Sulla convergenza in lunghezza delle medie integrali.

di E. BAIADA (a Palermo)

A Giovanni Sansone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Si fanno alcune considerazioni critiche sulla convergenza in lunghezza e in area di alcuni tipi di medie, mettendo in luce il carattere di passaggio al limite sotto il segno del classico teorema di Tonelli.*

1. È noto che:

1°) Se $x(t)$, $y(t)$ sono definite, continue su (a, b), la curva

$$C \equiv [x(t),\ y(t);\ a,\ b]$$

è rettificabile allora e allora soltanto che $x(t)$, $y(t)$ sono entrambi a variazione limitata (1).

2°) La lunghezza (2) di C, nelle ipotesi di sopra, è data da

$$L(C) = \lim_{h \to 0} \int_a^{b-h} \sqrt{1 + \left[\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right]^2 + \left[\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right]^2}\, dt; \tag{1}$$

in altre parole, se si considera la curva C_h, detta media integrale di ampiezza h, di equazioni:

$$C_h \equiv \begin{cases} x_h(t) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h x(t+\xi)d\xi, \\ y_h(t) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h y(t+\xi)d\xi, \end{cases} \qquad h > 0,\ a \leq t \leq b - h, \tag{2}$$

questa curva converge, per $h \to 0$ alla C e la sua lunghezza L_{C_h} tende alla lunghezza di C.

(1) È il classico teorema di JORDAN.

(2) È un teorema noto, per la convergenza in variazione, vedi T. RADÒ: *Length and Area*, « American Math. Soc. Colloquium pubblications », Vol. XXX. p. 207. Per la convergenza in lunghezza vedere una dimostrazione che non usa la media integrale in E. BAIADA e L. CARDAMONE: *Variazione totale e lunghezza di una curva*, « Annali Scuola Normale S. di Pisa », serie III Vol. XI Fasc.lo II.

3°) In (1) vale il passaggio al limite [3] sotto il segno di integrale allora e allora soltanto che $x(t)$ e $y(t)$ sono assolutamente continui. In altre parole vale la formula classica per la lunghezza di una curva:

$$L_C = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt. \tag{3}$$

2. La proprietà di cui si parla in 2°) può essere espressa concisamente dalla formula seguente:

$$L_C \geq \min_{h,\,k \to 0} \lim \int_a^{b-h-k} \sqrt{1 + \left[\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right]^2 + \left[\frac{y(t+h) - y(t)}{k}\right]^2}\, dt. \tag{1'}$$

Infatti, a causa della semi-continuità del funzionale-lunghezza è:

$$L_C = \min_{h,\,k \to 0} \lim \int_a^{b-h-k} \sqrt{1 + \left[\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right]^2 + \left[\frac{y(t+k) - y(t)}{k}\right]^2}\, dt$$

l'uguaglianza in (1') discende allora da (1), facendo $h = k$.

I risultati che vogliamo segnalare sono i seguenti.

a) Nella (1') *l'operazione di limite non può sempre sostituire quella di minimo limite.*

b) Facendo uso della seconda formulazione della proposizione 2°) la questione precedente prende il seguente aspetto.

Considerata la curva $C_{h,k}$ di equazioni

$$C_{h,k} \equiv \begin{cases} x_h(t) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h x(t+\xi)\,d\xi, \\[2ex] y_k(t) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^k y(t+\xi)\,d\xi, \end{cases} \qquad \begin{array}{c} a < t < b - h - k, \\ h > 0,\ k > 0, \end{array} \tag{4}$$

essa converge uniformemente a C quando h e k tendono contemporaneamente e indipendentemente a zero. Si ha allora

$$\max_{h,\,k \to 0} \lim L_{C_{h,k}} \geq L_C = \min_{h,\,k \to 0} \lim L_{C_{h,k}}, \tag{4'}$$

e il segno $>$ sussiste effettivamente in qualche caso. Mostreremo *a*) e *b*) con un esempio.

---

[3] È un classico teorema di TONELLI.

c) Un caso particolare della situazione illustrata precedentemente è il seguente.

Si consideri la curva $\overline{C}_k$ di equazioni;

$$(5) \qquad \overline{C}_k \equiv \begin{cases} x = x(t), \\ y = y_k(t) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^k y(t+\xi)d\xi. \end{cases} \qquad k < 0,\ a \leq t \leq b - k$$

È chiara la somiglianza della curva $\overline{C}_k$ con C_h e $C_{h,k}$: la $\overline{C}_k$ si ottiene dalla C sostituendo ad una sola delle equazioni parametriche la propria media integrale di ampiezza k, la C_h sostituendo ad *entrambe* le equazioni la media integrale di *stessa* ampiezza per entrambe, e la C_{hk} sostituendo ad entrambe le equazioni le medie integrali, una però, la prima, di ampiezza h e l'altra di ampiezza k.

È cioè:

$$(6) \qquad \begin{aligned} C_k &\equiv C_{k,h}, \\ \overline{C}_h &= \lim_{h \to 0} C_{h,k}. \end{aligned}$$

Potrebbe sembrare che la curva $\overline{C}_k$ sia, in un certo senso, più vicina della C_h, alla C, in quanto che in essa una *sola* delle equazioni è stata modificata, mentre in C_h lo sono state entrambe. La cosa però sta in tutt'altra maniera.

Infatti *mentre C_h tende in lunghezza a C, per la $\overline{C}_k$ non è senz'altro detto ciò accada.* Faremo vedere con un esempio che effettivamente questa situazione si presenta: e precisamente che senza mettere altre condizioni avviene, per particolari curve,

$$(7) \qquad \lim_{k \to 0} L_{\overline{C}_k} > L_C.$$

d) La proposizione che si ottiene dalla (7) sostituendovi l'uguaglianza alla disuguaglianza:

$$(8) \qquad \lim_{k \to 0} L_{\overline{C}_k} = L_C,$$

ritorna a valere se la coordinata non alterata: $x = x(t)$ oltre che a variazione limitata è assolutamente continua [4]. Si ha allora:

$$(8') \qquad L_C = \lim_{k \to 0} \int_a^{b-k} \sqrt{x'^2(t) + \left[\frac{y(t+k) - y(t)}{k}\right]^2}\, dt$$

---

[4] Di questa proposizione verrà pubblicata una dimostrazione di L. CARDAMONE presentata all'Accademia delle Scienze e Lettere di Palermo (1959), dal titolo: *Sulle espressioni che danno la lunghezza di una curva.*

e) Facendo uso della proposizione *d*) nel caso particolare in cui essa vale e ricordando la (6), poichè $y_k(t)$ è assolutamente continua, avendo, come è facile verificare, derivate continue:

$$L_{\bar{C}_k} = \lim_{h \to 0} L_{C_{h,k}},$$

prendendone il limite per $k \to 0$ ed usando la (7)

$$\lim_{k \to 0} L_{\bar{C}_k} = \lim_{k \to 0} \lim_{h \to 0} L_{C_{h,k}} > L_C = \min \lim_{h, k \to 0} L_{C_{h,k}}$$

e si ha così la (4').

Per dimostrare le *a*), *b*), *c*), basta allora far vedere che è valida la (7) verificandola in un caso particolare: è ciò che faremo nel seguente numero.

È importante, però, far notare che la proposizione data in *d*) mette bene in luce il carattere di teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale che ha il teorema di TONELLI riportato in 3), in quanto questo passaggio al limite sotto il segno di integrale *è valido anche se solo una delle coordinate è continua assolutamente* e l'inversione del limite con l'integrazione si esegua, naturalmente, soltanto per questa coordinata, ottenendosi così la formola (8').

È evidente che tutte le proposizioni sopra riportate sono valide altresì anche per le curve dello spazio.

La stessa situazione si presenta per le superficie, in quanto la proposizione a), b), c), avendo carattere negativo, se quelle positive valessero per le superficie, dovrebbero valere positivamente anche per le curve, cosa invece che non avviene.

3. Consideriamo la curva:

$$C \equiv \begin{cases} x = g(t) \\ y = g(t), \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq l,$$

dove la funzione $g(t)$ è la cosidetta funzione di VITALI, costruita a partire dell'insieme di CANTOR, essa è notoriamente continua e non decrescente, quindi a variazione limitata. La curva C è evidentemente quel segmento di estremi (0,0) e (1,1).

La curva C ha quindi lunghezza $\sqrt{2}$.

Andiamo considerare la curva

$$\bar{C}_k \equiv \begin{cases} x = g(t) \\ y = g_k(t) = \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_0^k g(t + \xi) d\xi, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1 - k,\ k > 0.$$

Ricordando che la $g(t)$ ha dei tratti di costanza che sono precisamente gli intervalli contigui all'insieme di CANTOR, se t si trova in uno di questi tratti la coordinata x rimane evidentemente costante mentre l'altra coordinata y

varia, anzi sappiamo che addirittura cresce. Il punto corrente sulla curva percorre allora un tratto parallello all'asse delle y che noi diremo per brevità verticale. Se indichiamo con (t_i, t_{i+1}) quest'intervallo di costanza per la funzione di VITALI, la lunghezza del tratto di $\bar{C}_k$ che risulta verticale è data (siccome la $y_k(t)$ è assolutamente continua e crescente, perchè ha per derivata

$$\frac{y(t-k)-y(t)}{k}$$

che risulta continua e non negativa) dall'espressione

$$y_{i+1}-y_i=\int_{ti}^{t+1}\frac{g(t+k)-g(t)}{k}\,dt.$$

Consideriamo un numero finito di questi segmenti verticali, ma arbitrariamente grande e congiungiamo il primo estremo di ognuno con il secondo estremo di quello che lo precede (con ascissa immediatamente inferiore) con un segmento. Si ottiene così una poligonale P_k iscritta nella curva $\bar{C}_k$ ed ha quindi lunghezza evidentemente inferiore a quella di $\bar{C}_k$.

La lunghezza di P_k è maggiore della somma delle lunghezze di quei segmenti che la compongono che sono verticali e della somma delle proiezioni degli altri segmenti non verticali sull'asse delle x.

Ora la somma delle lunghezze dei tratti verticali è:

$$\sum_i\int_{ti}^{ti+1}\frac{g(t+k)-g(t)}{k}\,dt,$$

dove la sommatoria è estesa a quei tratti del complementare dell'insieme di CANTOR che è stato preso in considerazione nella costruzione della poligonale P_k. Ma siccome questi tratti sono in numero grande quanto si voglia, la sommatoria può essere considerata su un numero comunque grande di intervalli contigui all'insieme di CANTOR, e noi sappiamo che la somma di tali intervalli riesçe a superare qualunque segmento minore di uno.

D'altra parte è noto che

$$\lim_{k\to 0}\int_0^{1-k}\frac{g(t+k)-g(t)}{k}\,dt=1,$$

perchè fornisce la variazione [5] della funzione di VITALI sull'intervallo (0,1).

---

[5] Vedere i lavori citati in (2); la relazione può però vedersi qui direttamente ed elementarmente.

Fissato un $\varepsilon > 0$ possiamo determinare $\bar{k} > 0$ tale che se $0 < k < \bar{k}$ è

$$\int_0^{1-k} \frac{g(t+k) - g(t)}{k}\, dt > 1 - \varepsilon .$$

Sempre in corrispondenza di ε determiniamo una poligonale P_k, prendendo in numero sufficientemente elevato intervalli di costanza di $g(t)$, in modo tale che la somma degli intervalli contigui all'insieme di CANTOR sia così vicino a uno da far sì che

$$\int_{\Sigma(t_{i+1} - \ \ i)} \frac{g(\ \ + k) - g(t)}{k}\, dt > 1 - \varepsilon .$$

Ciò è fattibile ogni qualvolta si fissi k soddisfacente alla $0 < k < \bar{k}$. Siccome la somma delle proiezioni di P_k sull'asse delle x è $1-k$, avremo che la lunghezza della poligonale P_k è maggiore di $2 - k - 2\varepsilon$. La lunghezza di $\bar{C}_k$ risulta allora maggiore di $2 - k$.

Cosicchè:

$$\lim_{k \to 0} \bar{C}_k = 2,$$

mentre $L_C = \sqrt{2}$.