Sulle congruenze rettilinee nello spazio ellittico.

di WILHELM BLASCHKE (a Hamburg)

A Giovanni Sansone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Si considera nel seguito un tema classico: la geometria della retta nello spazio neneuclideo ellittico mediante l'uso dei quaternioni con applicazioni alla geometria differenziale delle congruenze rettilinee.*

§ 1. Quaternioni

Useremo *quaternioni* cioè espressioni del tipo

$$Q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 , \tag{1}$$

dove i q_j significano numeri reali o complessi e per la moltiplicazione dei e_j valgono le regole

$$e_0 = 1, \; e_j e_j = -1, \; e_j e_k = -e_k e_i = e_l ; \; j, k, l = 1, 2, 3; \; 2, 3, 1; \; 3, 1, 2. \tag{2}$$

Si conferma la legge associativa ed introducendo il *quaternione conjugato*

$$\tilde{Q} = q_0 e_0 - q_1 e_1 - q_2 e_2 - q_3 e_3 \tag{3}$$

la regola per il conjugato del prodotto

$$\widetilde{Q_1 Q_2} = \tilde{Q}_2 \tilde{Q}_1 . \tag{4}$$

Inoltre introducendo la *norma* d'un quaternione

$$N(Q) = Q\tilde{Q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = (QQ) \tag{5}$$

dalla (4) segue

$$N(Q_1 Q_2) = N(Q_1) \cdot N(Q_2). \tag{6}$$

Un quaternione con

$$2q_0 = Q + \tilde{Q} = 0 \tag{7}$$

si chiama un *vettore*. I quaternioni furono introdotti nel 4.5.1748 da EULERO, usati da GAUSS 1819 e ritrovati da HAMILTON 1840.

§ 2. **Direzioni delle rette nello spazio ellittico.**

Siano x_j; $j = 0, 1, 2, 3$ coordinate omogenee d'un punto X nello spazio projettivo P_3. Normalizziamo queste coordinate colla condizione

$$(XX) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + y_3^2 = 1. \tag{1}$$

Allora la distanza φ di due punti X, X' dello spazio ellittico E_3 si definisce mediante la formula

$$\cos\varphi = (XX') = x_0x_0' + x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'. \tag{2}$$

La quadrica assoluta del E_3 sarà allora

$$(XX) = 0 \tag{3}$$

e due punti colla distanza $\varphi = \frac{\pi}{2}$ cioè con

$$(XX') = 0 \tag{4}$$

sono assolutamente coniugati.

Per la retta R che congiunge due tali punti:

$$(XX) = (X'X') = 1,\ (XX') = 0 \tag{5}$$

s'introducono i quaternioni

$$X = \sum_0^3 e_j x_j\,,\quad X' = \sum_0^3 e_j x_j' \tag{6}$$

e mediante questi i vettori unitarii

$$r = \tilde{X}X',\ r' = X'\tilde{X};\ (rr) = (r'r') = 1,\ r + \tilde{r} = r' + \tilde{r}' = 0. \tag{7}$$

In tal modo la retta (orientata) R viene rappresentata mediante le due «*direzioni*» r, r' sulla sfera sinistra $(rr) = 1$, che chiameremo S, e su quella destra S' con $(r'r') = 1$.

Queste direzioni r, r' non cambiano, quando si cambia i punti X, X', che portano la R, nella maniera

$$X^* = X\cos\varphi + X'\operatorname{sen}\varphi,\ X'^* = -X\operatorname{sen}\varphi + X'\cos\varphi. \tag{8}$$

Il gruppo G_6 dei *movimenti* dello spazio E_3 si rappresenta mediante i quaternioni nel modo

$$X^* = \tilde{Q}'XQ,\ Q\tilde{Q} = Q'\tilde{Q}' = 1, \tag{9}$$

come si verifica mediante la (1,6) e la (9) ci dà per le direzioni

$$r^* = \tilde{Q}rQ,\ r'^* = \tilde{Q}'r'Q'. \tag{10}$$

Ai movimenti dello spazio E_3 corrispondono dunque le rotazioni (10) delle due sfere S, S'. Nella tabella seguente diamo qualche proprietà della rappresentazione delle rette R del E_3 sulle due sfere S, S' delle loro direzioni.

Le sfere S, S'	*lo spazio* E_3
coppia di punti $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$	retta orientata R
cambiamento $\boldsymbol{r}^* = -\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'^* = -\boldsymbol{r}'$	cambiamento di direzione della R
due coppie congruenti: $\langle \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \rangle$	rette R, R' che si tagliano
rotazione $\boldsymbol{r} = \tilde{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{r}' \boldsymbol{Q}$	punto $\boldsymbol{Q}$ (stella di rette)
antirotazione $\boldsymbol{r} = -\tilde{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{r}' \boldsymbol{Q}$	piano polare di $\boldsymbol{Q}$
$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\boldsymbol{Q} = 0$	la retta R colle direzioni $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}$ contiene il punto $\boldsymbol{Q}$

Resoconto bibliografico. La memoria fondamentale di CAYLEY sulla sua metrica è: A siths memoir upon quantics, Phil. Trans. 149, London 1859 = Papers 2, p. 583-592. Sulla rappresentazione delle rette: E. K. CLIFFORD, London Math. Soc. Proceedings 4 (1873) = papers Nr. 20, p. 181; J. HJELMSLEV, Kopenhagen Akademie 1900, p. 305-330; la tesi di G. FUBINI, Annali della Scuola Normale, Pisa 9 (1900), p. 1-74; E. STUDY, American Journal 29 (1907), p. 116-159.

§ 3. Tetraedro polare nello spazio E_3.

Prendiamo nello spazio ellittico E_3 quattro punti $\boldsymbol{X}_j$ con $j = 0, 1, 2, 3$ formanti un tetraedro polare della quadrica assoluta (2,3) col loro determinante positivo:

$$\langle \boldsymbol{X}_j \boldsymbol{X}_k \rangle = \delta_{jk}, \ [\boldsymbol{X}_0 \boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{X}_3] = +1. \tag{1}$$

Per le direzioni dei sei spigoli del tetraedro valgono allora le formule

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= \tilde{\boldsymbol{X}}_0 \boldsymbol{X}_1 = -\tilde{\boldsymbol{X}}_2 \boldsymbol{X}_3, & \boldsymbol{r}_1' &= \boldsymbol{X}_1 \tilde{\boldsymbol{X}}_0 = +\boldsymbol{X}_3 \tilde{\boldsymbol{X}}_2, \\ \boldsymbol{r}_2 &= \tilde{\boldsymbol{X}}_0 \boldsymbol{X}_2 = -\tilde{\boldsymbol{X}}_3 \boldsymbol{X}_1, & \boldsymbol{r}_2' &= \boldsymbol{X}_2 \tilde{\boldsymbol{X}}_0 = +\boldsymbol{X}_1 \tilde{\boldsymbol{X}}_3, \\ \boldsymbol{r}_3 &= \tilde{\boldsymbol{X}}_0 \boldsymbol{X}_3 = \tilde{\boldsymbol{X}}_1 \boldsymbol{X}_2, & \boldsymbol{r}_3' &= \boldsymbol{X}_3 \tilde{\boldsymbol{X}}_0 = +\boldsymbol{X}_2 \tilde{\boldsymbol{X}}_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Queste relazioni si verificano nel caso speciale

$$\boldsymbol{X}_j = e_j, \tag{3}$$

al quale s'arriva mediante un movimento ellittico (2,9) che conserva le (2). Inoltre si ha

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_j \boldsymbol{X}_k = -\boldsymbol{X}_k \tilde{\boldsymbol{X}}_j. \tag{4}$$

Per la moltiplicazione dei punti $\boldsymbol{X}$ valgono dunque le tavole

$$(5)\qquad \begin{array}{c|cccc} & \boldsymbol{X}_0 & \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_3 \\ \hline \tilde{\boldsymbol{X}}_0 & 1 & \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 \\ \tilde{\boldsymbol{X}}_1 & -\boldsymbol{r}_1 & 1 & -\boldsymbol{r}_3 & \boldsymbol{r}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{X}}_2 & -\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 & 1 & -\boldsymbol{r}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{X}}_3 & -\boldsymbol{r}_3 & -\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & \tilde{\boldsymbol{X}}_0 & \tilde{\boldsymbol{X}}_1 & \tilde{\boldsymbol{X}}_2 & \tilde{\boldsymbol{X}}_3 \\ \hline \boldsymbol{X}_0 & 1 & -\boldsymbol{r}'_1 & -\boldsymbol{r}'_2 & -\boldsymbol{r}'_3 \\ \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{r}'_1 & 1 & -\boldsymbol{r}'_3 & \boldsymbol{r}'_2 \\ \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{r}'_2 & \boldsymbol{r}'_3 & 1 & -\boldsymbol{r}'_1 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{r}'_3 & -\boldsymbol{r}'_2 & \boldsymbol{r}'_1 & 1 \end{array}$$

dove il primo fattore è quello a sinistra. Per i vettori $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ valgono le condizioni

$$(6)\qquad \langle \boldsymbol{r}_j \boldsymbol{r}_k \rangle = \langle \boldsymbol{r}_j' \boldsymbol{r}_k' \rangle = \delta_{jk}, \quad [\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3] = [\boldsymbol{r}_1'\boldsymbol{r}_2'\boldsymbol{r}_3'] = +1.$$

§ 4. Tetraedro mobile.

Supponendo ora, che il tetraedro dei punti $\boldsymbol{X}$ dipenda da due parametri u, v, per i differenziali $d\boldsymbol{X}$ otteniamo le formule

$$(1)\qquad \begin{aligned} d_0\boldsymbol{X} &= \quad * \quad + \boldsymbol{X}_1\alpha_1 + \boldsymbol{X}_2\alpha_2 + \boldsymbol{X}_3\alpha_3, \\ d\boldsymbol{X}_1 &= -\boldsymbol{X}_1\alpha_1 \quad * \quad + \boldsymbol{X}_2\beta_3 - \boldsymbol{X}_3\beta_2, \\ d\boldsymbol{X}_2 &= -\boldsymbol{X}_2\alpha_2 - \boldsymbol{X}_2\beta_3 \quad * \quad + \boldsymbol{X}_3\beta_1, \\ d\boldsymbol{X}_3 &= -\boldsymbol{X}_3\alpha_3 + \boldsymbol{X}_1\beta_2 - \boldsymbol{X}_2\beta_1 \quad * \quad, \end{aligned}$$

dove α, β significano pfaffiani in u, v. Derivando esternamente secondo G. FROBENIUS ed E. CARTAN otteniamo le condizioni d'integrabilità

$$(2)\qquad \begin{aligned} d\alpha_1 &= -[\alpha_2\beta_3] - [\beta_2\alpha_3], & d\beta_1 &= -[\alpha_2\alpha_3] - [\beta_2\beta_3], \\ d\alpha_2 &= -[\alpha_3\beta_1] - [\beta_3\alpha_1], & d\beta_2 &= -[\alpha_3\alpha_1] - [\beta_3\beta_1], \\ d\alpha_3 &= -[\alpha_1\beta_2] - [\beta_1\alpha_2], & d\beta_3 &= -[\alpha_1\alpha_2] - [\beta_1\beta_2]. \end{aligned}$$

D'altra parte per i corrispondenti vettori $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ abbiamo

$$(3)\qquad \begin{aligned} d\boldsymbol{r}_1 &= \quad * \quad + \boldsymbol{r}_2\gamma_3 - \boldsymbol{r}_3\gamma_2, & d\boldsymbol{r}_1' &= \quad * \quad + \boldsymbol{r}_2'\gamma_3' - \boldsymbol{r}_3'\gamma_2', \\ d\boldsymbol{r}_2 &= -\boldsymbol{r}_1\gamma_3 \quad * \quad + \boldsymbol{r}_3\gamma_1, & d\boldsymbol{r}_2' &= -\boldsymbol{r}_1'\gamma_3' \quad * \quad + \boldsymbol{r}_3'\gamma_1', \\ d\boldsymbol{r}_3 &= +\boldsymbol{r}_1\gamma_2 - \boldsymbol{r}_2\gamma_1 \quad * \quad ; & d\boldsymbol{r}_3' &= +\boldsymbol{r}_1'\gamma_2' - \boldsymbol{r}_2'\gamma_1' \quad * \quad . \end{aligned}$$

Derivando le formule (3,5) otteniamo fra i pfaffiani α, β, γ le relazioni

$$(4)\qquad \gamma_j = \beta_j - \alpha_j, \quad \gamma_j' = \beta_j + \alpha_j.$$

Le condizioni d'integrabilità (2) si scrivono coi γ così

$$(5)\qquad \begin{aligned} d\gamma_1 &= -[\gamma_2\gamma_3], & d\gamma_1' &= -[\gamma_2'\gamma_1'], \\ d\gamma_2 &= -[\gamma_3\gamma_1], & d\gamma_2' &= -[\gamma_3'\gamma_1'], \\ d\gamma_3 &= -[\gamma_1\gamma_2]; & d\gamma_3' &= -[\gamma_1'\gamma_3']. \end{aligned}$$

Le parentesi

(6) $$[\alpha\beta] + [\beta\alpha] = 0$$

significano i prodotti alternanti di H. GRASSMANN e per il differenziale esterno abbiamo

(7) $$d(adu + bdv) = [da, du] + [db, dv] = (b_u - a_v)[du, dv].$$

§ 5. **Congruenze rettilinee.**

Consideriamo ora la congruenza C descritta dalla retta R che porta i punti $\boldsymbol{X}_0$, $\boldsymbol{X}_3$ del nostro tetraedro mobile e cerchiamo i fuochi della R, cioè i punti di contatto della R coll'inviluppo della C. In generale per un fuoco possiamo porre

(1) $$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_0 \cos\varphi + \boldsymbol{X}_3 \operatorname{sen}\varphi$$

colla sola eccezione del caso, che i fuochi stanno sulla quadrica assoluta:

(2) $$(\boldsymbol{YY}) = 0.$$

Usando le (4,1) troviamo

(3) $$d\boldsymbol{Y} = \big(-\boldsymbol{X}_0 \operatorname{sen}\varphi + \boldsymbol{X}_3 \cos\varphi)(\alpha_3 + d\varphi) + \\ + \boldsymbol{X}_1(\alpha_1 \cos\varphi + \beta_2 \operatorname{sen}\varphi) + \boldsymbol{X}_2(\alpha_2 \cos\varphi - \beta_1 \operatorname{sen}\varphi\big).$$

Ne segue per i fuochi

(4) $$\alpha_1 \cos\varphi + \beta_2 \operatorname{sen}\varphi = 0, \quad \alpha_2 \cos\varphi - \beta_1 \operatorname{sen}\varphi = 0.$$

Eliminando φ otteniamo per le rigate sviluppabili della C l'equazione differenziale

(5) $$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0.$$

Il prodotto alternante delle (4) ci dà per i fuochi la condizione

(6) $$[\alpha_1\alpha_2]\cos^2\varphi - \{[\alpha_1\beta_1] + [\alpha_2\beta_2]\}\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + [\beta_1\beta_2]\operatorname{sen}^2\varphi = 0.$$

Introducendo nella (5) i pfaffiani γ otteniamo per le rigate sviluppabili la condizione

(7) $$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \gamma_1^{2\prime} + \gamma_2^{2\prime}.$$

Il significato geometrico è ovvio: Le rigate sviluppabili della C corrispondono nella trasformazione $\boldsymbol{r}_3 \to \boldsymbol{r}_3'$ delle sfere S, S' le coppie di curve isometriche. La (6) si trascrive così

(8) $$\{[\gamma_1\gamma_1'] + [\gamma_2\gamma_2']\}\operatorname{sen}2\varphi + \{[\gamma_1'\gamma_2] + [\gamma_1\gamma_2']\}\cos 2\varphi - \{[\gamma_1\gamma_2] + [\gamma_1'\gamma_2']\} = 0.$$

§ 6 Congruenze polari.

Considerando invece della congruenza C descritta dalla retta R coi punti $\boldsymbol{X}_0$, $\boldsymbol{X}_3$ e colle direzioni $\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_3$, la congruenza polare C^* descritta dalla retta polare R^*, che porta i punti $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ ed ha le direzioni $-\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_3'$. Per i fuochi della R^* otteniamo

$$\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{X}_1 \cos\psi + \boldsymbol{X}_2 \operatorname{sen}\psi, \tag{1}$$

$$d\boldsymbol{Y}^* = -\boldsymbol{X}_2(\alpha_1 \cos\psi + \alpha_2 \operatorname{sen}\psi) + \tag{2}$$
$$+(-\boldsymbol{X}_1 \operatorname{sen}\psi + \boldsymbol{X}_2 \cos\psi)(\beta_3 + d\psi) + \boldsymbol{X}_3(-\beta_2 \cos\psi + \beta_1 \operatorname{sen}\psi)$$

e perciò

$$\alpha_1 \cos\psi + \alpha_2 \operatorname{sen}\psi = 0, \quad \beta_2 \cos\psi - \beta_1 \operatorname{sen}\psi = 0; \tag{3}$$

$$[\alpha_1\beta_2] \cos^2\Psi - \{[\alpha_1\beta_1] - [\alpha_2\beta_2]\} \cos\Psi \operatorname{sen}\Psi + [\beta_1\alpha_2] \operatorname{sen}^2\Psi = 0, \tag{4}$$

mentre le condizioni (5,5), (5,7) rimangono inalterate.

Usando i pfaffiani γ otteniamo invece delle equazioni (3), (4)

$$(\gamma_1' - \gamma_1) \cos\psi + (\gamma_2' - \gamma_2) \operatorname{sen}\psi = 0, \quad (\gamma_2' + \gamma_2) \cos\psi - (\gamma_1' + \gamma_1) \operatorname{sen}\psi = 0, \tag{5}$$

$$\{[\gamma_1\gamma_1'] - [\gamma_2\gamma_2']\} \operatorname{sen} 2\psi + \{[\gamma_1'\gamma_2] - [\gamma_1\gamma_2']\} \cos 2\psi - \{[\gamma_1\gamma_2] - [\gamma_1'\gamma_2']\} = 0, \tag{6}$$

Adesso abbiamo la possibilità di fissare il tetraedro accompagnante della congruenza C mediante la condizione, che i fuochi $\boldsymbol{Y}$ siano armonici rispetto alla coppia dei punti $\boldsymbol{X}_0$, $\boldsymbol{X}_3$ ed i fuochi $\boldsymbol{Y}^*$ rispetto alla coppia $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$. Dalle equazioni (5,6), (6,6) segue allora

$$[\alpha_1\beta_1] = 0, \quad [\alpha_2\beta_2] = 0 \tag{7}$$

ossia

$$[\gamma_1\gamma_2'] = 0, \quad [\gamma_1'\gamma_2] = 0. \tag{8}$$

§ 7. Invarianti.

Dalle nostre formule si derivano immediatamente invarianti della congruenza C. Per gli elementi lineari ds e ds' delle imagini sferiche $(\boldsymbol{r}_3)$, $(\boldsymbol{r}_3')$ si trova dalle (4,3)

$$ds^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2, \quad ds'^2 = \gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 \tag{1}$$

e per gli elementi superficiali delle sfere S, S'

$$\Phi = [\gamma_1\gamma_2], \quad \Phi' = [\gamma_1'\gamma_2']. \tag{2}$$

Conoscendo le forme differenziali quadratiche ds^2, ds'^2 la congruenza C è unicamente determinata salvo movimenti dello spazio E_3, come vedremo nel seguito (§ 9). Inoltre abbiamo i seguenti elementi superficiali invarianti

(3) $$2\Psi = [\gamma_1'\gamma_2] + [\gamma_1\gamma'_2],\ \Delta = [\alpha_1\alpha_2],\ \Theta = [\beta_1\beta_2],\ 2\Gamma = [\alpha_1\beta_2] + [\beta_1\alpha_2]$$

colle relazioni

(4) $$\begin{aligned} \Phi &= +\Delta + \Theta - \Gamma, & 4\Delta &= \Phi + \Phi - 2\Psi, \\ \Phi' &= +\Delta + \Theta + \Gamma, & 4\Theta &= \Phi + \Phi' + 2\Psi, \\ \Psi &= -\Delta + \Theta & ;\ 2\Gamma &= \Phi - \Phi' \end{aligned}$$

e l'equazione differenziale invariantiva

(5) $$\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = 2(\gamma_1'\gamma_2' - \gamma_1\gamma_2) = 0,$$

che nel caso della specializzazione (6,7) ci dà

(6) $$\alpha_1\alpha_2 = 0.$$

§ 8. **Congruenze normali.**

Ammettiamo ora, che il punto Y della formula (5,1) descriva una superficie F, che taglia ortogonalmente le rette R della congruenza C. Dalla (5,3) segue allora

(1) $$\alpha_3 + d\varphi = 0,$$

cioè α_3 è un differenziale esatto:

(2) $$d\alpha_3 = 0$$

o in conseguenza delle formule (4,2), (4,4), (7,2)

(3) $$[\alpha_1\beta_2] + [\beta_1\alpha_2] = \frac{1}{2}\{[\gamma_1'\gamma_2'] - [\gamma_1\gamma_2]\} = \frac{1}{2}(\Phi' - \Phi).$$

Ne segue: Condizione necessaria e sufficiente per una congruenza normale è che la relazione $r \to r'$ delle sfere conservi le aree.

Prendiamo specialmente il caso

(4) $$\Phi = 0,\ \ \Phi' = 0$$

nel quale i punti r_3, r_3' sulle sfere S, S' dipendono ognuno soltanto da un parametro

(5) $$r_3 = r_3(u),\ \ r_3' = r_3'(v).$$

Dalle (4), (4,4) abbiamo

(6) $$[\alpha_1\alpha_2) + [\beta_1\beta_2] = 0,\ \ [\alpha_1\beta_2] + [\beta_1\alpha_2] = 0$$

e queste relazioni in conseguenza delle (5,6), (6,4) assicurano l'ortogonalità dei fuochi Y sulla R e dei fuochi Y^* sulla R^*.

Prendiamo per u la lunghezza della curva sferica $\mathbf{r}_3'(u)$ e per v la lunghezza della $\mathbf{r}_3'(v)$, abbiamo

$$(7)\qquad \begin{aligned} d\mathbf{r}_1 &= * + \mathbf{r}_2 f du * , & d\mathbf{r}_1' &= * + \mathbf{r}'_2 g dv * , \\ d\mathbf{r}_2 &= -\mathbf{r}_1 f du * - \mathbf{r}_3 du, & d\mathbf{r}_2' &= -\mathbf{r}_1' g dv * - \mathbf{r}_3' dv, \\ d\mathbf{r}_3 &= * + \mathbf{r}_2 du * , & d\mathbf{r}'_3 &= * + \mathbf{r}_2' dv * , \end{aligned}$$

ove f e g sono le curvature geodetiche delle curve sferiche.

Indicando le derivate secondo u e v con punti troviamo

$$(8)\qquad f(u) = [\mathbf{r}_3 \dot{\mathbf{r}}_3 \ddot{\mathbf{r}}_3], \quad g(v) = [\mathbf{r}_3' \dot{\mathbf{r}}_3' \ddot{\mathbf{r}}_3'].$$

Il confronto delle (7) colle (4,3) ci dà

$$(9)\qquad \begin{aligned} \gamma_1 &= -du, \ \gamma_2 = 0, \ \gamma_3 = f du; \\ \gamma_1' &= -dv, \ \gamma_2' = 0, \ \gamma_3' = g dv \end{aligned}$$

e mediante le (4,4)

$$(10)\qquad \begin{aligned} 2\alpha_1 &= + du - dv, \ 2\alpha_2 = 0, \ 2\alpha_3 = g dv - f du, \\ 2\beta_1 &= - du - dv, \ 2\beta_2 = 0, \ 2\beta_3 = g dv + f du. \end{aligned}$$

Per una superficie F ortogonale alle rette della congruenza C abbiamo dunque dalle (5,3), (8,1), (10)

$$(11)\qquad d\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1 \frac{du - dv}{2} \cos\varphi + \mathbf{X}_2 \frac{du + dv}{2} \operatorname{sen}\varphi.$$

Ne segue l'elemento lineare della F

$$(12)\qquad (d\mathbf{Y}, d\mathbf{Y}) = \frac{1}{4}\{ du^2 - 2\cos 2\varphi \cdot du dv + dv^2 \}.$$

§ 9. Sulla geometria differenziale delle superficie in E_3.

Ammettiamo, che il punto $\mathbf{X}_0$ descriva una superficie F_0 nello spazio ellittico E_3 ed i punti $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ stiano nel piano tangente della F in $\mathbf{X}_0$, cosichè il punto $\mathbf{X}_3$ descrive la superficie polare F_3 di F_0. Allora nelle equazioni del § 4 abbiamo

$$(1)\qquad \alpha_3 = 0.$$

Abbiamo dunque per i differenziali

$$(2)\qquad \begin{aligned} d\mathbf{X}_0 &= * + \mathbf{X}_1\alpha_1 + \mathbf{X}_2\alpha_2 * , \\ d\mathbf{X}_1 &= -\mathbf{X}_0\alpha_1 * + \mathbf{X}_2\beta_3 - \mathbf{X}_3\beta_2, \\ d\mathbf{X}_2 &= -\mathbf{X}_0\alpha_2 - \mathbf{X}_1\beta_3 * + \mathbf{X}_3\beta_1, \\ d\mathbf{X}_3 &= * + \mathbf{X}_1\beta_2 - \mathbf{X}_2\beta_1 * \end{aligned}$$

e per le condizioni d'integrabilità

$$
\begin{aligned}
& d\alpha_1 = -[\alpha_2\beta_3], \quad d\beta_1 = -[\beta_2\beta_3], \quad 0 = [\alpha_1\beta_2] + [\beta_1\alpha_2], \\
& d\alpha_2 = -[\beta_3\alpha_1], \quad d\beta_2 = -[\beta_3\beta_1], \quad d\beta_3 = -[\alpha_1\alpha_2] - [\beta_1\beta_2].
\end{aligned} \tag{3}
$$

Gli elementi superficiali di F_0, F_3 sono

$$\Phi_0 = [\alpha_1\alpha_2], \quad \Phi_3 = [\beta_1\beta_2] \tag{4}$$

e per le immagini sferiche troviamo

$$\Phi = [\gamma_1\gamma_2] = \Phi_0 + \Phi_3, \quad \Phi' = [\gamma_1'\gamma_2'] = \Phi_0 + \Phi_3. \tag{5}$$

Per la curvatura Gaussiana della F_0 viene

$$K_0 = -\frac{d}{\Phi_0}\left(\frac{d\alpha_1}{\Phi_0}\cdot\alpha_1 + \frac{d\alpha_2}{\Phi_0}\cdot\alpha_2\right) = -\frac{d\beta_3}{\Phi_0} = \frac{\Phi_0 + \Phi_3}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \tag{6}$$

e per quella della F_3

$$K_3 = \frac{\Phi_0 + \Phi_3}{\Phi_3} = \frac{\Phi}{\Phi_3}. \tag{7}$$

Perciò vediamo: Le superficie di E_3 con $K_0 = 0$ sono caratterizzate dal fatto, che le loro immagini sferiche si riducono a curve

$$\Phi = \Phi' = 0. \tag{8}$$

Questo risulta anche dall'equazione (8,12). Le superficie di E_3 con $K_0 = 0$ furono introdotte da L. BIANCHI nel 1896.

§ 10. Congruenze di Cebyscef.

La scelta delle coordinate u, v nel § 8 s'applica anche in casi più generali. Escludiamo, che le curve isometriche sulle sfere S, S'

$$(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - (\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2) = 0 \tag{1}$$

coincidano ed inoltre escludiamo per queste curve

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 = 0. \tag{2}$$

Allora le curve (1) si possono assumere come linee u, $v =$ cost. e gli elementi lineari sulle sfere S, S' diventano

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad ds'^2 = E du^2 + 2F' du dv + G dv^2. \tag{3}$$

Ammettiamo specialmente che le reti u, $v =$ cost. siano reti di CEBYSCEF, cioè che in ogni quadrangolo della rete i lati opposti abbiano la stessa lunghezza, possiamo porre

$$ds^2 = du^2 + 2\cos 2\lambda \cdot du dv + dv^2, \quad ds'^2 = du^2 + 2\cos 2\mu \cdot du dv + dv^2 \tag{4}$$

e per i pfaffiani γ conseguentemente

$$(5)\qquad \gamma_1 = (dv + du)\cos\lambda,\quad \gamma_1' = (dv + du)\cos\mu,$$
$$\gamma_2 = (dv - du)\,\mathrm{sen}\,\lambda,\quad \gamma_2' = (dv - du)\,\mathrm{sen}\,\mu.$$

Dalle condizioni d'integrabilità ricaviamo

$$(6)\qquad \gamma_3 = -\lambda_u du + \lambda_v dv,\quad \gamma_3' = -\mu_u du + \mu_v dv$$

ed inoltre

$$(7)\qquad 2\lambda_{uv} + \mathrm{sen}\,2\lambda = 0,\quad 2\mu_{uv} + \mathrm{sen}\,2\mu = 0$$

col significato geometrico: Le curvature Gaussiane delle (4) sono uguali ad uno. Per le distanze dei punti focali sulle rette R, R^* calcoliamo

$$(8)\quad \cos 2\,\varphi = \frac{\mathrm{sen}\,\lambda\cos\lambda + \mathrm{sen}\,\mu\cos\mu}{\mathrm{sen}\,\lambda\cos\mu + \cos\lambda\,\mathrm{sen}\,\mu},\quad \cos 2\,\Psi = \frac{\mathrm{sen}\,\lambda\cos\lambda - \mathrm{sen}\,\mu\cos\mu}{\mathrm{sen}\,\lambda\cos\mu - \cos\lambda\,\mathrm{sen}\,\mu}.$$

Dalle (5), (6) vediamo: Dalle λ, μ si calcolano i γ e perciò: La conoscenza di ds^2 e ds'^2 implica la determinazione della C salvo movimenti di E_3.

§ 11. Congruenze isotrope.

Consideriamo ora il secondo caso escluso nel § 10 ammettendo che le curve isometriche sulle sfere S, S' coincidano colle loro generatrici rettilinee. Di più la rappresentazione $\mathfrak{r}_3 \to \mathfrak{r}_3'$ delle sfere sia conforme con conservazione dei versi.

Ne segue l'identità

$$(1)\qquad \gamma_1\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1' = 0$$

in u, v; du, dv ossia

$$(2)\qquad [\gamma_1\gamma_1'] = [\gamma_2\gamma_2'] = 0,\quad [\gamma_1\gamma_2'] = [\gamma_1'\gamma_2].$$

Nei pfaffiani α, β abbiamo allora in conseguenza delle (4,4) le relazioni

$$(3)\qquad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0;$$

$$(4)\qquad [\alpha_1\beta_1] = [\alpha_2\beta_2] = 0,\quad [\alpha_1\beta_2] = [\beta_1\alpha_2].$$

Per i punti focali sulla retta R^*, che porta i punti $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ troviamo ponendo

$$(5)\qquad \boldsymbol{Y}^* = c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2$$

in modo analogo alla (6,2)

$$(6)\qquad c_1^2 + c_2^2 = 0$$

cioè i fuochi

$$(7)\qquad \boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{X}_1 \pm i\boldsymbol{X}_2$$

stanno sulla quadrica assoluta (2,3).

I piani focali della congruenza C, cioè i piani contenenti due rette $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}+d\boldsymbol{R}$ successive, sono i piani polari dei punti focali $\boldsymbol{Y}^*$ sulla retta $\boldsymbol{R}^*$ della $\boldsymbol{C}^*$, cioè dei punti d'incontro di due generatrici $\boldsymbol{R}^*$, $\boldsymbol{R}^*+d\boldsymbol{R}^*$ della $\boldsymbol{C}^*$. Perciò questi piani focali toccano la quadrica assoluta, vuol dire sono piani isotropi.

Introducendo per i punti $\boldsymbol{P}$ del E_3 coordinate canoniche x_i mediante

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{X}_0x_0+\boldsymbol{X}_1x_1+\boldsymbol{X}_2x_2+\boldsymbol{X}_3x_3;\ \Sigma x_j^2=1 \tag{8}$$

i piani focali soddisfano le equazioni

$$x_1 \pm ix_2=0. \tag{9}$$

Derivando la (8) mediante le (4,1) troviamo per l'immobilità del punto $\boldsymbol{X}$, cioè per $d\boldsymbol{X}=0$ le condizioni

$$\begin{aligned} dx_0 &= \quad * \quad + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3,\\ dx_1 &= -x_0\alpha_1 \quad * \quad + x_2\beta_3 - x_3\beta_2,\\ dx_2 &= -x_0\alpha_2 - \alpha_1\beta_3 \quad * \quad + x_3\beta_1,\\ dx_3 &= -x_0\alpha_3 + x_1\beta_2 - x_2\beta_1 \quad * \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Derivando l'equazione

$$x_1+ix_2=0 \tag{11}$$

si trova dunque tenendo conto della (11)

$$x_0(\alpha_1+i\alpha_2)=ix_3(\beta_1+i\beta_2). \tag{12}$$

Dalle (5,6), (4) abbiamo

$$[\alpha_1\alpha_2]\cos^2\varphi+[\beta_1\beta_2]\operatorname{sen}^2\varphi=0 \tag{13}$$

o ponendo

$$\varphi=i\,\chi \tag{14}$$

segue

$$[\alpha_1\alpha_2]\operatorname{ch}^2\chi=[\beta_1\beta_2]\operatorname{sh}^2\chi \tag{15}$$

e dalle (3), (15)

$$\alpha_1\operatorname{ch}\chi=\beta_1\operatorname{sh}\chi=\omega_1,\ \ \alpha_2\operatorname{ch}\chi=\beta_2\operatorname{sh}\chi=\omega_2\,. \tag{16}$$

Perciò dalla (12)

$$x_0\operatorname{sh}\chi=ix_3\operatorname{ch}\chi\,. \tag{17}$$

Un ulteriore derivazione della (17) mediante le (10) assieme colle condizioni (4,2) d'integrabilità e le (9), (17) dànno per l'inviluppo dei piani isotropi il punto $\boldsymbol{X}$ con

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \tag{18}$$

$$= [\omega_1 \omega_2] \operatorname{ch} \chi \operatorname{sh} \chi : [\omega_1 - i\omega_2 ,\ \alpha_3] \operatorname{ch} \chi : [\omega_1 - i\omega_2 ,\ \alpha_3] \operatorname{ch} \chi : - i [\omega_1 \omega_2] \operatorname{ch} \chi \operatorname{sh} \chi$$

indipendente dalla direzione $\omega_1 : \omega_2$.

§ 12. Congruenze e curve isotrope.

Dal § precedente risulta: I piani focali (11,9) della congruenza isotropa C inviluppano una curva isotropa $J = (\boldsymbol{R})$, cioè una curva di lunghezza zero. Le rette reali R dei piani osculatori della curva isotropa J dànno le generatrici della congruenza isotropa C.

Prendiamo ora le mosse dalla curva isotropa $J = (\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}(u)$. Allora abbiamo in primo luogo

$$(\boldsymbol{PP}) = 1, \quad (\boldsymbol{P'P'}) = 0. \tag{1}$$

Il parametro u si può fissare in tal modo, che diventi

$$(\boldsymbol{P''P''}) = 1. \tag{2}$$

Ne seguono i valori per i prodotti scalari delle derivate

$$\begin{array}{rrrr} (\boldsymbol{PP}) = 1, & (\boldsymbol{PP'}) = 0, & (\boldsymbol{PP''}) = 0, & (\boldsymbol{PP'''}) = 0, \\ & (\boldsymbol{P'P'}) = 0, & (\boldsymbol{P'P''}) = 0, & (\boldsymbol{P'P'''}) = -1, \\ & & (\boldsymbol{P''P''}) = 1, & (\boldsymbol{P''P'''}) = 0, \\ & & & (\boldsymbol{P'''P'''}) = f. \end{array} \tag{3}$$

Essendo

$$(\boldsymbol{P'P}) = (\boldsymbol{P'P'}) = (\boldsymbol{P'P''}) = 0 \tag{4}$$

il piano tangente nel punto $\boldsymbol{P'}$ alla quadrica assoluta coincide col piano osculatore in $\boldsymbol{P'}$ alla J. Sia $\boldsymbol{Q}(v)$ la curva complessa coniugata alla $\boldsymbol{P}(u)$, poniamo

$$(\boldsymbol{PQ}) = F(u, v). \tag{5}$$

Dimostriamo: I punti

$$\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{P} - \frac{F_v}{F_{uv}} \boldsymbol{P'}, \quad \boldsymbol{Y}_2 = \boldsymbol{Q} - \frac{F_u}{F_{uv}} \boldsymbol{Q'} \tag{6}$$

sono i fuochi della congruenza C, descritta dalla retta R, intersezione dei piani osculatori in $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ alle due curve isotrope. Basta per esempio per il punto

$\boldsymbol{Y}_1$ verificare che sta sulla retta R, cioè

$$(7) \qquad \langle \boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}' \rangle = 0, \quad \langle \boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Q}' \rangle = 0$$

e su quella vicina $R + \frac{\partial R}{\partial u}\, du$:

$$(8) \qquad \langle \boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{P}'' \rangle = 0, \quad \langle \boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Q}' \rangle = 0.$$

La superficie focale $(\boldsymbol{Y}_1)$ della congruenza C viene descritta dalle tangenti della curva isotropa J. Dalle (6) abbiamo per i punti $\boldsymbol{X}_0$, $\boldsymbol{X}_3$ fissati nel modo (6,7)

$$(9) \qquad 2\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{Y}_2, \quad 2\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{Y}_2.$$

Pare, che nel nostro caso della geometria ellittica non ci sia una connessione semplice fra le congruenze isotrope e le superficie minime come nel caso euclideo.