

Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche in due variabili.

Memoria di ENRICO MAGENES (a Genova)

A Giovanni Sansone nel suo 70^{mo} compleanno.

Sunto. - *Si dànno teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Dirichlet, opportunamente «generalizzato», relativamente alle equazioni lineari ellittiche in due variabili indipendenti.*

La teoria dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari di ordine $2m$, superiore al secondo, di tipo ellittico si è particolarmente sviluppata, a partire dai lavori di L. GÄRDING e M. I. VISHIK del 1951 e per opera di numerosi altri Autori quali S. AGMON, N. ARONSAJN, F. E. BROWDER, A. DOUGLIS, K. O. FRIEDRICHS, O. V. GUSEVA, L. HÖRMANDER, A. I. KOSHELEV, F. JOHN, P. D. LAX, J. L. LIONS, C. B. MORREY, L. NIRENBERG, M. SCHECHTER, K. T. SMITH ecc. ⁽¹⁾; di solito, salvo che in alcuni lavori di S. AGMON [1], J. L. LIONS [8 bis] e M. I. VISHIK - S. L. SOBOLEV [16] dei quali diremo in seguito, si è però considerato il caso dei problemi con condizioni al contorno omogenee, in classi di soluzioni a « integrale di DIRICHLET d'ordine m » finito. Il problema generale, con condizioni al contorno anche non omogenee, si può poi riportare al caso precedente, ma occorre allora superare difficoltà che possono essere anche notevoli, come è stato ben messo in evidenza nel n. 9 di [9], a seconda della classe in cui si assegnano i dati al contorno e di quella in cui si cerca la soluzione, che ovviamente sono tra di loro legate; tanto più che in generale non è detto che la classe in cui trovasi la soluzione del problema debba essere a integrale di DIRICHLET d'ordine m finito.

In questo ordine di idee è un recente lavoro di C. MIRANDA [10], dedicato all'equazione di ordine $2m$ a coefficienti reali in due variabili indipendenti assegnata in un dominio Ω

$$(I) \quad Au = f$$

e al problema di DIRICHLET « ordinario » per la (I), « ordinario » nel senso che i dati $\frac{\partial^j u}{\partial n^j} = \varphi_j$ ($j = 0, 1, \dots, m - 1$; n normale esterna alla frontiera Γ

(¹) Per la bibliografia rinvio alla monografia [9]; i numeri tra [] si riferiscono alla bibliografia finale del presente lavoro.

di Ω) su Γ sono supposti continui e la soluzione è cercata nella classe delle funzioni aventi derivate fino all'ordine $m - 1$ continue in $\Omega + \Gamma$ ma non necessariamente a integrale di DIRICHLET d'ordine m finito in Ω .

In questo lavoro mi occuperò invece del problema « generalizzato » di DIRICHLET per la stessa equazione (I), intendendo con ciò che i dati al contorno siano funzioni di quadrato sommabile su Γ e che siano assunti « in media » su un sistema di curve $\{\Gamma_\tau\}$ « parallele » a Γ , cioè che

$$(II) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial^j u}{\partial n^j} \right)_{\Gamma_\tau} - \varphi_j \right]^2 ds = 0 \quad j = 0, 1, \dots, m - 1$$

(dove s è un parametro, per es. l'ascissa curvilinea su Γ , cui si possano riferire parametricamente sia Γ_τ che Γ) e che la soluzione sia di quadrato sommabile in Ω e abbia l'integrale di DIRICHLET d'ordine m finito solo in ogni dominio interno a Ω ma non necessariamente in tutto Ω .

Questa impostazione del problema estende dunque alle equazioni d'ordine $2m$ l'impostazione del problema di DIRICHLET introdotta da G. CIMMINO [4] per le equazioni del secondo ordine, ripresa ed estesa anche a certe equazioni del quarto ordine da B. PINI [12], [13], [14].

Il metodo seguito è quello cui si è accennato sopra: ricondurre cioè il problema al caso di soluzioni a integrale di DIRICHLET finito in Ω e di condizioni al contorno omogenee. Due questioni sono allora da risolvere: 1) un teorema di unicità nella classe più vasta, in cui abbiamo impostato il problema; 2) la costruzione di una funzione ausiliaria v , che assuma i dati φ_j « in media » su $\{\Gamma_\tau\}$ e tale che Δv appartenga ad una opportuna classe di distribuzioni su Ω .

Il teorema di unicità viene dimostrato con un tipo di ragionamento, che mi sembra facilmente estendibile anche ad altri problemi al contorno e al caso di equazioni in più variabili indipendenti, e che sfrutta i recenti risultati sulla « regolarizzazione » delle soluzioni a integrale di DIRICHLET finito del problema con condizioni al contorno omogenee, dovuti a NIRENBERG, BROWDER, GUSEVA ed altri.

La costruzione della funzione v viene invece ottenuta sfruttando in modo essenziale un procedimento introdotto da C. MIRANDA nel lavoro citato per l'analoga questione relativa al problema di DIRICHLET « ordinario » procedimento che utilizza a sua volta la formula risolutiva del problema di DIRICHLET « ordinario » per il semipiano stabilita da S. AGMON recentemente [1]. L'estensione di questa costruzione al caso di più variabili indipendenti si potrà forse anche ottenere, utilizzando i risultati di un lavoro di AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG annunciato, ma tuttora in corso di stampa e di cui non ho potuto prendere visione finora.

1. Preliminari ed ipotesi. - Sia Ω un insieme aperto e limitato del piano (x, y) di classe C^{2m+2} ; supporremo per semplicità ⁽²⁾ che la frontiera di Ω sia costituita da un'unica curva semplice e chiusa Γ la quale avrà dunque, poichè Ω è di classe C^{2m+2} , una rappresentazione parametrica del tipo

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

essendo $x(s)$ e $y(s)$ funzioni dell'ascissa curvilinea s dotate di derivate fino all'ordine $2m + 2$ continue. Potremo naturalmente supporre le funzioni $x(s)$ e $y(s)$ definite in tutto l'asse reale $R_1(-\infty < s < +\infty)$ e periodiche di periodo l , dove l è la lunghezza di Γ , e tali che per s crescente il punto $(x(s), y(s))$ si muova su Γ nel verso positivo (antiorario). Indicheremo con n la normale esterna a Γ , i cui coseni direttori saranno dati da $y'(s)$ e $-x'(s)$.

Nelle ipotesi fatte su Γ esiste un $t_0 < 0$ tale che per ogni τ dell'intervallo $t_0 \leq \tau < 0$ la curva Γ_τ di equazioni parametriche

$$(1.1) \quad x = x(s) + \tau y'(s), \quad y = y(s) - \tau x'(s)$$

delimita un insieme aperto e connesso Ω_τ interno a Ω e di classe C^{2m+1} ; inoltre la trasformazione

$$(1.2) \quad T: x = x(t, s) \equiv x(s) + ty'(s), \quad y = y(t, s) \equiv y(s) - tx'(s)$$

rappresenta la striscia

$$S_{t_0}: \quad t_0 \leq t \leq 0, \quad -\infty < s < +\infty$$

del piano (t, s) sulla « corona » $\Omega - \Omega_{t_0}$ ⁽³⁾ del piano (x, y) , in modo che ogni punto (x, y) di $\Omega - \Omega_{t_0}$ corrisponde a una successione di punti di S_{t_0} , aventi tutti la stessa t e le s differenti per multipli di l . La trasformazione T è dunque periodica rispetto ad s di periodo l ; inoltre essa è di classe C^{2m+1} nel senso che le derivate di $x(t, s)$ e $y(t, s)$ rispetto a s e t fino all'ordine $2m + 1$ sono continue in S_{t_0} . Ovviamente la T è anche invertibile in ogni rettangolo del tipo: $s' \leq s \leq s'$, $t_0 \leq t \leq 0$, con $s' - s' < l$ e la inversa T^{-1} è pure di classe C^{2m+1} .

È inoltre possibile per ogni τ tale che $\frac{t_0}{2} \leq \tau \leq 0$ costruire una trasformazione biunivoca di $\bar{\Omega}$ su $\bar{\Omega}_\tau$

$$\mathcal{T}_\tau: \quad \xi = \xi_\tau(x, y), \quad \eta = \eta_\tau(x, y)$$

tale che: 1) per $\tau = 0$ sia l'identità; 2) sia di classe C^{2m} in $\bar{\Omega}$, cioè le ξ_τ e η_τ siano continue in $\bar{\Omega}$ con le derivate rispetto a x ed a y fino all'ordine $2m$;

⁽²⁾ Più in generale Ω potrebbe essere delimitato anche da un numero finito di curve semplici e chiuse.

⁽³⁾ Se X è un insieme di punti, con \bar{X} indicheremo la sua chiusura.

3) detti P_0 un punto di Γ , P_τ e P_{t_0} rispettivamente i punti di Γ_τ e Γ_{t_0} che si trovano sulla normale n_0 a Γ in P_0 , la \mathcal{C}_τ trasforma P_0 in P_τ e il segmento $\overline{P_0 P_{t_0}}$ nel segmento $\overline{P_\tau P_{t_0}}$; 4) \mathcal{C}_τ dipenda con continuità anche dal parametro τ nel senso che le ξ_τ e η_τ insieme alle loro derivate rispetto ad x ed a y fino all'ordine $2m$ siano funzioni continue di τ per $\frac{t_0}{2} \leq \tau \leq 0$.

La costruzione di una tale trasformazione si può ad esempio fare nel seguente modo:

$$\xi = x, \quad \eta = y \quad \text{se } (x, y) \in \Omega_{t_0}$$

$$\begin{cases} \xi = x(s) + ty'(s) + \left(\frac{t_0 - t}{t_0}\right)^{2m+1} \tau y'(s) \equiv x + \left(\frac{t_0 - t}{t_0}\right)^{2m+1} \tau y'(s) \\ \eta = y(s) - tx'(s) - \left(\frac{t_0 - t}{t_0}\right)^{2m+1} \tau x'(s) \equiv y - \left(\frac{t_0 - t}{t_0}\right)^{2m+1} \tau x'(s) \end{cases}$$

se $(x, y) \in \bar{\Omega} - \Omega_{t_0}$, essendo (t, s) scelto nella striscia S_{t_0} in modo che $x = x(s) + ty'(s)$, $y = y(s) - tx'(s)$ (si può ad es. supporre $t_0 \leq t \leq 0$, $0 \leq s < l$).

Introdurremo le seguenti notazioni ⁽⁴⁾:

$$D_x u = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad D_x^k D_y^h u = \frac{\partial^{k+h} u}{\partial x^k \partial y^h}, \quad \frac{\partial^0 u}{\partial x^0} = u, \quad \frac{\partial^0 u}{\partial x^0 \partial y^0} = u, \quad D^p u = \frac{\partial^{|p|} u}{\partial x^{p_1} \partial y^{p_2}}$$

dove $p = (p_1, p_2)$ è una coppia qualunque di numeri interi ≥ 0 e $|p| = p_1 + p_2$. Sia ora assegnato l'operatore

$$(1.3) \quad Au = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p [a_{p,q}(x, y) D^q u(x, y)]$$

dove gli $a_{p,q}(x, y)$ sono funzioni reali assegnate in $\bar{\Omega}$ e tali che

$$(1.4) \quad a_{p,q}(x, y) \in C^{\max\{|p|, |q|\}}(\bar{\Omega}) \quad (5),$$

$$(1.4') \quad a_{p,q}(x, y) \in C^{m+1}(\bar{\Omega}) \quad \text{se } |p| = m, |q| = m.$$

Supporremo che l'operatore Au sia *uniformemente (fortemente) ellittico* in $\bar{\Omega}$ vale a dire che esista una costante $\alpha > 0$ tale che

$$(1.5) \quad \sum_{|p|, |q|=m} a_{p,q}(x, y) \xi^{p+q} \geq \alpha |\xi|^{2m}$$

⁽⁴⁾ Per le notazioni e le definizioni seguiamo in sostanza il lavoro [9] cui rinviamo il lettore per ogni ulteriore precisazione.

⁽⁵⁾ Una funzione appartiene a $C^k(X)$ se è continua in X con le sue derivate d'ordine $\leq k$.

per ogni vettore reale $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ⁽⁶⁾.

Indicheremo anche con $a(u, v)$ la forma bilineare in u e v associata ad Au

$$(1.6) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} \alpha_{p, q}(x, y) D^p u(x, y) D^q v(x, y) dx dy$$

e con A^*v l'operatore aggiunto formale di Au :

$$(1.7) \quad A^*v = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (\alpha_{q, p} D^q v)$$

Sia poi $H^k(\Omega)$ lo spazio delle funzioni reali u tali che $u \in L^2(\Omega)$ ⁽⁷⁾ e $D^p u \in L^2(\Omega)$ per $|p| \leq k$, le derivate essendo intese nel senso delle distribuzioni su Ω ; in $H^k(\Omega)$ intenderemo introdotta la norma

$$\|u\|_k = \left(\int_{\Omega} \sum_{|p| \leq k} (D^p u)^2 dx dy \right)^{1/2}$$

Con $H_0^k(\Omega)$ indicheremo la chiusura in $H^k(\Omega)$ delle funzioni reali $\phi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, cioè indefinitamente differenziabili e a supporto compatto in Ω .

È noto che per le funzioni di $H^k(\Omega)$ si possono definire le «tracce» della u e delle sue derivate fino all'ordine $k-1$ su ogni curva γ sufficientemente regolare contenuta in $\bar{\Omega}$ e queste tracce sono su γ funzioni di quadrato sommabile; in particolare esse possono definirsi su Γ . Se $u \in H_0^k(\Omega)$ e si ha allora che nel senso suddetto risulta $\frac{\partial^j u}{\partial n^j} = 0$ su Γ , per $j = 0, 1, \dots, k-1$.

Ricordiamo anche che per un noto teorema di S. L. SOBOLEV le funzioni u di $H^k(\Omega)$ appartengono anche a $C^{k-2}(\bar{\Omega})$ e quindi in particolare le derivate normali $\frac{\partial u^j}{\partial n}$, per $j = 0, 1, \dots, k-2$, sono continue anche su Γ .

Analogamente si definiscono gli spazi $H^k(\Omega_\tau)$ delle funzioni di quadrato sommabile in Ω_τ con tutte le derivate di ordine $\leq k$ e si stabiliscono per essi proprietà analoghe.

Indicheremo poi con $H^k(\Gamma)$ (rispettivamente $H^k(R_1)$) lo spazio delle funzioni reali di quadrato sommabile su Γ (rispettivamente R_1) con tutte le derivate rispetto al parametro locale cui si riferisce Γ , fino all'ordine k ; si ha allora che se $\varphi \in H^k(\Gamma)$ (rispettivamente $H^k(R_1)$) essa è continua su Γ (rispettivamente R_1) con tutte le derivate fino all'ordine $k-1$ ed ha derivata k -esima di quadrato sommabile su Γ (rispettivamente R_1).

Ciò detto, faremo sulla forma $a(u, v)$ l'ipotesi che essa sia $H_0^m(\Omega)$ -ellittica, cioè esista una costante $\alpha' > 0$ tale che sia

$$(1.8) \quad a(u, u) \geq \alpha' \|u\|_m^2 \text{ per ogni } u \in H_0^m(\Omega)$$

⁽⁶⁾ È $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, $\xi^{p+q} = \xi_1^{p_1+q_1} \xi_2^{p_2+q_2}$ se (p_1, p_2) e $q = (q_1, q_2)$.

⁽⁷⁾ In generale con $L^2(X)$ intenderemo lo spazio delle funzioni di quadrato sommabile in X , normalizzato nel modo abituale.

Per un noto teorema di GÄRDING [5] la (1.8) è senz'altro verificata, data l'ipotesi (1.5) fatta su Au , ad es. in uno qualunque di questi casi:

1) Il coefficiente $\alpha_{(0,0),(0,0)}$ sia per ogni (x, y) di $\bar{\Omega}$ maggiore di una costante $\lambda_0 > 0$ sufficientemente grande (λ_0 dipendente da Ω , dal massimo modulo degli $\alpha_{p,q}$, e dal modulo di continuità degli $\alpha_{p,q}$, per $|p| = |q| = m$, in $\bar{\Omega}$).

2) I coefficienti $\alpha_{p,q}$ siano definiti in un dominio $\Omega' \supset \Omega$ e Ω abbia diametro sufficientemente piccolo ($\leq \rho$, con ρ dipendente da Ω' , dal massimo modulo degli $\alpha_{p,q}$ e dal modulo di continuità degli $\alpha_{p,q}$ con $|p| = |q| = m$, in Ω').

3) Sia

$$Au = \sum_{|p|, |q|=m} (-1)^m D^p(\alpha_{p,q} D^q u)$$

e gli $\alpha_{p,q}$ siano costanti.

2. Teorema di unicità. — Siano ora u e v due funzioni reali appartenenti a $C^{2m}(\bar{\Omega})$; moltiplicando Au per v e integrando su Ω_τ , per τ fissato ($t_0 < \tau \leq 0$), si ottiene mediante l'uso delle formule di GAUSS-GREEN,

$$(2.1) \quad a(u, v) = \int_{\Omega_\tau} v A u dx dy + \int_{\Gamma_\tau} [B_1(u, v) dx + B_2(u, v) dy]$$

con $B_i(u, v)$ operatori differenziali di ordine totale $2m - 1$ in u e v e contenenti le derivate di v fino all'ordine $m - 1$ i cui coefficienti dipenderanno dagli $\alpha_{p,q}$ e saranno funzioni di (x, y) . L'integrale curvilineo del secondo membro di (2.1) si potrà allora scrivere anche, facendo uso del cambiamento di variabili (1.2) e della rappresentazione parametrica (1.1) di Γ_τ ,

$$(2.2) \quad \int_0^t \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{h=0}^j [D_s^h D_t^{j-h} v(x(t, s), y(t, s)) L_{j,h} u(x(t, s), y(t, s))]_{t=\tau} ds$$

dove $L_{j,h} u$ sono operatori differenziali lineari in u e nelle sue derivate rispetto ad s e t di ordine $\leq 2m - 1 - j$ ed i cui coefficienti sono funzioni di (t, s) . Per le ipotesi fatte su Γ e sui coefficienti di Au si può integrare per parti rispetto ad s nei termini di (2.2) del tipo

$$\int_0^t [D_s^h D_t^{j-h} v L_{j,h} u]_{t=\tau} ds \quad \text{con } h > 0$$

e si ottiene così in definitiva la seguente formula di Green

$$(2.3) \quad a(u, v) = \int_{\Omega_\tau} v A u dx dy + \int_0^t \sum_{j=0}^{m-1} [D_t^j v \mathcal{L}_j u]_{t=\tau} ds$$

dove $\mathcal{L}_j u$ sono operatori differenziali lineari in u e nelle sue derivate rispetto a t ed a s di ordine $\leq 2m - 1 - j$ con coefficienti funzioni almeno continue di (t, s) .

Analogamente si ottiene la

$$(2.4) \quad a(u, v) = \int_{\Omega_\tau} u A^* v dx dy + \int_0^l \sum_{j=0}^{m-1} [D_t^j u \mathcal{L}_j^* v]_{t=\tau} ds$$

dove $\mathcal{L}_j^* v$ sono opportuni operatori differenziali lineari di ordine $\leq 2m - 1 - j$ a coefficienti funzioni continue di (t, s) . Da (2.3) e (2.4) si ha allora

$$(2.5) \quad \int_{\Omega_\tau} v A u dx dy - \int_{\Omega_\tau} u A^* v dx dy = \int_0^l \sum_{j=0}^{m-1} [D_t^j u \mathcal{L}_j^* v]_{t=\tau} ds - \int_0^l \sum_{j=0}^{m-1} [D_t^j v \mathcal{L}_j u]_{t=\tau} ds.$$

E poichè nelle ipotesi fatte su Ω , $C^{2m}(\bar{\Omega})$ è denso in $H^{2m}(\Omega_\tau)$, le formule di GREEN (2.3), (2.4) e (2.5) valgono anche per u e $v \in H^{2m}(\Omega_\tau)$, purchè naturalmente negli integrali curvilinei ai secondi membri le tracce su Γ_τ delle derivate di u e v siano intese nel senso richiamato nel n. 1.

Ciò premesso dimostriamo il seguente

TEOREMA DI UNICITÀ PER IL PROBLEMA DI DIRICHLET. - *Nelle ipotesi del n. 1, assegnate m funzioni $\varphi_j(s)$ di quadrato sommabile in $(0, l)$ ($j = 0, 1, \dots, m - 1$) e una distribuzione $f \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ ⁽⁸⁾, esiste al più una funzione $u \in L^2(\Omega) \cap H^m(\Omega_\tau)$ per ogni $\tau \left(\frac{t_0}{2} \leq \tau < 0\right)$ verificante l'equazione*

$$Au = f$$

nel senso delle distribuzioni su Ω e le condizioni al contorno

$$\frac{\partial^j u}{\partial n^j} = \varphi_j \quad (j = 0, 1, m - 1)$$

nel senso della « convergenza in media di ordine 2 » sul sistema di curve $\{\Gamma_\tau\}$, cioè tale che

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^-} \int_0^l [(D_t^j u)_{t=\tau} - \varphi_j]^2 ds = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Basterà dimostrare che se $u \in L^2(\Omega) \cap H^m(\Omega_\tau)$ per ogni $\tau < 0$ e $\geq \frac{t_0}{2}$ e se

$$(2.6) \quad Au = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \text{ e}$$

$$(2.7) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0^-} \int_0^l [(D_t^j u)_{t=\tau}]^2 ds = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m - 1$$

allora $u = 0$ in Ω .

⁽⁸⁾ Con $\mathfrak{D}'(\Omega)$ indichiamo lo spazio delle distribuzioni reali su Ω , cioè lo spazio duale forte di $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Dalla (2.6), in virtù della (1.8) e delle ipotesi fatte sui coefficienti $a_{p,q}$, per noti risultati sulla regolarizzazione « all'interno » delle soluzioni delle equazioni ellittiche (si veda ad es. il n. 10 di [9]) si ha che $u \in H^{2m}(\Omega_\tau)$ per $t_0 \leq \tau < 0$. Sia v una qualunque fissata funzione di $C^{2m}(\bar{\Omega}) \cap H_0^m(\Omega)$; e si consideri in Ω_τ la funzione v_τ trasformata dalla v mediante l'inversa della \mathcal{T}_τ introdotta nel n. 1, cioè la funzione $v_\tau(\xi, \eta) = v(x_\tau(\xi, \eta), y_\tau(\xi, \eta))$ dove $x = x_\tau(\xi, \eta)$, $y = y_\tau(\xi, \eta)$ danno la trasformazione inversa della \mathcal{T}_τ . Per le proprietà, messe in evidenza, della \mathcal{T}_τ la funzione $v_\tau \in C^{2m}(\bar{\Omega}_\tau)$ ed è tale che $D_t^j v_\tau = 0$ per $t = \tau$, cioè su Γ_τ ($j = 0, 1, \dots, m - 1$). La (2.5) scritta per u e per questa v_τ diventa allora

$$(2.8) \quad - \int_{\Omega_\tau} u A^* v_\tau dx dy = \int_0^l \sum_{j=0}^{m-1} [D_t^j u \mathcal{L}_j^* v_\tau]_{t=\tau} ds$$

D'altra parte, per le proprietà della \mathcal{T}_τ e degli operatori \mathcal{L}_j^* già messe in evidenza si ha in Ω

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^-} A^* v_\tau = A^* v$$

$$|A^* v_\tau| \leq K, \quad |\mathcal{L}_j^* v_\tau| \leq K$$

con K indipendente da τ ; ed allora facendo tendere τ a zero nella (2.8) si ottiene, in virtù della (2.7)

$$(2.9) \quad \int_{\Omega} u A^* v dx dy = 0 \quad \text{per ogni } v \in C^{2m}(\bar{\Omega}) \cap H_0^m(\Omega).$$

Ma, in virtù delle ipotesi da noi fatte su Ω , $C^{2m}(\bar{\Omega}) \cap H_0^m(\Omega)$ è denso in $H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ e quindi la (2.9) vale anche per ogni $v \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$; e poichè, in virtù delle ipotesi sui coefficienti $a_{p,q}$ e dei risultati sull'esistenza e sulla regolarizzazione della soluzione del problema di DIRICHLET (v. ad es. [2], [6], [11], [9]) A^*v stabilisce un isomorfismo di $H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ su $L^2(\Omega)$, ne segue che u è ortogonale in $L^2(\Omega)$ ad ogni funzione e quindi è $u = 0$.

OSSERVAZIONE I. - Il teorema di unicità ora dato, si può facilmente estendere sostituendo la convergenza in media di ordine 2 su $\{\Gamma_\tau\}$ con quella in media di ordine $p > 1$, nel modo seguente:

Se $\varphi_j(s)$ è di potenza p -esima sommabile in $(0, l)$ ($j = 0, 1, \dots, m - 1$), esiste al più una funzione $u \in L^p(\Omega) \cap H^{m,p}(\Omega_\tau)$ ($\frac{t_0}{2} \leq \tau < 0$) ^(*), verificante la $Au = f$ e le

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^-} \int_0^l [(D_t^j u)_{t=\tau} - \varphi_j]^p ds = 0 \quad j = 0, 1, \dots, m - 1.$$

^(*) $L^p(\Omega_\tau)$ è lo spazio delle funzioni di potenza p -esima sommabile in Ω_τ $H^{k,p}(\Omega_\tau)$ è lo spazio delle funzioni u appartenenti a $L^p(\Omega_\tau)$ insieme a tutte le derivate di ordine $\leq k$; per queste funzioni si possono ancora definire, come è noto, le tracce su Γ_τ della u e delle sue derivate d'ordine $\leq k - l$ e queste tracce sono su Γ_τ funzioni di potenza p -esima sommabile.

Il ragionamento fatto si può infatti ripetere, osservando in particolare che la (2.5) vale anche per ogni $u \in H^{2m,p}(\Omega_\tau)$ e $v \in H^{2m,q}(\Omega_\tau)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) e che A^*v stabilisce, in virtù di risultati recenti (v. [3], [7]) un isomorfismo di $H^{2m,q}(\Omega) \cap H_0^{m,q}(\Omega)$ su $L^q(\Omega)$.

OSSERVAZIONE II. - Altri problemi al contorno potrebbero essere studiati con lo stesso tipo di ragionamento, pervenendo a teoremi di unicità analoghi; p. es. il problema di NEUMANN, relativo ad Au (v. ad es. il n. 5 di [9]) consistente nell'assegnare su Γ gli operatori \mathcal{L}_j della formula (2.3), anziché le $\frac{\partial^j u}{\partial n^j}$ ($j = 0, 1, \dots, m - 1$).

3. Un problema di Dirichlet per il semipiano. - In questo numero risolveremo un particolare problema « generalizzato » di DIRICHLET per il semipiano, facendo uso di una formula risolutiva stabilita da AGMON [1] e usata anche da MIRANDA [10] per l'analogo problema ordinario di DIRICHLET. Si consideri nel piano (t, s) l'operatore di ordine $2m$

$$(3.1) \quad \mathcal{A}_0 u = \sum_{j=0}^{2m} a_{2m-j} D_t^j D_s^{2m-j} u$$

a coefficienti a_{2m-j} costanti reali, nell'ipotesi che sia (*fortemente*) *ellittico*, cioè che

$$(3.2) \quad A(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^{2m} a_{2m-j} \xi_1^j \xi_2^{2m-j} > \alpha |\xi|^{2m}$$

per ogni vettore reale ξ , con α costante positiva.

Indichiamo con $A(z, 1)$ il polinomio a coefficienti reali $A(z, 1) = \sum_{k=0}^{2m} a_{2m-k} z^k$ nella variabile complessa z ; per la (3.2) le radici dell'equazione $A(z, 1) = 0$ con parte immaginaria negativa sono esattamente $m: z_1, \dots, z_m$. Sia allora $M(z) = a_{2m}^{1/2} (z - z_1) \dots (z - z_m) = \sum_{k=0}^m b_{m-k} z^k$, cosicché $A(z, 1) = M(z)\overline{M(z)}$. Poniamo poi

$$M_{m-j-1}(z) = \sum_{k=j+1}^m b_{m-k} z^{k-j-1} \quad (j = 0, 1, \dots, m - 1)$$

$$K_j(t, s) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z) (tz + s)^{j-1} \log(tz + s)}{M(z) (j-1)!} dz \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, m - 1)$$

$$K_0(t, s) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-1}(z)}{M(z) (tz + s)} dz \right\}$$

dove γ è una fissata curva semplice e chiusa del semipiano $\operatorname{Im} z < 0$ che racchiude tutti gli zeri z_1, \dots, z_m e la determinazione del logaritmo è prefissata ad arbitrio.

Siano ora, $\varphi_j(s)$, ($j = 0, \dots, m-1$), m funzioni reali appartenenti rispettivamente ad $H^{m-j-1}(R_1)$ e a supporto compatto in R_1 ; $\varphi_j(s)$ è quindi, per $0 \leq j < m-1$, continua con le sue derivate fino all'ordine $m-j-2$ e la derivata $\varphi_j^{m-j-1}(s)$ appartiene a $L^2(R_1)$; mentre $\varphi_{m-1}(s) \in L^2(R_1)$.

Si consideri la funzione

$$(3.3) \quad u(t, s) = \sum_{j=0}^{m-1} u_j(t, s)$$

dove

$$(3.4) \quad u_j(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_j(t, s - \sigma) \varphi_j(\sigma) d\sigma.$$

La $u(t, s)$ così definita risolve il seguente problema di DIRICHLET generalizzato:

TEOREMA. - *Nelle ipotesi fatte, la funzione $u(t, s)$ data dalla (3.3), verifica l'equazione*

$$(3.5) \quad \mathcal{A}_0 u = 0 \quad \text{nel semipiano } t < 0$$

e le condizioni al contorno

$$(3.6) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} D_t^j u(t, s) = \varphi_j(s), \quad j = 0, \dots, m-2$$

uniformemente al variare di s in ogni intervallo fissato $s' \leq s \leq s''$, e

$$(3.7) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{s'}^{s''} [D_t^{m-1} u(t, s) - \varphi_{m-1}(s)]^2 ds = 0$$

per ogni intervallo fissato $s' \leq s \leq s''$.

La dimostrazione di questo teorema si ottiene facilmente seguendo la rielaborazione data da MIRANDA [10] del procedimento di AGMON [1] per l'analogo problema di DIRICHLET ordinario.

Per le proprietà dei nuclei $K_j(t, s)$ si ha anzitutto che $u(t, s)$ è una soluzione analitica della equazione (3.5) nel semipiano $t < 0$.

Dimostriamo poi le relazioni al contorno, per ogni intervallo (s', s'') di R_1

$$(3.8) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} D_t^k D_s^{k-h} u_j(t, s) = 0 \quad \text{per } 0 \leq k < j, \quad 0 \leq h \leq k$$

uniformemente al variare di s in (s', s'') ,

$$(3.9) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} D_t^k D_s^{k-h} u_j(t, s) = \delta_{j,h} \varphi_j^{(k-j)}(s) \quad \text{per } j \leq k < m-1, \quad 0 \leq h \leq k$$

uniformemente al variare di s in (s', s'') , dove $\delta_{j,h}$ è il simbolo di KRONECKER, e

$$(3.10) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{s'}^{s''} [D_t^k D_s^{m-1-h} u_j(t, s) - \delta_{j,h} \varphi_j^{(m-1-j)}(s)]^2 ds = 0$$

dalla quale scendono le (3.6) e la (3.7).

Anzitutto le (3.8) si dimostrano come in [1] (pag. 186) se è $j < m - 1$; infatti in questo caso φ_j è, anche nelle nostre ipotesi, una funzione continua. Nel caso $j = m - 1$, φ_{m-1} appartiene solo a $L^2(R_1)$; ma il ragionamento di [1] è ancora applicabile poichè le maggiorazioni (2.17) di [1] assicurano che il nucleo $K_{m-1}(t, s)$ e le sue derivate fino all'ordine $m - 3$ sono continue in tutto il piano e quelle di ordine $m - 2$ hanno solo una singolarità logaritmica nell'origine; si può allora nella (3.4), per $j = m - 1$, derivare e passare al limite sotto il segno di integrale per $t \rightarrow 0 -$ anche nelle ipotesi che φ_{m-1} sia di quadrato sommabile e a supporto compatto in R_1 , e tutto ciò uniformemente al variare di s in (s', s'') .

La (3.9), poichè per $k < m - 1$ le derivate fino all'ordine $k - j$ della funzione φ_j sono, anche nelle nostre ipotesi, continue, si dimostrano allora come in pag. 282-284 di [10].

Rimangono dunque solo le (3.10). Integrando per parti come in [1] (pag. 187) e facendo poi la sostituzione $\sigma = s + t\eta$ come in [10] (pag. 282) si ha

$$\begin{aligned} D_t^h D_s^{m-1-h} u_j(t, s) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j^{(m-1-j)}(\sigma) d\sigma \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z)z^h}{\bar{M}(z)(zt + s - \sigma)} dz \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j^{(m-1-j)}(s + t\eta) H_{j,h}(\eta) d\eta \end{aligned}$$

con

$$H_{j,h}(\eta) = - \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z)z^h}{\bar{M}(z)(z - \eta)} dz \right\}$$

e per le (6.17) e (6.18) di [10] risulta

$$(3.11) \quad H_{j,h}(\eta) = O\left(\frac{1}{1 + \eta^2}\right).$$

Tenuto allora conto che, per la (6.21) di [10], si ha

$$(3.12) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H_{j,h}(\eta) d\eta = \delta_{j,h}$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} (3.13) \quad & \int_{s'}^{s''} [D_t^h D_s^{m-1-h} u_j(t, s) - \delta_{j,h} \varphi_j^{(m-1-j)}(s)]^2 ds = \\ &= \int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_j^{(m-1-j)}(s + t\eta) - \varphi_j^{(m-1-j)}(s)] H_{j,h}(\eta) d\eta \right\}^2 ds \leq \\ &\leq C \int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_j^{(m-1-j)}(s + t\eta) - \varphi_j^{(m-1-j)}(s)| \frac{1}{1 + \eta^2} d\eta \right\}^2 ds \end{aligned}$$

con c numero positivo indipendente da φ_j .

Poniamo $\varphi_j^{(m-1-j)}(s) = \varphi(s)$ e sia I un intervallo di R_1 contenente il supporto di $\varphi(s)$; è possibile allora trovare una successione $\{\varphi_n(s)\}$ di funzioni continue in R_1 e a supporto contenuto in I convergente in media in I a $\varphi(s)$. Si ha allora

$$(3.14) \quad \int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(s+t\eta) - \varphi(s)| \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}^2 \leq \\ \leq 4 \int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(s+t\eta) - \varphi_n(s+t\eta)| \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}^2 ds + \\ + 4 \int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(s+t\eta) - \varphi_n(s)| \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}^2 ds + 4 \int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(s) - \varphi(s)| \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}^2 ds.$$

Ovviamente per $n \rightarrow \infty$ il terzo integrale tende a zero indipendentemente da t . Quanto al primo integrale esso risulta uguale a

$$(3.15) \quad \int_{s'}^{s''} ds \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(s+t\eta) - \varphi_n(s+t\eta)| \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(s+t\theta) - \varphi_n(s+t\theta)| \frac{1}{1+\theta^2} d\theta = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\theta^2} d\theta \int_{s'}^{s''} |\varphi(s+t\eta) - \varphi_n(s+t\eta)| |\varphi(s+t\theta) - \varphi_n(s+t\theta)| ds \leq \\ \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\theta^2} d\theta \cdot \left\{ \left(\int_{s'}^{s''} |\varphi(s+t\eta) - \varphi_n(s+t\eta)|^2 ds \right)^{1/2} \cdot \right. \\ \cdot \left. \left(\int_{s'}^{s''} |\varphi(s+t\theta) - \varphi_n(s+t\theta)|^2 ds \right)^{1/2} \right\} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\theta^2} d\theta \cdot \\ \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(w) - \varphi_n(w)|^2 dw = c \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(w) - \varphi_n(w)|^2 dw$$

con c indipendente da φ e da n ; e quindi tende pure a zero indipendentemente da t per $n \rightarrow \infty$. Preso $\varepsilon > 0$ è quindi possibile determinare n_ε tale che per $n > n_\varepsilon$ il primo e il terzo integrale del secondo membro di (3.14) siano $< \varepsilon$. Ma per n fissato, si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(s+t\eta) - \varphi_n(s)| \frac{1}{1+\eta^2} d\eta$$

tende a zero per $t \rightarrow 0^-$, uniformemente al variare di s in (s', s'') in virtù della continuità di φ_n . Dunque esiste un δ_ε tale che per $\delta_\varepsilon < t < 0$

$$\int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(s + t\eta) - \varphi_n(s)| \frac{1}{1 + \eta^2} d\eta \right\}^2 ds < \varepsilon.$$

Sicchè in definitiva il primo membro di (3.14) risulta per gli stessi t , $< 12\varepsilon$; e quindi anche la (3.10) è dimostrata.

Si osservi che da quanto dimostrato segue anche che la soluzione $u(t, s)$ appartiene a $C^{m-2}(B)$ per ogni dominio B limitato del semipiano $t \leq 0$.

4. Costruzione di una particolare funzione ausiliaria. — Siamo ora in grado, adattando al nostro scopo un procedimento dovuto a MIRANDA [10] di costruire una funzione ausiliaria il cui ufficio sarà essenziale per il successivo teorema di esistenza.

Sia

$$(4.1) \quad \mathcal{E}u = \sum_{j=0}^{2m} a_{2m-j}(s) D_t^j D_s^{2m-j} u(t, s)$$

un operatore di ordine $2m$ con i coefficienti $a_{2m-j}(s)$ funzioni reali della sola s appartenenti a $C^1(R_1)$ e limitati in R_1 ; inoltre $\mathcal{E}u$ sia *uniformemente (fortemente) ellittico*, cioè valga la

$$(4.2) \quad \sum_{j=0}^{2m} a_{2m-j}(s) \xi_1^j \xi_2^{2m-j} \geq \alpha |\xi|^{2m}$$

per ogni vettore ξ reale e ogni s di R_1 , α essendo un numero positivo. Allora gli zeri del polinomio in z , a coefficienti funzioni di s ,

$$A(z, 1, s) = \sum_{k=0}^{2m} a_{2m-k}(s) z^k$$

sono sempre m con parte immaginaria positiva ed m con parte immaginaria negativa ed inoltre quelli con parte immaginaria negativa, non escono, al variare di s , da una regione delimitata da una curva γ semplice e chiusa fissa appartenente al semipiano $I_m z < 0$.

Introduciamo i polinomi $M(z, s)$ e $M_{m-j-1}(z, s)$ a partire da $A(z, 1, s)$ nello stesso modo che si è seguito nel n. 3 per $M(z)$ e $M_{m-j-1}(z)$ a partire da $A(z, 1)$.

I coefficienti di $M(z, s)$, e degli $M_{m-j-1}(z, s)$, per l'osservazione fatta sugli zeri di $A(z, 1, s)$ e per il modo col quale sono definiti detti polinomi, sono funzioni di s appartenenti a $C^1(R_1)$ e limitati. Si avrà anche in particolare che, per z variabile su γ e s in R_1 , $|M(z, s)|$ è maggiore di una costante positiva.

Ciò premesso siano $\varphi_j(s)$, $j=0, \dots, m-1$, m funzioni appartenenti rispettivamente ad $H^{m-j-1}(R_1)$ e a supporto compatto.

Ci proponiamo di costruire una funzione $v(t, s)$ la quale risulti indefinitamente differenziabile nel semipiano $t < 0$, appartenga a $C^{m-2}(B)$ in ogni dominio B limitato del semipiano $t \leq 0$ e inoltre verifichi le condizioni

$$(4.3) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} D_t^j v(t, s) = \varphi_j(s) \quad j = 0, \dots, m-2 \text{ e}$$

$$(4.4) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{s'}^{s''} [D_t^{m-1} v(t, s) - \varphi_{m-1}(s)]^2 ds = 0$$

$$(4.5) \quad \left(\int_{s'}^{s''} |D_t^h D_s^{m-1+k-h} v(t, s)|^2 ds \right)^{1/2} = O(|t|^{-k})$$

per $k = 1, 2, \dots; 0 \leq h \leq k$

$$(4.6) \quad \left(\int_{s'}^{s''} |\mathcal{E}v(t, s)|^2 ds \right)^{1/2} = O(|t|^{-m})$$

per ogni intervallo fissato $s' \leq s \leq s''$ di R_1 .

Poniamo seguendo MIRANDA

$$(4.7) \quad v(t, s) = \sum_{j=0}^{m-1} v_j(t, s),$$

$$v_j(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j^{(m-j-1)}(\sigma) K_j(t, \sigma, s - \sigma) d\sigma$$

dove

$$K_j(t, \sigma, s - \sigma) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma}^{m-2} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma)(tz + s - \sigma)}{M(z, \sigma)(m-2)!} \log(tz + s - \sigma) dz \right\}$$

la determinazione del logaritmo essendo tale che: $0 \leq \operatorname{Im} \log(tz + s - \sigma) \leq \pi$. Ovviamente v è indefinitamente differenziabile per $t < 0$.

Inoltre poichè le derivate di $K_j(t, \sigma, s - \sigma)$ d'ordine $\leq m-2$ rispetto a t e ad s sono continue o hanno una sola singolarità logaritmica per $t=0$ e $s=\sigma$, con ragionamento analogo a quello di AGMON richiamato per la dimostrazione delle (3.8) nel caso $j = m-1$, si prova che $v_j(t, s)$ appartiene a $C^{m-2}(B)$ in ogni dominio limitato B del semipiano $t \leq 0$ e si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} D_t^h D_s^{k-h} v_j(t, s) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j^{(m-j-1)}(\sigma) \frac{(s - \sigma)^{m-k-2} [\log(s - \sigma) + c_k] d\sigma}{(m-k-2)!} d\sigma \cdot \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma) z^h}{M(z, \sigma)} dz \right\}$$

con c_k costante reale opportuna e $0 \leq k \leq m-2, 0 \leq h \leq k$.

Si può allora ripetere anche nelle ipotesi da noi poste su φ_j , lo stesso calcolo fatto in [10] (formula (7.5)) e ricavare così per $s' \leq s \leq s''$

$$(4.8) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} D_t^h D_s^{k-h} v_j(t, s) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq k \leq j, \quad 0 \leq h \leq k \\ \delta_{j,h} \varphi_j^{(k-j)}(s) & \text{per } j \leq k \leq m-2, \quad 0 \leq h \leq k \end{cases}$$

da cui le (4.3).

Si ha poi per $0 \leq h \leq m-1$

$$\begin{aligned} D_t^h D_s^{m-1-h} v_j(t, s) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j^{(m-j-1)}(\sigma) d\sigma \cdot \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma) z^h}{M(z, \sigma)(t z + s - \sigma)} dz \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j^{(m-j-1)}(s + t\eta) H_{j,h}(\eta, s + t\eta) d\eta \end{aligned}$$

dove

$$H_{j,h}(\eta, \sigma) = - \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma) z^h}{M(z, \sigma)(z - \eta)} dz \right\}$$

Si osservi che, tenuto conto di quanto si è detto su $M_{m-j-1}(z, \sigma)$ e $M(z, \sigma)$, è ancora valida la

$$(4.10) \quad H_{j,h}(\eta, \sigma) = O\left(\frac{1}{1 + \eta^2}\right)$$

la quale limita $H_{j,h}(\eta, \sigma)$ indipendentemente da σ .

Si ha inoltre ancora la (3.12), per ogni σ fissato, cioè

$$(4.11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H_{j,h}(\eta, \sigma) d\eta = \delta_{j,h}$$

Si ottiene quindi, posto per semplicità $\varphi_j^{(m-j-1)} = \varphi$, $H_{j,h} = H$,

$$\begin{aligned} (4.12) \quad & \int_{s'}^{s''} [D_t^h D_s^{m-1-h} v_j(t, s) - \delta_{j,h} \varphi(s)]^2 ds = \int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(s + t\eta) - \varphi(s)] H(\eta, s + t\eta) d\eta + \right. \\ & + \left. \int_{-\infty}^{+\infty} [H(\eta, s + t\eta) - H(\eta, s)] \varphi(s) d\eta \right\}^2 ds \leq c \int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(s + t\eta) - \varphi(s)| \frac{1}{1 + \eta^2} d\eta \right\}^2 ds + \\ & + c \int_{s'}^{s''} \varphi^2(s) F(t, s) ds, \quad \text{dove } F(t, s) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [H(\eta, s + t\eta) - H(\eta, s)] d\eta \right)^2 \end{aligned}$$

e c è un numero positivo indipendente da φ . Il primo integrale del secondo membro tende a zero per $t \rightarrow 0^-$, come si è visto per la (3.15) del n. precedente.

Quanto al secondo integrale si ha per la (4.10)

$$(4.13) \quad H(\eta, s + t\eta) - H(\eta, s) = O\left(\frac{1}{1 + \eta^2}\right)$$

ed inoltre

$$(4.14) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} (H(\eta, s + t\eta) - H(\eta, s)) = 0$$

per ogni s di (s', s'') e ogni η di $(-\infty, +\infty)$.

Si può allora, per ogni s di (s', s'') , passare al limite sotto il segno di integrale in $F(t, s)$ ottenendo $\lim_{t \rightarrow 0^-} F(t, s) = 0$.

E risulta inoltre, sempre per la (4.13),

$$|F(t, s)| \leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + \eta^2}\right)^2 d\eta = c'$$

per ogni s di (s', s'') e ogni t , con c e c' indipendenti da φ .

Ne segue allora anche

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{s'}^{s''} \varphi^2(s) F(t, s) ds = 0.$$

In definitiva si ha che il primo membro della (4.12) tende a zero per $t \rightarrow 0^-$ e di qui si deduce la (4.4).

Si ha poi per k intero positivo e $0 \leq h \leq m - 1 + k$

$$D_t^h D_s^{m-1+k} v_j(t, s) = \frac{(-1)^{k+1} k!}{t^k} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{j(m-j-1)}(s + t\eta) d\eta \cdot \int \frac{M_{m-j-1}(z, s + t\eta) z^h}{M(z, s + t\eta) (z - \eta)^{k+1}} dz \right\}.$$

Ma per quanto si è sopra osservato a proposito di $M_{m-j-1}(z, \sigma)$ e di $|M(z, \sigma)|$, al variare di σ , si ha che

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, s + t\eta) z^h}{M(z, s + t\eta) (z - \eta)^{k+1}} dz \right\} = O\left(\frac{1}{1 + |\eta|^2} \right)$$

e quindi con calcolo analogo a quello fatto in (3.15),

$$\begin{aligned} & \left(\int_{s'}^{s''} |D_t^h D_s^{m-1+k-h} v_j(t, s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \frac{c}{|t|^k} \left(\int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_j^{(m-j-1)}(s+t\eta)| \frac{1}{1+|\eta|^{1+k}} d\eta \right\}^2 ds \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \frac{c}{|t|^k} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_j^{(m-j-1)}(w)|^2 dw \right)^{1/2} \end{aligned}$$

con c indipendente da φ_j , da cui le (4.5). Tenendo poi conto che

$$\int_{-\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, s+t\eta) A(z, 1, s+t\eta)}{M(z, s+t\eta)(z-\eta)^{m+2}} dz = 0$$

si ha come in [10]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}v_j(t, s) &= \frac{(-1)^{m+2} (m+1)!}{j^{m+1}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j^{(m-j-1)}(s+t\eta) d\eta \cdot \right. \\ & \left. \int_{+\gamma} \frac{M(z, s+t\eta) [A(z, 1, s) - A(z, 1, s+t\eta)]}{M(z, s+t\eta)(z-\eta)^{m+2}} dz \right\} \end{aligned}$$

e quindi poichè i coefficienti di $A(z, 1, s)$ sono funzioni di s differenziabili con continuità in (s', s'') , si ha

$$\begin{aligned} \left(\int_s^{s''} |\mathcal{C}v_j(t, s)|^2 ds \right)^{1/2} &\leq \frac{c|t|}{|t|^{m+1}} \left(\int_{s'}^{s''} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_j^{(m-j-1)}(s+t\eta)| \frac{1}{1+|\eta|^{m+2}} d\eta \right)^2 ds \Big)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{c}{|t|^m} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_j^{(m-j-1)}(w)|^2 dw \right)^{1/2} \end{aligned}$$

con c indipendente da φ_j , da cui la (4.6)

5. Preliminari al teorema di esistenza. - Riprendiamo ora il dominio Ω e l'operatore Au introdotti nel n. 1 con tutte le ipotesi ivi fatte. Siano poi assegnate su Γ m funzioni φ_j ($j = 0, \dots, m-1$) appartenenti rispettivamente a $H^{m-j-1}(\Gamma)$; vogliamo costruire una funzione $v \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{m-2}(\bar{\Omega})$ e tale che

$$(5.1) \quad \frac{\partial v}{\partial n^j} = \varphi_j \quad \text{su } \Gamma \quad \text{per } j = 0, \dots, m-2$$

$$(5.2) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_0^l \left[(D_t^{m-1} v)_{t=\tau} - \varphi_{m-1} \right]^2 ds = 0.$$

$$(5.3) \quad \left(\int_0^l |(Av)_{t=\tau}|^2 ds \right)^{1/2} = O(|\tau|^{-m}).$$

Si ricopra la curva frontiera Γ di Ω con un numero r finito di cerchi \mathcal{C}_i aventi il centro in punti di Γ e raggio ρ minore di $\frac{|t_0|}{2}$; e siano \mathcal{C}'_i i cerchi aventi il centro negli stessi punti e raggio 2ρ , poniamo poi

$$\begin{aligned} C_i &= \mathcal{C}_i \cap \bar{\Omega} & C'_i &= \mathcal{C}'_i \cap \bar{\Omega} \\ \Gamma_i &= \mathcal{C}_i \cap \bar{\Gamma} & \Gamma'_i &= \mathcal{C}'_i \cap \bar{\Gamma} \end{aligned}$$

e indichiamo con \tilde{C}_i (\tilde{C}'_i) uno qualunque fissato degli infiniti insiemi («periodici» rispetto a s di periodo l) della striscia

$$S_{t_0}: \quad -\infty < s < +\infty, \quad t_0 \leq t \leq 0$$

che per effetto della trasformazione T data dalle (1.2) del n° 1 corrispondono a C_i (C'_i); e così pure diciamo $\tilde{\Gamma}_i$ e $\tilde{\Gamma}'_i$ i sottoinsiemi di \tilde{C}_i e \tilde{C}'_i che stanno sull'asse $t = 0$ e che ovviamente corrispondono per effetto di T agli insiemi Γ_i e Γ'_i .

Anche le m funzioni φ_j assegnate su Γ si trasformano mediante la T in m funzioni $\tilde{\varphi}_j(s)$ ($\varphi_j(x(o, s), y(o, s)) = \tilde{\varphi}_j(s)$) della variabile s , periodiche di periodo l e appartenenti rispettivamente a $H^{m-j-1}(I)$ in ogni intervallo I di R_1 .

L'operatore Au dato da (1.3) si trasforma pure mediante la T in un operatore differenziale lineare d'ordine $2m$ su S_{t_0} ancora ivi uniformemente fortemente ellittico

$$(5.5) \quad \tilde{A}\tilde{u} = \sum_{j=0}^{2m} a_{2m-j}(t, s) D_t^j D_s^{2m-j} \tilde{u}(t, s) + \tilde{\mathfrak{B}}\tilde{u}$$

dove $\tilde{\mathfrak{B}}\tilde{u}$ è un operatore di ordine $\leq 2m - 1$ a coefficienti continui in S_{t_0} e i coefficienti $a_{2m-j}(t, s)$ in quanto combinazioni lineari dei coefficienti $a_{p,q}$ con $|p| = |q| = m$, appartengono per le ipotesi fatte a $C^1(S_{t_0})$.

Introduciamo ora l'operatore

$$(5.6) \quad \tilde{\mathcal{A}}\tilde{v} = \sum_{j=0}^{2m} a_{2m-j}(o, s) D_t^j D_s^{2m-j} \tilde{v}(t, s).$$

Fissato uno qualunque degli insiemi \tilde{C}'_i si consideri una funzione $\varphi(s) \in \mathfrak{D}(R_1)$ che sia uguale ad 1 in un intervallo $s' \leq s \leq s''$ contenente $\tilde{\Gamma}'_i$; e

relativamente all'operatore (5.6) ed ai dati $\varphi \tilde{\varphi}_j (j = 0, \dots, m - 1)$ si costruisca la funzione $\tilde{v}_i(t, s)$ col procedimento del n. 4. Si ottiene così una funzione $\tilde{v}_i(t, s) \in C^{m-2}(\tilde{C}'_i)$ e indefinitamente differenziabile per $t < 0$ la quale inoltre verifica le

$$(5.7) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} D_t^j \tilde{v}_i(t, s) = \tilde{\varphi}_j(s) \quad j = 0, \dots, m - 2 \quad \text{e} \quad s'_i \leq s \leq s''_i.$$

$$(5.8) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{s'_i}^{s''_i} [D_t^{m-1} \tilde{v}_i(t, s) - \tilde{\varphi}_{m-1}(s)]^2 ds = 0.$$

$$(5.9) \quad \left(\int_{s'_i}^{s''_i} |D_t^h D_s^{m-1+k-h} \tilde{v}_i(t, s)|^2 ds \right)^{1/2} = O(|t|^{-k}) \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(5.10) \quad \left(\int_{s'_i}^{s''_i} |\mathcal{A} \tilde{v}_i(t, s)|^2 ds \right)^{1/2} = O(|t|^{-m}).$$

Poichè in S_{t_0} $\tilde{A} = \mathcal{A} + (\tilde{A} - \mathcal{A})$ e i coefficienti $a_{2m-j}(t, s)$ appartengono a $C^1(S_{t_0})$, dalle (5.9) e (5.10) seguono allora anche le

$$(5.11) \quad \left(\int_{s'_i}^{s''_i} |\tilde{A} \tilde{v}_i(t, s)|^2 ds \right)^{1/2} = O(|t|^{-m}).$$

Si consideri ora la funzione $v_i(x, y)$ ($i = 1, \dots, r$) definita in C'_i e trasformata mediante la T della restrizione di $\tilde{v}_i(t, s)$ a \tilde{C}'_i : $v_i(x(t, s), y(t, s)) = \tilde{v}_i(t, s)$ in \tilde{C}'_i ; si ha che $v_i(x, y) \in C^{m-2}(C'_i) \cap C^{2m}(C'_i - \Gamma'_i)$.

Sia data poi una «partizione dell'unità» su $\bar{\Omega}$ mediante $r + 1$ funzioni g_0, g_1, \dots, g_r appartenenti a $C^{2m}(\bar{\Omega})$ tali che

$$\sum_{i=0}^r g_i \equiv 1 \quad \text{in} \quad \bar{\Omega}$$

ed inoltre che g_0 sia nulla in $\bar{\Omega} - \sum_{i=1}^r C_i$ e ogni g_i con $i > 0$ sia nulla in $\bar{\Omega} - C'_i$. Prolungate arbitrariamente le v_i in tutto $\bar{\Omega}$ si ha che la funzione

$$(5.12) \quad v = g_0 + \sum_{i=1}^r g_i v_i$$

risulta appartenere a $C^{m-2}(\bar{\Omega}) \cap C^{2m}(\Omega)$ ed inoltre, tenuto conto delle (5.7), (5.8), (5.9) e (5.11), verifica le (5.1), (5.2) e (5.3).

Dimostriamo ora di più che risulta $Av \in H^{-m}(\Omega)$, dove con $H^{-m}(\Omega)$ intendiamo lo spazio duale dello spazio $H_0^m(\Omega)$ (v. ad es. il n. 2 di [9]).

Dimostriamo perciò il seguente

LEMMA. - Se $f(x, y)$ è una funzione continua in Ω e tale che

$$(5.13) \quad \left(\int_{\Gamma_\tau} |f|^2 ds \right)^{1/2} = O(|t|^{-m})$$

allora $f \in H^{-m}(\Omega)$.

Basta ovviamente dimostrare che per ogni funzione $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ il cui supporto sia un cerchio ω contenuto in $\Omega - \Omega_{t_0}$, si ha

$$\left| \int_{\omega} f\psi dx dy \right| \leq c \|\psi\|_m$$

con c indipendente da ψ . Diciamo ω' un insieme di S_{t_0} che sia trasformato in ω biunivocamente dalla T del n. 1 tale ω' ovviamente esiste ed è contenuto in un rettangolo del tipo: $t_0 < t < 0$, $s' < s < s''$ con $s'' - s' < l$.

Si ha allora, dette c delle costanti diverse, indipendenti da ψ e posto $\tilde{f}(t, s) = f(x(t, s), y(t, s))$, $\tilde{\psi}(t, s) = \psi(x(t, s), y(t, s))$

$$\left| \int_{\omega} f\psi dx dy \right| \leq c \int_{t_0}^0 dt \int_{s'}^{s''} |\tilde{f}(t, s)\tilde{\psi}(t, s)| ds \leq c \int_{t_0}^0 dt \left(\int_{s'}^{s''} \tilde{f}^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{s'}^{s''} \tilde{\psi}^2 ds \right)^{1/2}$$

da cui posto $h_0(t) = \left(\int_{s'}^{s''} \tilde{\psi}^2(t, s) ds \right)^{1/2}$, si ha per la (5.13)

$$(5.14) \quad \left| \int_{\omega} f\psi dx dy \right| \leq c \int_{t_0}^0 \frac{h_0(t)}{|t|^m} dt = (-1)^m \frac{c}{1-m} \int_{t_0}^0 \frac{h_0'(t)}{t^{m-1}} dt \leq c \int_{t_0}^0 \frac{|h_0'(t)|}{|t|^{m-1}} dt.$$

E poichè

$$|h_0'(t)| = \left| \int_{s'}^{s''} \tilde{\psi} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} ds \right| \left(\int_{s'}^{s''} \tilde{\psi}^2 ds \right)^{-1/2} \leq \left(\int_{s'}^{s''} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right)^2 ds \right)^{1/2} = h_1(t)$$

si ha quindi

$$\left| \int_{\omega} f\psi dx dy \right| \leq c \int_{t_0}^0 \frac{h_1(t)}{|t|^{m-1}} dt.$$

Ripetendo sull'ultimo integrale il calcolo ora fatto per la (5.14) e così proseguendo per m volte si ottiene in definitiva

$$\left| \int_{\omega} f\psi dx dy \right| \leq c \left(\int_{t_0}^0 \int_{s'}^{s''} \left(\frac{\partial^m \tilde{\psi}}{\partial t^m} \right)^2 dt ds \right)^{1/2} \leq c \|\psi\|_m.$$

6. Il teorema di esistenza. - Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA DI ESISTENZA. - *Nelle ipotesi su Ω e sull'operatore Au introdotte nel n. 1, assegnate su Γ m funzioni φ_j ($j = 0, \dots, m - 1$) appartenenti rispettivamente a $H^{m-j-1}(\Gamma)$ e su Ω una distribuzione f appartenente ad $H^{-m}(\Omega)$ ⁽¹⁰⁾, esiste una e una sola funzione $u \in C^{m-2}(\bar{\Omega}) \cap H^m(\Omega_\tau)$ per ogni $\tau < 0$ e tale che*

$$(6.1) \quad Au = f$$

nel senso delle distribuzioni su Ω e

$$(6.2) \quad \frac{\partial^j u}{\partial n^j} = \varphi_j$$

su Γ per $j = 0, \dots, m - 2$ e

$$(6.3) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0^-} \int_0^l [(D_t^{m-1}u)_{t=\tau} - \varphi_{m-1}]^2 ds = 0.$$

Si costruisca anzitutto col procedimento del n. 5 la funzione v verificante le (5.1), (5.2) e (5.3), relativamente ai dati $\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$; per il lemma del n. 5, $v \in H^{-m}(\Omega)$.

Si consideri poi il problema di DIRICHLET con condizioni al contorno omogenee:

$$(6.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} Aw = f - Av \quad \text{nel senso delle distribuzioni su } \Omega, \\ w \in H_0^m(\Omega). \end{array} \right.$$

Per l'ipotesi (1.8) del n. 1, il problema ammette in virtù dei risultati di J. L. LIONS [8] una e una sola soluzione w . Essa per il teorema di SOBOLEV richiamato nel n. 1 appartiene anche a $C^{m-2}(\bar{\Omega})$ e quindi verifica in senso ordinario le condizioni

$$\frac{\partial^j w}{\partial n^j} = 0 \quad \text{su } \Gamma, \quad \text{per } j = 0, \dots, m - 2.$$

Inoltre per proprietà note delle tracce delle funzioni appartenenti ad $H^m(\Omega)$ si ha anche

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^-} \int_0^l [D_t^{m-1}w]_{t=\tau}^2 ds = 0.$$

La soluzione del problema assegnato è allora ovviamente data da $u = w + v$; ed essa è unica in virtù del teorema di unicità del n. 2.

⁽¹⁰⁾ Sarà utile ricordare che $H^{-m}(\Omega)$ è costituito da tutte e sole le distribuzioni su Ω della forma $\sum_{|p| \leq m} D^p f_p$ con $f_p \in L^2(\Omega)$; in particolare dunque $L^2(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega)$.

OSSERVAZIONE I. - Dalle maggiorazioni ottenute per la funzione v nei n. precedenti è anche facile, tenuto conto che $\|w\|_m \leq c\|f - Av\|_{-m}$ ⁽¹¹⁾, dedurre per la soluzione u trovata la maggiorazione

$$\|u\|_{m-1} \leq c \left\{ \|f\|_{-m} + \sum_{j=0}^{m-2} \max_{\text{su } \Gamma} |\varphi_j| + \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j^{(m-j-1)}\|_{L^2(\Gamma)} \right\}$$

con c dipendente solo dal dominio Ω e dai coefficienti $a_{p,q}$.

OSSERVAZIONE II - La convergenza in media della soluzione sul sistema di curve $\{\Gamma_\tau\}$ «parallele» a Γ può essere anche sostituita con una analoga convergenza in media su un altro sistema di curve $\{\gamma_\tau\}$; ed è facile vedere che, purchè quest'ultimo sistema si ottenga dal precedente mediante una trasformazione sufficientemente «regolare» della corona $\Omega - \Omega_{\epsilon_0}$ in sè, la soluzione del problema non dipende dal sistema di curve adoperato.

7. **Confronto con altre teorie.** - Sarà bene prima di concludere ricordare che recentemente sono state sviluppate delle teorie dei problemi al contorno per equazioni lineari ellittiche in classi di soluzioni a integrale di DIRICHLET d'ordine m anche non finito e con condizioni al contorno non omogenee, soprattutto da M. I. VISHIK e S. L. SOBOLEV [16] e da J. L. LIONS [8 bis] (si veda anche l'esposizione generale datane nel n. 14 di [9]).

I risultati ottenuti nel presente lavoro, così come quelli di S. AGMON [1] e di C. MIRANDA [10], non rientrano però in quelli che, nelle stesse ipotesi sui dati, si possono ottenere da queste teorie, in quanto permettono di precisare maggiormente le proprietà della soluzione e in particolare il modo di assumere i dati al contorno. Così ad es. (per la nomenclatura mi riferisco al n. 14 di [9] se $f \in H^{-m}(\Omega)$ e $\varphi_j \in H^{m-j-1}(\Gamma)$ (o se le φ_j sono ancor più regolari, come è nei casi considerati da MIRANDA e da AGMON) osservando che

$$\langle f, v \rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^l \varphi_j \mathcal{L}_j^* v ds$$

al variare di v in $H^{2m}(R^2)$ rappresenta una distribuzione di H_0^{-2m} , si può applicare un teorema di LIONS [8 bis] (teorema 14.3 del n. 14 di [9]); si ottiene così però solo l'esistenza e l'unicità di una soluzione debole del problema, precisamente di una funzione $u \in L^2(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} u Av^* dx dy = \langle f, v \rangle - \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^l \varphi_j \mathcal{L}_j^* v ds$$

⁽¹¹⁾ $\|\cdot\|_{-m}$ è la norma in $H^{-m}(\Omega)$, $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$ è la norma in $L^2(\Gamma)$.

per ogni $v \in H^{2m}(R^2)$ soddisfacente alle condizioni $\frac{\partial^j v}{\partial n^j} = 0$ su Γ , $j = 0, \dots, m-1$.

I risultati di AGMON e di MIRANDA e quello del presente lavoro, se $\varphi_j \in H^{m-j-1}(\Gamma)$, precisano invece maggiormente le proprietà della soluzione e il modo di assumere i dati al contorno.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. AGMON, « *Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for higher order elliptic equations in the plane*, I., « *Commun. pure appl. math.* », 10 (1957), pp. 179-239.
- [2] F. E. BROWDER, « *On regularity properties of solutions of elliptic differential equations*, « *Commun. pure appl. math.* », 9 (1956), pp. 351-361.
- [3] — — « *Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems*, « *Proc. Nat. Acad. Sc. of U.S.A.* », 45 (1959), pp. 365-372.
- [4] G. CIMMINO, « *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*, « *Rend. Circ. Mat. Palermo* », 61 (1937), pp. 177-224.
- [5] L. GÄRDING, « *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*, « *Math. Scand.* », I (1953), pp. 237-255.
- [6] O. V. GUSEVA, « *Sui problemi al contorno per sistemi fortemente ellittici* (in russo), « *Doklady Akad. Nauk.* », 102 (1955), pp. 1069-1072.
- [7] A. I. KOSHELEV, « *Sulla limitatezza in L_p delle derivate...* (in russo), « *Doklady Akad. Nauk.* », 116 (1957), pp. 542-544.
- [8] J. L. LIONS, « *Problèmes aux limites en théorie des distributions*, « *Acta Math.* », 94 (1955), pp. 13^a-153.
- [8 bis] — — « *Conditions aux limites de Visik-Soboleff et problèmes mixtes*, « *C. R. Acad. Sc. Paris* », 244 (1957), pp. 1126-1128.
- [9] E. MAGENES - G. STAMPACCHIA, « *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*, « *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* », III, 12 (1958), pp. 247-357.
- [10] C. MIRANDA, « *Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza e di unicità per il problema di Dirichlet relativo alle equazioni ellittiche in due variabili*, « *Ann. Mat. pura appl.* », 46 (1958), pp. 265-312.
- [11] L. NIRENBERG, « *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, « *Commun. pure appl. math.* », 8 (1955), pp. 647-675.
- [12] B. PINI, « *Teoremi di unicità per problemi generalizzanti i problemi biarmonici fondamentali interno ed esterno*, « *Boll. U.M.I.* », 10 (1955), pp. 465-473.
- [13] — — « *Una generalizzazione del problema biarmonico fondamentale*, « *Rend. Sem. Mat. Padova* », 25 (1956), pp. 196-213.
- [14] — — « *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali lineari ellittiche in due variabili*, « *Rend. Sem. Mat. Padova* », 26 (1956), pp. 177-200.
- [15] M. I. VISHIK, « *Sui sistemi fortemente ellittici di equazioni differenziali*, (in russo) « *Mat. Sbornik* », 29 (1951), pp. 615-675.
- [16] M. I. VISHIK - S. L. SOBOLEV, « *Nuova impostazione generale per i problemi al contorno* (in russo) « *Doklady Akad. Nauk.* », 111 (1956), pp. 521-523.