

Sul problema generale dell'equilibrio spontaneo di una massa fluida gravitante e ruotante.

Memoria di DEMORE QUILGHINI (a Firenze) (4)

A Giovanni Sansone nel suo 70^{mo} compleanno

Sunto - *Si studia, da un punto di vista generale, l'equilibrio relativo di una massa fluida gravitante isolata nello spazio e in rotazione stazionaria rigida intorno ad un asse e si determinano, in queste ipotesi, le condizioni alle quali devono soddisfare la velocità di rotazione ω , la pressione p e la densità ρ . Si fanno infine alcune applicazioni dei risultati ottenuti e si ritrovano, come casi particolari, alcuni classici risultati noti.*

§ 1. - Introduzione.

In un recente lavoro [1] (2) ho studiato l'equilibrio di una massa costituita da un fluido barotropico, da un fluido cioè in cui la pressione p e la densità ρ , in un generico punto P della massa, sono legate tra loro da una relazione del tipo:

$$(1.1) \quad p = p(\rho), \quad (\text{equazione di stato}).$$

Nell'ipotesi che le forze di massa agenti sulle particelle fluide siano le mutue attrazioni gravitazionali di tipo newtoniano, ho determinato le condizioni alle quali deve soddisfare la funzione $p = p(\rho)$ se il sistema fluido sta in una configurazione di equilibrio spontaneo, in una configurazione cioè in cui la massa fluida è tutta distribuita al finito con pressione nulla sulla superficie che la limita.

Sempre nell'ipotesi che le forze di massa siano le mutue attrazioni gravitazionali, e per particolari determinazioni della (1.1), il problema era già stato studiato da altri autori (H. LEMKE [2], R. EMDEM [3]) e i risultati ottenuti in [1] costituiscono la naturale generalizzazione di questo tipo di problema.

La questione può essere generalizzata in modo molto più ampio, e argomento di questa memoria è appunto lo studio dell'equilibrio di una massa fluida prescindendo dall'esistenza di una equazione di stato del tipo (1.1) e, quando, tra le forze di massa compare, oltre alle mutue attrazioni gravitazionali, anche la forza centrifuga dovuta ad un moto di rotazione stazionario rigido della massa fluida intorno ad un asse.

Poichè non si fanno a priori ipotesi sul legame pressione-densità, gli sforzi

(4) Istituto Matematico "U. Dini", via Alfani, 81 - Firenze.

(2) I numeri in neretto ed in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

interni, definiti dalla pressione, si possono pensare originati, punto per punto, da quali si vogliono fenomeni fisici; in particolare siamo svincolati dal supporre che la temperatura T sia la stessa in ogni punto della massa fluida.

In tal modo si realizza, con sufficiente approssimazione, lo schema di una massa stellare in rotazione intorno ad un asse.

Ha quindi interesse nell'astrofisica teorica studiare l'equilibrio di un tale sistema fluido al fine di determinare le condizioni alle quali necessariamente devono soddisfare la pressione p , la densità ρ e la velocità di rotazione ω se la massa fluida è totalmente distribuita al finito con pressione nulla sulla superficie che la limita.

A questo scopo dimostreremo che, in condizioni di equilibrio relativo, con riferimento ad una terna $T(O; x, y, z)$ solidale col sistema fluido S esiste una famiglia di superfici $\mu = \mu(x, y, z)$, definite per ogni valore del parametro μ in uno opportuno intervallo finito, che godono della proprietà di essere isobariche, isopicnotiche ed equipotenziali per il potenziale delle forze di massa e che stratificano completamente il campo occupato dal sistema S .

Nel caso studiato in [1] la configurazione di equilibrio è nota a priori, ed è costituita dalla famiglia di superfici sferiche concentriche col centro nel centro di massa del sistema. Quindi in questo caso il problema è unidimensionale poichè lo stato meccanico del sistema in un punto P è funzione soltanto della distanza di P dal centro.

Qui, senza affrontare il problema di determinare le possibili configurazioni di equilibrio per un sistema materiale fluido in rotazione intorno ad un asse, ci limiteremo ad assicurare l'esistenza della famiglia di superfici di cui sopra, ed a indicare alcune proprietà generali che ci permetteranno di rendere unidimensionale il problema come nel caso studiato in [1].

In particolare, sfruttando il teorema di GREENN-OSTROGRAWSKY, scriveremo la equazione differenziale alle derivate parziali che definisce, a partire da assegnate condizioni al contorno, il potenziale specifico delle forze di massa, sotto forma di equazione differenziale alle derivate totali e daremo una forma integrale dell'equazione della fluido-statica che ci permetterà di dare le condizioni per l'equilibrio spontaneo relativo.

Successivamente, dopo aver dato alcuni esempi e fatto alcune applicazioni dei risultati trovati, mostreremo che il problema studiato in [1] è un caso particolare di questo.

Studieremo infine il caso in cui il fluido è retto da una equazione di stato del tipo:

$$(2.1) \quad p = p(\rho, T),$$

essendo $T = T(P)$ la temperatura.

§ 2. La configurazione di equilibrio. Sue proprietà.

Sia S un sistema materiale fluido distribuito totalmente al finito, gravitante e ruotante uniformemente, con velocità di rotazione ω , intorno ad un asse.

Supponiamo che, con riferimento ad una terna, che ha un asse coincidente con l'asse di rotazione di S , e che ruota, intorno a quest'asse, con velocità ω , il sistema S sia in equilibrio (equilibrio relativo) per effetto delle mutue attrazioni gravitazionali, delle forze centrifughe e di una pressione p_z , costante da punto a punto, esercitata dall'esterno sulla superficie Σ che lo limita.

Per fissare le locuzioni diremo che il sistema fluido S è in equilibrio relativo spontaneo se $p_z = 0$, invece diremo semplicemente che è in equilibrio relativo se $p_z \neq 0$.

Nelle ipotesi fatte il sistema di pressioni esercitate dall'esterno su Σ è necessariamente equilibrato dato che p_z è costante da punto a punto della superficie Σ che è chiusa e tutta al finito. Perciò, per il teorema del moto del centro di massa, l'asse di rotazione deve necessariamente essere centrale. Per questo assumeremo come sistema mobile di riferimento una terna cartesiana ortogonale $T(0; x, y, z)$ con l'origine 0 coincidente col centro di massa e l'asse z con l'asse di rotazione di S , e che ruota, intorno a z , con velocità ω .

Prima di passare allo studio della famiglia di superfici di cui abbiamo detto al § 1, riportiamo l'enunciato di un teorema di L. LICHTENSTEIN [4] ed alcune importanti conseguenze che ci saranno utili nel seguito.

Ogni sistema materiale fluido in rotazione intorno ad un asse e in equilibrio relativo è convesso e distribuito con simmetria geometrica e materiale rispetto al piano centrale normale all'asse di rotazione.

Per ovvie ragioni questo piano prende il nome di piano equatoriale, e, nelle nostre posizioni, coincide col piano $z = 0$.

A causa della convessità rispetto al piano equatoriale la superficie Σ , che, come dimostreremo, è equipotenziale per il potenziale specifico della gravità $V = V(P)$, è incontrata, come ogni altra superficie equipotenziale, al più in due punti da ogni parallela all'asse di rotazione. Perciò il sistema S non può essere costituito da parti sovrapposte rispetto al piano equatoriale e inoltre non vi possono essere cavità interne. Invece, come conseguenza della simmetria geometrica e materiale, segue che $V(P)$ cresce verso il piano equatoriale e $\text{grad } V(P)$, salvo lo zero all'infinito sull'asse di rotazione, può annullarsi solo su questo piano; e in questi zeri per $\text{grad } V(P)$ il potenziale è necessariamente o massimo o stazionario, mai minimo. Inoltre, poichè esternamente alle masse si ha, come vedremo al § 3, $\Delta_2 V(P) = 2\omega^2 > 0$, negli zeri di $\text{grad } V(P)$ esterni alle masse, e quindi sul piano equatoriale esternamente alla sezione equatoriale, compresi i punti del contorno di questa, $V(P)$ è stazionario. I massimi di $V(P)$ sono pertanto interni alla sezione equatoriale.

Un sistema S in equilibrio relativo può, in generale, essere costituito da più parti distinte, semplicemente o anche molteplicemente connesse.

Internamente ad ognuna delle parti di cui è formato S vi è almeno un massimo per $V(P)$ dato che la superficie che limita ciascuna parte è necessariamente equipotenziale e $V(P)$ cresce verso l'interno.

Tra le varie possibilità si presentano i casi, tra loro strutturalmente diversi, che internamente alle masse vi sia o un solo punto P_0 in cui il potenziale raggiunge il suo valore massimo, o una linea γ di punti in cui $V(P)$ assume lo stesso valore massimo. B. CALDONAZZO [5] ha dimostrato che se esiste una tale linea di punti di massimo per $V(P)$ essa è necessariamente chiusa.

Per semplicità di ragionamento e comodità di linguaggio, dato che il procedimento si estende anche a casi diversi, tanto per fissare le ipotesi, noi limiteremo il nostro studio ai casi in cui il sistema S è formato da una sola parte, semplicemente o anche molteplicemente connessa, ed internamente vi è o un massimo isolato P_0 o una linea chiusa γ di punti in cui il potenziale $V(P)$ assume lo stesso valore massimo.

Il potenziale specifico della gravità $V(P)$, essendo somma del potenziale specifico della gravitazione:

$$U(P) = f \int_S \frac{\rho(P')}{PP'} dS(P'), \quad (f \text{ costante gravitazionale}),$$

e del potenziale specifico:

$$\Omega(P) = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

della forza centrifuga, è una funzione continua e derivabile con derivate prime continue ovunque, perciò indicando con $\mathbf{n} = \mathbf{n}(P)$ il versore di grad $V(P)$, segue che \mathbf{n} è definito continuo ovunque salvo in P_0 o nei punti della linea γ dove è indeterminato.

Punto per punto il sistema fluido S è retto, in condizioni di equilibrio relativo spontaneo o no, dalla equazione della fluido-statica:

$$(1.2) \quad \text{grad } V(P) = \frac{1}{\rho(P)} \text{grad } p(P).$$

Da questa segue che anche la pressione p è una funzione del punto P continua, derivabile, crescente nel verso di \mathbf{n} , e quindi verso il piano equatoriale, cioè verso l'interno della massa fluida. La densità ρ , invece, può a priori essere discontinua, può cioè ammettere delle superfici, delle linee o dei punti di discontinuità; perciò dalla continuità di grad $V(P)$ segue dalla (1.2) la

possibilità per $\text{grad } p(P)$ di avere modulo discontinuo, mentre il suo versore, coincidendo con n , è necessariamente continuo. Infine la densità, oltre ad ammettere delle discontinuità, può, a priori, anche decrescere nel verso di n . Se facciamo l'ipotesi che ρ sia crescente nel verso di n si caratterizza in qualche modo lo stato fisico del fluido. Ovviamente se lo stato fisico del sistema è caratterizzato, punto per punto, soltanto dalla pressione p , dalla densità ρ e dalla temperatura T in condizioni stazionarie, allora, per il principio di ARCHIMEDE, la densità cresce verso l'interno o resta costante come nel caso dei liquidi. Nel nostro studio, salvo avvertenza in contrario prescindiamo da questa posizione.

Ciò premesso dimostriamo il teorema:

TEOREMA 1. *Se il sistema fluido S è in equilibrio relativo, internamente alle masse esiste una famiglia di superfici:*

$$(2.2) \quad \mu = \mu(x, y, z),$$

definite per ogni valore del parametro μ compreso tra 0 e μ^* , $0 < \mu^* < \infty$, che godono della proprietà di essere isobariche, isopicnotiche ed equipotenziali e che stratificano completamente il campo occupato dalle masse.

Infatti dalla (1.2) segue:

$$\text{rot} \left[\frac{1}{\rho(P)} \text{grad } p(P) \right] = 0$$

e da questa, in tutti i punti in cui esiste $\text{grad } \rho$, si ha

$$(\text{grad } \rho) \wedge (\text{grad } p) = 0.$$

Quest'ultima implica necessariamente [6] l'esistenza di una funzione:

$$\mu = \mu(x, y, z),$$

continua e derivabile almeno due volte rispetto alle variabili, tale che risulta:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} p &= p[\mu(x, y, z)], \\ \rho &= \rho[\mu(x, y, z)], \end{aligned}$$

in tutto il campo che contiene il punto P in cui si opera e in cui la densità ρ è derivabile. Dalle (3.2) segue che la superficie di equazione $\mu = \mu(x, y, z)$ è necessariamente isobarica ed isopicnotica.

Inoltre, poichè internamente alle masse non vi possono essere cavità, per ogni punto P interno alle masse passa una superficie isopicnotica e quindi

isobarica. Perciò, tenuto conto che la pressione p è una funzione continua del posto, segue l'esistenza di una famiglia di superfici definite al variare con continuità del parametro μ , basterà per questo che μ sia una qualunque funzione continua di p , tutte interne alle masse, che godono della proprietà di essere isobariche ed isopicnotiche. Poichè, a partire dalla continuità di p , abbiamo assunto la funzione $\mu = \mu(P)$ variabile con continuità, segue che la funzione $\rho = \rho[\mu(P)]$ può essere una funzione discontinua di μ , abbiamo infatti osservato che la densità può essere una funzione discontinua del posto. Poichè ad ogni valore del parametro μ corrisponde una superficie di equazione $\mu = \mu(x, y, z)$ segue che le eventuali discontinuità di ρ sono distribuite attraverso superfici isobariche ed isopicnotiche.

Abbiamo quindi dimostrato che è possibile definire una funzione $\mu = \mu(P)$ tale che in ogni punto P interno alle masse si ha $p = p(\mu)$ e $\rho = \rho(\mu)$. Adesso, tenuto conto che esiste la funzione $\frac{dp(\mu)}{d\mu}$ e che la funzione $\rho(\mu)$ ha al più discontinuità di prima specie, possiamo definire la funzione:

$$\mathfrak{S}(\mu) = \int \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{dp(\mu)}{d\mu} d\mu.$$

Per essa, in tutti i punti interni alle masse, si ha:

$$\text{grad}_P \mathfrak{S}(\mu) = \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{dp(\mu)}{d\mu} \text{grad}_P \mu = \frac{1}{\rho(P)} \text{grad}_P p(P),$$

tenuto conto che $\frac{1}{\rho} \text{grad } p$ è funzione continua in tutti i punti interni alle masse come segue dalla (1.2). Confrontando l'ultima equazione scritta con la (1.2) segue:

$$V(P) - \mathfrak{S}(P) = \text{cost.}$$

Perciò le superfici $\mu = \mu(x, y, z)$ oltre ad essere isobariche ed isopicnotiche sono anche equipotenziali.

Quindi le superfici in questione hanno ovunque per normale il versore \mathbf{n} che è continuo e definito ovunque salvo in P_0 (massimo isolato per $V(P)$) o nei punti della linea chiusa γ (linea dei punti di massimo per $V(P)$), perciò esse sono ovunque regolari. Inoltre poichè la superficie Σ che limita le masse è per ipotesi isobarica essa è anche isopicnotica ed equipotenziale e fa quindi parte della famiglia. Infine ogni superficie della famiglia è chiusa essendo chiusa la superficie Σ che limita le masse; di più esse sono una interna all'altra: infatti se così non fosse e vi fossero due superfici di questa famiglia l'una esterna all'altra, internamente a ciascuno dei due campi, limitati da queste superfici, vi sarebbero dei punti di massimo o delle linee chiuse di

massimi per $V(P)$, essendo le due superfici equipotenziali e crescendo il potenziale verso l'interno, perciò internamente al campo occupato dal sistema S vi sarebbero più di un massimo isolato o diverse linee di massimi contro le ipotesi fatte.

Perciò le superfici della famiglia $\mu = \mu(x, y, z)$ sono ovunque regolari, una interna all'altra e si stringono o intorno al massimo isolato P_0 o intorno alla linea chiusa γ dei punti in cui $V(P)$ assume uno stesso valore massimo. Segue quindi che questa famiglia di superfici stratifica completamente il campo occupato dalle masse, compresi i punti del contorno di questo come segue dal fatto che la superficie Σ fa parte della famiglia.

Per definire il campo di variabilità di μ possiamo procedere nel modo seguente. Indicati con V_Σ e V_M i valori assunti da $V(P)$ rispettivamente su Σ e nei punti di massimo, assumiamo come parametro μ una qualunque funzione continua, derivabile, monotona crescente di $\frac{V_M}{V(P)} - 1$, tale che per $\frac{V_M}{V(P)} - 1 = 0$, vale a dire in P_0 o nei punti di γ , assume il valore 0, mentre per $\frac{V_M}{V(P)} - 1 = \frac{V_M}{V_\Sigma} - 1$, vale a dire sulla superficie Σ , assume il valore μ^* , $0 < \mu^* < \infty$, e inoltre risulti ovunque $|\text{grad } \mu(P)|$ finito e diverso da zero anche per $\frac{V_M}{V(P)} - 1$, e quindi per μ , che tende a zero.

Da qui segue il teorema.

C.V.D.

La famiglia di superfici (2.2) la indicheremo sistematicamente col simbolo $\Sigma(\mu)$, mentre indicheremo con Σ_μ , $0 \leq \mu \leq \mu^*$, la generica superficie di questa famiglia, con C_μ il campo interno a Σ_μ , con dC_μ l'elemento di campo compreso tra Σ_μ e $\Sigma_{\mu+d\mu}$, con $C(\mu)$ e $dC(\mu)$ i corrispondenti volumi, con $M(\mu)$ e $dM(\mu)$ rispettivamente la massa contenuta in C_μ e in dC_μ ed, infine, con $S_{\mu_1\mu_2}$ lo strato materiale compreso tra le superfici Σ_{μ_1} e Σ_{μ_2} , $0 \leq \mu_1 < \mu_2 \leq \mu^*$.

Dal teorema 1 segue immediatamente il seguente corollario:

In ogni strato $S_{\mu_1\mu_2}$ in cui il fluido non è incomprimibile e la densità ρ varia con continuità esiste un legame pressione densità del tipo:

$$p = p(\rho).$$

Infatti nell'intervallo $(\mu_1; \mu_2)$ l'equazione della fluido-statica si scrive:

$$\frac{dV(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{dp(\mu)}{d\mu}.$$

Dalla derivabilità del primo membro segue la derivabilità del secondo, e per le ipotesi fatte esiste quindi $\frac{d\rho(\mu)}{d\mu}$ ed è diversa da 0. Quindi per tutti i

valori di μ compresi tra μ_1 e μ_2 , salvo al più il valore μ_1 se risulta $\mu_1 = 0$, sia $\frac{dp(\mu)}{d\mu}$ che $\frac{d\rho(\mu)}{d\mu}$ sono diverse da 0, perciò, per un noto teorema di U. DINI [7], risolvendo la seconda delle (3.2) rispetto a μ e sostituendo nella prima segue l'asserto.

C.V.D.

Il legame al quale siamo giunti non va però confuso con una equazione di stato. Infatti l'equazione di stato caratterizza a priori il fluido, quale che sia il suo stato dinamico, mentre questo legame presuppone l'equilibrio relativo ed inoltre dipende dalla configurazione dell'equilibrio stesso. Diamo adesso alcune relazioni che ci saranno utili per il seguito.

Ovviamente, nota la configurazione di equilibrio, cioè la famiglia di superfici (2.2), sia $C(\mu)$ che $M(\mu)$ sono funzioni di μ insieme a $dC(\mu)$ ed a $dM(\mu)$. Per queste funzioni, tenuto conto che $\rho(\mu)$ è costante sulla superficie Σ_μ , si ha:

$$(4.2) \quad dM(\mu) = \rho(\mu)dC(\mu),$$

e da questa anche:

$$(5.2) \quad \frac{dM(\mu)}{d\mu} = \rho(\mu) \cdot \frac{dC(\mu)}{d\mu}.$$

Valutiamo adesso l'elemento di volume nel modo seguente. Sia P un punto di Σ_μ e P' l'intersezione su $\Sigma_{\mu+d\mu}$ della normale in P a Σ_μ , e indichiamo con $d\Sigma_\mu$ un elemento di superficie staccato su Σ_μ intorno a P .

Ovviamente per l'elemento di volume $dC(\mu)$ avremo:

$$dC(\mu) = \int_{\Sigma_\mu} \overline{PP'} d\Sigma_\mu.$$

D'altra parte, poichè $\overline{PP'} = \frac{d\mu}{|\text{grad } \mu(P)|}$ segue:

$$dC(\mu) = \int_{\Sigma_\mu} \frac{d\Sigma_\mu}{|\text{grad } \mu(P)|} d\mu.$$

Da questa, tenuto conto delle ipotesi fatte su $|\text{grad } \mu(P)|$, si ha:

$$C(\mu) = \int_0^\mu \left[\int_{\Sigma_\eta} \frac{d\Sigma_\eta}{|\text{grad } \eta(P)|} \right] d\eta,$$

ed anche, tenuto conto della (4.2):

$$M(\mu) = \int_0^\mu \rho(\eta) \left[\int_{\Sigma_\eta} \frac{d\Sigma_\eta}{|\text{grad } \eta(P)|} \right] d\eta,$$

ed infine:

$$(6.2) \quad \frac{dC(\mu)}{d\mu} = \int_{\Sigma_\mu} \frac{d\Sigma_\mu}{|\text{grad } \mu(P)|}, \quad \frac{dM(\mu)}{d\mu} = \rho(\mu) \int_{\Sigma_\mu} \frac{d\Sigma_\mu}{|\text{grad } \mu(P)|}.$$

Inoltre, sempre tenuto conto delle ipotesi fatte per $|\text{grad } \mu(P)|$, segue:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} M(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow 0} C(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{dC(\mu)}{d\mu} = 0.$$

Quindi, applicando il teorema di L'HOSPITAL [8], otteniamo i seguenti limiti notevoli:

$$(7.2) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{M(\mu)}{C(\mu)} = \rho(0) = \rho_0,$$

$$(8.2) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{C(\mu)} \left[\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right]^2 = 2 \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2}.$$

§ 3. Posizione del problema.

In condizioni di equilibrio relativo, spontaneo o no, il fluido è retto dalle due equazioni indefinite della fluido-statica e di POISSON:

$$(1.2) \quad \text{grad } V(P) = \frac{1}{\rho(P)} \text{grad } p(P),$$

$$(1.3) \quad \Delta_2 V(P) = -4\pi f \rho(P) + 2\omega^2.$$

Quest'ultima segue immediatamente ove si tenga conto che il potenziale specifico della gravità è somma, come abbiamo notato, del potenziale specifico gravitazionale e del potenziale specifico delle forze centrifughe. Le due equazioni scritte danno luogo ad un sistema di quattro equazioni scalari alle derivate parziali insufficienti a determinare le superfici della famiglia $\Sigma(\mu)$ e le tre funzioni incognite p , ρ e V , anche supposta nota la superficie Σ che limita il campo ed i valori ivi assunti da p , ρ e V .

Infatti per determinare le superfici della famiglia $\Sigma(\mu)$ occorre conoscere, punto per punto, il versore normale $n(P)$ e quindi due dei suoi tre coseni direttori, si hanno perciò cinque funzioni incognite nelle quattro equazioni alle derivate parziali che provengono dalla (1.2) e dalla (1.3), e quindi il numero delle equazioni è insufficiente a risolvere il problema, anche assegnati i valori al contorno.

Perciò per risolvere il problema di determinare le funzioni incognite V , p e ρ , oltre alla configurazione di equilibrio definita dalla famiglia $\Sigma(\mu)$, occorre

aggiungere un ulteriore legame, quale, ad esempio, una equazione di stato del tipo (1.1).

La (1.2) e la (1.3) sono ancora insufficienti a determinare le tre funzioni incognite V , p e ρ anche supposta nota la famiglia $\Sigma(\mu)$.

Infatti in questa ipotesi la (1.2) e la (1.3) danno luogo a due sole equazioni differenziali alle derivate totali nelle quali non vi è più traccia delle superfici della famiglia $\Sigma(\mu)$.

In questa ipotesi infatti sia $V(P)$ che $p(P)$ e $\rho(P)$ sono funzioni del punto P tramite la superficie Σ_μ che vi passa e quindi, a conti fatti, funzioni del parametro μ che può essere assunto come variabile indipendente. Perciò la (1.2) si scrive:

$$(3.3) \quad \frac{dV(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{dp(\mu)}{d\mu}.$$

Mentre per la (1.3), integrando ambo i membri nel campo C_μ limitato dalla superficie Σ_μ , otteniamo:

$$\int_{C_\mu} \Delta_2 V(P) dC(P) = \int_{C_\mu} \{-4\pi f\rho(P) + 2\omega^2\} dC(P).$$

Da questa, tenuto conto del teorema 1, che assicura la applicabilità del teorema di GREEN-OSTROGRAWSKY, segue:

$$-\int_{\Sigma_\mu} \mathbf{n} \times \text{grad } V d\Sigma_\mu = \int_{C_\mu} \{-4\pi f\rho + 2\omega^2\} dC.$$

Adesso, tenuto conto che $\text{grad } V(P) = \frac{dV(\mu)}{d\mu} \text{grad } \mu(P)$, come segue dal teorema 1, applicando nuovamente il teorema di GREEN-OSTROGRAWSKY, si ha:

$$\frac{dV(\mu)}{d\mu} \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu(P) dC(P) = \int_{C_\mu} \{-4\pi f\rho(P) + 2\omega^2\} dC(P),$$

tenuto anche conto che $\mu = \mu(x, y, z)$ è una funzione derivabile almeno due volte rispetto alle variabili.

Derivando quest'ultima rispetto a μ , tenuto conto della (5.2) dopo aver effettuato l'integrale a secondo membro, otteniamo:

$$(4.3) \quad \frac{\int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC}{\frac{dC(\mu)}{d\mu}} \frac{d^2 V(\mu)}{d\mu^2} + \frac{\frac{d \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC}{d\mu}}{\frac{dC(\mu)}{d\mu}} \frac{dV(\mu)}{d\mu} = -4\pi f\rho(\mu) + 2\omega^2,$$

per tutti i valori di μ per i quali $\rho(\mu)$ è continua.

Questa è l'equazione differenziale alle derivate ordinarie, a coefficienti variabili funzioni di μ , alla quale da luogo la (1.3) supposta nota la famiglia di superfici $\Sigma(\mu)$. La (4.3) può essere messa sotto la forma:

$$(5.3) \quad \frac{1}{\frac{dC(\mu)}{d\mu}} \frac{d}{d\mu} \left\{ \int_{C_\mu} \Delta_{2\mu} dc \right\} \frac{dV(\mu)}{d\mu} = -4\pi f\rho(\mu) + 2\omega^2.$$

Sia nella (3.3) che nella (4.3) non vi è più traccia delle superfici Σ_μ ma soltanto nel parametro μ .

In alcuni casi particolari la (4.3) può suggerire la forma della configurazione di equilibrio, ma in generale non è possibile risalire dalle (4.3) e (3.3) alle superfici Σ_μ ; al § 6 faremo vedere come si scrive la (4.3) nei casi di una configurazione di equilibrio per sfere concentriche e per ellissoidi omotetici.

La (1.3) è una equazione differenziale del secondo ordine alle derivate parziali la cui soluzione dipende esclusivamente dai valori assegnati al contorno. Essa da luogo alla (4.3) che è una equazione differenziale del secondo ordine alle derivate totali. A priori si può pensare che la soluzione della (4.3) dipenda, oltre che dal valore assunto dalla funzione incognita per un particolare valore di μ , anche dal valore ivi assunto dalla derivata prima.

Invece, per come è stata costruita la (4.3), la soluzione dipende esclusivamente dal valore assunto dalla funzione in un punto.

Infatti la derivata prima, $\frac{dV(\mu)}{d\mu}$, è necessariamente nulla per $\mu = 0$, mentre per $\mu = \mu^*$ assume un valore prefissato a priori. Infatti per $\mu = \mu^*$ si ha:

$$\left(\frac{dV(\mu)}{d\mu} \right)_{\mu = \mu^*} = \frac{-4\pi fM + 2\omega^2 C}{\int_C \Delta_{2\mu} dC}.$$

e questo valore è noto una volta nota la massa totale del sistema, oltre, naturalmente, alla configurazione di equilibrio.

G. SANSONE [9], studiando l'equazione di R. FOWLER, che è del tipo (4.3), ha dedotto che la derivata prima deve essere necessariamente nulla per $\mu = 0$ con considerazioni puramente analitiche sulla forma dell'equazione.

§ 4. Equazione integrale di equilibrio.

Abbiamo notato come la (1.2) e la (1.3) sono, da sole, insufficienti per determinare, nota la configurazione di equilibrio, le funzioni incognite V , p e ρ . Esse sono però sufficienti per determinare le condizioni alle quali devono soddisfare la pressione p , la densità ρ e la velocità di rotazione ω se il sistema fluido S è in equilibrio relativo spontaneo.

A questo scopo, supposta nota la famiglia $\Sigma(\mu)$, diamo una utile trasformazione integrale della (1.2) tenendo conto della (1.3).

Scritta la (1.2) in un generico punto P della massa fluida, moltiplicando scalarmente per $n(P)$, tenuto conto che $\text{grad } p(P) = \frac{dp(\mu)}{d\mu} \text{grad } \mu(P)$, si ha:

$$(1.4) \quad \rho(\mu)n(P) \times \text{grad } V(P) = \frac{dp(\mu)}{d\mu} n(P) \times \text{grad } \mu(P)$$

Da questa, tenuto conto del teorema di GRENN-OSTROGRAWSKY e della (1.3), segue, dopo aver integrato ambo i membri sopra Σ_μ :

$$(2.4) \quad 4\pi f \rho(\mu)M(\mu) - 2\omega^2 \rho(\mu)C(\mu) = - \frac{dp(\mu)}{d\mu} \int_{\Sigma_\mu} n(P) \times \text{grad } \mu(P) d\Sigma_\mu.$$

Moltiplicando adesso per $\frac{1}{C(\mu)} \frac{dC(\mu)}{d\mu}$, tenuto conto della (4.2) e delle proprietà della funzione $\mu = \mu(x, y, z)$ stabilite nel teorema 1, otteniamo:

$$(3.4) \quad \left\{ 2\pi f \frac{1}{C(\mu)} \frac{dM^2(\mu)}{d\mu} - 2\omega^2 \frac{dC(\mu)}{d\mu} \frac{dM(\mu)}{d\mu} \right\} d\mu = - \frac{1}{C(\mu)} \left[\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right]^2 \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \frac{dp(\mu)}{d\mu} d\mu.$$

Integriamo ora quest'ultima per μ variabile nell'intervallo (μ_1, μ_2) , $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu^*$.

Per il primo membro, integrando per parti; si ha:

$$\begin{aligned} & 2\pi f \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{1}{C(\mu)} \frac{dC(\mu)}{d\mu} \frac{dM^2(\mu)}{d\mu} d\mu - 2\omega^2 \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{dC(\mu)}{d\mu} \frac{dM(\mu)}{d\mu} d\mu = \\ & = 2\pi f \left[\frac{dC(\mu)}{d\mu} \frac{M^2(\mu)}{C(\mu)} \right]_{\mu_1}^{\mu_2} - 2\omega^2 \left[M(\mu) \frac{dC(\mu)}{d\mu} \right]_{\mu_1}^{\mu_2} - 2\pi f \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{M^2(\mu)}{C(\mu)} \frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} d\mu + \\ & \quad + 2\pi f \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{M^2(\mu)}{C^2(\mu)} \left[\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right]^2 d\mu + 2\omega^2 \int_{\mu_1}^{\mu_2} M(\mu) \frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} d\mu = \\ & = \left[\frac{2M(\mu)}{C(\mu)} \frac{dC(\mu)}{d\mu} \{ \pi f M(\mu) - \omega^2 C(\mu) \} \right]_{\mu_1}^{\mu_2} + \frac{1}{2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} M(\mu) \left\{ 2\omega^2 \left[\frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} + \frac{1}{C(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 \right] - \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{1}{C^2(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 - \frac{1}{C(\mu)} \frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} \right] [-4\pi f M(\mu) + 2\omega^2 C(\mu)] \right\} d\mu. \end{aligned}$$

Ed anche, tenuto nuovamente conto della (2.4) e sostituendo nell'ultimo integrale scritto l'espressione $-4\pi fM(\mu) + 2\omega^2 C(\mu)$, otteniamo per l'integrale del primo membro della (3.4) l'espressione:

$$(4.4) \quad \left[\frac{2M(\mu)}{C(\mu)} \frac{dC(\mu)}{d\mu} \left\{ \pi fM(\mu) - \omega^2 C(\mu) \right\} \right]_{\mu_1}^{\mu_2} - \frac{1}{2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} M(\mu) \left\{ \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{dp(\mu)}{d\mu} \left[\frac{1}{C(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 - \frac{1}{C(\mu)} \frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} \right] \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC - 2\omega^2 \left[\frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} + \frac{1}{C(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 \right] \right\} d\mu.$$

Per l'integrale del secondo membro della (3.4), sempre integrando per parti, si ha:

$$- \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{1}{C(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 \frac{dp(\mu)}{d\mu} \left[\int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \right] d\mu = - \left[\frac{p(\mu)}{C(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \right]_{\mu_1}^{\mu_2} + \int_{\mu_1}^{\mu_2} p(\mu) \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 \frac{d}{d\mu} \left[\frac{1}{C(\mu)} \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \right] d\mu + 2 \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{p(\mu)}{C(\mu)} \frac{dC(\mu)}{d\mu} \frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} \left[\int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \right] d\mu.$$

Adesso, tenuto conto della (4.2), integrando per parti i due integrali a secondo membro di quest'ultima otteniamo:

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} p(\mu) \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 \frac{d}{d\mu} \left[\frac{1}{C(\mu)} \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \right] d\mu + 2 \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{p(\mu)}{C(\mu)} \frac{dC(\mu)}{d\mu} \frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} \left[\int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \right] d\mu =$$

$$= \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{p(\mu)}{\rho(\mu)} \left\{ \frac{dC(\mu)}{d\mu} \frac{d}{d\mu} \left[\frac{1}{C(\mu)} \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \right] + \frac{2}{C(\mu)} \frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} \left[\int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \right] \right\} \frac{dM(\mu)}{d\mu} d\mu =$$

$$= \left[\frac{M(\mu)p(\mu)}{\rho(\mu)} \left\{ \frac{dC(\mu)}{d\mu} \frac{d}{d\mu} \left(\frac{1}{C(\mu)} \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \right) + \frac{2}{C(\mu)} \frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \right\} \right]_{\mu_1}^{\mu_2} - \int_{\mu_1}^{\mu_2} M(\mu) \frac{d}{d\mu} \left\{ \frac{p(\mu)}{\rho(\mu)} \frac{dC(\mu)}{d\mu} \frac{d}{d\mu} \left[\frac{1}{C(\mu)} \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \right] + \frac{2}{C(\mu)} \frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \right\} d\mu.$$

Posto allora:

$$(5.4) \quad F(\mu) = \frac{dC(\mu)}{d\mu} \frac{d}{d\mu} \left[\frac{1}{C(\mu)} \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC \right] + \frac{2}{C(\mu)} \frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC,$$

si ha per l'integrale del secondo membro della (3.4) l'espressione:

$$(6.4) \quad \left[-\frac{p(\mu)}{C(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC + \frac{M(\mu)p(\mu)}{\rho(\mu)} F(\mu) \right]_{\mu_1}^{\mu_2} - \int_{\mu_1}^{\mu_2} M(\mu) \frac{d}{d\mu} \left[F(\mu) \frac{p(\mu)}{\rho(\mu)} \right] d\mu.$$

Da questa e dalla (4.4) segue, per μ variabile nell'intervallo (μ_1, μ_2) , $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu^*$, l'eguaglianza:

$$(7.4) \quad \left[\frac{2M(\mu)}{C(\mu)} \frac{dC(\mu)}{d\mu} \left\{ \pi f M(\mu) - \omega^2 C(\mu) \right\} + \frac{p(\mu)}{C(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC - \frac{M(\mu)F(\mu)p(\mu)}{\rho(\mu)} \right]_{\mu_1}^{\mu_2} \\ = \int_{\mu_1}^{\mu_2} M(\mu) \left\{ \frac{1}{2\rho(\mu)} \frac{dp(\mu)}{d\mu} \left[\frac{1}{C^2(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 - \frac{1}{C(\mu)} \frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} \right] \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC - \omega^2 \left[\frac{1}{C(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d^2 C(\mu)}{d\mu^2} \right] - \frac{d}{d\mu} \left[F(\mu) \frac{p(\mu)}{\rho(\mu)} \right] \right\} d\mu.$$

Questa eguaglianza ha ancora significato per $\mu_1 \rightarrow 0$ come segue dai limiti notevoli (7.2) e (8.2) e dalla espressione (5.4) per $F(\mu)$. Posto nella (7.4) $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \mu$, segue, dalla (7.4) stessa, la cercata forma integrale per l'equazione della fluido-statica:

$$\frac{2M(\mu)}{C(\mu)} \frac{dC(\mu)}{d\mu} \left\{ \pi f M(\mu) - \omega^2 C(\mu) \right\} + \frac{p(\mu)}{C(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC - \frac{M(\mu)F(\mu)p(\mu)}{\rho(\mu)} = \\ = \int_0^\mu M(\eta) \left\{ \frac{1}{2\rho(\eta)} \frac{dp(\eta)}{d\eta} \left[\frac{1}{C^2(\eta)} \left(\frac{dC(\eta)}{d\eta} \right)^2 - \frac{1}{C(\eta)} \frac{d^2 C(\eta)}{d\eta^2} \right] \int_{C_\eta} \Delta_2 \eta dC - \right. \\ \left. - \omega^2 \left[\frac{1}{C(\eta)} \left(\frac{dC(\eta)}{d\eta} \right)^2 + \frac{d^2 C(\eta)}{d\eta^2} \right] - \frac{d}{d\eta} \left[F(\eta) \frac{p(\eta)}{\rho(\eta)} \right] \right\} d\eta.$$

Questa equazione ci permetterà di dare le condizioni alle quali necessariamente devono soddisfare p , ed ω se il sistema materiale fluido S sta in una configurazione di equilibrio relativo spontaneo. Naturalmente occorre conoscere la famiglia $\Sigma(\mu)$ delle superfici di livello.

§ 5. **Condizioni necessarie per l'equilibrio spontaneo.**

Una prima condizione che necessariamente deve essere verificata se il sistema materiale fluido S è in equilibrio relativo spontaneo è data dal seguente teorema.

TEOREMA 2. *Se il sistema materiale fluido S è in equilibrio relativo spontaneo si ha:*

$$\lim_{P \rightarrow P \in \Sigma} \frac{p(P)}{\rho(P)} = 0.$$

La dimostrazione di questo teorema è immediata se su Σ si ha $\rho(P) \neq 0$, infatti l'ipotesi che il sistema S sia in equilibrio spontaneo porta che su Σ la pressione è nulla.

Supponiamo perciò che, per P che arriva su Σ dall'interno, risulti:

$$\lim_{P \rightarrow P \in \Sigma} \rho(P) = 0.$$

Dal teorema 1 segue che in ogni punto P interno a Σ si ha:

$$V(P) - V_M = \int_0^{\mu(P)} \frac{1}{\rho(\eta)} \frac{dp(\eta)}{d\eta} d\eta.$$

Da questa, poichè la superficie Σ è, per ipotesi, tutta al finito, e quindi la differenza $V(P) - V_M$ è finita in tutti i punti di S , compresi i punti di Σ , segue che esiste una costante positiva K tale che, qualunque sia P in $S + \Sigma$, e quindi qualunque sia μ nell'intervallo chiuso $(0, \mu^*)$, si ha:

$$\left| \int_0^{\mu(P)} \frac{1}{\rho(\eta)} \frac{dp(\eta)}{d\eta} d\eta \right| < K.$$

Ed anche:

$$\left| \frac{p(\mu)}{\rho(\mu)} - \frac{p(0)}{\rho(0)} + \int_0^{\mu(P)} \frac{p(\eta)}{\rho^2(\eta)} \frac{d\rho(\eta)}{d\eta} d\eta \right| < K,$$

per ogni μ compreso tra 0 e μ^* , $0 \leq \mu \leq \mu^*$, e quindi qualunque sia P in $S + \Sigma$. Perciò, per il criterio di esistenza degli integrali impropri [10], segue il teorema anche nel caso che su Σ risulti $\rho = 0$.

C.V.D.

Questo teorema riguarda il comportamento della pressione e della densità in superficie, invece il comportamento all'interno della massa fluida è regolato dal teorema seguente.

TEOREMA 3. *Se il sistema materiale fluido S è in equilibrio relativo spontaneo deve esistere uno strato $S_{\mu_1\mu_2}$ tale che in ogni punto P interno ad esso l'espressione:*

$$\frac{1}{2\rho(\mu)} \frac{dp(\mu)}{d\mu} \left[\frac{1}{C^2(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 - \frac{1}{C(\mu)} \frac{d^2C(\mu)}{d\mu^2} \right] \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC - \omega^2 \left[\frac{1}{C(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 + \frac{d^2C(\mu)}{d\mu^2} \right] - \frac{d}{d\mu} \left[F(\mu) \frac{p(\mu)}{\rho(\mu)} \right]$$

è positiva se si ha $\omega^2 < \pi f \rho^*$ essendo ρ^* la densità media del sistema. ⁽³⁾

Infatti, tenuto conto del teorema 2, la (1) del § 4 si scrive, per $\mu = \mu^*$

$$\frac{2M(\mu^*)}{C(\mu^*)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)_{\mu=\mu^*} [\pi f M(\mu^*) - \omega^2 C(\mu^*)] = \int_0^{\mu^*} M(\mu) \left\{ \frac{1}{2\rho(\mu)} \left(\frac{dp(\mu)}{d\mu} \right) \left[\frac{1}{C^2(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 - \frac{1}{C(\mu)} \frac{d^2C(\mu)}{d\mu^2} \right] \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC - \omega^2 \left[\frac{1}{C(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 + \frac{d^2C(\mu)}{d\mu^2} \right] - \frac{d}{d\mu} \left[F(\mu) \frac{p(\mu)}{\rho(\mu)} \right] \right\} d\mu.$$

Da questa, per le ipotesi fatte, segue che l'integrale a secondo membro è positivo.

Esiste perciò un intervallo (μ_1, μ_2) , tale che per ogni μ compreso tra μ_1 e μ_2 , $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, si ha

$$\frac{1}{2\rho(\mu)} \frac{dp(\mu)}{d\mu} \left[\frac{1}{C^2(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 - \frac{1}{C(\mu)} \frac{d^2C(\mu)}{d\mu^2} \right] \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC(\mu) - \omega^2 \left[\frac{1}{C(\mu)} \left(\frac{dC(\mu)}{d\mu} \right)^2 + \frac{d^2C(\mu)}{d\mu^2} \right] - \frac{d}{d\mu} \left[F(\mu) \frac{p(\mu)}{\rho(\mu)} \right] > 0,$$

e quindi il teorema.

C.V.D.

⁽³⁾ In un lavoro in corso di pubblicazione sul Bollettino U.M.I. miglioro la limitazione di U. CRUDELI [11] per la velocità di rotazione ω . In particolare U. CRUDELI ha dimostrato che, in condizioni di equilibrio relativo, deve aversi $\omega^2 < \pi f \rho_M$ essendo ρ_M il valore massimo della densità del sistema. Nel lavoro citato si dimostra invece che deve aversi, sempre in condizioni di equilibrio relativo, $\omega^2 < \pi f \rho^*$ essendo ρ^* la densità media del sistema. Non riportando nella presente memoria la dimostrazione di questo teorema ho preferito enunciare il teorema 3 con l'ipotesi espressa che risulti $\omega^2 < \pi f \rho^*$.

§ 6. **Alcune applicazioni ed esempi.**

Mostriamo per prima cosa che se il sistema fluido S è in equilibrio spontaneo senza ruotare, $\omega = 0$, dai teoremi qui dimostrati si ritrovano i risultati ottenuti in [1].

Se $\omega = 0$, per il citato teorema di L. LICHTENSTEIN, ogni piano centrale è piano di simmetria, perciò necessariamente la configurazione di equilibrio è costituita dalla famiglia di sfere concentriche col centro nel centro di massa del sistema. Quindi la famiglia di superfici $\Sigma(\mu)$ può essere rappresentata nella forma:

$$\mu = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

essendo μ la distanza di un punto P della superficie sferica Σ_μ dal centro. Il parametro μ soddisfa alle condizioni per esso imposte al teorema 1, infatti qualunque sia μ si ha $|\text{grad } \mu| = 1 \neq 0$; possiamo quindi applicare i risultati trovati.

Facilmente si verificano le seguenti espressioni:

$$C(\mu) = \frac{4}{3} \pi \mu^3, \quad \int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC = 4\pi \mu^2.$$

Quindi la (4.3) assume la forma:

$$\frac{d^2 V(\mu)}{d\mu^2} + \frac{2}{\mu} \frac{dV(\mu)}{d\mu} = -4\pi f\rho(\mu).$$

Questa è la nota equazione differenziale alle derivate ordinarie che definisce la distribuzione del potenziale specifico gravitazionale di una distribuzione materiale con simmetria sferica.

Dal teorema 3, tenuto conto dell'espressione di $F(\mu)$ data dalla (5.4), segue l'esistenza, internamente alle masse, di uno strato materiale S_{μ_1, μ_2} tale che in ogni punto P interno allo strato si ha:

$$p(\mu) \frac{d\rho(\mu)}{d\mu} - \frac{5}{6} \rho(\mu) \frac{dp(\mu)}{d\mu} < 0.$$

E da questa i risultati trovati in [1].

Come seconda applicazione studiamo il caso in cui la configurazione di equilibrio è costituita da una famiglia di ellissoidi omotetici col centro nel centro di massa del sistema. In questo caso la famiglia $\Sigma(\mu)$ si può rappresentare nella forma:

$$(1.6) \quad \mu = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^{1/2}.$$

Il parametro μ soddisfa ancora alle condizioni di cui al teorema 1, infatti si ha sempre, anche per $\mu \rightarrow 0$, $|\text{grad } \mu| \neq 0$, ed è perciò lecito applicare i risultati trovati.

V. VOLTERRA [12] ha dimostrato che la configurazione di equilibrio per un sistema fluido *non omogeneo* non può essere della forma (1.6).

Più generalmente R. WAVRE [13] ha dimostrato che la configurazione di equilibrio costituita da superfici omotetiche di forma qualunque è impossibile per un sistema fluido *non omogeneo*. Però B. CALDONAZZO [5] ha dimostrato che se la superficie Σ che limita le masse di un sistema fluido omogeneo, in equilibrio relativo, è un ellissoide allora necessariamente la configurazione di equilibrio, cioè la famiglia $\Sigma(\mu)$, è formata da ellipsoidi omotetici all'ellissoide che limita le masse.

Perciò la configurazione di equilibrio del tipo (1.6) è possibile soltanto per sistemi fluidi omogenei. In questo caso, valendo la limitazione di U. CRUDELI [11] per la velocità di rotazione ω , è valido il risultato indicato dal teorema 3.

Per il volume del campo C_μ interno alla generica superficie Σ_μ di equazione:

$$(2.6) \quad \frac{x^2}{a^2\mu^2} + \frac{y^2}{b^2\mu^2} + \frac{z^2}{c^2\mu^2} = 1,$$

si ha ovviamente:

$$C(\mu) = \frac{4}{3} \pi abc \mu^3.$$

Per il parametro differenziale secondo della funzione $\mu = \mu(x, y, z)$ otteniamo, a conti fatti:

$$\Delta_2 \mu = \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^{1/2}} - \frac{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

Per valutare l'integrale $\int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dc$ procediamo come segue.

Operando la trasformazione:

$$x = aX, \quad y = bY, \quad z = cZ,$$

il campo di integrazione diventa la sfera S_μ limitata dalla superficie di equazione:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \mu^2,$$

mentre la funzione integranda diventa la funzione:

$$f(X, Y, Z) = \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}} - \frac{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2}}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}},$$

di modo che si ha:

$$(3.6) \quad \int_{C_\mu} \Delta_2 \eta dC = abc \int_{S_\mu} f(X, Y, Z) dXdYdZ.$$

D'altra parte si ha:

$$(4.6) \quad \int_{S_\mu} \frac{dXdYdZ}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} = 4\pi \int_0^\mu \eta d\eta, \quad (\eta^2 = X^2 + Y^2 + Z^2),$$

mentre a causa della simmetria sferica è

$$\int_{S_\mu} \frac{X^2 dXdYdZ}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} = \int_{S_\mu} \frac{Y^2 dXdYdZ}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} = \int_{S_\mu} \frac{Z^2 dXdYdZ}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}}.$$

Operando la trasformazione in coordinate polari:

$$X = \eta \operatorname{sen} \psi \cos \varphi, \quad Y = \eta \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \varphi, \quad Z = \eta \cos \psi, \\ 0 \leq \eta \leq \mu, \quad 0 \leq \psi \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

otteniamo:

$$\int_{S_\mu} \frac{Z^2 dXdYdZ}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} = \int_0^\mu \left\{ \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} \eta \cos^2 \psi \operatorname{sen} \psi d\varphi \right] d\psi \right\} d\eta = \frac{2\pi\mu^2}{3}$$

Perciò, tenuto conto della (4.6), dalla (3.6) segue:

$$\int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC = \frac{4}{3} \pi abc \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right\} \mu^2.$$

Da questa e dalla espressione di $C(\mu)$ segue, dalla (4.3), l'equazione differenziale ordinaria che definisce la distribuzione del potenziale specifico della gravità in questo caso:

$$\frac{d^2 V(\mu)}{d\mu^2} + \frac{2}{\mu} \frac{dV(\mu)}{d\mu} = \frac{a^2 b^2 c^2 \{-12\pi f\rho + 6\omega^2\}}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}.$$

Dal teorema 3 invece, tenuto conto che in questo caso si ha:

$$F(\mu) = 12\pi abc \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right\},$$

segue l'esistenza di uno strato $S_{\mu_1\mu_2}$ tale che in ogni punto P interno allo strato si ha:

$$(5.6) \quad \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right\} \frac{1}{\rho} \frac{dp(\mu)}{d\mu} + 2\omega^2\mu < 0,$$

tenuto conto che $\rho = \text{cost.}$ e quindi $\frac{d\rho}{d\mu} = 0$.

Il teorema 3 è stato dimostrato in condizioni generali, mentre in questo caso, la particolare configurazione di equilibrio, e più che tutto, il fatto che la densità ρ è costante, portano che la limitazione testè scritta vale in ogni punto della massa fluida; di più siamo in condizioni di dare un integrale dell'equazione della fluido-statica che ci permetterà di valutare la pressione in ogni punto della massa fluida.

Infatti, tenuto conto delle espressioni di $C(\mu)$, di $\int_{C_\mu} \Delta_2 \mu dC$ e di $F(\mu)$ la (I) del § 4 si scrive, qualunque sia μ :

$$(6.6) \quad \frac{4\rho}{5} [\pi f \rho - \omega^2] \mu^5 = - \int_0^\mu \eta^3 \left[2\omega^2 \rho \eta + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{dp}{d\eta} \right] d\eta.$$

Poichè il primo membro di quest'ultima è una funzione positiva crescente di μ segue che la (5.6) deve essere verificata per ogni valore di μ , e quindi in ogni punto P interno alle masse.

Di più dalla (6.6) segue:

$$4\rho [\pi f \rho - \omega^2] \mu^4 = - \mu^3 \left[2\omega^2 \rho \mu + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{dp}{d\mu} \right],$$

e quindi per ogni valore di μ compreso tra 0 e μ^* , $0 \leq \mu \leq \mu^*$, si ha:

$$\int_{\mu^*}^\mu \frac{dp(\mu)}{d\mu} d\mu = \int_{\mu^*}^\mu \frac{2\omega^2 \rho - 4\pi f \rho^2}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \mu d\mu$$

Effettuando l'integrazione e tenuto conto che su Σ si ha $p(\mu^*) = p_2 = 0$, segue:

$$p(\mu) = \frac{2\pi f \rho^2 - \omega^2 \rho}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} (\mu^{*2} - \mu^2).$$

Abbiamo così trovato, come applicazione della forma integrale dell'equazione della fluido-statica data al § 4, la distribuzione della pressione $p(\mu)$ nel caso di una configurazione di equilibrio per ellissoidi omotetici.

In particolare, sostituendo in quest'ultima al posto di μ la sua espressione in funzione di x, y, z si ha la pressione in funzione delle coordinate.

Dalla equazione differenziale che definisce la distribuzione del potenziale delle forze di massa, o più direttamente dalla equazione della idrostatica nella forma:

$$\frac{dV(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\rho} \frac{dp(\mu)}{d\mu}$$

si può risalire al potenziale $V = V(P)$; si ritroverebbe così la nota espressione del potenziale specifico della gravità di un ellissoide materiale fluido in rotazione intorno ad un asse con velocità ω e in equilibrio relativo.

§ 7. **Alcune considerazioni fisico-matematiche sui casi in cui risulta $p = p(\rho)$ e $p = p(\rho, T)$.**

I risultati ottenuti nei paragrafi precedenti non dipendono dalla esistenza di una equazione di stato che caratterizzi, punto per punto, il comportamento fisico del sistema.

Infatti l'unica condizione necessaria, ed esplicitamente imposta, è che la pressione p , la densità ρ e la velocità di rotazione ω siano stazionarie e diano luogo ad un sistema di forze, gli sforzi interni e le forze di massa, equilibrato punto per punto. Cosicché, ferma restando questa condizione, le altre grandezze fisiche che, eventualmente, si possono introdurre per caratterizzare, punto per punto, lo stato fisico del sistema possono, a priori, essere distribuite arbitrariamente e possono anche non essere stazionarie.

Di modo che anche nel caso che il fluido che costituisce il sistema sia barotropico, esista cioè una equazione di stato del tipo (1.1), non è necessario supporre che la temperatura T sia la stessa in tutti i punti della massa fluida. Perciò i risultati ottenuti in [1] restano validi anche nell'ipotesi che la temperatura T sia funzione del posto.

Se si suppone che il fluido sia retto da una equazione di stato del tipo (2.1), vale a dire un legame pressione-densità-temperatura del tipo: $p = p(\rho, T)$, allora, poichè in ogni punto sia la pressione che la densità sono stazionarie tale deve risultare anche la temperatura. Di più, poichè sopra ogni superficie Σ_μ della famiglia $\Sigma(\mu)$ sia la pressione che la densità sono costanti, le superfici della configurazione di equilibrio sono isoterme.

Infine, poichè il volume e la massa di ogni elemento di campo dC_μ sono stazionari insieme alla differenza di pressione $p(\mu) - p(\mu + d\mu)$, tra le superfici Σ_μ e $\Sigma_{\mu+d\mu}$, e alla temperatura, segue che è pure stazionaria la quantità di calore dq_μ ivi contenuta. Da qui, imponendo l'equilibrio termico, si potrebbe scrivere l'equazione differenziale che definisce la distribuzione della temperatura. Questo problema si presenta notevolmente complesso in quanto sia il coefficiente di conduttività termica che quello di irraggiamento

non possono essere assunti costanti per le notevoli variazioni di densità e di stato fisico che, in generale, si hanno tra i punti del nucleo centrale del sistema e quelli dell'atmosfera esterna. Notiamo soltanto che nel computo dell'equilibrio termico, con le ipotesi fatte che il sistema materiale sia in equilibrio punto per punto, non interviene la convezione. Perciò, avendo imposto che il sistema materiale è in equilibrio punto per punto, l'ulteriore ipotesi che sussista una equazione di stato del tipo $p = p(\rho, T)$ ci allontana dallo ordinario schema di una massa stellare in rotazione intorno ad un asse.

Per terminare notiamo che se il sistema materiale fluido S è retto da una equazione di stato del tipo $p = p(\rho)$ o da una equazione del tipo $p = p(\rho, T)$ si hanno per la $\frac{dp}{d\mu}$ rispettivamente le due espressioni:

$$\frac{dp}{d\mu} = \frac{dp(\rho)}{d\rho} \frac{d\rho}{d\mu},$$

$$\frac{dp}{d\mu} = \frac{\partial p(\rho, T)}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\mu} + \frac{\partial p(\rho, T)}{\partial T} \frac{dT}{d\mu}.$$

Da queste, sostituendo nella limitazione di cui al teorema 3 al posto di p e di $\frac{dp}{d\mu}$ le rispettive espressioni, si trovano le condizioni alle quali devono soddisfare, nel primo caso, la densità ρ e la velocità di rotazione ω e nel secondo la densità ρ , la temperatura T e la velocità di rotazione ω se il sistema fluido S è in una configurazione di equilibrio relativo spontaneo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. QUILGHINI, *Sull'equilibrio spontaneo di una massa fluida soggetta alla propria gravitazione*, « Riv. Mat. di Parma », vol. 8, fasc. 10 pgg. 27-41, (Parma 1957).
- [2] H. LEMKE, *Ueber das Gleichgewicht kosmischer Gasmassen*, « J. Reine Angew. Math. », Band 124, Heft 1, S. 143-151, (Berlin 1901).
Über die Differenzialgleichungen, welche den Gleichgewichtszustand eines gasförmigen Himmelskörpers bestimmen, dessen Teile gegeneinander nach dem Newtonschen Gesetze gravitieren, « J. Reine Angew. Math. », Band 142, Heft 1, S. 118-145, (Berlin 1912).
- [3] R. EMDEN, *Gaskugeln. anwendungen der mechanischen wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische probleme*, Cap. lo II, p. 40 e Cap. li X e XIII, p. 149 e p. 195, (Leipzig 1907).
- [4] L. LICHTENSTEIN, *Gleichgewichtsfiguren rotierender flüssigkeiten*, Cap. lo II pgg. 22-28, (Berlin 1933).
- [5] B. CALDONAZZO, *Due proprietà degli ellissoidi di Maclaurin e di Jacobi*, « Rend. Sem. Mat. Fis. di Milano » vol. XXII, pgg. 212-222 (Milano 1951).

- [6] G. SANSONE, *Lezioni di analisi matematica*, « Ed.ne VIII », vol. II, cap.lo II, n. 12, pgg. 65-71, (Padova 1954).
 - [7] G. SANSONE, cfr. loc. cit. in [6], cap.lo II, n. 7, pgg. 55-59.
 - [8] G. SANSONE, *Lezioni di analisi Matematica*, « Ed.ne X », vol. I, cap.lo IX, n.i 9-10-11, pgg. 236-241, (Padova 1952).
 - [9] G. SANSONE, *Sulle soluzioni di Emden dell equazione di Fowler*, « Rend. Mat. Pura e Appl. » Roma, (5), 1, pgg. 163-176, (Roma 1940).
 - [10] G. SANSONE, cfr. loc. cit. in [6], cap.lo V, n. 5, pgg. 210-212.
 - [11] U. CRUDELI, *Nuovo limite superiore delle velocità angolari dei fluidi omogenei, rotanti uniformemente, limitati da figura di equilibrio*, « Atti Acc. dei Lincei », Anno CCCVII, Serie V, vol. XIX, 1° semestre, pgg. 666-668, (Roma 1910).
Sulle velocità angolari degli astri rotanti nella teoria dell'equilibrio relativo, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », tomo LVII, pgg. 308-310 (Palermo 1933).
 - [12] V. VOLTERRA, *Sur la stratification d'une masse fluide en équilibre*, « Opere Matematiche Memorie e Note », vol. III, pgg. 30-43, (Roma 1957).
 - [13] R. WAVRE, *Figures planetaires et geodesie*, « Cahiers Scientifiques », vol. XII, cap.lo III, n° 34, p. 57, (Paris 1932).
-