+2u}{\sqrt{a^2+u}\,\sqrt{b^2+u}} .$$

Se, invece, i semiassi sono av, bv, avremo

$$A_v(v) = \pi abv^2, \quad \varphi_v(v) = 2\pi abv .$$

Non sussiste, ora, la relazione (1) fra i due flussi, perchè v non è funzione di u (a causa di $a \neq b$). In corrispondenza a ciò, le linee parametriche rispetto ad u (ellissi concentriche e confocali) sono diverse dalle parametriche in v (ellissi concentriche ma non confocali), tranne quelle per $u = 0$, $v = 1$.

8. Quando un segmento varia perpendicolarmente ad un asse (asse x), lo si ponga funzione dell'ascissa comune ai suoi punti, e sia $l(x)$: l'area descritta è l'integrale di $l(x)dx$ e quindi $l(x)$ *è anche flusso d'area*: è, questo il caso dell'ordinata $f(x)$ nella curva di probabilità (n. 1).

Analogamente, se un arco di cerchio ha raggio variabile r, centro fisso 0 e lunghezza $l(r)$ funzione di r, l'elemento d'area è $l(r)dr$, onde $l(r)$ è anche flusso d'area: in tal caso, dunque, *il flusso attraverso l'arco coincide con la lunghezza dell'arco.*

Se si considera l'intera circonferenza di raggio r, il flusso d'area per essa (che può divenire flusso di probabilità) al variar di r è la circonferenza stessa (d'accordo col fatto che $2\pi r$ è derivata dall'area πr^2).

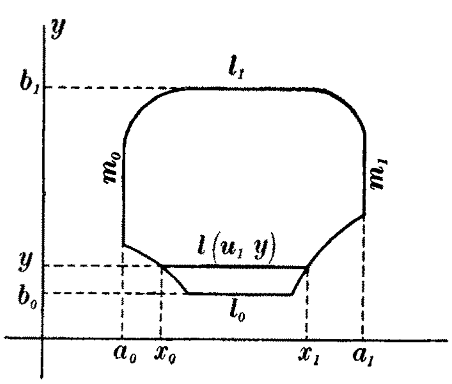
8.1. Si consideri, ad es., l'arco di centro (0, 0) e raggio r compreso fra la curva $y = f(x)$ (simmetrica rispetto all'asse y, uscente dall'origine, crescente per $x > 0$) nel 1° e 2° quadrante: computando l'area a partire da $r = 0$ e dicendo x, y le coordinate dell'estremo dell'arco che ha $x > 0$, avremo

$$\varphi(r) = l(r) = 2r \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r}$$

$$A(r) = \frac{1}{2} r l(r) + xy - 2 \int_0^x y(t) dt.$$

Notando che $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, si verifica facilmente che $A'(r) = l(r)$.

9. Il flusso si determina conoscendo l'area; ma siccome questa interessa solo al fine di formarne la derivata, è desiderabile di poter giungere a tale derivata direttamente. Supposta chiusa e semplice la L_u, calcoleremo l'area $A(u)$ integrandone la sezione (segmento) $l(u, y)$ per y costante, e avremo (V. figura)



$$A(u) = \int_{b_0}^{b_1} l(u, y) dy$$

$$l(u, y) = \int_{x_0}^{x_1} dx = x_1 - x_0$$

dove x_0, x_1 sono le ascisse dei punti di L_u d'ordinata y (dipendenti da u e da y), e b_0, b_1 minima e massima ordinata (funzioni di u). Dette l_0, l_1 le sezioni in b_0, b_1 (e supposte esistenti le derivate considerate), la derivata di $A(u)$ sarà

$$A'(u) = l_1 b_1' - l_0 b_0' + \int_{b_0}^{b_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial x_0}{\partial u}\right) dy$$

cioè

$$\varphi_u = l_1 b_1' - l_0 b_0' + \int_L \frac{\partial x}{\partial u}\, dy \tag{2}$$

dove l'ultimo integrale è curvilineo, esteso al contorno L dell'area. Questa è anche espressa dall'integrale curvilineo di xdy; e la (2) ne determina la derivata tenendo conto del variar di L. Se i primi due termini hanno somma nulla (p. es. se $l_0 = l_1 = 0$), resterà solo l'integrale.

Scambiando x con y, dicendo $m(u, x)$ la sezione ad x costante (x variabile da a_0 ad a_1) e ricordando la solita convenzione sul segno dell'area circuitata, si avrà la formula analoga (m_0, m_1 sezioni estreme)

$$\varphi_u = m_1 a_1' - m_0 a_0' - \int_L \frac{\partial y}{\partial u}\, dx. \tag{2_1}$$

Moltiplicando (2) e $(2)_1$ per λ, μ (costanti di somma 1) e sommando, si otterranno altre espressioni (per es. per $\lambda = \mu = 1/2$).

Talvolta la φ_u è data semplicemente (come s'è detto) da

$$\varphi_u = \int_L \frac{\partial x}{\partial u}\, dy = -\int_L \frac{\partial y}{\partial u}\, dx \tag{3}$$

o, per $\lambda = \mu = 1/2$, da

$$\varphi_u = \frac{1}{2}\int_L \left(\frac{\partial x}{\partial u}\, dy - \frac{\partial y}{\partial u}\, dx\right). \tag{4}$$

Concludendo: φ_u *può esprimersi mediante un integrale curvilineo.*

10. Questo integrale è suscettibile — com'è noto — di un'interpretazione vettoriale. Orientando la normale n ad L in (x, y) verso l'esterno ed assumendo positivo l'elemento ds d'arco per L (circuitando l'area nel senso positivo), la (4) equivale alla

$$\varphi_u = \frac{1}{2}\int_L \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cos xn + \frac{\partial y}{\partial u} \cos yn\right) ds = \int \omega_n ds \tag{4_1}$$

indicando con ω_n la componente sulla normale esterna del vettore ω di componenti $\frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{1}{2}\frac{\partial y}{\partial u}$. Pertanto: φ_u *è il flusso del vettore* ω *attraverso la linea* L_u.

La denominazione di «flusso», data a φ_u riesce così ulteriormente giustificata.

10.1. Se intendiamo per flusso attraverso un arco di L_u il suddetto integrale esteso solo all'arco, risulterà che, divisa L_u in parti, il flusso su L_u è somma dei flussi sulle parti (come s'è detto al n° 5.2).

11. *Equazioni parametriche.* L'espressione di φ_u assume una forma notevole quando la linea L_u sia definita da equazioni parametriche:

$$x = x(u, t); \quad y = y(u, t). \tag{5}$$

Il parametro t (che varierà da t_0 a t_1) è il parametro *interno* o statico entro L_u, mentre u è parametro *esterno* o dinamico, che determina il movimento della linea.

Nelle formule precedenti la x era considerata funzione di u, y e la y funzione di u, x, cioè

$$x = f(u, y), \quad y = g(u, x) \tag{6}$$

e da queste si ottenevano $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}$; le quali, ora, dovranno esprimersi in t. Supposto d'aver determinate le (6), esse risulteranno soddisfatte identicamente sostituendovi x, y con le (5): derivando, poi, le (6) e indicando con accenti le derivate parziali dedotte dalle (5), avremo — nell'ipotesi che tutte le funzioni considerate siano regolari con le loro derivate —

$$\begin{cases} x_u' = \dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y'_u \\ x_t' = \qquad\;\; \dfrac{\partial f}{\partial y} y'_t \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y'_u = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial x} x'_u \\ y'_t = \qquad\;\; \dfrac{\partial g}{\partial x} x'_t \end{cases}$$

Dalle prime due e dalle altre due si ottiene rispettivamente

$$\frac{\partial f}{\partial u} = x'_u - \frac{x'_t}{y'_t} y'_u = \frac{1}{y'_t} J_{u,t}(x, y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = y'_u - \frac{y'_t}{x'_t} x'_u = \frac{-1}{x'_t} J_{u,t}(x, y)$$

(J = determinante Jacobiano). Sostituendo queste derivate parziali a $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial y}{\partial u}$, la prima delle (3), o la seconda, o la (4) — perchè la regolarità delle funzioni implica sezioni estreme nulle nell'area — conducono alla semplice formula

$$\varphi_u = \int_{t_0}^{t_1} J_{u,t}(x, y) dt \tag{6}$$

la quale però — non si dimentichi — esige funzioni tutte regolari.

11.1. P. es., non serve se L_u è il quadrato di vertici $(0, 0)(u, 0)(u, u)(0, u)$: in questo caso si deve ricorrere alla (2) o alla $(2)_1$. Notando che y si spezza in $y_0 = 0$ percorrendo l'asse x e $y_1 = u$ sul lato opposto del quadrato, risulta dalla (2):

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = u, \qquad m_0 = u, \qquad m_1 = u$$

$$\varphi_u = u \cdot 1 - u \cdot 0 - \int_0^u \frac{\partial y_0}{\partial u} dx - \int_u^0 \frac{\partial y_1}{\partial u} dx = 2u.$$

Infatti $A_u = u^2$ e $\varphi_u = A'_u$.

11.2. La (6) è applicabile, invece, all'ellisse

$$x = au \cos t, \ y = bu \operatorname{sen} t, \ [0 \leq t \leq 2\pi]. \tag*{$(5)_1$}$$

Poichè $J_{u,t}(x, y) = abu$, si ottiene (d'accordo con n° 7.1)

$$\varphi_u = \int_0^{2\pi} abu dt = 2\pi abu .$$

11.3. Le ellissi ora considerate sono linee coordinate in un sistema regolare di coordinate u, t definite dalle $(5)_1$. La (6), però, vale anche se questa condizione non è soddisfatta: basta (come s'è detto) che le funzioni (5) siano regolari — P. es., le linee date dalle

$$x = u(1 + \cos t), \ \ y = u(1 + \operatorname{sen} t), \ \ [0 \leq t \leq 2\pi] \tag*{$(5)_2$}$$

sono cerchi di centro (u, u) e raggio u, i quali possono incontrarsi, e quindi non formano un sistema di linee coordinate: tuttavia, essendo regolari le $(5)_2$, risulta

$$J_{u,t}(x, y) = u(1 + \operatorname{sen} t + \cos t), \ \varphi_u = \int_0^{2\pi} J_{u,t}(x, y) dt = 2\pi u ,$$

e φ_u è appunto la derivata dell'area πu^2 del cerchio corrispondente ad u.

Spazio.

12. Quanto precede ha sopratutto lo scopo di preparare la trattazione relativa ad una superficie di probabilità; è questa, anzi, che ha dato origine al problema. Se l'equazione $z = f(x, y)$ è definita in un campo U del piano

x, y, la probabilità di ottenere un punto dell'area A (contenuta in U) di contorno L è data dal volume V sull'area A (fino alla superficie), cioè racchiuso dal cilindro C (parallelo a z) condotto per il contorno L; ponendo L, e quindi V e C, funzioni di un parametro u, passando da u_0 ad u_1 il volume passerà da $V(u_0)$ a $V(u_1)$; e una funzione $\varphi_u(u)$ che, integrata da u_0 ad u_1, fornisca la differenza $V(u_1) - V(u_0)$, sarà il *flusso di volume attraverso il cilindro* C_u. Se V_u è dotata di derivata, questa potrà assumersi come $\varphi_u(u)$. Il detto flusso s'interpreterà, poi, come *flusso o densità di probabilità* attraverso C_u, o, anche, *attraverso la linea* L_u; e integrato da u_0 od u_1, esprimerà la differenza fra le probabilità di cadere entro $L(u_0)$ ed entro $L(u_1)$.

Se L_u è un arco aperto, si ritornerà ad una linea chiusa con il procedimento esposto al n° 5.1; in corrispondenza a ciò, alla falda cilindrica sull'arco L_u si viene a sostituire un cilindro chiuso.

È chiaro che, se $z(x, y) = 1$, le probabilità (volumi) sono espresse semplicemente da aree contenute in U; onde si ritorna ai flussi d'area considerati nella trattazione relativa al piano.

13. Per passare alle formule, basterà riprendere il procedimento di n. 9, intendendo ora per sezione $S(u, y)$ quella determinata nel volume $V(u)$ dal piano $y =$ costante; avremo, così

$$V(u) = \int_{b_0}^{b_1} S(u, y) dy, \quad S(u, y) = \int_{x_0}^{x_1} z(x, y) dx.$$

Dette S_0, S_1 le sezioni in b_0, b_1, la derivata sarà

$$V'(u) = S_1 b_1' - S_0 b_0' + \int_{b_0}^{b_1} \left[z(x_1, y) \frac{\partial x_1}{\partial u} - z(x_0, y) \frac{\partial x_0}{\partial u} \right] dy,$$

e su di essa influisce la variabilità del contorno L_u. Dunque

$$\varphi_u(u) = S_1 b_1' - S_0 b_0' + \int_L z(x, y) \frac{\partial x}{\partial u} dy. \tag{7}$$

L'integrale è curvilineo e il punto (x, y) segue il contorno L_u.

Operando per sezioni $T(u, x)$ con piani normali all'asse x, si ha analogamente

$$\varphi_u(u) = T_1 a_1' - T_0 a_0' - \int_L z(x, y) \frac{\partial y}{\partial u} dx. \tag{7$_1$}$$

Le (7) e $(7)_1$ si possono, poi, combinare, come s'è detto al n. 9.

Se i primi due termini hanno somma nulla (p. es. se le sezioni estreme si annullano), resta semplicemente

$$\varphi_u = \int_L z(x, y) \frac{\partial x}{\partial u} dy = - \int_L z(x, y) \frac{\partial y}{\partial u} dx \tag{8}$$

e anche

$$\varphi_u = \frac{1}{2} \int_L z\left(\frac{\partial x}{\partial u} dy - \frac{\partial y}{\partial u} dx\right). \tag{9}$$

14. Introducendo i coseni direttori della normale esterna ad L_u (V. n. 10), si scriverà anche

$$\varphi_u = \frac{1}{2} \int_L z\left(\frac{\partial x}{\partial u} \cos xn + \frac{\partial y}{\partial u} \cos yn\right) ds = \int_L \omega_n ds \tag{9$_1$}$$

dove ω_n è la componente sulla normale esterna del vettore ω di componenti $\frac{1}{2} z \frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{1}{2} z \frac{\partial y}{\partial u}$.

Anche ora, dunque, φ_u *è espressa da un integrale curvilineo, o dal flusso di un vettore attraverso L.*

Un cambiamento di parametro conduce poi — come si è ripetutamente detto — a un cambiamento di flusso ([3]).

15. *Equazioni parametriche.* Definendo la L_u con equazioni parametriche (regolari), le espressioni trovate a n. 11 dovranno essere sostituite, ora, nelle (8) o (9): si otterrà, così, la formula semplice

$$\varphi_u = \int_{t_0}^{t_1} z(x, y) J_{u,t}(x, y) dt \tag{10}$$

valida se le equazioni parametriche sono regolari, anche se le linee L_u non possano considerarsi linee coordinate (V. n. 11.3).

([3]) G. MULÈ (lav. citato) trova che quando sui punti di L è $z =$ costante $= z_0$, la densità su L è costantemente z_0, cioè indipendente dal parametro che sposta L e dalla forma delle linee prossime ad L. Questo risultato — pur interessante — è però collegato *al modo particolare* di calcolare un limite (si considera la regione, *di forma speciale*, racchiusa tra le curve $y = \lambda\varphi(x)$, $y = -\lambda\varphi(x)$ e si fa tendere λ a zero). Si noti, anche, che se $z =$ costante $= z_0$ e la lunghezza di L è 1, sarebbe z_0 la superficie laterale del cilindro costituito dalle z su L, e quindi coinciderebbe con la densità; e ciò anche se lungo la L non fosse soddisfatta la condizione dimostrata da P. PAGNI (lav. citato) per la coincidenza fra densità e sezione cilindrica.

Il caso di n. 11.1 condurrebbe, ora, ad usare le (7), $(7)_1$, oppure a calcolare direttamente un volume.

15.1 Si ponga (superficie normale di probabilità)

$$z = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)}$$

e si consideri il quadrato di vertici $(0, 0)$, $(u, 0)$, (u, u), $(0, u)$: al variar di u, è chiaro che il suo perimetro non descrive un sistema regolare di linee coordinate. Possiamo, però, calcolare facilmente il volume sul quadrato e, per derivazione, il flusso attraverso il perimetro:

$$V(u) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^u e^{-x^2}dx\right)^2, \quad \varphi_u(u) = \frac{2}{\pi} e^{-u^2} \int_0^u e^{-x^2} dx.$$

16. I flussi ora considerati sono determinati da volumi particolari, e precisamente da cilindri compresi fra il piano x, y e la superficie di probabilità (n. 12); come a n. 2, possiamo generalizzare, considerare una superficie Σ contorno di un volume V, far dipendere Σ — e quindi V — da un parametro u e formare la derivata (se esiste) di $V(u)$: questa sarà il *flusso* $\varphi_u(u)$ *di volume attraverso* Σ, e dipenderà dalla deformazione che u imprime a $\Sigma(u)$. Cambiando parametro, varrà la (1) se u è funzione del nuovo parametro. Anche il segno di φ_u ha un significato. Al caso ora detto ci si riduce se Σ è una zona superficiale che non racchiude un volume: basta completarla con la posizione iniziale $\Sigma(u_0)$ e con la zona superficiale (tubolare) descritta dal contorno di $\Sigma(u_0)$; in analogia, cioè, con il procedimento applicato al n. 5.1.

Se $V(u)$ varia in una regione U di volume 1 e se rappresenta la probabilità di ottenere un punto di $V(u)$, la $\varphi_u(u)$ assume il significato di *densità* o *flusso di probabilità* sulla superficie Σ contorno di V.

16.1. Ai casi semplici ricordati al n. 8 corrispondono, ora, casi analoghi. Il volume descritto da un'area piana $A(x)$, perpendicolare ad un asse (asse x) nel punto x, è l'integrale di $A(x)dx$, onde l'area stessa rappresenta il flusso (rispetto ad x). Una zona di superficie sferica di centro O (fisso), raggio r variabile e area $A(r)$ funzione di r, genera un volume misurato dall'integrale di $A(r)dr$: : perciò l'area $A(r)$ esprime anche il flusso di volume (rispetto ad r). E se la zona abbraccia l'intera superficie sferica, il flusso sarà la superficie totale (che è appunto derivata, rispetto ad r, del volume).

17. Per avere φ_u direttamente, partiremo ora da

$$V(u) = \int_{c_0}^{c_1} S(u, z)dz, \quad S(u, z) = \int_{y_0}^{y_1} l(u, z, y)dy, \quad l(u, z, y) = \int_{x_0}^{x_1} dx$$

dove $S(u, z)$ è la sezione (piana) nel volume per z costante e $l(u, z, y)$ è la sezione (lineare) di questa sezione a y costante. La z nel volume varia da c_0 a c_1, la y nella $S(u, z)$ da y_0 a y_1, la x nella sezione lineare da x_0 a x_1. Dette S_0, S_1 le sezioni estreme (in c_0, c_1), sarà

$$V'(u) = S_1 c_1' - S_0 c_0' + \int_{c_0}^{c_1} \frac{\partial S}{\partial u} dz. \tag{11}$$

La $\frac{\partial S}{\partial u}$ si forma come la $A'(u)$ a n. 9, dipende anche dalle sezioni (lineari) estreme l_0, l_1 di $S(u, z)$ e dalle derivate di y_0, y_1, e quindi — in generale — non si presenta semplice. Permutando x, y, z si avrebbero altre cinque formule equivalenti alla (11).

Se la superficie Σ è rappresentata da funzioni regolari, si annullano le sezioni estreme e resta solo

$$V'(u) = \int_{c_0}^{c_1} \int_{\text{curv.}} \frac{\partial x}{\partial u} dy \cdot dz = \iint_{\Sigma} \frac{\partial x}{\partial u} dydz .$$

L'ultimo integrale è superficiale, esteso a Σ (perchè il contorno dell'integrale curvilineo descrive, variando z, la superficie Σ). Pertanto, φ_u *è espressa da un integrale superficiale.* Con le formule analoghe, risulta

$$\varphi_u(u) = \iint_{\Sigma} \frac{\partial x}{\partial u} dydz = \iint_{\Sigma} \frac{\partial y}{\partial u} dzdx = \iint_{\Sigma} \frac{\partial z}{\partial u} dxdy . \tag{12}$$

18. Sostituendo *dydz, dzdx, dxdy* con $\cos(xn)d\sigma$, $\cos(yn)d\sigma$, $\cos(zn)d\sigma$ (essendo $d\sigma$ l'elemento superficiale ed n la normale alla superficie rivolta verso l'esterno del volume) si potrà anche scrivere

$$\varphi_u(u) = \iint_{\Sigma} \frac{\partial x}{\partial u} \cos(xn) d\sigma = \iint_{\Sigma} \frac{\partial y}{\partial u} \cos(yn) d\sigma = \iint_{\Sigma} \frac{\partial z}{\partial u} \cos(zn) d\sigma . \tag{12$_1$}$$

Queste formule — che corrispondono alle « formule di GAUSS » — si possono poi combinare in vario modo. P. es., sommandole se ne trae la formula simmetrica

$$\varphi_u(u) = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cos xn + \frac{\partial y}{\partial u} \cos yn + \frac{\partial z}{\partial u} \cos zn \right) d\sigma \tag{13}$$

che corrisponde alla « formula di OSTROGRADSKI » (4). Anche

$$\varphi_u(u) = \iint_{\Sigma} \omega_n d\sigma , \tag{13$_1$}$$

(4) V. G. SANSONE, *Lezioni di Analisi matematica*, 2° Vol. (Padova, Cedam).

esprimendo φ_u come *flusso attraverso la superficie del vettore* ω, di componenti $\frac{1}{3}\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{1}{3}\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{1}{3}\frac{\partial z}{\partial u}$. Divisa Σ in parti, il suo flusso è somma dei flussi relativi alle parti (V. n. 10.1 per l'analogia).

18.1. Consideriamo il cubo di centro (α, β, γ), lato $2u$ e spigoli paralleli agli assi: la superficie Σ del cubo non è regolare (analiticamente), le formule (12) non sono applicabili, e quindi si ricorrerà alla (11). Si ha

$$c_0 = \gamma - u,\quad c_1 = \gamma + u,\quad S(u, z) = 4u^2$$

$$y_0 = \beta - u,\quad y_1 = \beta + u,\ \frac{\partial S}{\partial u} = 8u$$

$$x_0 = \alpha - u,\ x_1 = \alpha + u,\qquad \varphi(u) = 4u^2 - 4u^2(-1) + \int_{c_0}^{c_1} 8u dz = 24u^2.$$

Infatti $V(u) = 8u^3$, $V'(u) = 24u^2$.

19. *Equazioni parametriche.* Quando Σ è definita dalle equazioni parametriche

(14) $\qquad x = x(u, s, t),\ y = y(u, s, t),\ z = z(u, s, t), \qquad$ [s, t parametri interni]

occorre pensare (V. anche n. 11) di trarne $x = f(u, y, z)$ per applicare, ad es., la prima delle (12). Sostituendo ad x, y, z i valori dati dalle (14) nella $x = f(u, y, z)$, derivando poi rispetto ad u, s, t e designando con accenti le derivate dedotte dalle (14), si ottiene

$$\begin{cases} x_u' = \dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y_u' + \dfrac{\partial f}{\partial z} z_u' \\ x_s' = \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} y_s' + \dfrac{\partial f}{\partial z} z_s' \\ x_t' = \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} y_t' + \dfrac{\partial f}{\partial z} z_t' \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{J_{u,s,t}(x, y, z)}{J_{s,t}(y, z)}$$

[J = determinante Jacobiano].

Nella (12), poi, è $dydz = J_{s,t}(y, z)dsdt$; di qui la semplice formula

$$\varphi_u(u) = \iint_{\Sigma} J_{u,s,t}(x, y, z)dsdt \tag{15}$$

valida quando le funzioni (14) sono regolari anche se le superficie Σ_u non abbiano il carattere di superficie coordinate. (V. anche n. 15).

19.1. Come esempio, la Σ_u corrisponda alle equazioni parametriche in α, β:

$$x = au \cos\alpha \cos\beta,\quad y = bu \operatorname{sen}\alpha \cos\beta,\quad z = cu \operatorname{sen}\beta\,;$$

essa è un ellissoide di semiassi au, bu, cu ed è descritta dal punto (x, y, z) facendo variare α da 0 a 2π, e β da $-\frac{1}{2}\pi$ fino a $+\frac{1}{2}\pi$. Si trova

$$J_{u,\alpha,\beta}(x, y, z) = abcu^2 \cos\beta, \quad \varphi_u(u) = \iint abcu^2 \cos\beta \, d\alpha d\beta = 4\pi abcu^2$$

e $\varphi_u(u)$ è appunto la derivata del volume $V(u) = \frac{4}{3}\pi abcu^3$. Questo volume — se già non lo si conoscesse — potrebbe ottenersi integrando $\varphi_u(u)$.

19.2. L'ellissoide poteva rappresentarsi anche con le equazioni

$$x = a\rho \cos\alpha, \quad y = b\rho \operatorname{sen}\alpha, \quad z = \pm c\sqrt{u^2 - \rho^2}$$

facendo variare ρ da 0 ad u, e α da 0 a 2π. Prendendo positivo il radicale, si resta nel semiellissoide a $z > 0$: si ha

$$J_{u,\rho,\alpha}(x, y, z) = abcu \frac{\rho}{+\sqrt{u^2 - \rho^2}}, \quad \iint J d\rho d\alpha = abcu \cdot 2\pi \cdot u .$$

È, questo, il flusso attraverso il semiellissoide a $z > 0$. L'altro semiellissoide dà luogo, ovviamente, allo stesso flusso; quindi, sommando, si ritrova $4\pi abcu^2$.

Estensione

20. Si consideri ora una funzione $\tau(x, y, z)$ definita nella regione U di spazio, il cui integrale triplo esteso ad un volume V di U rappresenti la probabilità che il punto cada in V. Nello spazio euclideo a 4 dimensioni di assi x, y, z, τ resta definita l'ipersuperficie di probabilità, di equazione $\tau = \tau(x, y, z)$; e la probabilità di V è data da un ipervolume W contenuto in un ipercilindro parallelo all'asse τ.

Per $\tau =$ costante $= 1$ si ricade nel caso di n° 16.

Ponendo V, e quindi C e W funzioni del parametro u, il flusso d'ipervolume attraverso C_u sarà *flusso o densità di probabilità sulla superficie* Σ_u che racchiude V_u; e si otterrà, nei casi semplici, come *derivata di* W_u *rispetto ad* u.

Se la superficie Σ_u non racchiude un volume, si potrà completarla nel modo indicato al n° 16.

21. Quanto alle formole, basterà modificare quelle di n° 17; avremo

$$W(u) = \int_{c_0}^{c_1} V(u, z) dz, \quad V(u, z) = \int_{y_0}^{y_1} S(u, z, y) dy, \quad S(u, z, y) = \int_{x_0}^{x_1} \tau(x, y, z) dx$$

dove V, S, τ sono successive sezioni. La derivata $W'(u)$ dà luogo, in generale, ad un'espressione non semplice, dovendo tener conto delle sezioni estreme; se queste si annullano, resta semplicemente (scambiando le variabili)

$$\varphi_u(u) = \iint_\Sigma \tau \frac{\partial x}{\partial u} dydz = \iint_\Sigma \tau \frac{\partial y}{\partial u} dzdx = \iint_\Sigma \tau \frac{\partial z}{\partial u} dxdy. \tag{16}$$

Sommando, e dicendo $d\sigma$, n l'elemento superficiale e la normale esterna,

$$\varphi_u(u) = \frac{1}{3}\iint_\Sigma \tau\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cos xn + \frac{\partial y}{\partial u}\cos yn + \frac{\partial z}{\partial u}\cos zn\right)d\sigma = \iint_\Sigma \omega_n d\sigma \tag{16$_1$}$$

e quindi φ_u è *flusso attraverso* Σ *del vettore* ω di componenti

$$\frac{1}{3}\tau\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{1}{3}\tau\frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{1}{3}\tau\frac{\partial z}{\partial u}.$$

22. È chiaro come si possa procedere nelle estensioni. In analogia a n° 16, un volume variabile qualunque sarà attraversato da un flusso d'ipervolume. E se una zona dell'ipersuperficie contorno di un'ipersfera di centro O e raggio r, in uno spazio ad n dimensioni, varia in funzione di r, il flusso attraverso la zona — che potrà esser flusso o densità di probabilità — resta espresso dalla misura della zona stessa. In particolare, tutta l'ipersuperficie misura il flusso attraverso ad essa; e ciò corrisponde al fatto che ipervolume e ipersuperficie sono dati rispettivamente dalle seguenti formole (in cui l'unità, messa fra parentesi, interviene solo quando n è dispari):

$$\frac{1}{n!!}2^{\frac{n+(1)}{2}}\pi^{\frac{n-(1)}{2}}r^n,\quad \frac{1}{(n-2)!!}2^{\frac{n+(1)}{2}}\pi^{\frac{n-(1)}{2}}r^{n-1};$$

la seconda delle quali è derivata (rispetto ad r) della prima.

22.1. Le relazioni stabilite permettono, note le probabilità (aree, volumi) di determinare i flussi; e inversamente, noti questi, di calcolare le probabilità (mediante integrazioni) ([5]).

([5]) Integrando nell'intero campo di probabilità, si deve trovare la corrispondente probabilità, cioè 1; e, in generale, integrando in una regione di probabilità nota, si deve ritrovare tale probabilità. Per questa via riesce talvolta agevole calcolare integrali di non semplice struttura, come ha mostrato P. Pagni nel lavoro citato (e in un altro di prossima pubblicazione nel «Giornale di Matematica finanziaria», Firenze).

23. ***Flussi o densità d'ordine superiore.*** Nella curva di probabilità $y = f(x)$ l'integrale *semplice* della $f(x)$ fornisce una probabilità (area) e $f(x)$ è derivata *prima* di una probabilità; nella superficie di probabilità $z = f(x, y)$ la densità o flusso $\varphi_u(u)$ sulla curva L_u ha per integrale *semplice* una probabilità (volume) e ne è derivata *prima*; e così via per la densità su una superficie, ecc...; per questo, la $\varphi_u(u)$ può dirsi *flusso primo o densità prima* (o d'ordine 1) rapporto ad u.

In una superficie di probabilità $z = f(x, y)$ anche la $f(x, y)$ è spesso chiamata «densità» di probabilità nel punto (x, y); occorre, però, eseguire un integrale *doppio* di $f(x, y)$ per avere una probabilità, e, conseguentemente, $f(x, y)$ è derivata *seconda mista* rispetto a x e y della probabilità che il punto abbia ascissa fra x_0 e x, e ordinata fra y_0 e y (fissati x_0, y_0): quindi $f(x, y)$ può considerarsi *densità seconda o flusso secondo* nel punto (x, y) rispetto ai parametri (coordinate) x e y. Ponendo x, y funzioni di altri parametri u, v, la nuova densità diviene

$$\varphi_{u,v}(u, v) = f(x, y) J_{u,v}(x, y). \tag{17}$$

Più in generale, se una linea L dello spazio è posta funzione di u, v, al variare di u da u_0 costante ad u (con $v =$ costante $\doteq v_0$) la L descrive un'area (in generale non nulla), e variando poi v da v_0 a v tale area genera un volume V funzione di u, v: una funzione $\varphi_{u,v}(u, v)$ il cui integrale *doppio* corrispondente fornisca $V_{u,v}$, cioè sia (nei casi semplici) la derivata *seconda mista* di $V_{u,v}$, esprimerà il *flusso secondo* o *densità seconda* di volume (di probabilità, in certi casi) sulla linea $L_{u,v}$. Tale flusso dipenderà da u, v cioè dal movimento che u, v imprimono alla linea. Se u, v vengono sostituiti con altri parametri u_1, v_1 che ne siano funzioni, fra le due densità seconde passerà la relazione (17).

Quanto a $\tau(x, y, z)$, il suo integrale *triplo* dà una probabilità; e, inversamente, essa è (di solito) derivata *terza mista* di un volume funzione di x, y, z; *onde* appare come *flusso* o *densità terza*. E così via, si possono avere flussi d'ordine maggiore passando a uno spazio di maggiore dimensione.

24. In conclusione, il concetto e la misura della «densità di probabilità» si presentano, date le usuali rappresentazioni geometriche di un campo di probabilità, strettamente collegati al movimento di un'area, o volume, o ipervolume e al corrispondente *flusso* (che è anche flusso di un corrispondente vettore) attraverso una linea, una superficie, un volume, ecc. Per questo sembra più espressiva (come abbiamo detto al n° 3) la denominazione di *flusso di probabilità*, che richiama appunto l'idea del movimento.