Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale.

Memoria di CARLO CATTANEO (a Pisa)

A Giovanni Sansone nel suo 70° compleanno.

Sunto. - Su una varietà V_{n+1} a metrica iperbolica normale $(++ \dots + -)$, munita di una congruenza « temporale » C_0 di riferimento, si definisce un'operazione di decomposizione naturale per un generico vettore o tensore. L'operazione viene successivamente applicata a definire una derivazione covariante trasversa (rispetto a C_0) operante su campi tensoriali « spaziali », con carattere invariante di fronte a ogni cambiamento di coordinate interno a C_0 . Decomposizione naturale e derivazione trasversa vengono sistematicamente applicate all'esame differenziale di una congruenza temporale.

Scopo di questo lavoro è di illustrare in dettaglio proprietà e significato geometrico di una operazione differenziale — *derivazione trasversa*, ordinaria o covariante — recentemente introdotta in relatività generale ([2], [3], [4], [5]), mostrando altresì come essa consenta, assieme all'operazione geometrica su cui essa si basa, di collegare organicamente nozioni disparate inerenti alle congruenze del genere tempo (KILLING [10], BORN [1], HERGLOTZ [9], EISENHART [6], LEVI-CIVITA [11], GÖDEL [8], SALZMANN [16], TAUB [16], SYNGE [17][18], LICHNEROWICZ [13]).

Nelle pagine che seguono ci riferiremo a una varietà riemanniana V_{n+1} a metrica iperbolica normale, con un qualsiasi numero di dimensioni. Tale generalità, adottata anche in vista di possibili applicazioni a teorie relativistiche penta-dimensionali, non impedisce l'uso della espressiva terminologia spazio-temporale propria della relatività generale, che adopereremo sistematicamente.

I. - DECOMPOSIZIONE NATURALE DI VETTORI E TENSORI. PROIEZIONI- Σ E PROIEZIONI- Θ .

1. *Congruenze « temporali ». Coordinate adattate. Cambiamenti interni di coordinate.* Sia V_{n+1} una qualsiasi varietà riemanniana a metrica iperbolica normale, x il generico suo punto, T_x lo spazio vettoriale tangente in x , x^i ($i = 1, 2, \dots, n, 0$) un generico sistema di coordinate locali. Sia inoltre

$$(1.1) \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

la forma quadratica fondamentale che supponiamo di segnatura $++ \dots ++ -$.

Conformemente all'uso consueto in relatività generale, si dirà del *genere tempo* ogni vettore V di T_x che abbia norma negativa ($g_{ik}V^iV^k < 0$), mentre ogni vettore V di norma positiva ($g_{ik}V^iV^k > 0$) verrà detto del *genere spazio*. Le stesse locuzioni — genere tempo e genere spazio — verranno applicate anche alle *direzioni* dei corrispondenti vettori, mentre ai vettori di norma nulla ($g_{ik}V^iV^k = 0$) e alle rispettive direzioni verrà riservato il nome di vettori e direzioni di *lunghezza nulla*, ovvero quello, pure desunto dalla relatività generale, di vettori e direzioni del *genere luce*.

In ogni punto x si dirà *cono di luce*, o *cono elementare*, l'insieme dei vettori $dP \equiv (dx^i)$ di T_x aventi lunghezza nulla

$$(1.2) \quad g_{ik}dx^i dx^k = 0.$$

Similmente una linea di V_{n+1} si dirà del genere tempo se è del genere tempo la direzione tangente in ogni suo punto. Una linea, o una qualsiasi sottovarietà di V_{n+1} , si dirà del genere spazio se *ogni* vettore ad essa tangente è del genere spazio. Si dirà infine del genere luce una linea o sottovarietà di V_{n+1} in cui *ogni* vettore tangente abbia lunghezza nulla, e sia pertanto tangente in ogni suo punto x al corrispondente cono elementare.

È immediato riconoscere che condizione necessaria e sufficiente perchè una ipersuperficie W_n di V_{n+1} sia del genere spazio è che la sua normale sia ovunque del genere tempo.

Un sistema di coordinate locali x^i si dirà *adattato* al carattere iperbolico normale della metrica di V_{n+1} se le linee coordinate $x^0 = \text{var.}$ sono del genere tempo e le varietà coordinate $x^0 = \text{cost.}$ sono del genere spazio. In un tal sistema di coordinate la variabile x^0 (che noi preferiamo considerare l'ultima anzichè la prima) sarà detta *coordinata temporale*, mentre le altre, che indicheremo globalmente con x^z , saranno dette *coordinate spaziali* (conveniamo una volta per tutte che gli indici greci varino soltanto da 1 ad n , riservando agli indici latini la possibilità di assumere anche il valore 0). Un sistema di coordinate adattato al carattere della metrica si dirà anche, con locuzione desunta dalla relatività generale, un sistema di coordinate *fisicamente ammissibili*. L'adozione di tali coordinate, che noi da ora in poi sottintenderemo, comporta notoriamente la condizione $g_{00} < 0$ e il carattere definito positivo della forma quadratica ternaria $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$, con tutte le condizioni algebriche che essa implica:

$$(1.3) \quad g_{00} < 0, \quad g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta > 0$$

(dx^z non simultaneamente nulli).

Scelto ad arbitrio un sistema di coordinate x^i adattate al carattere iperbolico normale della metrica, la congruenza C_0 delle linee temporali $x^0 = \text{var.}$ verrà detta *congruenza principale di riferimento*, nel dato sistema di coordinate. In relatività generale le linee della congruenza principale sono interpretabili come le linee orarie di altrettante particelle ideali di riferimento, costituenti

il *riferimento fisico* associato al sistema prescelto di coordinate (cfr. MOLLER [14], p. 233).

Viceversa, scelta a piacere una congruenza C_0 di linee del genere tempo, è sempre possibile, e in infinite maniere, associare ad essa un sistema di coordinate adattate che ammetta C_0 come congruenza principale.

Un cambiamento di coordinate che lasci ferme le linee coordinate temporali, cioè la congruenza principale di riferimento, verrà detto un cambiamento di coordinate *interno* alla congruenza medesima (in relatività generale un tal cambiamento si dice, in modo più espressivo, interno al riferimento fisico). Il più generale cambiamento interno è del tipo

$$(1.4) \quad x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad x^{0'} = x^{0'}(x^1, x^2, \dots, x^n, x^0)$$

($\partial x^{0'}/\partial x^0 > 0$) e può evidentemente decomorsi nel prodotto di una trasformazione delle sole coordinate spaziali

$$(1.5) \quad x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad x^{0'} = x^0,$$

per una trasformazione che muti la sola coordinata temporale

$$(1.6) \quad x^{\alpha'} = x^{\alpha}, \quad x^{0'} = x^{0'}(x^1, x^2, \dots, x^n, x^0).$$

È ben prevedibile che lo studio di una qualsiasi congruenza temporale C_0 , così come lo studio della varietà V_{n+1} in relazione alla congruenza medesima, saranno agevolati dall'uso di coordinate che ammettano la C_0 come congruenza principale.

Fissato in V_{n+1} un sistema di coordinate locali x^i , o anche soltanto la sua congruenza principale di riferimento C_0 , resta definito univocamente in V_{n+1} il campo $\gamma(x)$ dei vettori unitari tangenti alle linee x^0 e orientati nel futuro (cioè nel senso delle x^0 crescenti), campo che a sua volta individua completamente la C_0 . In coordinate adattate le componenti di γ , contravarianti e covarianti, valgono rispettivamente

$$(1.7) \quad \begin{cases} \gamma^\alpha = 0, & \gamma^0 = 1/\sqrt{-g_{00}} \\ \gamma_i = g_{i0}/\sqrt{-g_{00}}. \end{cases}$$

Al vettore unitario γ , che nelle considerazioni che seguono avrà una parte essenziale, daremo il nome di *vettore temporale di riferimento* nel punto x .

In T_x , spazio vettoriale tangente alla V_{n+1} nel punto x , indichiamo con Θ_x il sottospazio unidimensionale dei vettori collineari a γ , e con Σ_x il sottospazio tridimensionale, supplementare del precedente, ortogonale a γ . Per analogia col caso della relatività generale, in cui T_x ha la struttura di uno spazio di MINKOWSKJ, ai due sottospazi Θ_x e Σ_x , tra loro ortogonali e supplementari, daremo i nomi rispettivi di *asse temporale* e di *piattaforma spaziale*, tra loro associati. Spesso verrà sottinteso, per entrambi, il suffisso x .

In conformità con le definizioni ora date, e senza confusione con le

locuzioni più generiche introdotte in precedenza, diremo *puramente temporali* i vettori di Θ_x e *puramente spaziali* i vettori di Σ_x .

In coordinate adattate i vettori puramente temporali sono caratterizzati dall'aver nulle le prime n componenti contravarianti (confr. per esempio la (1.7)); i vettori puramente spaziali sono invece caratterizzati dall'aver nulla la $(n+1)$ -ma componente covariante. In modo analogo, anche per un tensore di ordine ≥ 2 , un indice si dirà puramente temporale se sono nulle tutte le componenti del tensore che abbiano quell'indice, pensato di contravarianza, diverso da 0. Un indice si dirà invece puramente spaziale se sono nulle tutte le componenti del tensore che abbiano quell'indice, pensato di covarianza, uguale a 0. Tali locuzioni relative a tensori d'ordine superiore al primo, verranno meglio giustificate in seguito.

È quasi superfluo aggiungere che tutte le definizioni e locuzioni precedenti sono *relative* al riferimento prescelto, o meglio alla sua congruenza principale C_0 .

2. *Decomposizione naturale di un generico vettore. Proiezioni- Θ e proiezioni- Σ .* Come è ben noto, un qualsiasi vettore di uno spazio vettoriale E è univocamente scomponibile nella somma di vettori rispettivamente appartenenti ad assegnati sottospazi di E tra loro supplementari. In particolare per ogni vettore V di T_x , spazio vettoriale tangente alla V_{n+1} nel punto x , è univocamente determinata la decomposizione

$$(2.1) \quad V = A + N$$

con A appartenente a Θ_x ed N a Σ_x . Precisamente si ha, come si può subito controllare

$$(2.2) \quad A = -(V \cdot \gamma)\gamma \quad N = V + (V \cdot \gamma)\gamma$$

ovvero, in termini di componenti naturali (cioè secondo la base indotta in T_x dal sistema di coordinate x^i ; cfr. in proposito il successivo n. 3)

$$(2.3) \quad A_i = -\gamma_i \gamma_k V^k \quad N_i = (g_{ik} + \gamma_i \gamma_k) V^k = \gamma_{ik} V^k$$

ove si è posto

$$(2.4) \quad \gamma_{ik} = g_{ik} + \gamma_i \gamma_k.$$

Siffatta decomposizione di V nella somma di un vettore puramente temporale (parallelo a γ) e di un vettore puramente spaziale (ortogonale a γ) verrà da ora in poi chiamata *decomposizione naturale* di V .

I due vettori componenti A ed N si diranno rispettivamente la *proiezione temporale* e la *proiezione spaziale* di V . Inoltre, estendendo ad una varietà generica V_{n+1} una locuzione già parzialmente in uso in relatività generale (cfr. LICHNEROWICZ [13] p. 7) chiameremo *norma temporale* e *norma spaziale*

del vettore $\mathbf{V}$, rispetto al vettore temporale di riferimento γ , la norma spazio-temporale dei vettori $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{N}$, rispettivamente:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \|\mathbf{V}\|_{\Theta} = g_{ik} A^i A^k = -\gamma_i \gamma_k V^i V^k & (< 0) \\ \|\mathbf{V}\|_{\Sigma} = g_{ik} N^i N^k = \gamma_{ik} V^i V^k & (> 0). \end{cases}$$

Nelle (2.5), come nelle (2.3), appare l'intervento sistematico dei due tensori doppi simmetrici $-\gamma_i \gamma_k$ e γ_{ik} (definito dalla (2.4)) che del vettore $\mathbf{V}$ mettono in evidenza, rispettivamente, il contenuto temporale e il contenuto spaziale. Palesemente ciascuno di essi compie nelle (2.3) una funzione diversa che nelle (2.5): in quest'ultima essi compiono un ufficio metrico mentre nelle (2.3) essi, operando per semplice composizione, hanno per effetto di *proiettare* il vettore $\mathbf{V}$ rispettivamente su Θ_x e su Σ_x . In relazione a tale duplice ufficio noi chiameremo $-\gamma_i \gamma_k$ *tensore metrico temporale* o *proiettore temporale* nel punto x , riservando invece a γ_{ik} le denominazioni di *tensore metrico spaziale* o *proiettore spaziale*. Vedremo tra poco come tali uffici dei due tensori metrici $-\gamma_i \gamma_k$ e γ_{ik} si estendano dal caso di un semplice vettore $\mathbf{V}$ al caso di un tensore di qualsiasi ordine, restando così ulteriormente giustificate le loro denominazioni. Esamineremo anche, tra breve, la loro struttura e le loro principali proprietà.

3. *Base naturale in T_x e basi naturalmente indotte in Σ_x e in Θ_x .* Applicheremo immediatamente le operazioni di proiezione spaziale e temporale per definire una base naturale in Σ_x e in Θ_x .

Come è noto, il sistema coordinato x^i induce nello spazio vettoriale tangente T_x una *base naturale*, i cui vettori (n del genere spazio e uno del genere tempo, rispettivamente tangenti alle singole linee coordinate) indicheremo con $\partial_i P$. Le componenti contravarianti e covarianti di $\partial_i P$ sono rispettivamente

$$(3.1) \quad (\partial_i P)^h = \delta_i^h, \quad (\partial_i P)_h = g_{hk} \delta_i^k = g_{hi},$$

δ_i^h essendo l'usuale simbolo di KRONECKER. La precedente notazione si giustifica osservando che se, come è nell'uso, si indica con $dP \equiv (dx^i)$ il generico vettore dello spazio tangente T_x , risulta $dP = \partial_i P dx^i$, proprio come se ∂_i e d indicassero rispettivamente derivazioni parziali e differenziazione totale.

In conformità alla precedente definizione di base naturale, in T_x , si diranno *componenti naturali*, contravarianti o covarianti, di un vettore o tensore, le sue componenti, dell'una o dell'altra specie, secondo la base naturale.

Ciò premesso, appare spontaneo chiamare base naturale della piattaforma spaziale Σ_x l'insieme delle n proiezioni ortogonali su Σ_x — che indicheremo $\tilde{\partial}_\alpha P$ — dei primi n vettori $\partial_\alpha P$ della base naturale di T_x . Stante la (3.1)

e per quanto si è detto al n. 2, è immediato ricavare le $n+1$ componenti di $\tilde{\partial}_i P$ nella base naturale di T_x :

$$(3.2) \quad \begin{cases} (\tilde{\partial}_\alpha P)_i = \gamma_{ik} \delta_\alpha^k = \gamma_{i\alpha} \\ (\tilde{\partial}_\alpha P)^i = g^{ih} \gamma_{h\alpha} = \delta_\alpha^i + \gamma^i \gamma_\alpha. \end{cases}$$

In forma vettoriale gli n vettori della base naturale in Σ_x si esprimono per mezzo degli $n+1$ vettori della base naturale in T_x al modo seguente:

$$(3.3) \quad \tilde{\partial}_\alpha P = \partial_\alpha P + \gamma_\alpha \gamma^0 \partial_0 P.$$

Anticipando un poco, diremo che l'espressione che compare a secondo membro coincide *formalmente* con quella di un'operazione differenziale che verrà introdotta più avanti (n. 6).

Quanto al sottospazio temporale Θ_x , ad una sola dimensione, diremo sua base naturale il vettore $\partial_0 P$, cioè l'unico vettore del genere tempo della base naturale di T_x . Questo, a sua volta, è legato al vettore unitario γ precedentemente introdotto (vettore principale di riferimento) della semplice relazione

$$(3.4) \quad \gamma = \gamma^0 \partial_0 P.$$

Ciò premesso, sia V un generico vettore puramente spaziale, V^i e V_i le sue componenti naturali in T_x , V^α , V_α le sue componenti naturali in Σ_x ; il suo carattere puramente spaziale implica:

$$(3.5) \quad V \cdot \gamma \equiv V_i \gamma^i \equiv V^i \gamma_i = 0.$$

Dal semplice significato di componenti covarianti e dalla (3.3) segue:

$$(3.6) \quad V_\alpha = V \cdot \tilde{\partial}_\alpha P = V \cdot \partial_\alpha P + \gamma_\alpha \gamma^0 V \cdot \partial_0 P = V_\alpha.$$

Analogamente dalla duplice identità $V \equiv V^\alpha \tilde{\partial}_\alpha P$, $V \equiv V^i \partial_i P$ e dalla (3.3), tenuto anche conto della (3.6), discende:

$$(3.7) \quad V^\alpha = V^\alpha.$$

La (3.6) e la (3.7) si riassumono nella seguente osservazione di utilità pratica: *le componenti, covarianti o controvarianti, di un vettore puramente spaziale secondo la base naturale di Σ_x si identificano con le sue prime n componenti, rispettivamente covarianti o controvarianti, secondo la base naturale di T_x .*

È pure immediato controllare che le componenti naturali covarianti del tensore metrico di Σ_x , date dagli n^2 prodotti scalari $\tilde{\partial}_\alpha P \cdot \tilde{\partial}_\beta P$, si identificano con le $\gamma_{\alpha\beta}$.

Quanto al tensore metrico in Θ_x , che peraltro non ha un grande interesse, esso ha un'unica componente covariante data dal prodotto scalare $\partial_0 P \cdot \partial_0 P$ e si identifica pertanto con la componente g_{00} del tensore fondamentale di V_{n+1} . La sua unica componente contravariante vale $1/g_{00}$.

4. *Decomposizione naturale di un tensore qualunque. Proiezioni- Σ e proiezioni- Θ . Carattere puramente spaziale o temporale di un indice.*

La decomposizione simbolica di T_x

$$(4.1) \quad T_x = \Sigma_x + \Theta_x$$

induce in $T_x \otimes T_x$ una decomposizione nella somma di quattro sottospazi mutuamente ortogonali e complessivamente supplementari

$$(4.2) \quad T_x \otimes T_x = \Sigma_x \otimes \Sigma_x + \Sigma_x \otimes \Theta_x + \Theta_x \otimes \Sigma_x + \Theta_x \otimes \Theta_x.$$

Ne segue che un generico tensore doppio t_{ij} è univocamente decomponibile nella somma di quattro tensori a due a due ortogonali e appartenenti rispettivamente ai quattro sottospazi ora nominati. Tale decomposizione verrà chiamata la *decomposizione naturale* del tensore t_{ij} e i singoli tensori componenti saranno chiamati *proiezioni naturali* del tensore t_{ij} sui rispettivi sottospazi. Tali proiezioni verranno simbolicamente indicate così: $\mathfrak{P}_{\Sigma\Sigma}(t_{ij})$, $\mathfrak{P}_{\Sigma\Theta}(t_{ij})$, $\mathfrak{P}_{\Theta\Sigma}(t_{ij})$, $\mathfrak{P}_{\Theta\Theta}(t_{ij})$, $\mathfrak{P}$ indicando genericamente un operatore di proiezione.

Il procedimento formale onde ottenere da un dato tensore le sue varie proiezioni naturali è quanto mai semplice: si opera su ciascun indice mediante il conveniente proiettore, γ_{ik} o $-\gamma_i\gamma_k$, a seconda che l'indice medesimo debba trasformarsi in un indice spaziale o in un indice temporale:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \mathfrak{P}_{\Sigma\Sigma}(t_{ij}) &= \gamma_i\gamma_j t^{rs}, & \mathfrak{P}_{\Sigma\Theta}(t_{ij}) &= -\gamma_i\gamma_j\gamma_s t^{rs}, \\ \mathfrak{P}_{\Theta\Sigma}(t_{ij}) &= -\gamma_i\gamma_r\gamma_j\gamma_s t^{rs}, & \mathfrak{P}_{\Theta\Theta}(t_{ij}) &= \gamma_i\gamma_j\gamma_r\gamma_s t^{rs}. \end{aligned}$$

Come esempio, interessante se pur banale, si possono calcolare le varie proiezioni naturali del tensore fondamentale g_{ij} :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \mathfrak{P}_{\Sigma\Sigma}(g_{ij}) &= \gamma_{ij}, & \mathfrak{P}_{\Sigma\Theta}(g_{ij}) &= 0 \\ \mathfrak{P}_{\Theta\Sigma}(g_{ij}) &= 0, & \mathfrak{P}_{\Theta\Theta}(g_{ij}) &= -\gamma_i\gamma_j. \end{aligned}$$

Resta confermato così che le proiezioni spaziale e temporale di g_{ij} coincidono col tensore metrico di Σ e di Θ , rispettivamente, e che il criterio di indurre una metrica in un sottospazio definendo come base indotta la proiezione dei primi n vettori della base di T_x e successivamente calcolando i vari prodotti scalari $\tilde{\partial}_x P \cdot \tilde{\partial}_\beta P$, coincide col criterio della proiezione diretta di g_{ij} .

Un indice, indifferentemente di covarianza o di contravarianza, di un generico tensore si dirà avere carattere puramente spaziale se il tensore medesimo non viene alterato operando su quell'indice mediante il proiettore spaziale γ_{ik} . Un indice si dirà invece avere carattere puramente temporale se il tensore non viene modificato operando su quell'indice mediante il proiettore temporale $-\gamma_i\gamma_k$. In accordo con quanto già si disse al n. 1, sono nulle tutte le componenti di un tensore in cui un indice puramente spaziale,

in posizione di covarianza, assuma il valore 0. Dal pari sono nulle tutte le componenti di un tensore allorchè un indice puramente temporale, in posizione di contravarianza, assume un qualsiasi valore diverso da 0.

Un tensore doppio si dirà *totalmente spaziale* se esso appartiene a $\Sigma \otimes \Sigma$, cioè se entrambi i suoi indici sono puramente spaziali; si dirà all'opposto *totalmente temporale* se esso appartiene a $\Theta \otimes \Theta$, vale a dire se entrambi i suoi indici sono puramente temporali.

Quanto precede si estende in modo ovvio a tensori di ordine qualunque; per i quali si parlerà di proiezioni del tipo $\mathfrak{S}_{\Sigma\Theta\ldots\Sigma}(t_{ij\ldots r})$ con tanti indici, uguali a Σ o a Θ , quanti sono gli indici del tensore.

5. *Qualche proprietà algebrica dell'operazione di proiezione.*

a) Allorchè la *proiezione*- Σ opera su di un indice puramente temporale essa dà per risultato il tensore nullo.

b) Allorchè la *proiezione*- Θ opera su di un indice puramente spaziale essa dà per risultato il tensore nullo.

c) Allorchè un'operazione di proiezione completa, cioè operante su tutti gli indici, opera sul prodotto di due o più tensori (senza contrazioni) essa si ripartisce tra i fattori, rispettando l'ordine di corrispondenza tra gli indici: $\mathfrak{S}_{\Sigma\Theta\Sigma}(A_i B_{jr}) = \mathfrak{S}_{\Sigma}(A_i) \mathfrak{S}_{\Theta\Sigma}(B_{jr})$.

d) La decomposizione naturale, applicata ad un generico tensore A_{ij} può scriversi:

$$(5.1) \quad A_{ij} = \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_i \gamma_j + \gamma_i \tilde{A}'_j + A \gamma_i \gamma_j$$

ove si è posto

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \tilde{A}_{ij} &= \gamma_{ir} \gamma_{js} A^{rs}, & \tilde{A}_i &= -\gamma_{ir} \gamma_s A^{rs} \\ \tilde{A}'_j &= -\gamma_r \gamma_{js} A^{rs}, & A &= \gamma_r \gamma_s A^{rs}. \end{aligned}$$

Un generico tensore doppio A_{ij} risulta pertanto individuato da un tensore totalmente spaziale $\tilde{A}_{ij}$; da due vettori $\tilde{A}_i$ e $\tilde{A}'_i$ puramente spaziali, e da uno scalare A , cui corrispondono complessivamente appunto 16 quantità numeriche indipendenti.

Se il tensore A_{ij} è simmetrico, tale è anche il tensore $\tilde{A}_{ij}$, mentre i due vettori $\tilde{A}_i$ e $\tilde{A}'_i$ coincidono. Per un tensore simmetrico $S_{ij} = S_{ji}$ può dunque scriversi

$$(5.4) \quad S_{ij} = \tilde{S}_{ij} + \tilde{S}_i \gamma_j + \gamma_i \tilde{S}_j + S \gamma_i \gamma_j \quad (\tilde{S}_{ij} = \tilde{S}_{ji}).$$

Se poi il tensore che viene decomposto è antisimmetrico, $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$, anche il tensore $\tilde{\Omega}_{ij}$ risulta antisimmetrico, i due vettori spaziali risultano

l'uno l'opposto dell'altro, mentre infine lo scalare si annulla. La decomposizione naturale di un tensore antisimmetrico $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ si scriverà pertanto

$$(5.5) \quad \Omega_{ij} = \tilde{\Omega}_{ij} + \tilde{\Omega}_i \gamma_j - \gamma_i \tilde{\Omega}_j \quad (\tilde{\Omega}_{ij} = -\tilde{\Omega}_{ji}).$$

e) La saturazione di un indice puramente spaziale con un indice puramente temporale (previa sistemazione dei due indici in posizioni di varianza opposta) dà per risultato lo zero, qualunque sia il numero e il carattere degli altri indici non interessati nella saturazione.

II. - DERIVAZIONE TRASVERSA.

6. *Derivazione trasversa ordinaria.* Assegnato entro un dominio D della varietà V_{n+1} un generico campo di scalari $f(x^i)$ consideriamone il gradiente, $\text{grad } f$, di componenti covarianti $\partial_i f$. Sia poi $dP \equiv (dx^i)$ un generico campo di vettori, soggetti all'unica condizione di essere, ovunque, perpendicolari al vettore γ , ciò che implica $\gamma_i dx^i = 0$, ovvero

$$(6.1) \quad dx^0 = -\frac{1}{\gamma_0} \gamma_\alpha dx^\alpha \equiv \gamma^0 \gamma_\alpha dx^\alpha.$$

Ciò premesso, il differenziale totale di f secondo il vettore dP si esprime: $df = \partial_i f dx^i$, ovvero, tenuto conto della condizione (6.1), nell'uno o nell'altro dei due modi seguenti:

$$(6.2) \quad df = (\partial_\alpha f - \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0} \partial_0 f) dx^\alpha \equiv (\partial_\alpha f + \gamma^0 \gamma_\alpha \partial_0 f) dx^\alpha,$$

ove l'indice di sommazione varia ora soltanto da 1 a n . Nasce così in modo spontaneo l'operatore differenziale, che indicheremo semplicemente con $\tilde{\partial}_i$, così definito:

$$(6.3) \quad \tilde{\partial}_i = \partial_i - \frac{\gamma_i}{\gamma_0} \partial_0 \equiv \partial_i + \gamma_i \gamma^0 \partial_0,$$

operatore che avrà molta importanza nel seguito. Mediante siffatto operatore, significativo soltanto per $i \neq 0$, il differenziale totale di f secondo un vettore dP normale a γ , può dunque esprimersi anche con la formula

$$(6.3) \quad df = \tilde{\partial}_i f dx^i \equiv \tilde{\partial}_\alpha f \cdot dx^\alpha$$

che utilizza di fatto le sole componenti controvarianti spaziali di dP . La (6.3') mostra che le $n+1$ quantità $\tilde{\partial}_i f$, di cui l'ultima ($i=0$) sempre nulla, sono le componenti covarianti di un vettore che, qualunque sia $f(x^i)$, riesce sempre

perpendicolare a $\gamma(\tilde{\partial}_0 f = 0)$: per tale motivo lo diremo il *gradiente trasverso* (rispetto alla direzione di γ) del campo scalare f ; in simboli: $\text{grad } f \equiv (\tilde{\partial}_i f)$.

Fatto notevole è che l'ora definito gradiente trasverso non è che la proiezione dell'ordinario gradiente sopra la piattaforma spaziale Σ . Si ha infatti $\tilde{\partial}_i f = (\partial_i^h + \gamma_i \gamma^h) \partial_h f$ e quindi

$$(6.4) \quad \tilde{\partial}_i f = \mathcal{P}_\Sigma(\partial_i f).$$

Tutto ciò giustifica per l'operazione $\tilde{\partial}_i$ definita dalla (6.3), il nome di *derivazione parziale trasversa*. La denominazione è ulteriormente giustificata dalla seguente interpretazione. Se si tengono presenti ad un tempo sia la definizione formale (6.3) sia la (3.2), si riconosce immediatamente che $\tilde{\partial}_\alpha$ non è che l'operazione di differenziazione totale secondo l' α -mo vettore della base naturale indotta in Σ_x .

È quasi evidente che per l'operazione $\tilde{\partial}_i$ valgono la maggior parte delle proprietà formali di cui gode la derivazione parziale ordinaria, in particolare la regola di derivazione di una somma, di un prodotto, di un quoziente ecc.

L'operazione di derivazione parziale trasversa può essere applicata più volte successivamente, rispetto a valori qualunque dell'indice, dando così luogo a derivazioni trasverse di secondo ordine o di ordini superiori. Tuttavia, come si riconosce immediatamente, l'ordine delle derivazioni successive generalmente non è permutabile. Ci accontentiamo per ora di questo risultato formale negativo, riservandoci di esaminare più avanti i casi speciali in cui il prodotto $\tilde{\partial}_\beta \tilde{\partial}_\alpha$ è commutativo e delle condizioni che tale commutatività implica per la congruenza principale C_0 .

In modo immediato si può riconoscere che l'operatore $\tilde{\partial}_\alpha$ non è generalmente commutabile neppure con l'operatore ∂_0 .

7. *Derivazione longitudinale* $\bar{\partial}_0$. Consideriamo ancora il campo di vettori $\text{grad } f$, e punto per punto del dominio D , proiettiamolo ortogonalmente su Θ_x : la componente algebrica del vettore proiezione secondo il vettore base di $\Theta_x(\partial_0 P)$ chiameremo *derivata longitudinale* (secondo la direzione di γ) del campo di scalari f e indicheremo con $\bar{\partial}_0 f$:

$$(7.1) \quad \bar{\partial}_0 f = \gamma^0 \partial_0 f.$$

Essa differisce dalla semplice derivata parziale rispetto a x^0 per il fattore γ^0 . Naturalmente anche l'operatore $\bar{\partial}_0$ non è generalmente commutabile nè con $\tilde{\partial}_\alpha$ nè con ∂_0 .

Non sarà inutile aggiungere che l'operatore $\bar{\partial}_0$, come l'operatore $\tilde{\partial}_\alpha$, è invariante di fronte ad ogni cambiamento di coordinate interno alla congruenza C_0 .

8. *Derivazione covariante trasversa di un campo di vettori puramente spaziali.* L'operazione di derivazione trasversa, introdotta nei precedenti numeri, si può estendere in modo altrettanto spontaneo al caso che in luogo di un campo di scalari si parta da un generico campo di vettori *puramente spaziali*.

Sia $s(x)$ un generico campo di vettori puramente spaziali, quindi soddisfacenti alle condizioni (tra loro equivalenti)

$$(8.1) \quad s^0 = -\gamma_\alpha s^\alpha / \gamma_0 \equiv \gamma^0 \gamma_\alpha s^\alpha; \quad s_0 = 0.$$

Considerata di $s(x)$ la derivata covariante in V_{n+1} , $\nabla_h s_k$, effettuiamone, in ogni punto di V_{n+1} , la proiezione totale su Σ_ω . Il tensore doppio puramente spaziale che così si ottiene in ciascun punto di V_{n+1} — $\mathfrak{S}_{\Sigma}(\nabla_i s_j)$ — chiameremo *derivata covariante trasversa* del campo puramente spaziale $s(x)$. Applicando il procedimento di proiezione definito al precedente n. 4 e sviluppando i calcoli, che omettiamo, si ottiene:

$$(8.2) \quad \mathfrak{S}_{\Sigma}(\nabla_i s_j) = \tilde{\partial}_i s_j - \frac{1}{2} (\tilde{\partial}_i \gamma_{jh} + \tilde{\partial}_j \gamma_{hi} - \tilde{\partial}_h \gamma_{ij}) s^h$$

ove intervengono sistematicamente il tensore metrico spaziale γ_{ij} e la derivazione trasversa $\tilde{\partial}_i$.

L'espressione che compare a secondo membro della (8.2) suggerisce di introdurre una nuova specie di simboli di CHRISTOFFEL, di prima o di seconda specie, formalmente costruiti come i simboli ordinari, con la materiale sostituzione del tensore metrico spaziale γ_{ij} al tensore metrico spazio-temporale g_{ij} , e della derivazione parziale trasversa $\tilde{\partial}_i$ alla derivazione ordinaria ∂_i :

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \overline{\{ij, h\}} &= \frac{1}{2} (\tilde{\partial}_i \gamma_{jh} + \tilde{\partial}_j \gamma_{hi} - \tilde{\partial}_h \gamma_{ij}) \\ \overline{\left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\}} &= g^{hr} \overline{\{ij, r\}} \equiv \gamma^{hr} \overline{\{ij, r\}}. \end{aligned}$$

Con tale introduzione la (8.2) acquista l'aspetto

$$(8.4) \quad \mathfrak{S}_{\Sigma}(\nabla_i s_j) = \tilde{\partial}_i s_j - \overline{\left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\}} s_h \equiv \tilde{\nabla}_i^* s_j$$

e può interpretarsi come una nuova specie di derivata covariante, che abbiamo indicato con il simbolo $\tilde{\nabla}_i^* s_j$, e che ben giustifica il nome di derivata covariante trasversa del campo di vettori spaziali s_j , precedentemente attribuito alla $\mathfrak{S}_{\Sigma}(\nabla_i s_j)$. Nella notazione adottata, forse sovrabbondante, il segno $*$ è posto a ricordare l'uso delle γ_{ik} , e il segno $\sim$ l'uso della derivazione $\tilde{\partial}_i$.

Tanto nei simboli di CHRISTOFFEL (8.3) quanto nelle componenti della derivata covariante trasversa (8.4) si riconosce immediatamente che essi si

riducono identicamente a zero non appena uno degli indici posti in basso assume il valore 0, ciò che conferma il carattere totalmente spaziale della derivata covariante trasversa.

Concludendo diremo che come l'operazione di derivazione ordinaria trasversa operando su di un campo di scalari dà origine ad un campo di vettori puramente spaziali (il gradiente trasverso di f), così l'operazione di derivazione covariante trasversa operando su un campo di vettori puramente spaziali, dà origine a un campo di tensori doppi totalmente spaziali. Formalmente la derivata covariante trasversa di un campo di vettori puramente spaziali può calcolarsi come un'ordinaria derivata covariante, usando simboli di CHRISTOFFEL, di prima e di seconda specie, formati a partire dal tensore metrico spaziale γ_{ij} con l'impiego sistematico delle $\tilde{\partial}_i$ in luogo delle ∂_i .

9. *Derivazione covariante trasversa di un tensore totalmente spaziale di ordine qualunque.* L'operazione di derivazione covariante trasversa si estende agevolmente al caso di un tensore d'ordine qualunque, purchè totalmente spaziale. Sia s_{ij} , ad esempio, un campo di tensori doppi totalmente spaziali ($s_{i0} = 0$, $s_{0i} = 0$). Procedendo in modo perfettamente analogo a quello seguito al numero precedente, consideriamo di tal campo la derivata covariante $\nabla_i s_{jm}$ e proiettiamola totalmente, punto per punto, sullo spazio Σ_x . Con calcoli molto semplici, benchè un poco lunghi, che qui omettiamo, si riconosce che alla cercata proiezione può darsi la forma seguente

$$(9.1) \quad \mathcal{P}_{\Sigma\Sigma}(\nabla_i s_{jm}) = \tilde{\partial}_i s_{jm} - \left\{ \begin{matrix} \overline{h} \\ i \ j \end{matrix} \right\} s_{hm} - \left\{ \begin{matrix} \overline{h} \\ i \ m \end{matrix} \right\} s_{jh} \equiv \tilde{\nabla}_i^* s_{jm}.$$

Ancora una volta si riconosce, nel secondo membro della (9.1) una specie di derivata covariante, da noi indicata $\tilde{\nabla}_i^* s_{jm}$, eseguita con le regole formali ordinarie, ma con l'uso sistematico della derivazione $\tilde{\partial}_i$ in luogo della ∂_i , e dei simboli di CHRISTOFFEL (8.3) in luogo dei simboli ordinari.

Riteniamo superfluo trattare esplicitamente il caso più generale, quanto abbiamo detto bastando ad assicurare la completa generalità dell'operazione di derivazione covariante trasversa. Essa opera su un campo di tensori totalmente spaziali e dà origine a un nuovo campo di tensori totalmente spaziali, con un indice in più.

10. - *Proprietà formali immediate della derivazione covariante trasversa.* È quasi immediato riconoscere che la derivazione covariante trasversa gode di tutte le proprietà formali della derivazione covariante che sono poi le stesse che valgono per la derivazione ordinaria: vale pertanto la derivabilità termine a termine di una somma di tensori totalmente spaziali, così come resta valida l'ordinaria regola di derivazione per un prodotto di più tensori

totalmente spaziali. Si estende naturalmente alla derivazione covariante trasversa anche la proprietà di essere commutabile con l'operazione di saturazione, purchè questa operi su due indici che siano entrambi puramente spaziali.

Sussiste anche un teorema del tutto analogo al teorema di RICCI, al quale conserveremo lo stesso nome:

TEOR. DI RICCI. - *La derivata covariante trasversa del tensore metrico spaziale γ_{ij} è identicamente nulla.*

La dimostrazione si svolge formalmente come la dimostrazione ordinaria.

Da questo teorema appare come il tensore metrico spaziale naturalmente indotto in Σ_x , trovi proprio nella derivazione covariante trasversa l'operazione differenziale che ne sottolinea il carattere di tensore spaziale fondamentale.

È quasi superfluo aggiungere che non sussiste in generale l'invertibilità di due derivazioni covarianti trasverse successive.

11. - *Proiezione formale su Σ_x dei simboli di Christoffel.* La tecnica della proiezione spaziale applicata nei precedenti numeri ad enti tensoriali, può formalmente applicarsi anche ad altri enti geometrici, non tensoriali, quale è ad esempio la connessione riemanniana della V_{n+1} , rappresentata in coordinate locali dai simboli di CHRISTOFFEL di prima e di seconda specie. Ciò che è veramente notevole è il fatto che il risultato di tale proiezione formale sono, come è facile verificare, proprio i simboli di CHRISTOFFEL modificati, definiti dalle formule (8.3):

$$(11.1) \quad \mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}(\{ij, h\}) = \{\overline{ij}, h\}$$

$$\mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}\left(\left\{\begin{matrix} h \\ i \ j \end{matrix}\right\}\right) = \left\{\begin{matrix} \overline{h} \\ i \ j \end{matrix}\right\}.$$

Le (11.1), oltre a un notevole contenuto geometrico, hanno un'evidente utilità sul piano pratico, di esecuzione di calcoli.

III. - CONGRUENZE «TEMPORALI» E LORO ELEMENTI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE.

Come dicemmo all'inizio del presente lavoro (n. 1) la tecnica delle proiezioni, spaziale e temporale, e l'impiego sistematico della derivazione trasversa, ordinaria o covariante, trova utile applicazione nello studio delle congruenze di V_{n+1} . Fisseremo l'attenzione sulle congruenze del genere tempo, che in una varietà a metrica iperbolica normale hanno un'importanza preponderante. L'adattamento delle considerazioni che seguono al caso di una congruenza generica, non presenta però difficoltà.

Sia C_0 una qualsiasi congruenza «temporale» di V_{n+1} , che assumeremo senz'altro come congruenza principale di riferimento, adottando un sistema di coordinate locali x^i adattate alla congruenza medesima, così che le linee $x^0 = \text{var.}$ si identifichino con le linee di C_0 . Resta ancora disponibile, ove occorra, un cambiamento di coordinate interno alla congruenza medesima (n. 1).

La congruenza C_0 è univocamente individuata dal campo di vettori unitari $\gamma(x)$ tangenti alle sue linee. Inizieremo pertanto l'esame locale di C_0 con l'esame dei tensori che si ricavano da $\gamma(x)$ con derivazioni del primo ordine, cioè dei tre tensori seguenti: il tensore antisimmetrico $\Omega_{ij} = \partial_i \gamma_j - \partial_j \gamma_i \equiv \nabla_i \gamma_j - \nabla_j \gamma_i$, che può definirsi il *tensore vortice* della congruenza; il tensore asimmetrico $\nabla_i \gamma_j$, derivata covariante di γ , e il tensore simmetrico $K_{ij} = \nabla_i \gamma_j + \nabla_j \gamma_i$ che diremo il *tensore di Killing* di C_0 .

Di tali tensori, effettueremo ora la decomposizione naturale, considerando di ciascuno di essi le quattro proiezioni $\mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}$, $\mathcal{S}_{\Sigma\Theta}$, $\mathcal{S}_{\Theta\Sigma}$, $\mathcal{S}_{\Theta\Theta}$. Esamineremo poi il significato geometrico di ciascuna.

12. - *Le quattro proiezioni naturali del tensore vortice.* - Chiamasi *tensore vortice* di una congruenza spazio-temporale C_0 , definita da un campo di vettori unitari $\gamma(x)$, il tensore doppio antisimmetrico

$$(12.1) \quad \Omega_{ij} = \partial_i \gamma_j - \partial_j \gamma_i \equiv \nabla_i \gamma_j - \nabla_j \gamma_i.$$

Esso è notoriamente della più grande importanza nella dinamica relativistica dei fluidi (cfr. per es. LICHNEROWICZ [13], SYNGE [17] [18] e in genere nella geometria delle congruenze. Ne esamineremo ora le quattro proiezioni naturali, delle quali vedremo più avanti il notevole significato geometrico.

Proiezione $\Sigma\Sigma$. - Si ha:

$$(12.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}(\Omega_{ij}) &\equiv \tilde{\Omega}_{ij} = \gamma_{ir} \gamma_{js} g^{rh} g^{sk} \Omega_{hk} \\ &= \gamma_0 \partial_i \frac{\gamma_j}{\gamma_0} - \partial_j \gamma_i + \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \partial_0 \gamma_i + \gamma_i \gamma_0 \gamma^0 \partial_0 \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \\ &\quad - \gamma_i \gamma^0 \partial_j \gamma_0 + \gamma_i \gamma^0 \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \partial_0 \gamma_0. \end{aligned}$$

Tenuto presente che $\gamma_0 \gamma^0 = -1$, l'associazione del secondo col quinto termine e del terzo col sesto dà:

$$(12.3) \quad \mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}(\Omega_{ij}) \equiv \tilde{\Omega}_{ij} = \gamma_0 \partial_i \frac{\gamma_j}{\gamma_0} - \gamma_i \partial_0 \frac{\gamma_j}{\gamma_0} - \gamma_0 \partial_j \frac{\gamma_i}{\gamma_0} + \gamma_j \partial_0 \frac{\gamma_i}{\gamma_0}.$$

Di qui infine, associando il primo col secondo termine e il terzo col quarto si trova

$$(12.4) \quad \mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}(\Omega_{ij}) \equiv \tilde{\Omega}_{ij} = \gamma_0 \left(\tilde{\partial}_i \frac{\gamma_j}{\gamma_0} - \tilde{\partial}_j \frac{\gamma_i}{\gamma_0} \right).$$

Il tensore spaziale così ottenuto (è immediato controllare l'annullarsi delle componenti covarianti in cui figurino almeno una volta l'indice o) è un tensore antisimmetrico, come Ω_{ij} , che formalmente si ottiene come quello, sostituendo $\frac{\gamma_i}{\gamma_o}$ a γ_i e l'operazione $\tilde{\partial}_i$ alla ∂_i , con in più la moltiplicazione per γ_o . Tale tensore chiameremo il *tensore vortice spaziale*, o *rotore trasverso*, della congruenza C_o (o del campo di vettori $\gamma(x)$).

Proiezione- $\Sigma\Theta$. - Si ha:

$$\mathfrak{F}_{\Sigma\Theta}(\Omega_{ij}) = -\gamma_i^r \gamma_j \gamma^s \Omega_{rs} = \gamma^o \Omega_{oi} \gamma_j$$

o anche, osservando che

$$\gamma^o \Omega_{oi} = \gamma^r \Omega_{ri} = \gamma^r (\nabla_r \gamma_i - \nabla_i \gamma_r) = \gamma^r \nabla_r \gamma_i = c_i$$

c_i indicando il *vettore di curvatura* della linea x^o ,

$$(12.5) \quad \mathfrak{F}_{\Sigma\Theta}(\Omega_{ij}) = c_i \gamma_j.$$

Viene in tal modo riconosciuto che il vettore spaziale che assieme al tensore spaziale $\tilde{\Omega}_{ij}$, precedentemente considerato, individua il tensore vortice Ω_{ij} si identifica con il vettore di curvatura della linea x^o , evidentemente normale alla curva stessa.

Proiezione- $\Theta\Sigma$. - In modo analogo si riconosce, in armonia con quanto si disse al n. 5 per un generico tensore antisimmetrico, che:

$$(12.6) \quad \mathfrak{F}_{\Theta\Sigma}(\Omega_{ij}) = -\gamma_i c_j.$$

Proiezione- $\Theta\Theta$. - Come per un qualunque tensore antisimmetrico, tale proiezione è identicamente nulla:

$$(12.7) \quad \mathfrak{F}_{\Theta\Theta}(\Omega_{ij}) = 0.$$

Quanto precede dà luogo alla seguente decomposizione naturale del tensore vortice spaziotemporale Ω_{ij} :

$$(12.8) \quad \Omega_{ij} = \tilde{\Omega}_{ij} + c_i \gamma_j - \gamma_i c_j$$

$\tilde{\Omega}_{ij}$ e c_i indicando rispettivamente il tensore vortice spaziale e il vettore di curvatura della congruenza C_o .

13. - *Le quattro proiezioni naturali del tensore $\bar{\nabla}_i \gamma_j$.* - Cominceremo anzitutto con l'osservare che il secondo indice del tensore $\bar{\nabla}_i \gamma_j$ è un indice puramente spaziale. Infatti, tenuto presente che $-g_{00} = \gamma_0^2$, si ha (per ogni valore dell'indice i)

$$(13.1) \quad \begin{aligned} \bar{\nabla}_i \gamma_0 &= \partial_i \gamma_0 - (i0, l) \gamma^l = \partial_i \gamma_0 - (i0, 0) \gamma^0 \\ &= \partial_i \gamma_0 - \partial_i \gamma_0 = 0. \end{aligned}$$

(Anche più rapidamente si può osservare che, avendo γ norma costante, il vettore $\bar{\nabla}_i \gamma_j dx^i$ risulta, *qualunque sia dx^i* , ortogonale a γ : ne segue che l'indice scoperto j è puramente spaziale). Dall'osservazione ora fatta segue che per ottenere le proiezioni $\Sigma\Sigma$ o $\Theta\Sigma$ del tensore $\bar{\nabla}_i \gamma_j$ basta operare sul suo primo indice (rispettivamente col proiettore γ_{ir} o col proiettore $-\gamma_i \gamma_r$) mentre le proiezioni $\Sigma\Theta$ e $\Theta\Theta$ risultano automaticamente nulle.

Proiezione- $\Sigma\Sigma$. Operando, come si è detto, soltanto sul primo indice, si ha successivamente:

$$(13.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}(\bar{\nabla}_i \gamma_j) &= \gamma_i^h \bar{\nabla}_h \gamma_j = \bar{\nabla}_i \gamma_j + \gamma_i \gamma^0 \bar{\nabla}_0 \gamma_j \\ &= \partial_i \gamma_j - (ij, 0) \gamma^0 + \gamma_i \gamma^0 \partial_0 \gamma_j - \gamma_i \gamma^0 (0j, 0) \gamma^0. \end{aligned}$$

Associando il primo e il terzo termine, che insieme danno $\tilde{\partial}_i \gamma_j$, e sviluppando i simboli di CHRISTOFFEL, tenendo anche presente che $\gamma_0 \gamma^0 = -1$, $g_{i0} = -\gamma_i \gamma_0$, $g_{00} = -\gamma_0^2$, si trova

$$\mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}(\bar{\nabla}_i \gamma_j) = \tilde{\partial}_i \gamma_j + \frac{1}{2} (\gamma_0 \partial_i \gamma_j + \gamma_j \partial_i \gamma_0 + \gamma_0 \partial_j \gamma_i + \partial_0 g_{ij} - \gamma_i \partial_j \gamma_0) \gamma^0.$$

Converrà far comparire sotto la parentesi i tre termini $\partial_0(\gamma_i \gamma_j) - \gamma_i \partial_0 \gamma_j - \gamma_j \partial_0 \gamma_i$ la cui somma è evidentemente nulla. Il primo di essi associato col quarto termine della parentesi dà semplicemente $\partial_0 \gamma_{ij}$. Rimane allora

$$\mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}(\bar{\nabla}_i \gamma_j) = \tilde{\partial}_i \gamma_j + \frac{1}{2} (\gamma_0 \partial_i \gamma_j + \gamma_j \partial_i \gamma_0 + \gamma_0 \partial_j \gamma_i - \gamma_i \partial_0 \gamma_j - \gamma_j \partial_0 \gamma_i - \gamma_i \partial_j \gamma_0 + \partial_0 \gamma_{ij}) \gamma^0.$$

Entro la parentesi il primo e il quarto termine danno $\gamma_0 \tilde{\partial}_i \gamma_j$, il terzo e il quinto danno $\gamma_0 \tilde{\partial}_j \gamma_i$, e infine il secondo e il sesto danno $\gamma_j \tilde{\partial}_i \gamma_0 - \gamma_i \tilde{\partial}_j \gamma_0$ (infatti $\gamma_j(\partial_i \gamma_0 + \gamma_i \gamma^0 \partial_0 \gamma_0) - \gamma_i(\partial_j \gamma_0 + \gamma_j \gamma^0 \partial_0 \gamma_0) \equiv \gamma_j \partial_i \gamma_0 - \gamma_i \partial_j \gamma_0$). Si ha pertanto, sciogliendo la parentesi:

$$\mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}(\bar{\nabla}_i \gamma_j) = \frac{1}{2} \tilde{\partial}_i \gamma_j - \frac{1}{2} \tilde{\partial}_j \gamma_i - \frac{1}{2\gamma_0} \gamma_j \tilde{\partial}_i \gamma_0 + \frac{1}{2\gamma_0} \gamma_i \tilde{\partial}_j \gamma_0 + \frac{1}{2} \gamma^0 \partial_0 \gamma_{ij}$$

da cui, associando il primo termine col terzo e il secondo col quarto, si ricava infine

$$(13.3) \quad \mathfrak{S}_{\Sigma\Sigma}(\Delta_i \gamma_j) = \frac{1}{2} \gamma_0 \left(\tilde{\partial}_i \frac{\gamma_j}{\gamma_0} - \tilde{\partial}_j \frac{\gamma_i}{\gamma_0} \right) + \frac{1}{2} \gamma^0 \partial_0 \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{\mathfrak{Q}}_{ij} + \frac{1}{2} \gamma^h \partial_h \gamma_{ij}$$

espressione nella quale figura il tensore antisimmetrico $\tilde{\mathfrak{Q}}_{ij}$ che nel precedente numero abbiamo chiamato il tensore vortice spaziale ed un tensore spaziale simmetrico, $\frac{1}{2} \gamma^0 \partial_0 \gamma_{ij} \equiv \frac{1}{2} \gamma^h \partial_h \gamma_{ij}$, che dovremo esaminare meglio più avanti (n. 14).

A semplice titolo di controllo osserviamo che la (13.3) consente di calcolare in modo immediato la proiezione $\Sigma\Sigma$ del tensore $\mathfrak{Q}_{ij} = \partial_i \gamma_j - \partial_j \gamma_i = \Delta_i \gamma_j - \Delta_j \gamma_i$, ottenendo

$$\mathfrak{S}_{\Sigma\Sigma}(\mathfrak{Q}_{ij}) = \frac{1}{2} (\tilde{\mathfrak{Q}}_{ij} - \tilde{\mathfrak{Q}}_{ji}) = \tilde{\mathfrak{Q}}_{ij}$$

in accordo con la (12.4).

Proiezione- $\Sigma\Theta$. Tale proiezione, come si è già detto, è nulla, stante il carattere puramente spaziale del secondo indice:

$$(13.4) \quad \mathfrak{S}_{\Sigma\Theta}(\bar{\nabla}_i \gamma_j) = 0.$$

Proiezione- $\Theta\Sigma$. Operando solamente sul primo indice, dato il carattere puramente spaziale del secondo, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\Theta\Sigma}(\bar{\nabla}_i \gamma_j) &= -\gamma_i \gamma^r \bar{\nabla}_r \gamma_j = -\gamma_i \gamma^0 [\partial_0 \gamma_j - (o_j, h) \gamma^h] \\ &= -\gamma_i \gamma^0 [\partial_0 \gamma_j - \partial_j \gamma_0] \\ &= -\gamma_i \gamma^r \mathfrak{Q}_{rj}. \end{aligned}$$

In definitiva risulta:

$$(13.5) \quad \begin{aligned} \mathfrak{S}_{\Theta\Sigma}(\bar{\nabla}_i \gamma_j) &= -\gamma_i \gamma^r \mathfrak{Q}_{rj} \\ &= -\gamma_i c_j \end{aligned}$$

che coincide con la proiezione- $\Theta\mathfrak{Q}$ del tensore $\mathfrak{Q}_{ij}$.

Proiezione- $\Theta\Theta$. Anche questa proiezione si è già detto essere nulla, a causa del carattere puramente spaziale del secondo indice di $\Delta_i \gamma_j$.

La decomposizione naturale del tensore $\Delta_i \gamma_j$ può allora così riassumersi

$$(13.6) \quad \begin{aligned} \Delta_i \gamma_j &= \frac{1}{2} \tilde{\mathfrak{Q}}_{ij} + \frac{1}{2} \gamma^h \partial_h \gamma_{ij} - \gamma_i \gamma^r \mathfrak{Q}_{rj} \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\mathfrak{Q}}_{ij} + \gamma^h \partial_h \gamma_{ij}) - \gamma_i c_j. \end{aligned}$$

14. - *Proiezioni naturali del tensore di Killing*: $K_{ij} \equiv \nabla_i \gamma_j + \nabla_j \gamma_i$. - Un altro tensore ben noto, relativo ad una generica congruenza C_0 , e della più grande importanza, è il tensore doppio simmetrico $K_{ij} = \nabla_i \gamma_j + \nabla_j \gamma_i$, al quale sembra ben appropriato il nome di *tensore di Killing* (cfr. [10] [6]). Come è ben noto, l'annullarsi identico del tensore K_{ij} esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè la congruenza C_0 definisca in V_{n+1} un gruppo di isometrie (a un parametro).

Le proiezioni naturali di detto tensore si ottengono immediatamente dalle analoghe proiezioni del tensore $\nabla_i \gamma_j$ (cfr. n. precedente). Ecco quel che si ottiene:

Proiezione- $\Sigma\Sigma$. Se prima ancora di applicare i risultati del n. precedente si applica ai due indici di K_{ij} la regola formale di proiezione su Σ , si ottiene

$$(14.1) \quad \mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}(\nabla_i \gamma_j + \nabla_j \gamma_i) \equiv \tilde{K}_{ij} = (\partial_i^h + \gamma_i \gamma^h) \nabla_h \gamma_j + (\partial_j^k + \gamma_j \gamma^k) \nabla_k \gamma_i = \\ = \nabla_i \gamma_j + \nabla_j \gamma_i + \gamma_i \gamma^h \nabla_h \gamma_j + \gamma_j \gamma^h \nabla_h \gamma_i$$

ove all'ultimo membro si riconosce il tensore spaziale simmetrico introdotto in relatività da BORN fin dal 1909 (cfr. BORN [1], SYNGE [17] SALZMANN e TAUB [16] e molti altri autori). Conformemente alle nostre convenzioni generali noi indicheremo tal tensore anche con la notazione $\tilde{K}_{ij}$, attribuendogli nel contempo il nome di *tensore spaziale di Born*. Il suo annullarsi identico, meno restrittivo dell'annullarsi identico dell'intero tensore di KILLING K_{ij} , esprime che il moto fluido individuato dalla congruenza C_0 delle linee x^0 è *rigido* secondo BORN ([1]) cioè la costanza della distanza spaziale tra due qualunque linee x^0 infinitamente vicine (cfr. SYNGE [17] p. 36). Nel caso che esso non sia identicamente nullo, esso può ben interpretarsi come tensore di deformazione del fluido C_0 , ed è proprio su tale tensore che si fondano i vari tentativi (HERGLOTZ [9], SYNGE [18], BENVENUTI ⁽¹⁾) di una teoria relativistica della elasticità.

Venendo ora ad una più precisa esplicitazione della $\mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}(K_{ij})$ si riconosce immediatamente, in base alla (13.3), e all'antisimmetria del tensore vortice spaziale Ω_{ij} , l'espressione semplicissima

$$(14.2) \quad \mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}(K_{ij}) \equiv \tilde{K}_{ij} = \gamma^h \partial_h \gamma_{ij}.$$

Su tale espressione si può ben osservare come l'annullarsi identico del tensore di BORN, equivalga in sostanza all'indipendenza da x^0 del tensore

(1) P. BENVENUTI, tesi di laurea (1956).

metrico spaziale γ_{ij} (che non è la stessa cosa della stazionarietà) indipendenza da x^0 del tensore metrico spazio temporale g_{ij} .

Quanto alle altre proiezioni naturali si ha:

Proiezione- $\Sigma\Theta$:

$$(14.3) \quad \mathfrak{F}_{\Sigma\Theta}(K_{ij}) = -c_i \gamma_j.$$

Proiezione- $\Theta\Sigma$:

$$(14.4) \quad \mathfrak{F}_{\Theta\Sigma}(K_{ij}) = -\gamma_i c_j.$$

Proiezione- $\Theta\Theta$:

$$(14.5) \quad \mathfrak{F}_{\Theta\Theta}(K_{ij}) = 0.$$

Come nei precedenti numeri, c_i rappresenta il vettore di curvatura (ortogonale a γ) delle linee x^0 .

La decomposizione naturale del tensore di KILLING si esplicita in definitiva così:

$$(14.6) \quad K_{ij} = \tilde{K}_{ij} - c_i \gamma_j - \gamma_i c_j.$$

15. *Alcune proprietà differenziali della congruenza C_0 .* Nei tensori presi in considerazione nei precedenti numeri, o in alcune loro proiezioni naturali sono contenute notevoli proprietà differenziali della congruenza C_0 , inerenti cioè al modo di variare di γ da un punto all'altro di V_{n+1} . Si tratta di proprietà note, ma ci sembra che la formulazione attuale dia loro una sistemazione più organica e stabilisca tra esse un naturale collegamento.

Congruenze normali. Condizione necessaria e sufficiente perchè C_0 sia una congruenza *normale* è l'annullarsi identico del suo vortice spaziale

$$(15.1) \quad \mathfrak{F}_{\Sigma\Sigma}(\Omega_{ij}) = \mathfrak{Q}_{ij} = \gamma_0 \left(\tilde{\partial}_i \frac{\gamma_j}{\gamma_0} - \tilde{\partial}_j \frac{\gamma_i}{\gamma_0} \right) = 0.$$

Il teorema, in forma sostanzialmente equivalente, è dovuto a WEISSENHOFF (cfr. [19] e [14] p. 250). Per riconoscerne la validità ricordiamo che tradizionalmente (cfr. LEVI-CIVITA, [11] p. 281) la *normalità* di una congruenza si esprime mediante l'annullarsi identico del tensore triplo

$$(15.2) \quad \gamma_i \Omega_{jk} + \gamma_j \Omega_{ki} + \gamma_k \Omega_{ij} = 0$$

col solito significato di γ_i e Ω_{ij} . Ora è semplice riconoscere la completa equivalenza delle condizioni (15.1) e (15.2). Infatti se nei vari termini della

(15.2) il tensore Ω_{ij} viene decomposto nei suoi componenti naturali (cfr. la (12.8)) si ottiene successivamente

$$\gamma_i(\tilde{\Omega}_{jk} + c_j\gamma_k - \gamma_j c_k) + \gamma_j(\tilde{\Omega}_{ki} + c_k\gamma_i - \gamma_k c_i) + \gamma_k(\tilde{\Omega}_{ij} + c_i\gamma_j - \gamma_i c_j) = 0$$

cosicchè la (15.2) appare completamente equivalente all'altra condizione

$$(15.3) \quad \gamma_i \tilde{\Omega}_{jk} + \gamma_j \tilde{\Omega}_{ki} + \gamma_k \tilde{\Omega}_{ij} = 0.$$

Di qui, moltiplicando i due membri per γ^i (o per γ^j o per γ^k) e saturando l'indice muto i (o rispettivamente j o k) discende $\tilde{\Omega}_{jk} = 0$, cioè esattamente la (15.1). Viceversa dalla (15.1) discende immediatamente la (15.3) e quindi la condizione classica (15.2).

Congruenze geodetiche. Condizione necessaria e sufficiente affinchè la congruenza C_0 sia una congruenza geodetica, affinchè cioè siano geodetiche le linee che la costituiscono, è che sia nulla la proiezione- $\Sigma\Theta$ (e quindi anche la proiezione- $\Theta\Sigma$) del suo tensore vortice Ω_{ij} :

$$(15.4) \quad \mathfrak{F}_{\Sigma\Theta}(\Omega_{ij}) = 0.$$

Infatti dalla (12.5) segue che $\mathfrak{F}_{\Sigma\Theta}(\Omega_{ij})$ si annulla allora e allora soltanto che si annulla c_i , vettore di curvatura delle linee x^0 .

Congruenze geodetiche e normali. Associando le due osservazioni precedenti si ricava che condizione necessaria e sufficiente perchè la congruenza C_0 sia insieme normale e geodetica è che sia nullo identicamente il suo vettore vortice:

$$(15.5) \quad \Omega_{ij} = 0.$$

D'altro canto la condizione ora scritta dà anche quanto occorre e basta perchè il campo di versori γ sia un campo di gradienti: $\gamma = \text{grad } f$. Si tratta evidentemente di un campo di gradienti assai particolare, nel quale due qualunque superficie equipotenziali sono superficie *parallele* (cioè tali che le geodetiche normali ad una di esse sono normali anche all'altra, i segmenti intercettati dalle due superficie sulle varie geodetiche avendo tutti una medesima lunghezza).

Congruenze definiti movimenti rigidi. Segue da quanto si disse al n. 14 che condizione necessaria e sufficiente perchè il movimento continuo definito dalla congruenza C_0 sia rigido secondo BORN, perchè cioè la distanza tra due linee x^0 qualsiasi infinitamente vicine, misurata su una comune normale, rimanga costante lungo le linee medesime è che sia ovunque nullo il tensore di BORN:

$$(15.6) \quad \mathfrak{F}_{\Sigma\Sigma}(K_{ij}) \equiv \tilde{K}_{ij} \equiv \gamma^0 \partial_0 \gamma_{ij} = 0.$$

Quanto all'annullarsi identico della proiezione- $\Sigma\Theta$ (o $\Theta\Sigma$) di K_{ij} essa caratterizza, proprio come l'annullarsi identico di $\tilde{Q}_{ij}$, le congruenze geodetiche.

Congruenze rigide e geodetiche insieme. Sono caratterizzate, in base a quanto precede, dall'annullarsi identico dell'intero tensore di KILLING:

$$(15.7) \quad K_{ij} \equiv \nabla_i \gamma_j + \nabla_j \gamma_i = 0.$$

D'altro canto, come è ben noto, la condizione (15.7) caratterizza quelle congruenze che definiscono un gruppo di isometrie in V_{n+1} (cfr. EISENHART [6], LICHNEROWICZ [13]). Noi diremo che l'annullarsi identico del tensore di KILLING caratterizza i moti rigidi e geodetici.

Moti rigidi traslatori uniformi. Associando insieme le considerazioni che precedono, si riconosce che l'annullarsi identico del tensore $\nabla_i \gamma_j$, che implica insieme l'annullamento di K_{ij} e di Ω_{ij} caratterizza quei moti che sono ad un tempo irrotazionali, rigidi e geodetici:

$$(15.8) \quad \nabla_i \gamma_j = 0$$

Li chiameremo *moti traslatori uniformi*.

Quanto precede mi sembra mostrare a sufficienza come il criterio della decomposizione naturale dei principali tensori differenziali associati ad una congruenza del genere tempo consenta una sistematica classificazione dei possibili moti fluidi. Benchè non si tratti di risultati nuovi, mi sembra non priva di interesse questa loro più organica sistemazione.

IV. - DERIVAZIONE TRASVERSA, ORDINARIA O COVARIANTE, DI PARTICOLARI CAMPI TENSORIALI ED INTERVENTO DEI TENSORI DIFFERENZIALI CARATTERISTICI DELLA CONGRUENZA DI RIFERIMENTO.

Riprendiamo qui il calcolo esplicito, iniziato al precedente n. 8, della derivata covariante trasversa di vari campi di tensori puramente spaziali, le cui espressioni esplicite acquistano snellezza ed espressività mediante l'intervento dei tensori differenziali caratteristici della congruenza principale di riferimento. Tale intervento esplicito consente infatti di distinguere nelle espressioni medesime ciò che è dovuto alla congruenza di riferimento e ciò che invece è dovuto al campo tensoriale che si deriva.

Come vedremo, anche le regole puramente formali relative alla derivazione trasversa sono talora subordinate alla scelta della congruenza principale di riferimento. Ne daremo subito un esempio.

16. *Condizioni per l'invertibilità di due derivazioni trasverse (ordinarie) successive.* Vedemmo fin dal n. 7 che due derivazioni trasverse successive non sono generalmente invertibili. Stabiliremo ora sotto quali condizioni l'invertibilità sussiste.

Data una qualsiasi funzione numerica $f(x^i)$ (sia essa o no uno scalare)

consideriamone, formalmente, la derivata trasversa seconda $\tilde{\partial}_\beta \tilde{\partial}_\alpha f$ che si esplicita così:

$$(16.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\partial}_\beta \tilde{\partial}_\alpha f &= \left(\partial_\beta - \frac{\gamma_\beta}{\gamma_0} \partial_0 \right) \left(\partial_\alpha f - \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0} \partial_0 f \right) = \\ &= \partial_\beta \partial_\alpha f - \frac{\gamma_\beta}{\gamma_0} \partial_0 \partial_\alpha f - \left(\partial_\beta \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0} - \frac{\gamma_\beta}{\gamma_0} \partial_0 \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0} \right) \partial_0 f - \\ &\quad - \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0} \partial_\beta \partial_0 f + \frac{\gamma_\alpha \gamma_\beta}{\gamma_0^2} \partial_0^2 f. \end{aligned}$$

In modo analogo, invertendo l'ordine delle due derivazioni si ottiene:

$$(16.2) \quad \begin{aligned} \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\partial}_\beta f &= \partial_\alpha \partial_\beta f - \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0} \partial_0 \partial_\beta f - \left(\partial_\alpha \frac{\gamma_\beta}{\gamma_0} - \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0} \partial_0 \frac{\gamma_\beta}{\gamma_0} \right) \partial_0 f - \\ &\quad - \frac{\gamma_\beta}{\gamma_0} \partial_\alpha \partial_0 f + \frac{\gamma_\beta \gamma_\alpha}{\gamma_0^2} \partial_0^2 f. \end{aligned}$$

Dalle due espressioni per differenza si ottiene

$$(16.3) \quad (\tilde{\partial}_\beta \tilde{\partial}_\alpha - \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\partial}_\beta) f = \left(\tilde{\partial}_\alpha \frac{\gamma_\beta}{\gamma_0} - \tilde{\partial}_\beta \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0} \right) \partial_0 f.$$

Se ne conclude che l'ordine di due derivazioni trasverse successive non influisce sul risultato *se il moto di riferimento è irrotazionale* (spazialmente) oppure *se $f(x)$ non dipende da x^0* (f stazionaria lungo ogni linea di riferimento $x^0 = \text{var.}$).

17. *Condizione per l'invertibilità di $\tilde{\partial}_\alpha$ e ∂_0 .* Applicando successivamente ad una funzione $f(x^i)$ i due operatori ∂_0 e $\tilde{\partial}_\alpha$ si ha:

$$(17.1) \quad \tilde{\partial}_\alpha \partial_0 f = \partial_\alpha \partial_0 f - \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0} \partial_0^2 f.$$

Applicando i due operatori in ordine inverso si ha invece:

$$(17.2) \quad \partial_0 \tilde{\partial}_\alpha f = \partial_0 \partial_\alpha f - \partial_0 \left(\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0} \right) \partial_0 f - \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0} \partial_0^2 f.$$

Per differenza si ottiene:

$$(17.3) \quad \tilde{\partial}_\alpha \partial_0 f - \partial_0 \tilde{\partial}_\alpha f = \partial_0 \left(\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0} \right) \partial_0 f.$$

Ne concludiamo che gli operatori differenziali ∂_0 e $\tilde{\partial}_\alpha$ sono commutabili soltanto se la f è stazionaria in C_0 (cioè se non dipende da x^0), oppure se è stazionario il « potenziale gravitazionale vettore » $\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_0}$.

18. *Proiezioni naturali di $\nabla_i \tau_j$ ($\tau_j \in \Theta_x$).* Sia $\tau_j = \tau_{\gamma_j}$ un generico campo di

vettori puramente temporali. Considerata la sua derivata covariante $\nabla_i \tau_j$, calcoliamone le sue quattro proiezioni naturali.

Proiezione- $\Sigma\Sigma$:

$$(18.1) \quad \mathfrak{F}_{\Sigma\Sigma}(\nabla_i \tau_j) = \gamma_i^r \gamma_j^s \partial_r \tau \cdot \gamma_s + \tau \mathfrak{F}_{\Sigma\Sigma}(\nabla_i \gamma_j) = \\ = \tau \mathfrak{F}_{\Sigma\Sigma}(\nabla_i \gamma_j).$$

Di qui, tenendo conto della (13.3) si trae:

$$(18.2) \quad \mathfrak{F}_{\Sigma\Sigma}(\nabla_i \tau_j) = \frac{1}{2} \tau (\gamma^h \partial_0 \gamma_{ij} + \tilde{Q}_{ij}) = \\ = \frac{1}{2} \tau (\tilde{K}_{ij} + \tilde{Q}_{ij}).$$

Si osservi come la proiezione ora calcolata dipenda oltre che dal campo di vettori τ_j , dalla congruenza di riferimento C_0 . Se questa, ad esempio, è ad un tempo rigida e irrotazionale, la proiezione (18.2) si annulla identicamente, qualunque sia il campo dei vettori puramente temporali τ_j .

Proiezione- $\Sigma\Theta$:

$$(18.3) \quad \mathfrak{F}_{\Sigma\Theta}(\nabla_i \tau_j) = -\gamma_i^r \gamma_j^s \partial_r \tau \cdot \gamma_s + \tau \mathfrak{F}_{\Sigma\Theta}(\nabla_i \gamma_j) = \\ = \tilde{\partial}_i \tau \cdot \gamma_j + \tau \mathfrak{F}_{\Sigma\Theta}(\nabla_i \gamma_j).$$

Se si tien presente la (13.4) si conclude:

$$(18.4) \quad \mathfrak{F}_{\Sigma\Theta}(\nabla_i \tau_j) = \tilde{\partial}_i \tau \cdot \gamma_j.$$

Proiezione- $\Theta\Sigma$:

$$(18.5) \quad \mathfrak{F}_{\Theta\Sigma}(\nabla_i \tau_j) = \gamma_i^r \gamma_j^s \partial_r \tau \cdot \gamma_s + \tau \mathfrak{F}_{\Theta\Sigma}(\nabla_i \gamma_j) = \\ = \tau \mathfrak{F}_{\Theta\Sigma}(\nabla_i \gamma_j)$$

e, ricordando la (13.5),

$$(18.6) \quad \mathfrak{F}_{\Theta\Sigma}(\nabla_i \tau_j) = -\tau \gamma_i c_j.$$

Tal proiezione si annulla identicamente, qualunque sia il campo dei vettori puramente temporali τ_j , se C_0 è una congruenza geodetica.

Proiezione- $\Theta\Theta$:

$$(18.7) \quad \mathfrak{F}_{\Theta\Theta}(\nabla_i \tau_j) = \gamma_i \gamma_j \gamma^r \gamma^s \partial_r \tau \cdot \gamma_s + \tau \mathfrak{F}_{\Theta\Theta}(\nabla_i \gamma_j).$$

Ciò permette di concludere:

$$(18.8) \quad \mathfrak{F}_{\Theta\Theta}(\nabla_i \tau_j) = -\gamma^0 \partial_0 \tau \cdot \gamma_i \gamma_j = -\gamma^r \partial_r \tau \cdot \gamma_i \gamma_j.$$

La $\mathfrak{F}_{\Theta\Theta}(\nabla_i \tau_j)$ si annulla allorchè il campo τ_j è stazionario, cioè allorchè τ_j è costante in modulo lungo ogni linea di C_0 .

19. *Proiezioni naturali di $\nabla_i s_j$ ($s_j \in \Sigma_x$).* Calcoliamo ora le quattro proiezioni naturali del tensore $\nabla_i s_j$ nell'ipotesi che s_j sia un campo di vettori puramente spaziali. L'ipotesi equivale a supporre, come ben sappiamo,

$$(19.1) \quad s_0 = 0, \quad s^0 = -\frac{\gamma_x s^x}{\gamma_0} \equiv \gamma^0 \gamma_x s^x.$$

Proiezione- $\Sigma\Sigma$. Tal proiezione è già stata calcolata al n. 8 col seguente risultato (cfr. la (8.4)):

$$(19.2) \quad \mathfrak{S}_{\Sigma\Sigma}(\nabla_i s_j) = \tilde{\nabla}_i^* s_j = \tilde{\partial}_i s_j - \left\{ \begin{matrix} h \\ i j \end{matrix} \right\} s_h$$

$\tilde{\nabla}_i^*$ indicando l'operazione di derivazione covariante trasversa. Occupiamoci ora delle altre proiezioni.

Proiezione- $\Sigma\Theta$:

Delle altre proiezioni naturali di $\nabla_i s_j$ ci limitiamo a dare i risultati, omettendo i calcoli, piuttosto lunghi. Ecco le espressioni finali

$$(19.3) \quad \mathfrak{S}_{\Sigma\Theta}(\nabla_i s_j) = -\frac{1}{2}(\tilde{K}_{ir} + \tilde{Q}_{ir})s^r \gamma_j.$$

$$(19.4) \quad \mathfrak{S}_{\Theta\Sigma}(\nabla_i s_j) = \gamma_i \left[\gamma^h (\partial_j s_h - \partial_h s_j) + \frac{1}{2}(\tilde{K}_{jr} + \tilde{Q}_{jr})s^r \right].$$

$$(19.5) \quad \mathfrak{S}_{\Theta\Theta}(\nabla_i s_j) = (\Omega_{rh} s^r \gamma^h) \gamma_i \gamma_j = -c_r s^r \gamma_i \gamma_j.$$

20. *Proiezioni naturali di $\nabla_i s_{jm}$ ($s_{jm} \in \Sigma_x \otimes \Sigma_x$).* Diamo qui appresso la decomposizione naturale del tensore triplo $\nabla_i s_{jm}$, s_{jm} essendo un generico campo di vettori puramente spaziali ($s_{j0} = 0$, $s_{0m} = 0$). Omettiamo anche ora, per brevità, i lunghi calcoli.

Ecco le otto proiezioni naturali di $\nabla_i s_{jm}$:

$$(20.1) \quad \mathfrak{S}_{\Sigma\Sigma\Sigma}(\nabla_i s_{jm}) = \tilde{\nabla}_i^* s_{jm} \equiv \tilde{\partial}_i s_{jm} - \left\{ \begin{matrix} h \\ i j \end{matrix} \right\} s_{hm} - \left\{ \begin{matrix} h \\ i m \end{matrix} \right\} s_{jh}.$$

$$(20.2) \quad \mathfrak{S}_{\Sigma\Sigma\Theta}(\nabla_i s_{jm}) = \frac{1}{2} \tilde{Q}_{ik} s_j^k \gamma_m + \frac{1}{2} \gamma^0 \partial_0 \gamma_{ik} s_j^k \gamma_m.$$

$$(20.3) \quad \mathfrak{S}_{\Sigma\Theta\Sigma}(\nabla_i s_{jm}) = \frac{1}{2} \tilde{Q}_{ik} \gamma_j s_m^k + \frac{1}{2} \gamma^0 \partial_0 \gamma_{ik} s_m^k \gamma_j.$$

$$(20.4) \quad \mathfrak{S}_{\Theta\Sigma\Sigma}(\nabla_i s_{jm}) = -\gamma_i \gamma^0 \partial_0 s_{jm} + 3\gamma_i \gamma_j c_h s_m^h + 3\gamma_i \gamma_m c_h s_j^h + \frac{1}{2} \gamma_i \tilde{K}_{jh} s_m^h + \\ + \frac{1}{2} \gamma_i \tilde{K}_{mh} s_j^h + \gamma_i \tilde{Q}_{hj} s_m^h + \gamma_i \tilde{Q}_{hm} s_j^h.$$

$$(20.5) \quad \mathcal{B}_{\Theta\Theta\Sigma}(\nabla_i s_{jm}) = -\gamma_i \gamma_j \gamma^r \Omega_{r h} s^h_m = -\gamma_i \gamma_j c_h s^h_m.$$

$$(20.6) \quad \mathcal{B}_{\Theta\Sigma\Theta}(\nabla_i s_{jm}) = -\gamma_i c_h s_j^h \gamma_m.$$

$$(20.7) \quad \mathcal{B}_{\Sigma\Theta\Theta}(\nabla_i s_{jm}) = 0.$$

$$(20.8) \quad \mathcal{B}_{\Theta\Theta\Theta}(\nabla_i s_{jm}) = 0.$$

21. - *Considerazioni conclusive.* - I calcoli sistematici che precedono ci mettono in condizione di svolgere in modo pressochè automatico le seguenti operazioni:

a) decomporre in modo canonico (naturale) un qualsiasi vettore o tensore.

b) calcolare le proiezioni naturali della derivata covariante di un qualsiasi campo di vettori o tensori doppi, previa applicazione della decomposizione medesima al vettore o tensore di partenza. Infatti questa operazione preventiva permette di ricondursi sempre al caso in cui la derivazione covariante operi su vettori puramente spaziali o puramente temporali, ovvero su tensori doppi puramente spaziali.

Il lettore non avrà poi difficoltà ad estendere quanto precede al caso che l'operazione di derivazione covariante operi su tensori di ordine superiore al secondo.

Ritengo con quanto precede di avere a sufficienza illustrato, anche nella sua parte esecutiva, una tecnica che, per il suo carattere invariantivo di fronte al più generale cambiamento interno di coordinate, e per la sua semplicità formale, può apportare utili servigi sia in geometria riemanniana sia, più specificamente, in relatività generale.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BORN, M., « Ann. Physik » (4), **30**, 1 (1909).
- [2] CATTANEO, C., « Nuovo Cimento », **10**, 318 (1958).
- [3] — — « Nuovo Cimento », **11**, 733 (1959).
- [4] — — « Comptes Rendus », **248**, 197 (1959).
- [5] — — « Nuovo Cimento », **12** (giugno 1959).
- [6] EISENHART, L. P., *Riemannian Geometry*, « Princeton University Press », Princeton (1949).
- [7] FINZI, B. e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, Bologna (1949).
- [8] GÖDEL, K., Proc. of the Sixth Intern. Congr. of Math. (Amer. Math. Soc., Providence, 1950), vol. 1, p. 175.

- [9] HERGLOTZ, G., « Ann. Physik » (4), **31**, 393 (1909-1910).
 - [10] KILLING, W., « Journal für die reine und angew. Math. » (Crelle), **109**, 121 (1892).
 - [11] LEVI-CIVITA, T., *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Stock, Roma (1925).
 - [12] LICHNEROWICZ, A., *Éléments de Calcul tensoriel*, Colin, Paris (1955).
 - [13] — — *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, (1955).
 - [14] MOLLER, C., *The theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford (1952).
 - [15] NOETHER, F., « Ann. Physik », **31**, 919 (1909-1910).
 - [16] SALZMAN, G. e A. H. TAUB, « Phys. Rev. », **95**, 1659 (1954).
 - [17] SYNGE, J. L., *Relativity: The Special Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1956).
 - [18] — — *The Geometry of Space-Time (Eight Lectures on Relativity)* in « Vedute e problemi attuali in relatività generale », C.I.M.E., Istituto Matematico dell'Università di Roma (1958).
 - [19] V. WEYSSENHOFF, J., « Bull. Acad. Polonaise », Ser. A, 252 (1937).
-