# Alcune limitazioni per le soluzioni di equazioni paraboliche.

Memoria di Carlo Pucci (a Roma).

*A Giovanni Sansone nel suo 70$^{mo}$ compleanno.*

**Sunto.** - *Si discute il problema di* Cauchy *relativo all'equazione del calore,* $u_t = u_{xx}$, *ed a condizioni iniziali sull'asse t. Si provano inoltre alcune proprietà delle soluzioni positive di tale problema e di analoghi problemi di* Cauchy *relativi a più generali equazioni paraboliche.*

**Summary.** - *We consider the* Cauchy *problem for the heat equation,* $u_t = u_{xx}$, *with initial conditions on the t-axis. We prove some property of positive solutions of this problem, and of similiar* Cauchy *problems for more general parabolic equations.*

Nella presente Memoria si considerano equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico: $u_t = Lu$, con $L$ operatore ellittico nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$. Si studiano soluzioni di tali equazioni che soddisfano a condizioni iniziali su una porzione dell'iperpiano $x_n = 0$. Si tratta di problemi di Cauchy non ben posti, ove cioè la soluzione non dipende con continuità dai dati; si prova in questa Memoria che le soluzioni *positive* dei problemi di Cauchy considerati dipendono invece con continuità dai valori iniziali. Questo è il risultato finale del presente studio il cui principale obbiettivo è la ricerca di modifiche e di nuove impostazioni del problema di Cauchy considerato in modo da renderne la teoria più idonea alle applicazioni (1).

A parte ciò sono state provate alcune disuguaglianze per le soluzioni positive di equazioni paraboliche forse non prive di interesse di per se stesse (2). Indichiamone una di più semplice enunciazione.

Sia $R$ l'insieme dei punti $(x, t)$ tali che $0 \leq x < 1$, $0 < t < l$, sia $B$ un insieme chiuso contenuto in $R$. Esiste una costante $k$ dipendente soltanto da $R$ e $B$ tale che tutte le funzioni $u$ di classe $C^{(2)}$ in $\bar{R}$, soluzioni *positive* in $\bar{R}$ dell'equazione del calore $u_t = u_{xx}$, soddisfano alla limitazione

$$u(x, t) \leq k \max_{0 \leq t \leq l} \{ \mid u(0, t) \mid + \mid u_x(0, t) \mid \}, \quad \text{per} \quad (x, t) \in B.$$

(1) Uno studio analogo per le equazioni di tipo ellittico è contenuto in [5].

(2) Classi di soluzioni positive di equazioni paraboliche sono già state oggetto di studio. Ad es. cfr. D. V. Widder [7].

## § 1. - Definizioni ed enunciazione del problema.

Sia $A$ un insieme aperto, convesso, dello spazio euclideo $S_n$, e $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ sia un suo punto. Sia $B$ un sottoinsieme connesso di $\mathfrak{F}A$, frontiera di $A$, aperto su $A$, contenuto nell'iperpiano $x_n = 0$. Supponiamo che per ogni punto $x^0$ di $\mathfrak{F}A$ vi sia una sfera aperta, contenuta in $A$, avente $x^0$ sulla frontiera, e con raggio uguale ad una costante assegnata $\rho$. Supponiamo inoltre che la frontiera di $A$ sia di classe $C^{(2)}$. Sia $T$ l'insieme dei punti $(x_1, \ldots, x_n, t)$ dello spazio $S_{n+1}$ tali che $x \in A$ e $0 < t < l$; sia $F$ l'insieme dei punti di $S_{n+1}$ tali che $x \in B$ e $0 < t < l$.

Siano definite in $\overline{T}$ le funzioni reali $a_{ij}(x, t)$, $b_i(x, t)$, $c(x, t)$, con $i, j = 1, 2, \ldots, n$, ed esse risultino ivi holderiane. Consideriamo l'operatore differenziale

$$Lu \equiv \Sigma\, a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Sigma\, b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu. \tag{1}$$

Oltre alle ipotesi già fatte supporremo sempre in seguito

$$c \leq 0, \quad \Sigma\, a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha\,|\,\xi\,|^2 \quad \text{in } \overline{T}, \tag{2}$$

con $\alpha$ costante positiva assegnata. Sia $\Gamma$ la classe delle funzioni $u$ di classe $C^{(0)}$ in $\overline{T}$, dotate di derivata prima rispetto a $t$ e di derivate seconde rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_n$, continue in $T$. Indichiamo con $\Gamma'$ la classe delle funzioni $u$ di $\Gamma$ dotate di derivata normale nei punti $(x, t)$ di $F$. Indicato con $\varphi$ e $\psi$ due funzioni definite su $F$ e fissata una costante $\varepsilon$ positiva si considera il seguente problema:

Studio della classe di funzioni $u$, appartenenti a $\Gamma'$ che soddisfano alle seguenti condizioni:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \quad \text{in } T, \tag{3}$$

$$|\,u - \varphi\,| \leq \varepsilon(\|\,\varphi\,\|_F + \|\,\psi\,\|_F), \quad |\,u_n - \psi\,| \leq \varepsilon(\|\,\varphi\,\|_F + \|\,\psi\,\|_F) \quad \text{su } F, \tag{4}$$

$$u \geq 0 \quad \text{in } T, \tag{5}$$

avendo indicato con $u_n$ la derivata di $u$ secondo $x_n$ e con $\|\,\varphi\,\|_F$ l'estremo superiore di $|\,\varphi\,|$ su $F$.

Osserviamo che le condizioni (3), (4) con $\varepsilon = 0$ definiscono un usuale problema di CAUCHY. Pertanto le (4) con $\varepsilon > 0$ hanno il significato di condizioni iniziali di CAUCHY verificate con una certa approssimazione; la (5) è una condizione nuova che giustificheremo in seguito.

Indichiamo con $U_\varepsilon$ l'insieme delle funzioni $u$ della classe $\Gamma'$ che soddisfano le (3), (4), (5); $U_\varepsilon$ è un *pacchetto di soluzioni*, eventualmente vuoto. Stabilire in quali ipotesi tale pacchetto non è vuoto costituisce il teorema di esistenza per il nostro problema.

Indicato con $D$ un insieme chiuso contenuto in $T+F$ diremo *diametro* relativo a $D$ del pacchetto di soluzioni del problema (3), (4), (5) il numero

$$\delta_\varepsilon(D) = \underset{(x,t)\in D;\ u,v\in U_\varepsilon}{\text{estremo superiore}} \mid u(x, t) - v(x, t) \mid, \tag{6}$$

se $U_\varepsilon$ non è vuoto; altrimenti $\delta_\varepsilon(D) = 0$.

Proveremo che in opportune ipotesi esiste una funzione $\omega(\varepsilon)$, definita per $\varepsilon$ positivo, tale che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \omega(\varepsilon) = 0; \qquad \delta_\varepsilon(D) \leq (\|\varphi\|_F + \|\psi\|_F)\omega(\varepsilon). \tag{7}$$

Questo risultato è per il nostro problema il corrispondente di un teorema di unicità per il problema di CAUCHY (3), (4) con $\varepsilon = 0$. Infatti esso assicura che le soluzioni del problema (3), (4), (5) differiscono tra loro di una quantità infinitesima con $\varepsilon$.

## § 2. - Alcune osservazioni sulle soluzioni dell'equazione del calore.

Prima di entrare nei dettagli matematici della dimostrazione del risultato indicato nel paragrafo precedente è opportuno cercare di chiarire le ragioni per le quali ci è sembrato utile lo studio del problema (3), (4), (5), problema non usuale nella teoria delle equazioni a derivate parziali. Per semplificare consideriamo il classico problema di CAUCHY:

$$u_t = u_{xx} \text{ in } R \equiv \{0 < t < l,\quad 0 < x < 1\}, \tag{8}$$

$$u(0, t) = \varphi(t),\quad u_x(0, t) = \psi(t),\quad 0 < t < l. \tag{9}$$

HOLMGREN ha provato in [4] che, supposto $\varphi$ derivabile, condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione è che la funzione

$$g(t) = \psi(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\varphi'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau,$$

sia di classe $C^{(\infty)}$ ed inoltre esistano due costanti positive $M$ e $\rho$ tali che

$$\left|\frac{d^n g}{dt^n}\right| \leq M\frac{(n!)^2}{\rho^n} \quad \text{per} \quad 0 < t < l, \text{ ed } n = 1, 2, \ldots .$$

La condizione è anche sufficiente per $\rho$ sufficientemente grande. Tale condizione è analoga a quella stabilita da HADAMARD in [3] per i dati di CAUCHY di una soluzione dell'equazione di LAPLACE. L'analogia fra il problema (8), (9) e il problema di CAUCHY per l'equazione di LAPLACE sussiste anche per quanto riguarda la dipendenza delle soluzioni dalle condizioni iniziali. Si ha infatti in entrambi i casi una instabilità delle soluzioni, come segue, per il nostro problema dal seguente esempio.

Fissato due numeri naturali $k$ ed $n$ poniamo:

$$v_n(x, t) = n^{-2k}[e^{nx} \operatorname{sen}(2n^2t + nx) + e^{-nx} \operatorname{sen}(2n^2t - nx)].$$

Tale funzione soddisfa alla equazione differenziale (8) e alle condizioni iniziali

$$v_n(0, t) = 2n^{-2k} \operatorname{sen} 2\, n^2 t,$$

$$\left.\frac{dv_n}{dx}\right]_{x=0} = 0.$$

Per $n \to \infty$ la successione $\{v_n(0, t)\}$ converge uniformemente a zero insieme alle sue derivate fino all'ordine $k-1$ mentre che in un prefissato intorno di un qualsiasi punto $(x, t)$ le funzioni $v_n$ assumono valori arbitrariamente grandi per $n$ sufficientemente grande. Ciò significa che una arbitrariamente piccola variazione nelle condizioni iniziali del problema (8), (9) può comportare una variazione arbitrariamente grande nella soluzione. Pertanto, secondo una definizione di Hadamard, la soluzione non dipende con continuità dai dati ed il problema (8), (9) non è ben posto. Se consideriamo la classe $U_\varepsilon^*$ delle soluzioni della equazione differenziale (8) verificanti le condizioni:

$$(10) \qquad |u(0, t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon, \quad |u_x(0, t) - \psi(t)| \leq \varepsilon, \quad 0 < t < l,$$

con $\varepsilon$ costante positiva, tale pacchetto $U_\varepsilon^*$ non è vuoto (potendo sempre approssimare $\varphi$ e $\psi$ con polinomi) ed ha un diametro uguale a $+\infty$ indipendentemente da $\varepsilon$ (positivo) e dall'insieme considerato (dotato di punti interni). Vale a dire una conoscenza approssimata di $\varphi$ e $\psi$ non comporta alcuna possibilità di approssimazione numerica della soluzione del problema di Cauchy (8), (9). D'altra parte l'ipotesi che le condizioni iniziali siano note solo in modo approssimato sembra giustificata e naturale qualora ci si riferisca a problemi posti dalle applicazioni nei quali i dati sono determinati sperimentalmente. Volendo evitare il fenomeno di instabilità descritto per mantenere l'ipotesi di condizioni iniziali approssimate, cioè la condizione (10) invece della (9), occorre imporre alle soluzioni della equazione (8) altre condizioni che le determinino ulteriormente. Siccome tali equazioni di tipo parabolico sono spesso collegate a fenomeni analoghi a quello della diffusione del calore sembra naturale considerare il problema con la condizione aggiuntiva che le soluzioni, che sono «temperature», siano positive. Nei problemi di matematica applicata nei quali le soluzioni rappresentano temperature è anzi assurdo non tenere conto della condizione che le soluzioni devono essere positive (o di una analoga limitazione inferiore) essendo questa condizione sicuramente un dato del problema più certo delle condizioni iniziali e della equazione differenziale stessa.

In questa Memoria vogliamo mostrare il ruolo che la condizione di positività delle soluzioni può avere in problemi del tipo considerato; proveremo in particolase che le temperature, soluzioni della equazione differenziale (8) dipendono con continuità dalle condizioni iniziali di Cauchy prescritte sull'asse $t$. Ciò comporta la possibilità di ottenere approssimazioni numeriche di soluzioni di problemi posti dalla fisica che fino ad oggi sono stati considerati mal posti e praticamente impossibili.

## § 3. - Alcune limitazioni.

Consideriamo la classe $\mathfrak{L}$ degli operatori $L$, definiti dalla (1) in $T$, con coefficienti verificanti le (2) e le condizioni

$$\| a_{ij} \|_{0,\lambda}, \quad \| b_i \|_{0,\lambda}, \quad \| c \|_{0,\lambda} \leq \mu, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

ove $\lambda$ e $\mu$ sono due costanti positive prefissate, $\lambda \leq 1$, e

$$\| c \|_{0,\lambda} = \max_{(x,t)\in \bar{T}} | c(x, t) | + \max_{(x,t),(x',t')\in \bar{T}} | c(x, t) - c(x', t') | \cdot |(t-t')^2 + \Sigma (x_i - x_i')^2|^{-\frac{\lambda}{2}}$$

Manteniamo le ipotesi del § 1 relative all'insieme $T$ e conveniamo di indicare con $T_d$ l'insieme dei punti di $T$ aventi distanza maggiore di $d$ dalla frontiera di $T$.

I. *Fissata una costante $d$, con $0 < 4d < l$, e $d < \rho$, esiste in corrispondenza una costante $k$ tale che, fissato comunque $L$ in $\mathfrak{L}$, ogni funzione $u$ di classe $\Gamma$, soluzione in $T$ dell'equazione differenziale* (3), *soddisfa alle limitazioni:*

$$(11) \qquad u(x, t) \leq u(\xi, \vartheta) + k u_n(\xi, \vartheta) \ \text{per} \ (x, t) \in T_d, \quad t \leq \vartheta - d,$$

*ove $(\xi, \vartheta)$ è il punto della frontiera di $T$ ove $u$ assume il suo valore minimo* ([3]).

Fissato un punto $(\xi, \vartheta)$ di $\mathfrak{F}T$, con $\vartheta \geq 2d$, indichiamo con $(\eta, \vartheta)$ il punto di $T$ sulla retta normale ad $\mathfrak{F}T$ nel punto $(\xi, \vartheta)$ ed avente distanza da $(\xi, \vartheta)$ uguale a $\frac{d}{2}$. Sia $E(\delta)$ l'insieme dei punti $(x, t)$ aventi distanza da $(\xi, \vartheta)$ minore di $\delta$, aventi distanza da $(\eta, \vartheta)$ minore di $\frac{d}{2}$, e tali che $t \leq \vartheta$. Indicato con $r$ la distanza di un punto $(x, t)$ da $(\eta, \vartheta)$ consideriamo la funzione

$$h(x, t) = \left(\frac{1}{2} d - r\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} d - r.$$

([3]) Abbiamo indicato con $u_n(\xi, \vartheta)$ la derivata di $u$ secondo la normale interna ad $\mathfrak{F}T$ nel punto $(\xi, \vartheta)$ se essa esiste; in caso contrario indichiamo con $u_n(\xi, \vartheta)$ il limite inferiore del rapporto incrementale di $u$ secondo tale direzione. Osserviamo che nel caso $\vartheta < 2d$ non esistono punti $(x, t)$ appartenenti a $T_d$ e con $t \leq \vartheta - d$; pertanto la (11) sarà provata nel caso $\vartheta \geq 2d$.

Osserviamo che esiste un numero positivo $\delta$, dipendente soltanto da $d$ e dalla classe $\mathfrak{L}$, tale che

$$\frac{\partial h}{\partial t} - Lh < 0 \quad \text{in } E(\delta).$$

Infatti

$$h_{x_i} = \left[-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}d - r\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]\frac{x_i - \eta_i}{r},$$

$$h_t = \left[-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}d - r\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]\frac{t - \vartheta}{r},$$

$$h_{x_i x_j} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}d - r\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)}{r^2} - \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}d - r\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + 1\right]\left[\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)}{r^3}\right] \text{ [4]},$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} - Lh = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}d - r\right)^{-\frac{1}{2}}\Sigma\, a_{ij}(x, t)\frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)}{r^2} + Q(x, t),$$

ove $Q$ si mantiene limitato in $E(\delta)$ per $\delta < \frac{1}{2}d$ mentre che il primo addendo del secondo membro diverge a $-\infty$ per $(x, t) \to (\xi, \vartheta)$.

Indichiamo con $E_1$ i punti della frontiera di $E(\delta)$ aventi distanza $\delta$ da $(\xi, \vartheta)$ ed indichiamo con $E_2$ i punti della frontiera di $E(\delta)$ aventi distanza $\frac{1}{2}d$ da $(\eta, \vartheta)$. Osserviamo che

$$0 < h < \delta^{\frac{3}{2}} + \delta \quad \text{in } E(\delta), \qquad h = 0 \quad \text{su } E_2,$$

$$h_n(\xi, \vartheta) = 1,$$

ove $h_n(\xi, \vartheta)$ è la derivata di $h$ nel punto $(\xi, \vartheta)$ secondo la normale interna ad $\mathfrak{F}T$ in tale punto.

Osserviamo inoltre che i punti $(x, t)$ di $\mathfrak{F}T$ con $t < l$ hanno una distanza dall'insieme $E_1$ maggiore di una costante positiva $\sigma$, ove $\sigma$ dipende solo da $\delta$. Pertanto, siccome le soluzioni positive della (3) soddisfano ad una disuguaglianza analoga a quelle provate da HARNACK per le funzioni armoniche [5], esiste una costante positiva $k^*$ tale che, fissato comunque un operatore $L$ in $\mathfrak{L}$ ed una funzione $u$, di classe $\Gamma$, soluzione dell'equazione differenziale (3), ed avente il minimo nel punto $(\xi, \vartheta)$, risulta

$$u(x, t) - u(\xi, \vartheta) \geq k^* \max_{(x,t)\in \bar{T}_d,\, t \leq \vartheta - d} [u(x, t) - u(\xi, \vartheta)] \quad \text{per } (x, t) \in E_1$$

---

[4] Poniamo $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$.

[5] Vedere A. FRIEDMAN [2].

La funzione

$$v(x,\ t) = u(x,\ t) - u(\xi,\ \vartheta) - k^*[\delta^{\frac{3}{2}} + \delta]^{-1} h(x,\ t) \max_{(x,\, t) \in \overline{T}_d,\ t \leq \vartheta - d} [u(x,\ t) - u(\xi,\ \vartheta)],$$

soddisfa alla condizione

$$v_t - Lv > 0 \quad \text{in } E(\delta),$$

e pertanto $v$ assume il suo minimo in $E_1 + E_2$; essendo

$$v \geq 0 \quad \text{su } E_1 + E_2, \qquad v(\xi,\ \vartheta) = 0,$$

deve essere

$$v_n(\xi,\ \vartheta) \geq 0,$$

cioè

$$u_n(\xi,\ \vartheta) \geq k^*[\delta^{\frac{3}{2}} + \delta]^{-1} \max_{(x,\, t) \in \overline{T}_d,\ t \leq \vartheta - d} [u(x,\ t) - u(\xi,\ \vartheta)],$$

e pertanto il teorema è provato.

Indichiamo con $T_d^*$ l'insieme dei punti di $\overline{T}$ aventi distanza dall'insieme $\mathfrak{F}T - F$ maggiore od uguale a $d$; risulta $T_d^* \subset T_d$.

II. *Fissata una costante $d$, con $0 < 4d < l$, esiste corrispondentemente una costante $k_1$ tale che fissato comunque un operatore $L$ in $\mathfrak{L}$ ogni funzione positiva $u$, di classe $\Gamma'$, soluzione dell'equazione differenziale* (3), *soddisfa alla limitazione:*

$$u(x,\ t) \leq k_1(\| u \|_F + \| u_n \|_F) \quad \textit{per} \quad (x,\ t) \in T_d^* \ (^6). \tag{12}$$

Sia $G$ l'insieme dei punti $(x,\ t)$ tali che $x \in \mathfrak{F}A$ e $0 < t < l$; sia $F_0$ l'insieme dei punti $(x,\ t)$ di $F$ tali che $t > l - d$. Fissato un numero positivo $\delta$ indichiamo con $F_\delta$ l'insieme dei punti di $F_0$ distanti da $G - F_0$ per più di $\delta$; supponiamo $\delta$ sufficientemente piccolo in modo che $F_\delta$ non sia vuoto. Sia $g$ una funzione di classe $C^{(2)}$ su $G$ e tale che

$$g = 0 \quad \text{su} \quad F_\delta, \qquad g = 2 \quad \text{su} \quad G - F_0, \qquad 0 \leq g \leq 2 \quad \text{su} \quad F_0 - F_\delta. \tag{13}$$

Fissato comunque $L$ in $\mathfrak{L}$ nelle nostre ipotesi esiste una funzione $\gamma(x,\ t)$ di classe $\Gamma'$ tale che

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} - L\gamma = 0 \quad \text{in } T,$$

$$\gamma = g \quad \text{su} \quad G, \qquad \gamma(x,\ 0) = 2 \quad \text{per} \quad x \in A \ (^7). \tag{14}$$

---

(6) Indichiamo con $\| u \|_F$ e $\| u_n \|_F$ il massimo su $F$ del valore assoluto di $u$ e della derivata normale di $u$.

(7) Questo segue da un recente teorema di A. FRIEDMAN [1].

Sia $u$ una funzione positiva di classe $\Gamma'$ soluzione della equazione differenziale (3). La funzione $v = u + \gamma \| u \|_F$ è pure una soluzione di classe $\Gamma'$ della (3) e quindi assume il suo valore minimo su $G$ oppure per $t = 0$; essendo $u$ positiva per le (13), (14) il minimo deve essere assunto in $F_0$. Per il precedente teorema

$$v(x, t) \leq \min_{(x, t) \in F_0} v(x, t) + k \max_{(x, t) \in F_0} v_n(x, t), \quad \text{per} \quad (x, t) \in T_d,$$

e quindi

$$u(x, t) \leq [3 + k \max_{(x, t) \in F_0} \gamma_n(x, t)] \| u \|_F + k \| u_n \|_F \quad \text{per} \quad (x, t) \in T_d.$$

Esiste una costante $k'$ tale che comunque si fissi $L$ nella classe $\mathfrak{L}$

$$\max_{(x, t) \in F_0} \gamma_n(x, t) \leq k' \ (^8),$$

e quindi esiste una costante $k_1$ tale che comunque si fissi $L$ in $\mathfrak{L}$ ogni funzione positiva $u$, di classe $\Gamma$, soluzione della equazione differenziale (3) soddisfa alla limitazione

$$u(x, t) \leq k_1(\| u \|_F + \| u_n \|_F) \quad \text{per} \quad (x, t) \in \overline{T}_d. \tag{15}$$

Proviamo che tale limitazione sussiste nell'insieme più ampio $T_d^*$ e cioè che essa è soddisfatta anche in un qualsiasi punto $(\bar{x}, t^0)$ appartenente a $T_d^* - T_d$. Sia $(x^0, t^0)$ il punto di $F$ avente minima distanza da $(\bar{x}, t^0)$ e sia $\lambda d$ tale distanza; per definizione di $T_d^*$ e $T_d$ risulta $\lambda < 1$. Posto

$$\xi_i = x_i^0 + \lambda(x_i - x_i^0), \qquad \vartheta = t_0 + \lambda^2(t - t^0),$$

consideriamo la funzione $v(x, t) = u(\xi, \vartheta)$ che risulta definita in un insieme contenente $\overline{T}$. Posto

$$L^* v(x, t) \equiv \Sigma\, a_{ij}(\xi, \vartheta) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \lambda\, \Sigma\, b_i(\xi, \vartheta) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} + \lambda^2 c(\xi, \vartheta) v(x, t),$$

risulta

$$L^* \subset \mathfrak{L}, \qquad v_t - L^* v = 0, \qquad v > 0 \quad \text{in } T, \qquad v \in \Gamma',$$

e quindi

$$v(x, t) \leq k_1(\| v \|_F + \| v_n \|_F) \quad \text{per} \quad (x, t) \in \overline{T}_d.$$

Posto $x' \equiv (x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0 + d)$ risulta

$$v(x', t^0) = u(\bar{x}, t^0), \qquad \| v \|_F \leq \| u \|_F, \qquad \| v_n \|_F \leq \lambda \| u_n \|_F,$$

e quindi il teorema è provato.

(8) Cfr. A. Friedman [2].

## § 4. - Dipendenza delle soluzioni positive dai dati di Cauchy.

Conserviamo le ipotesi introdotte all'inizio del § 1 e le notazioni introdotte al § 1 e § 3. Diciamo inoltre che un operatore $L$ della classe $\mathfrak{L}$ soddisfa alla condizione $H$ se il problema di CAUCHY consistente nella ricerca di una funzione $u$, di classe $\Gamma$, verificante l'equazione differenziale (3) e le condizioni iniziali

$$u = 0, \qquad u_n = 0 \quad \text{su} \quad F,$$

ammette soltanto la soluzione identicamente nulla. Osserviamo che per un classico teorema di HOLMGREN tale condizione è soddisfatta nel caso che i coefficienti di $L$ siano analitici in $\bar{T}$. In una recente pubblicazione di ITO e YAMABE [5] è provato che tale condizione è anche soddisfatta per operatori $L$ di $\mathfrak{L}$ che siano autoaggiunti e con i coefficienti $a_{ij}$ di classe $C^{(2,\lambda)}$. È presumibile che tale condizione risulti soddisfatta per ogni operatore $L$ di $\mathfrak{L}$; pertanto nel teorema seguente faremo uso della ipotesi che l'operatore $L$ soddisfi alla condizione $H$. Naturalmente a tale ipotesi di comodo possono essere sostituite le ipotesi esplicite di ITO e YAMABE o le condizioni di analiticità dei coefficienti.

III. *Sia $L$ un operatore della classe $\mathfrak{L}$ soddisfacente alla condizione $H$. Fissata una costante positiva $d$, con $4d < l$, esiste corrispondentemente una funzione $w(\varepsilon)$ definita per $\varepsilon$ positivo, infinitesima per $\varepsilon \to 0$, tale che, fissato comunque due funzioni $\varphi$ e $\psi$ di classe $C^{(0)}$ su $F$, il pacchetto di soluzioni, di classe $\Gamma'$, del problema* (3), (4), (5) *ha un diametro relativo a $T_d^*$ minore di* $(\|\varphi\|_F + \|\psi\|_F)w(\varepsilon)$.

Fissato un numero positivo $\varepsilon$, $\varepsilon < 1$, indichiamo con $w(\varepsilon)$ l'estremo superiore dei diametri $\delta_\varepsilon(T_d^*)$ dei problemi (3), (4), (5) al variare di $\varphi$ e $\psi$ nella classe delle funzioni continue su $F$ con $\|\varphi\|_F + \|\psi\|_F \leq 1$. Ovviamente il teorema è provato se si dimostra che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} w(\varepsilon) = 0.$$

Per la definizione di $w$ esistono due funzioni $u$ ed $u'$, di classe $\Gamma'$, soluzioni positive della equazione differenziale (3), tali che

$$(17) \qquad \|u\|_F, \quad \|u'\|_F, \quad \|u_n\|_F, \quad \|u_n'\|_F \leq 2,$$

$$\|u - u'\|_F, \quad \|u_n - u_n'\|_F \leq 2\varepsilon, \quad \max_{(x,t)\in T_d^*} |u(x, t) - u'(x, t)| > \frac{1}{2} w(\varepsilon).$$

Posto $v^{(\varepsilon)} = u - u'$ si ha quindi che per ogni valore positivo di $\varepsilon$, $\varepsilon < 1$, esiste una funzione $v^{(\varepsilon)}$ di classe $\Gamma'$, tale che

$$v_t^{(\varepsilon)} - Lv^{(\varepsilon)} = 0 \quad \text{in} \quad T; \qquad \| v^{(\varepsilon)} \|_F, \quad \| v_n^{(\varepsilon)} \|_F \leq 2\varepsilon,$$

$$\max_{(x,\, t) \in T_d^*} \mid v^{(\varepsilon)}(x,\, t) \mid \geq \frac{1}{2} w(\varepsilon). \tag{18}$$

Sia $\sigma$ una costante positiva minore di $d$. Per il teorema II e per la (17) esiste una costante $k_1$, indipendente da $\varepsilon$, maggiore di $u$ ed $u'$ in $T_\sigma^*$. Si ha pertanto

$$\mid v^{(\varepsilon)} \mid < 2k_1 \quad \text{in} \quad T_\sigma^*.$$

Essendo le $v^{(\varepsilon)}$, $0 < \varepsilon < 1$, equilimitate in $T_\sigma^*$ esse risultano equicontinue, insieme alle loro derivate parziali prime rispetto a $t$ e seconde rispetto alle $x_i$, in ogni insieme chiuso interno a $T_\sigma^*$ (9). Pertanto esiste una successione $\{ \varepsilon_r \}$ convergente a zero tale che $\{ v^{(\varepsilon_r)} \}$ converge in tutti i punti interni a $T_\sigma^*$ ad una funzione $v$, continua insieme alle sue derivate parziali $v_t$, $v_{x_i}$, $v_{x_i x_j}$, che soddisfa alla equazione

$$v_t - Lv = 0 \tag{19}$$

in tutti i punti interni a $T_\sigma^*$. Risultando $\{ v^{(\varepsilon_r)} \}$ uniformemente convergente a zero su $F$, si ha che tale successione è pure uniformemente convergente in $T_d^*$ ed ivi $v$ è continua e

$$v = 0 \quad \text{su} \quad F \cap T_d^*; \tag{20}$$

questo si prova con l'usuale metodo della funzione barriera.

Indichiamo con $g^{(\varepsilon)}$ una funzione continua sulla frontiera di $T$, che coincida con $v^{(\varepsilon)}$ su $F$, e che risulti in valore assoluto minore o uguale a $2\varepsilon$. Indichiamo con $p^{(\varepsilon)}$ una soluzione di classe $\Gamma$ del seguente problema

$$p_t^{(\varepsilon)} - Lp^{(\varepsilon)} = 0 \quad \text{in} \quad T,$$

$$p^{(\varepsilon)}(x,\, t) = g^{(\varepsilon)}(x,\, t) \quad \text{per} \quad (x,\, t) \in \mathfrak{F}T \quad \text{e} \quad t < l.$$

Tale funzione esiste ed è unica per un già citato risultato di Friedman, e $| p^{(\varepsilon)} | \leq 2\varepsilon$ in $T$. Posto

$$q^{(\varepsilon)} = v^{(\varepsilon)} - p^{(\varepsilon)}, \tag{21}$$

(9) Vedere A. Friedman [1].

$\{q^{(\varepsilon_r)}\}$ è uniformemente convergente in $T_d^*$ a $v$ ed essendo

$$q^{(\varepsilon)} = 0 \quad \text{su} \quad F, \qquad q_t^{(\varepsilon)} - Lq^{(\varepsilon)} = 0 \quad \text{in} \quad T, \qquad q \in \Gamma,$$

per alcuni risultati di FRIEDMAN già indicati anche le derivate prime di $q^{(\varepsilon)}$ sono equicontinue in $T_d^*$ e quindi $\{q_{x_n}^{(\varepsilon_r)}\}$ converge uniformemente a $v_{x_n}$ in in $T_d^*$ ed in particolare su $F \cap T_d^*$. Dalla (21) segue che $p^{(\varepsilon)}$ è dotata di derivata normale su $F$ e che $\{p_n^{(\varepsilon_r)}\}$ converge uniformente a $v_n$ su $F \cap T_d^*$. Proviamo che da ciò segue

$$v_n = 0 \quad \text{su} \quad F \cap T_d^*. \tag{22}$$

Supponiamo per assurdo che ciò non sia. Esiste allora un insieme $F_0$ aperto su $F$ ove $v_n \neq 0$, ad esempio

$$v_n > \tau \quad \text{su} \quad F_0, \qquad \tau \text{ costante positiva.}$$

Indichiamo con $g$ una funzione continua su $\mathfrak{F}T$, con derivate continue su $F$, tale che si annulli in qualche punto di $F_0$ ed inoltre

$$g = 3 \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}T - F_0.$$

Indichiamo con $p$ la funzione di classe $\Gamma$ soluzione del seguente problema

$$p_t - Lp = 0 \quad \text{in} \quad T, \qquad p = g \quad \text{per} \quad (x, t) \in \mathfrak{F}T, \ t < l.$$

La funzione $p^{(\varepsilon_r)} - \varepsilon_r p$ ha un un massimo in $F_0$ e quindi per qualunque indice $r$ in qualche punto di $F_0$ risulta

$$p_n^{(\varepsilon_r)} - \varepsilon_r p_n \leq 0,$$

il che è assurdo perchè $\{p_n^{(\varepsilon_r)}\}$ converge uniformemente a $v_n$ che è maggiore in $F_0$ della costante positiva $\tau$, $\{\varepsilon_r\}$ converge a zero e $p_n$, indipendente da $r$, si mantiene limitato su $F_0$. La (22) è quindi provata e per le (19), (20) la funzione $v$ è nulla in $T_d^*$. La successione $v^{(\varepsilon_r)}$ è quindi uniformemente convergente a zero in $T_d^*$ ed essendo $w(\varepsilon)$ non decrescente dalla (18) segue il teorema.

OSSERVAZIONE. - Rimane il problema aperto della determinazione effettiva della funzione $w(\varepsilon)$ che figura nel teorema III. La congettura, basata anche sui risultati analoghi per le equazioni ellittiche, è che $w$ possa essere maggiorata da una funzione $\varepsilon^\sigma$ con l'esponente $\sigma$ costante positiva minore di 1, dipendente da $d$ e naturalmente dall'operatore $L$. La determinazione di qualche maggiorante di $w$, oltre che qualitativamente interessante, potrebbe essere utile per le applicazioni.

## BIBLIOGRAFIA


[1] A. FRIEDMAN, *Interior Estimates for Parabolic Systems of Partial Differential Equations*, « Journal Math. and Mech. », 7 (1958), pp. 771-792.

[2] — — *Parabolic equations of the second order*, « Trans. Amer. Math. », 1958.

[3] J. HADAMARD, *Sur les problèmes aux dérivées partielle et leur signification physique* » Bull. Univ. Princeton », 13 (1902), pp. 49-52.

[4] E. HOLMGREN, *On Cauchy problem vid de lineare partiella differentialekvationerna of 2: dra ordningen*, « Arkiv fur Math. Astr. och Fys. », 2 (1905), n. 4.

[5] S. ITÔ, H. YAMABE, *A unique continuation theorem for solutions of a parabolic differential equation*, « Journal Math. Soc. of Japan », 10 (1958), pp. 314-321.

[6] C. PUCCI, *Discussione del problema di Cauchy per le equazioni di tipo ellittico*, « Ann. mat. pura appl. », 4, 46 (1958), pp. 131-154.

[7] D. V. WIDDER, *Positive temperatures on an infinite road*, « Trans. Am. Math. Soc. », 55 (1944), pp. 85-95.