Figure ellissoidali di equilibrio relativo magneto idrodinamico di masse fluide elettricamente conduttrici uniformemente rotanti e gravitanti.

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino)

A Giovanni Sansone per il suo 70° compleanno.

Sunto. - *Si considera una classe di soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto idrodinamica che danno luogo, per una massa fluida elettricamente conduttrice, uniformemente rotante e gravitante, a figure ellissoidali rotonde. Si studia in particolare il caso di un ellissoide lentamente rotante e quindi di eccentricità molto piccola.*

INTRODUZIONE

1. In una nota pubblicata nel Bollettino dell'U. M. I. (1), considerando una massa fluida incompressibile di conduttività elettrica infinita, uniformemente rotante intorno a un asse baricentrale Oz e soggetta alla propria gravitazione, ho segnalato alcuni casi notevoli in cui per la massa fluida sono possibili figure ellissoidali rotonde intorno all'asse di rotazione.

Dopo aver dimostrato che il campo magnetico interno deve essere necessariamente simmetrico rispetto all'asse di rotazione Oz, con riferimento a coordinate cilindriche r, φ, z, ho osservato che, se si indicano con H_r, H_φ, H_z le componenti del campo magnetico, un primo caso notevole si ha per

$$H_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}, \quad rH_\varphi = kV, \tag{1}$$

con k costante, e V funzione di r, z soltanto, soddisfacente all'equazione

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2 V = 0, \tag{2}$$

con la condizione che la V si annulli al contorno ellissoidale, che cioè al contorno la componente normale del campo magnetico sia nulla.

La distribuzione della pressione p in ogni punto interno alla massa fluida era indipendente dalla distribuzione del campo magnetico ed è fornita dal-

(1) C. AGOSTINELLI, *Sull'equilibrio relativo magneto idrodinamico di masse fluide elettricamente conduttrici uniformemente rotanti e gravitanti*, «Bollettino della U. M. I.», Serie III, anno XIV, n. 1, marzo 1959.

l' integrale

$$\frac{p}{\rho_0} - U - \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 = \text{costante}, \qquad (r^2 = x^2 + y^2), \tag{3}$$

essendo ρ_0 la densità (costante) del fluido, ω la velocità angolare costante di rotazione, ed U il potenziale newtoniano delle forze di mutua attrazione delle particelle fluide.

Un secondo caso notevole si aveva ponendo $H_\varphi = 0$. La funzione V doveva allora soddisfare all' equazione

$$r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = r^2\,(h + h_1 V), \tag{4}$$

dove h ed h_1 sono costanti, con la condizione ancora che la V si annulli al contorno ellissoidale, e la pressione p era data dall' integrale

$$\frac{p}{\rho_0} - U - \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 + \frac{\mu}{4\pi\rho_0}\left(hV + \frac{1}{2}\,h_1 V^2\right) = \text{costante}, \tag{5}$$

essendo μ la permeabilità magnetica (costante) del mezzo. Dalla (5) risulta manifesto che, annullandosi la V al contorno, sono possibili per la massa fluida figure ellissoidali rotonde.

In questa nota mi propongo ora di determinare la funzione V, con le condizioni assegnate, nel primo caso, rinviando ad altro lavoro lo studio del secondo caso ([1]).

Riduzione del problema.

2. Indicando con a, c i semiassi dell' ellissoide rotondo occupato dalla massa fluida ($c < a$), con riferimento a coordinate ellittiche ξ, θ, poniamo

$$r = \gamma_0 \operatorname{ch}\xi \operatorname{sen}\theta, \quad z = \gamma_0 \operatorname{sh}\xi \cos\theta, \tag{6}$$

dove $\gamma_0 = \sqrt{a^2 - c^2}$), è la semidistanza focale degli ellissoidi omofocali $\xi = \text{cost.}$ L' argomento θ varierà fra zero e π:

$$0 \leq \theta \leq \pi,$$

e posto

$$\operatorname{ch}\xi_0 = a/\gamma_0, \quad \operatorname{sh}\xi_0 = c/\gamma_0,$$

al contorno sarà $\xi = \xi_0$, e nell' interno dell' ellissoide sarà

$$0 \leq \xi \leq \xi_0.$$

In ogni piano meridiano le linee $\xi = \text{cost.}$, sono ovviamente ellissi omofocali.

([1]) Questo secondo caso, per $h_1 = 0$, è stato considerato dall' Autore nella sua nota: *Su di una classe notevole di figure ellissoidali rotonde di masse fluide magnetoidrodinamiche uniformemente rotanti e gravitanti* (« Atti della Accademia delle Scienze di Torino », vol. 93, 1958-59).

In questo sistema di coordinate, ponendo per brevità

$$\nabla_2 = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

risulta

$$\nabla_2 V = \frac{1}{\gamma_0^2(\mathrm{ch}^2\xi - \mathrm{sen}^2\theta)}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}-\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi}+\frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\right)\right]$$

e l'equazione (2) diventa

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}-\frac{\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}-\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta}+\lambda(\mathrm{ch}^2\xi-\mathrm{sen}^2\theta)V=0, \qquad (\lambda=\gamma_0^2k^2). \tag{7}$$

Di questa equazione vanno determinate autosoluzioni che si annullano per $\xi=\xi_0$. Esse si ottengono facilmente col criterio della separazione delle variabili ponendo

$$V = F(\xi)\cdot G(\theta). \tag{8}$$

Si deducono così per G ed F le equazioni

$$\frac{d^2G}{d\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{dG}{d\theta}+(C-\lambda\,\mathrm{sen}^2\theta)G=0 \tag{9}$$

$$\frac{d^2F}{d\xi^2}-\frac{\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi}\frac{dF}{d\xi}-(C-\lambda ch^2\xi)F=0, \tag{10}$$

con C costante arbitraria, che va determinata in modo che la G risulti funzione periodica di θ di periodo 2π.

Ponendo

$$G(\theta)=\mathrm{sen}\,\theta\Phi(\theta) \tag{11}$$

la (9) diventa

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{d\Phi}{d\theta}\right)+\left(C-\frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}-\lambda\,\mathrm{sen}^2\theta\right)\Phi=0. \tag{12}$$

che si può scrivere

$$(1-\eta^2)\frac{d^2\Phi}{d\eta^2}-2\eta\frac{d\Phi}{d\eta}+\left[C-\frac{1}{1-\eta^2}-\lambda(1-\eta^2)\right]\Phi=0, \qquad (\eta=\cos\theta). \tag{12'}$$

Ora, per $\lambda=0$, si hanno soluzioni periodiche di periodo 2π, ponendo $C=n(n+1)$, con n intero positivo, avendosi in tal caso $\Phi=P_n^{(1)}(\eta)$, che è la funzione di FERRERS di indice 1 associata all'n^{mo} polinomio di LEGENDRE $\left[P_n^{(1)}(\eta)=(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dP_n}{d\eta}\right]$. Indicheremo con Φ_n la funzione Φ soddisfacente alla (12) che per $\lambda=0$ si riduce alla $P_n^{(1)}$. Essa si può determinare con un procedimento analogo a quello con cui vengono trovate le soluzioni dell'equazione di MATHIEU e la chiameremo perciò *funzione sferica del tipo di Mathieu d'ordine* n .

Supponendo allora la C sviluppabile in serie di potenze di λ, e così pure la Φ, porremo

$$C = C_n = n(n+1) + \sum_{1}^{\infty}{}_k\, C_n^{(k)} \lambda^k \tag{13}$$

$$\Phi = \Phi_n = P_n^{(1)} + \sum_{1}^{\infty}{}_k\, \Phi_n^{(k)} \lambda^k. \tag{14}$$

Sostituendo nella (12') in luogo di C e Φ, i valori di C_n e Φ_n, espressi formalmente dalle (13) e (14), e uguagliando a zero i coefficienti delle successive potenze di λ, si ottiene

$$(1-\eta^2)\frac{d^2\Phi_n^{(1)}}{d\eta^2} - 2\eta\frac{d\Phi_n^{(1)}}{d\eta} + \left[n(n+1) - \frac{1}{1-\eta^2}\right]\Phi_n^{(1)} + [C_n^{(1)} - (1-\eta^2)]P_n^{(1)} = 0 \tag{15}$$

$$(1-\eta^2)\frac{d^2\Phi_n^{(k)}}{d\eta^2} - 2\eta\frac{d\Phi_n^{(k)}}{d\eta} + \left[n(n+1) - \frac{1}{1-\eta^2}\right]\Phi_n^{(k)} + C_n^{(k)}P_n^{(1)} + \tag{16}$$
$$+ \sum_{1}^{k-1}{}_h\, C_n^{(h)}\Phi_n^{(k-h)} - (1-\eta^2)\Phi_n^{(k-1)} = 0, \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots),$$

le quali permetteranno di ricavare successivamente le costanti $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, C_n^{(3)}, \ldots$ e le funzioni $\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)}, \Phi_n^{(3)}, \ldots$

Calcolo delle funzioni Φ_n e delle costanti C_n.

3. Osserviamo che dalle formule ricorrenti dei polinomi di LEGENDRE si ricava

$$(1-\eta^2) P_{n+h}^{(1)} = \alpha_{n+h}^{(1)} P_{n+h+2}^{(1)} + \alpha_{n+h}^{(2)} P_{n+h}^{(1)} + \alpha_{n+h}^{(3)} P_{n+h-2}^{(1)} \tag{17}$$

con

$$\alpha_{n+h}^{(1)} = -\frac{(n+h)(n+h+1)}{(2n+2h+1)(2n+2h+3)}, \quad \alpha_{n+h}^{(2)} = \frac{2(n+h)(n+h+1)}{(2n+2h-1)(2n+2h+3)},$$
$$\alpha_{n+h}^{(3)} = -\frac{(n+h)(n+h+1)}{(2n+2h-1)(2n+2h+1)}, \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

In particolare per $h = 0$ si ha

$$(1-\eta^2) P_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} P_{n+2}^{(1)} + \alpha_n^{(2)} P_n^{(1)} + \alpha_n^{(3)} P_{n-2}^{(1)} \tag{19}$$

con

$$\alpha_n^{(1)} = -\frac{n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}, \quad \alpha_n^{(2)} = \frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)},$$
$$\alpha_n^{(3)} = -\frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)}, \tag{20}$$

ed è da ricordare che è $P_0^{(1)} = 0$. L'equazione (15) diventa pertanto

$$(21) \qquad (1-\eta^2)\frac{d\Phi_n^{(1)}}{d\eta} - 2\eta\frac{d\Phi_n^{(1)}}{d\eta} + \left[n(n+1) - \frac{1}{1-\eta^2}\right]\Phi_n^{(1)} =$$
$$= \alpha_n^{(1)} P_{n+2}^{(1)} + (\alpha_n^{(2)} - C_n^{(1)}) P_n^{(1)} + \alpha_n^{(3)} P_{n-2}^{(1)}.$$

Trascurando l'integrale dell'equazione omogenea che è $P_n^{(1)}$, del quale si è già tenuto conto nella (14), si deduce che sarà

$$(22) \qquad C_n^{(1)} = \alpha_n^{(2)} = \frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)}$$

e $\Phi_n^{(1)}$ sarà della forma

$$(23) \qquad \Phi_n^{(1)} = a_{n1}^{(1)} P_{n+2}^{(1)} + a_{n2}^{(1)} P_{n-2}^{(1)}.$$

Sostituendo nella (21) e tenendo conto dell'equazione differenziale cui soddisfano le funzioni $P_{n+2}^{(1)}$, $P_{n-2}^{(1)}$, si ricava

$$(24) \qquad \begin{aligned} a_{n1}^{(1)} &= -\frac{\alpha_n^{(1)}}{2(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)^2} \\ a_{n2}^{(1)} &= \frac{\alpha_n^{(3)}}{2(2n-1)} = -\frac{n(n+1)}{2(2n-1)^2(2n+1)}, \end{aligned}$$

Per $k = 2$ l'equazione (16) diventa

$$(25) \qquad (1-\eta^2)\frac{d^2\Phi_n^{(2)}}{d\eta^2} - 2\eta\frac{d\Phi_n^{(2)}}{d\eta} + \left[n(n+1) - \frac{1}{1-\eta^2}\right]\Phi_n^{(2)} +$$
$$+ C_n^{(2)} P_n^{(1)} + C_n^{(1)} \Phi_n^{(1)} - (1-\eta^2)\Phi_n^{(1)} = 0.$$

Avendo riguardo alla (17) e tenendo conto del valore (23) della funzione $\Phi_n^{(1)}$, si ottiene

$$(26) \qquad (1-\eta^2)\Phi_n^{(1)} = \beta_{n1}^{(1)} P_{n+4}^{(1)} + \beta_{n2}^{(1)} P_{n+2}^{(1)} + \beta_{n3}^{(1)} P_n^{(1)} + \beta_{n4}^{(1)} P_{n-2}^{(1)} + \beta_{n5}^{(1)} P_{n-4}^{(1)}$$

con

$$\beta_{n1}^{(1)} = a_{n1}^{(1)} \cdot \alpha_{n+2}^{(1)} = -\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2(2n+1)(2n+3)^2(2n+5)(2n+7)}$$

$$\beta_{n2}^{(1)} = a_{n1}^{(1)} \cdot \alpha_{n+2}^{(2)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+1)(2n+3)^3(2n+7)}$$

$$(27) \qquad \beta_{n3}^{(1)} = a_{n1}^{(1)} \alpha_{n+2}^{(3)} + a_{n2}^{(1)} \alpha_{n-2}^{(1)} = -\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}\left[\frac{(n+2)(n+3)}{(2n+3)^2(2n+5)} - \frac{(n-2)(n-1)}{(2n-1)^3(2n-3)}\right]$$

$$\beta_{n4}^{(1)} = a_{n2}^{(1)} \alpha_{n-2}^{(2)} = -\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{(2n-5)(2n-1)^3(2n+1)}$$

$$\beta_{n5}^{(1)} = a_{n2}^{(1)} \cdot \alpha_{n-2}^{(3)} = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{2(2n-5)(2n-3)(2n-1)^2(2n+1)}.$$

L'equazione (25) diventa perciò

$$(28)\qquad (1-\eta^2)\frac{d^2\Phi_n^{(2)}}{d\eta^2}-2\eta\frac{d\Phi_n^{(2)}}{d\eta}+\left[n(n+1)-\frac{1}{1-\eta^2}\right]\Phi_n^{(2)}+[C_n^{(2)}-\beta_{n3}^{(1)}]P_n^{(1)}=$$
$$=\beta_{n1}^{(1)}P_{n+4}^{(1)}+[\beta_{n2}^{(1)}-C_n^{(1)}a_{n1}^{(1)}]P_{n+2}^{(1)}+[\beta_{n4}^{(1)}-C_n^{(1)}a_{n2}^{(1)}]P_{n-2}^{(1)}+\beta_{n5}^{(1)}P_{n-4}^{(1)},$$

dalla quale, trascurando al solito la soluzione dell'equazione omogenea, si deduce

$$(29)\qquad C_n^{(2)}=\beta_{n3}^{(1)}$$

e

$$(30)\qquad \Phi_n^{(2)}=a_{n1}^{(2)}P_{n+4}^{(1)}+a_{n2}^{(2)}P_{n+2}^{(1)}+a_{n3}^{(2)}P_{n-2}^{(1)}+a_{n4}^{(2)}P_{n-4}^{(1)}$$

con

$$(31)\qquad \begin{aligned} a_{n1}^{(2)}&=-\frac{\beta_{n1}^{(1)}}{4(2n+5)},\quad a_{n2}^{(2)}=-\frac{\beta_{n2}^{(1)}-C_n^{(1)}a_{n1}^{(1)}}{2(2n+3)}\\ a_{n3}^{(2)}&=\frac{\beta_{n4}^{(1)}-C_n^{(1)}a_{n2}^{(1)}}{2(2n-1)},\quad a_{n4}^{(2)}=\frac{\beta_{n5}^{(1)}}{4(2n-3)}.\end{aligned}$$

Per $k=3$ l'equazione (16) porge

$$(32)\qquad (1-\eta^2)\frac{d^2\Phi_n^{(3)}}{d\eta^2}-2\eta\frac{d^2\Phi_n^{(3)}}{d\eta}+\left[n(n+1)-\frac{1}{1-\eta^2}\right]\Phi_n^{(3)}+C_n^{(3)}P_n^{(1)}+C_n^{(1)}\Phi_n^{(2)}+$$
$$+C_n^{(2)}\Phi_n^{(1)}-(1-\eta^2)\Phi_n^{(2)}=0.$$

Risulta

$$(33)\qquad (1-\eta^2)\Phi_n^{(2)}=\beta_{n1}^{(2)}P_{n+6}^{(1)}+\beta_{n2}^{(2)}P_{n+4}^{(1)}+\beta_{n3}^{(2)}P_{n+2}^{(1)}+\beta_{n4}^{(2)}P_n^{(1)}+$$
$$+\beta_{n5}^{(2)}P_{n-2}^{(1)}+\beta_{n6}^{(2)}P_{n-4}^{(1)}+\beta_{n7}^{(2)}P_{n-6}^{(1)},$$

con

$$(34)\qquad \begin{aligned} &\beta_{n1}^{(2)}=a_{n1}^{(2)}\cdot\alpha_{n+4}^{(1)};\ \beta_{n2}^{(2)}=a_{n1}^{(2)}\cdot\alpha_{n+4}^{(2)}+a_{n2}^{(2)}\alpha_{n+2}^{(1)};\\ &\beta_{n3}^{(2)}=a_{n1}^{(2)}\cdot\alpha_{n+4}^{(3)}+a_{n2}^{(2)}\cdot\alpha_{n+2}^{(2)};\ \beta_{n4}^{(2)}=a_{n2}^{(2)}\alpha_{n+2}^{(3)}+a_{n3}^{(2)}\alpha_{n-1}^{(2)};\\ &\beta_{n5}^{(2)}=a_{n3}^{(2)}\cdot\alpha_{n-2}^{(2)}+a_{n4}^{(2)}\alpha_{n-4}^{(1)};\ \beta_{n6}^{(2)}=a_{n3}^{(2)}\alpha_{n-2}^{(3)}+a_{n4}^{(2)}\alpha_{n-4}^{(2)};\\ &\beta_{n7}^{(2)}=a_{n4}^{(2)}\alpha_{n-2}^{(3)};\end{aligned}$$

e pertanto l'equazione (32) diventa

$$(35)\qquad (1-\eta^2)\frac{d^2\Phi_n^{(3)}}{d\eta^2}-2\eta\frac{d\Phi_n^{(3)}}{d\eta}+\left[n(n+1)-\frac{1}{1-\eta^2}\right]\Phi_n^{(3)}+[C_n^{(3)}-\beta_{n4}^{(2)}]P_n^{(1)}=$$
$$=\beta_{n1}^{(2)}P_{n+2}^{(1)}+[\beta_{n2}^{(2)}-C_n^{(1)}a_{n1}^{(2)}]P_{n+2}^{(1)}+[\beta_{n3}^{(2)}-C_n^{(1)}a_{n2}^{(2)}-C_n^{(2)}a_{n1}^{(1)}]P_{n+2}^{(1)}+$$
$$+[\beta_{n5}^{(2)}-C_n^{(1)}a_{n3}^{(2)}-C_n^{(2)}a_{n2}^{(1)}]P_{n-2}^{(1)}+[\beta_{n6}^{(2)}-C_n^{(1)}a_{n4}^{(2)}]P_{n-4}^{(1)}+\beta_{n7}^{(2)}P_{n-6}^{(1)}.$$

Si ottiene quindi

$$C_n^{(3)} = \beta_{n4}^{(2)} \tag{36}$$

e

$$\Phi_n^{(3)} = a_{n1}^{(3)} P_{n+6}^{(1)} + a_{n2}^{(3)} P_{n+4}^{(1)} + a_{n3}^{(3)} P_{n+2}^{(1)} + a_{n4}^{(3)} P_{n-2}^{(1)} + \\ + a_{n5}^{(3)} P_{n-4}^{(1)} + a_{n6}^{(3)} P_{n-6}^{(1)}, \tag{37}$$

essendo

$$\begin{gathered} a_{n1}^{(3)} = -\frac{\beta_{n1}^{(2)}}{6(2n+7)};\ a_{n2}^{(3)} = -\frac{\beta_{n2}^{(2)} - C_n^{(1)} a_{n1}^{(2)}}{4(2n+5)};\ a_{n3}^{(3)} = -\frac{\beta_{n3}^{(2)} - C_n^{(1)} a_{n2}^{(2)} - C_n^{(2)} a_{n1}^{(1)}}{2(2n+3)} \\ a_{n4}^{(3)} = \frac{\beta_{n5}^{(2)} - C_n^{(1)} a_{n3}^{(2)} - C_n^{(2)} a_{n2}^{(1)}}{2(2n+1)};\ a_{n5}^{(3)} = \frac{\beta_{n6}^{(2)} - C_n^{(1)} a_{n4}^{(2)}}{4(2n-3)};\ a_{n6}^{(3)} = \frac{\beta_{n7}^{(2)}}{6(2n-5)}. \end{gathered} \tag{38}$$

Così continuando si ottengono successivamente i valori delle costanti $C_n^{(k)}$ e delle funzioni $\Phi_n^{(k)}$, e quindi le (13) e (14) forniscono, per ogni intero positivo n i valori di C_n e Φ_n. Si riconosce facilmente che le funzioni $\Phi_n(\eta)$ sono funzioni dispari, oppure funzioni pari di η, secondochè n è pari oppure dispari.

In particolare per $n = 1$, si ha

$$C_1^{(1)} = \frac{4}{5},\ \Phi_1^{(1)} = \frac{1}{75} P_3^{(1)};$$

$$C_1^{(2)} = -\frac{4}{5^3 \cdot 7},\ \Phi_1^{(2)} = \frac{1}{5^2 \cdot 9}\left[\frac{1}{7^2} P_5^{(1)} + \frac{2}{5^2} P_3^{(1)}\right];$$

$$C_1^{(3)} = -\frac{8}{3 \cdot 5^5 \cdot 7},\ \Phi_1^{(3)} = \frac{1}{5 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11 \cdot 13} P_7^{(1)} + \frac{4}{3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13} P_5^{(1)} + \frac{31}{3 \cdot 5^5 \cdot 7^2 \cdot 11} P_3^{(1)};$$

. . . .

e quindi

$$C_1 = 1 \cdot 2 + \frac{4}{5}\lambda - \frac{4}{5^3 \cdot 7}\lambda^2 - \frac{8}{3 \cdot 5^5 \cdot 7}\lambda^3 + \dots$$

$$\Phi_1 = P_1^{(1)} + \frac{\lambda}{75} P_3^{(1)} + \frac{\lambda^2}{5^2 \cdot 9}\left[\frac{1}{7^2} P_5^{(1)} + \frac{2}{5^2} P_3^{(1)}\right] + \\ + \lambda^3 \left[\frac{1}{5 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11 \cdot 13} P_7^{(1)} + \frac{4}{3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13} P_5^{(1)} + \frac{31}{3 \cdot 5^5 \cdot 7^2 \cdot 11} P_3^{(1)}\right] + \dots$$

Per $n=2$:

$$C_2^{(1)}=\frac{4}{7},\ \Phi_2^{(1)}=\frac{3}{5\cdot 7^2}\ P_4^{(1)};$$

$$C_2^{(2)}=-\frac{4}{3\cdot 7^3},\ \Phi_2^{(2)}=\frac{1}{3\cdot 7^2\cdot 9\cdot 11}\ P_6^{(1)}+\frac{6}{5\cdot 7^4\cdot 11}\ P_4^{(1)};$$

$$C_2^{(3)}=-\frac{8}{3\cdot 7^5\cdot 11};\ \Phi_2^{(3)}=\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9^2\cdot 11^2\cdot 13}\ P_8^{(1)}+\frac{4}{5\cdot 7^4\cdot 9^2\cdot 11}\ P_6^{(1)}-\frac{271}{7^6\cdot 9\cdot 11\cdot 13}\ P_4^{(1)};$$

. . . .

e quindi

$$C_2=2\cdot 3+\frac{4}{7}\lambda-\frac{4}{3\cdot 7^3}\lambda^2-\frac{8}{3\cdot 7^5\cdot 11}\lambda^3+\dots$$

$$\Phi_2=P_2^{(1)}+\lambda\Phi_2^{(1)}+\lambda^2\Phi_2^{(2)}\,\lambda^3\Phi_2^{(3)}+\dots$$

Per $n=3$:

$$C_3^{(1)}=\frac{8}{15},\ \Phi_3^{(1)}=\frac{2}{3\cdot 7\cdot 9}\,P_5^{(1)}-\frac{6}{5^2\cdot 7}\,P_1^{(1)};$$

$$C_3^{(2)}=\frac{8\cdot 19}{5^3\cdot 9^2 11},\ \Phi_3^{(2)}=\frac{5}{7\cdot 9\cdot 11^2\cdot 13}\,P_7^{(1)}+\frac{4}{5\cdot 7\cdot 9^3\cdot 13}\,P_5^{(1)}-\frac{4}{5^4\cdot 7}\,P_1^{(1)};$$

. . . .

e perciò

$$C_3=3\cdot 4+\frac{8}{15}\lambda+\frac{8\cdot 19}{5^3\cdot 9^2\cdot 11}\lambda^2+\dots$$

$$\Phi_3=P_3^{(1)}+\lambda\Phi_3^{(1)}+\lambda^2\Phi_3^{(2)}+\dots$$

4. Si possono ottenere soluzioni dell'equazione (12′) espresse mediante serie di potenze di $\eta=\cos\theta$, uniformemente convergenti, nel modo seguente:

Ponendo

$$\Phi=\Phi_n=\sqrt{1-\eta^2}\,\varphi_n(\eta) \tag{39}$$

quell'equazione diventa

$$(1-\eta^2)\frac{d^2\varphi_n}{d\eta^2}-4\eta\frac{d\varphi_n}{d\eta}[C_n-2-\lambda(1-\eta^2)]\varphi_n=0, \tag{40}$$

dove al posto di C_n va messo il valore calcolato nel modo che si è visto nel n° precedente, affinchè la soluzione che si cerca sia, rispetto a θ, periodica di periodo 2π.

Per n pari, per quanto si è osservato nel n° 3 la φ_n sarà una funzione dispari di η. Quindi per n pari porremo

$$\varphi_n^{(1)} = A_{n1}\eta + A_{n2}\eta^3 + A_{n3}\eta^5 + \dots = \sum_{1}^{\infty}{}_k A_{nk}\eta^{2k-1} \tag{41}$$

e sostituendo nella (40) si hanno, per la determinazione delle costanti A_k, le formule ricorrenti

$$\begin{aligned} A_{n2} &= \frac{6 + \lambda - C_n}{2 \cdot 3} A_{n1} \\ A_{n,k+1} &= \frac{[2k(2k+1) + \lambda - C_n]A_{nk} - \lambda A_{n,k-1}}{2k(2k+1)}, \quad (k = 2, 3, 4, \dots). \end{aligned} \tag{42}$$

Per n dispari invece le φ_n dovranno risultare funzioni pari di η e porremo perciò

$$\varphi_n^{(2)} = B_{n0} + B_{n1}\eta^2 + B_{n2}\eta^4 + \dots = \sum_{0}^{\infty}{}_k B_{nk}\eta^{2k}; \tag{43}$$

per le costanti B_{nk} si ricavano le formule ricorrenti

$$\begin{aligned} B_{n1} &= \frac{\lambda + 2 - C_n}{2} B_{n0} \\ B_{n,k+1} &= \frac{[2(k+1)(2k+1) + \lambda - C_n]B_{nk} - \lambda B_{n,k-1}}{2(k+1)(2k+1)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \tag{44}$$

Si riconosce facilmente che le serie (41) e (43), che rappresentano le funzioni $\varphi_n^{(1)}$, $\varphi_n^{(2)}$, sono convergenti essendo $\eta = \cos\theta$, in valore assoluto minore di 1. Invero si tratta di serie di potenze del tipo

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_s x^s + \dots$$

con $|x| < 1$, in cui tre coefficienti consecutivi sono legati da una relazione della forma

$$a_{s+1} = \alpha_s a_s + \beta_s a_{s-1}$$

nella quale β_s tende a zero col crescere indefinito dell'indice s, mentre α_s tende al limite 1. Questo è sufficiente per affermare che quelle serie convergono.

Proprietà delle funzioni Φ_n.

5. Per le funzioni Φ_n sussistono le seguenti proprietà che sono analoghe a quelle che si hanno per le funzioni di MATHIEU:

Ciascuna delle equazioni $\Phi_n(\eta) = 0$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$, *non può avere una radice doppia.* Invero, se ammettesse una radice doppia $\eta = \eta_0$, in questo punto dovrebbero annullarsi simultaneamente $\Phi_n(\eta)$ e $\frac{d\Phi_n}{d\eta}$, e dall'equazione differenziale (12′) (ove si ponga $\Phi = \Phi_n$, e $C = C_n$), si avrebbe che per $\eta = \eta_0$ si annullerebbe anche $\frac{d^2\Phi_n}{d\eta^2}$. Derivando successivamente rispetto a η la detta equazione, si deduce che per $\eta = \eta_0$ dovrebbero annullarsi tutte le derivate, ciò che è impossibile.

Segue che *due radici reali* della $\Phi_n(\eta, \lambda) = 0$, *per una variazione continua del parametro* λ *non possono diventare immaginarie*. Infatti, se si considera il diagramma cartesiano della funzione $y = \Phi_n(\eta)$, quelle due radici sono ascisse di due punti di intersezione della curva con l'asse η. Affinchè col variare continuo di λ quelle due intersezioni reali diventino immaginarie, occorre che per un certo valore di λ le due intersezioni coincidano e il diagramma diventi tangente all'asse η; cioè che le radici coincidano; ma questo si è visto che è impossibile.

Il numero degli zeri di $\Phi_n(\cos\theta, \lambda)$ *compresi fra* 0 *e* π *è indipendente dal valore del parametro* λ. Invero una radice non può uscire dai limiti 0, π per la variazione di λ. Per esempio, poichè la $\Phi_n(\cos\theta, \lambda) = \operatorname{sen}\theta \cdot \varphi_n(\cos\theta, \lambda)$, si annulla per $\theta = 0$, se una radice dapprima positiva diventasse negativa essa passerebbe per il valore zero; si avrebbe dunque una radice doppia, ciò che è impossibile. Ora per $\lambda = 0$ la $\Phi_n(\cos\theta, \lambda)$ si riduce alla $P_n^{(1)}(\cos\theta) = -\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta}$, che si annulla $n-1$ volte fra 0 e π. Dunque: *qualunque sia* λ, *la* $\Phi_n(\cos\theta, \lambda)$ *ha* $n-1$ *radici comprese fra* 0 *e* π (oltre ad annullarsi agli estremi).

Le funzioni associate alle $G_n = \Phi_n(\cos\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta$.

6. Ponendo ora nell'equazione (10) in luogo di C il valore C_n definito dalla (13), e che compete alla funzione $G_n = \Phi_n(\cos\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta$, si ha

$$\frac{d^2F_n}{d\xi^2} - \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi}\frac{dF_n}{d\xi} - (C_n - \lambda\operatorname{ch}^2\xi)F_n = 0, \tag{45}$$

la quale definisce la funzione $F_n(\xi)$, associata alla $G_n(\theta)$. Poichè quest'ultima equazione si ottiene dalla (9) cambiando G_n in F_n e θ in $\frac{\pi}{2} - i\xi$ si ha senz'altro, a meno di un fattore costante arbitrario

$$F_n(\xi) = i^{n+1}\operatorname{ch}\xi \cdot \Phi_n(i\operatorname{sh}\xi) = i^{n+1}\operatorname{ch}^2\xi \cdot \varphi_n(i\operatorname{sh}\xi), \tag{46}$$

che risulta una funzione reale sia per n pari che per n dispari, come si riconosce facimente ricordando che per n pari la funzione $\Phi_n(\eta)$ è una funzione dispari di η, mentre per n dispari è una funzione pari.

Della (7) avremo allora da considerare soluzioni della forma

$$V_n(\xi, \theta, \lambda) = A_n F_n(\xi, \lambda) \cdot G_n(\theta, \lambda), \tag{47}$$

essendo F_n e G_n funzioni associate ed A_n costante arbitraria. La condizione richiesta che la V_n si annulli al contorno, cioè per $\xi = \xi_0$, diventa

$$F_n(\xi_0, \lambda) = 0. \tag{48}$$

Questa, considerata come equazione in λ, ha infinite radici positive e si hanno così, per ogni intero n infiniti *autovalori* del parametro λ che indicheremo con λ_{nj}, e corrispondentemente infinite autofunzioni $F_{nj}(\xi, \lambda_{nj})$. Le corrispondenti funzioni $G_n(\theta, \lambda)$ le indicheremo con $G_{nj}(\theta, \lambda_{nj}) = \operatorname{sen}\theta \cdot \Phi_{nj}(\theta, \lambda_{nj})$. Facendo il prodotto

$$V_{nj}(\xi, \theta, \lambda_{nj}) = F_{nj}(\xi, \lambda_{nj}) G_{nj}(\theta, \lambda_{nj}), \tag{49}$$

si hanno infinite soluzioni V_{nj} della (7) che si annullano per $\xi = \xi_0$, soddisfacenti cioè alla condizione richiesta.

Relazione di ortogonalità.

7. Le soluzioni trovate soddisfano alla seguente relazione di ortogonalità

$$\int_0^{\xi_0}\int_0^{\pi} V_{nj}(\xi, \theta, \lambda_{nj}) V_{nh}(\xi, \theta, \lambda_{nh}) \frac{\operatorname{ch}^2\xi - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{ch}\xi \operatorname{sen}\theta}\, d\xi d\theta = 0, \text{ per } j \neq h. \tag{50}$$

Invero le funzioni F_{nj}, F_{nh} soddisfano entrambe all' equazione differenziale (45) dove in luogo di λ, C_n, si pongano una volta λ_{nj}, $C_{nj} = n(n+1) + \sum_{1}^{\infty}{}_k\, C_n^{(k)} \lambda_{nj}^k$, e una seconda volta λ_{nh}, C_{nh}. Moltiplicando la prima delle equazioni che così si ottengono per F_{nh}, la seconda per F_{nj}, e sottraendo quindi membro a membro si deduce

$$\frac{d}{d\xi}\left(F_{nh}\frac{dF_{nj}}{d\xi} - F_{nj}\frac{dF_{nh}}{d\xi}\right) - \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi}\left(F_{nh}\frac{dF_{nj}}{d\xi} - F_{nj}\frac{dF_{nh}}{d\xi}\right) -$$
$$- (C_{nj} - C_{nh}) F_{nj}F_{nh} + (\lambda_{nj} - \lambda_{nh}) \operatorname{ch}^2\xi \cdot F_{nj}F_{nh} = 0.$$

Dividendo ambo i membri per $\operatorname{ch}\xi$, e integrando rispetto a ξ da 0 a ξ_0, si ha

$$\left|\frac{1}{\operatorname{ch}\xi}\left(F_{nh}\frac{dF_{nj}}{d\xi} - F_{nj}\frac{dF_{nh}}{d\xi}\right)\right|_0^{\xi_0} -$$
$$- (C_{nj} - C_{nh})\int_0^{\xi_0} F_{nj}F_{nh}\frac{d\xi}{\operatorname{ch}\xi} + (\lambda_{nj} - \lambda_{nh})\int_0^{\xi_0} F_{nj}F_{nh} \operatorname{ch}\xi\, d\xi = 0;$$

ma la parte integrata è nulla poichè per $\xi = \xi_0$ si annullano F_{nj}, F_{nh}, mentre per $\xi = 0$, se n è pari si annullano ancora F_{nj}, F_{nh}, e se n è dispari si annullano le loro derivate. Segue perciò

$$(51) \qquad (\lambda_{nj} - \lambda_{nh}) \int_0^{\xi_0} F_{nj} F_{nh} \operatorname{ch} \xi \, d\xi = (C_{nj} - C_{nh}) \int_0^{\xi_0} F_{nj} F_{nh} \frac{d\xi}{\operatorname{ch} \xi} .$$

Analogamente, ricordando che le

$$G_{nj} = \operatorname{sen} \theta \Phi_{nj}(\theta, \lambda_{nj}) = \operatorname{sen}^2 \theta \varphi_{nj}(\theta, \lambda_{nj})$$

soddisfano all'equazione differenziale (9), e osservando che queste funzioni e le loro derivate rispetto a θ si annullano per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, si deduce

$$(52) \qquad (C_{nj} - C_{nh}) \int_0^{\pi} G_{nj} G_{nh} \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta} = (\lambda_{nj} - \lambda_{nh}) \int_0^{\pi} G_{nj} G_{nh} \operatorname{sen} \theta \, d\theta .$$

Moltiplicando membro a membro con la (51), dividendo poi per il prodotto $(C_{nj} - C_{nh})(\lambda_{nj} - \lambda_{nh})$, si ottiene

$$\int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} F_{nj} G_{nj} \cdot F_{nh} G_{nh} \left(\frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sen} \theta} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{ch} \xi} \right) d\xi \, d\theta = 0, \qquad (j \neq h),$$

che per la (49) non differisce dalla (50).

Caso di un ellissoide di piccola eccentricità.

8. Nel caso in cui la velocità angolare ω della massa fluida è sufficientemente piccola la sua figura ellissoidale differirà poco da quella sferica, l'eccentricità ε sarà cioè molto piccola e la potremo considerare infinitesima.

Ora, essendo a, c i semiassi dell'ellissoide rotondo ($a > c$) si ha

$$(53) \qquad \gamma_0 = \sqrt{^2 - c^2} = a\varepsilon$$

e posto

$$(54) \qquad \rho = \gamma_0 \operatorname{ch} \xi$$

le (6) diventano

$$(55) \qquad r = \rho \operatorname{sen} \theta, \qquad z = \sqrt{\rho^2 - a^2 \varepsilon^2} \cos \theta$$

con

$$(56) \qquad \varepsilon a \leq \rho \leq a, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi .$$

Sulla superficie dell'ellissoide sarà $\rho = a$.

Nelle coordinate ρ, θ, l'equazione (2), o se si vuole la (7), si trasforma nella seguente

$$\frac{1}{\rho^2-\varepsilon^2 a^2 \operatorname{sen}^2\theta}\left\{(\rho^2-\varepsilon^2 a^2)\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{\varepsilon^2 a^2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right\}+k^2 V=0, \tag{57}$$

e di questa equazione occorre determinare soluzioni che si annullino per $\rho = a$. Ponendo

$$V = \rho \operatorname{sen}\theta\, W \tag{58}$$

l'equazione precedente diventa

$$(\rho^2-\varepsilon^2 a^2)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho}\right)+\frac{\varepsilon^2 a^2}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho}+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)+ \tag{59}$$
$$+\left[\frac{\varepsilon^2 a^2}{\rho^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}+k^2(\rho^2-\varepsilon\, a^2\operatorname{sen}^2\theta)\right]W=0.$$

Se di questa ci proponiamo di trovare soluzione che siano il prodotto di una funzione della sola ρ per una funzione della sola θ, scrivendo

$$W = \Psi(\rho)\Phi(\theta), \tag{60}$$

si hanno per la determinazione delle funzioni $\Psi(\rho)$, $\Phi(\theta)$ le equazioni

$$(\rho^2-\varepsilon^2 a^2)\left(\frac{d^2\Psi}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d\Psi}{d\rho}\right)+\frac{\varepsilon^2 a^2}{\rho}\frac{d\Psi}{d\rho}-\left(C-\frac{\varepsilon^2 a^2}{\rho^2}-k^2\rho^2\right)\Psi=0 \tag{61}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Phi}{d\theta}\right)+\left(C-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}-k^2\varepsilon^2 a^2\operatorname{sen}^2\theta\right)\Phi=0, \tag{62}$$

l'ultima delle quali coincide con l'equazione (12), dove è $\lambda = a^2\varepsilon^2 k^2$, e dove C è ancora costante arbitraria, da scegliere in modo che la $\Phi(\theta)$ risulti periodica di periodo 2π. Essa sarà quindi la stessa di quella definita nel n° 2.

Per $\varepsilon = 0$ e $C = n(n+1)$ la (62) dà $\Phi = P_n^{(1)}(\cos\theta)$, e la (61) diventa

$$\frac{d^2\Psi}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d\Psi}{d\rho}+\left[k^2-\frac{n(n+1)}{\rho^2}\right]\Psi=0, \tag{63}$$

la cui soluzione, regolare per $\rho \to 0$, è

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\rho}}J_{n+\frac{1}{2}}(k\rho), \tag{64}$$

dove $J_{n+\frac{1}{2}}$ è la funzione di BESSEL di 1ª specie e di ordine $n+\frac{1}{2}$.

Per ε non nullo la costante C sarà funzione di k e di ε; così pure le funzioni $\Phi(\theta)$ a $\Psi(\rho)$ dipenderanno da k e da ε. Immaginando queste quantità rappresentabili mediante serie di potenze di ε^2, nell'ipotesi che ε sia sufficientemente piccolo, tale da poter trascurare i termini di ordine superiore al primo in ε^2, se si pone

$$(65)\qquad \begin{aligned} \Phi &= \Phi_n = P_n^{(1)}(\cos\theta) + \varepsilon^2\Phi_n^{(1)}, \\ \Psi &= \Psi_n = \Psi_n^{(0)} + \varepsilon^2\Psi_n^{(1)}, \quad \text{con} \quad \Psi_n^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} J_{n+\frac{1}{2}}(k\rho), \end{aligned}$$

$$(66)\qquad C = n(n+1) + \varepsilon^2 C_n^{(1)},$$

si sostituisce nelle equazioni (62) e (61), si tien conto delle equazioni cui soddisfano la $P_n^{(1)}(\cos\theta)$ e la $J_{n+\frac{1}{2}}(k\rho)$, e si trascurano i termini di ordine superiore al 1° in ε^2, si hanno, per la determinazione delle funzioni $\Phi_n^{(1)}$, $\Psi_n^{(1)}$, le equazioni

$$(67)\qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\Phi_n^{(1)}}{d\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]\Phi_n^{(1)} + (C_n^{(1)} - k^2a^2\operatorname{sen}^2\theta)P_n^{(1)} = 0,$$

$$(68)\qquad \rho^2\left\{\frac{d^2\Psi_n^{(1)}}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\Psi_n^{(1)}}{d\rho} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{\rho^2}\right]\Psi_n^{(1)}\right\} -$$
$$- a^2\left[\frac{d^2\Psi_n^{(0)}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\Psi_n^{(0)}}{d\rho} + \left(\frac{C_n^{(1)}}{a^2} - \frac{1}{\rho^2}\right)\Psi_n^{(0)}\right] = 0.$$

La (67) si può scrivere

$$(67')\qquad \frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{d\Phi_n^{(1)}}{d\eta}\right] + \left[n(n+1) - \frac{1}{1-\eta^2}\right]\Phi_n^{(1)} + [C_n^{(1)} - k^2a^2(1-\eta^2)]P_n^{(1)}(\eta) = 0, \quad (\eta = \cos\theta),$$

e ricordando lo sviluppo (19) di $(1-\eta^2)P_n^{(1)}(\eta)$, l'equazione (67') diventa

$$(69)\qquad \frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{d\Phi_n^{(1)}}{d\eta}\right] + \left[n(n+1) - \frac{1}{1-\eta^2}\right]\Phi_n^{(1)} + C_n^{(1)}P_n^{(1)}(\eta) +$$
$$+ k^2a^2\frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}[(2n-1)P_{n+2}^{(1)} - 2(2n+1)P_n^{(1)} + (2n+3)P_{n-2}^{(1)}] = 0,$$

dalla quale segue che la costante $C_n^{(1)}$ avrà il valore

$$(70)\qquad C_n^{(1)} = \frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)}k^2a^2$$

e la $\Phi_n^{(1)}$ sarà della forma

$$(71)\qquad \Phi_n^{(1)} = A_nP_{n+2}^{(1)} + B_nP_{n-2}^{(1)}.$$

Sostituendo nella (49), e avendo riguardo all'equazione differenziale cui soddisfano le $P_{n+2}^{(1)}$, $P_{n-2}^{(1)}$, si ricavano per le costanti A_n, B_n, i valori

$$(72)\qquad A_n = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)^2}k^2a^2, \quad B_n = -\frac{n(n+1)}{2(2n-1)^2(2n+1)}k^2a^2,$$

e pertanto si ha

$$C_n = n(n+1) + \frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} k^2a^2\varepsilon^2 \tag{73}$$

$$\Phi_n(\eta) = P_n^{(1)}(\eta) + k^2a^2\varepsilon^2 \cdot \frac{n(n+1}{2(2n+1}\left[\frac{P_{n+2}^{(1)}(\eta)}{(2n+3)^2} - \frac{P_{n-2}^{(1)}(\eta)}{(2n-1)^2}\right]. \tag{74}$$

Sostituendo ora nella (68) in luogo di $C_n^{(1)}$, il valore (70) e in luogo di $\Psi_n^{(0)}$ il valore $\frac{1}{\sqrt{\rho}} J_{n+\frac{1}{2}}(k\rho)$, essa diventa

$$\frac{d^2\Psi_n^{(1)}}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\Psi_n^{(1)}}{d\rho} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{\rho^2}\right]\Psi_n^{(1)} = \tag{75}$$

$$= \frac{a^2}{\rho^2}\cdot\rho^{-\frac{1}{2}}\left\{-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} + \left[\frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} - 1\right]k^2 + \frac{n^2+n-\frac{1}{2}}{\rho^2}\right\} J_{n+\frac{1}{2}}(k\rho).$$

Poichè dalle formule ricorrenti delle funzioni di BESSEL si ricava

$$\frac{1}{\rho}\frac{dJ_{n+\frac{1}{2}}(k\rho)}{d\rho} = \frac{1}{2}k^2\left\{\frac{J_{n-\frac{3}{2}}(k\rho)}{2n-1} + \frac{4}{(2n-1)(2n+3} J_{n+\frac{1}{2}}(k\rho) - \frac{J_{n+\frac{5}{2}}(k\rho)}{2n+3}\right\},$$

$$\frac{1}{\rho^2}J_{n+\frac{1}{2}}(k\rho) = k^2\left\{\frac{J_{n-\frac{3}{2}}(k\rho)}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{2J_{n+\frac{1}{2}}(k\rho)}{(2n-1)(2n+3)} + \frac{J_{n+\frac{5}{2}}(k\rho)}{(2n+1)(2n+3)}\right\}$$

segue dalla (75)

$$\frac{d^2\Psi_n^{(1)}}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\Psi_n^{(1)}}{d\rho} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{\rho^2}\right]\Psi_n^{(1)} = \tag{76}$$

$$= \frac{a^2k^2}{\rho^2}\cdot\rho^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} J_{n-\frac{3}{2}}(k\rho) + \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3} J_{n+\frac{5}{2}}(k\rho)\right\}.$$

e posto

$$\Psi_n^{(1)} = \rho^{-\frac{1}{2}}[\alpha_n J_{n-\frac{3}{2}}(k\rho) + \beta_n J_{n+\frac{5}{2}}(k\rho)], \tag{77}$$

si ricavono per le costanti α_n, β_n i valori

$$\alpha_n = -a^2k^2\frac{(n-1)(n+1)}{2(2n-1)^2(2n+1)}, \quad \beta_n = a^2k^2\frac{n(n+2)}{2(2n+1)(2n+3)^2}. \tag{78}$$

Nell'approssimazione stabilita risulta quindi

$$\Psi_n(\rho) = \rho^{-\frac{1}{2}}\left\{J_{n+\frac{1}{2}}(k\rho) + \frac{\varepsilon^2a^2k^2}{2(2n+1)}\left[\frac{n(n+2)}{(2n+3)^2}J_{n+\frac{5}{2}}(k\rho) - \frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)^2}J_{n-\frac{3}{2}}(k\rho)\right]\right\}. \tag{79}$$

Ricordando ora le posizioni (58) e (60), si hanno per la funzione V le soluzioni

$$V = V_n = \rho \operatorname{sen} \theta \cdot \Psi_n(\rho) \cdot \Phi_n(\cos\theta), \qquad (n, = 1, 2, 3, \ldots). \tag{80}$$

Per ciascuna di queste soluzioni la condizione al contorno diventa $\Psi_n(a) = 0$, cioè

$$J_{n+\frac{1}{2}}(ka) + \frac{\varepsilon^2 a^2 k^2}{2(2n+1)} \left[\frac{n(n+2)}{(2n+3)^2} J_{n+\frac{5}{2}}(ka) - \frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)^2} J_{n-\frac{3}{2}}(ka) \right] = 0, \tag{81}$$

che per ogni intero positivo n fornisce gli autovalori del parametro k.

Poichè per $\varepsilon = 0$ la (81) si riduce alla

$$J_{n+\frac{1}{2}}(ka) = 0,$$

le cui radici sono $ka = \xi_{nj}$, essendo le ξ_{nj} gli zeri positivi in ordine crescente della funzione $J_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$, per $\varepsilon \neq 0$ si può porre nell'approssimazione considerata

$$ka = \xi_{nj} + \varepsilon^2 \eta_{nj}. \tag{82}$$

Sostituendo nella (81), e trascurando al solito i termini di ordine superiore al 1° in ε^2, si ricava

$$\eta_{nj} = - \frac{\xi_{nj}^2}{2(2n+1) J'_{n+\frac{1}{2}}(\xi_{nj})} \left[\frac{n(n+2}{(2n+3)^2} J_{n+\frac{5}{2}}(\xi_{nj}) - \frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)^2} J_{n+\frac{3}{2}}(\xi_{nj}) \right] \tag{83}$$

e pertanto gli autovalori approssimati di k sono

$$k_{nj} = (\xi_{nj} + \varepsilon^2 \eta_{nj})/a. \tag{84}$$

Nel caso considerato il problema risulta perciò completamente risolto.