Disuguaglianze tra limiti e coefficienti dello sviluppo asintotico di una funzione in un angolo

Nota di Baltasar R.-Salinas (a Saragozza)

A Giovanni Sansone nel suo 70^mo compleanno

Sunto. - *Si danno disuguaglianze per i coefficienti e limiti dello sviluppo asintotico di una funzione in un angolo e disuguaglianze per i limiti delle derivate di una funzione analitica in un angolo.*

INTRODUZIONE

Dato un insieme C del piano complesso con O per punto frontiera e una funzione complessa $f(z)$ definita in C e con uno sviluppo asintotico $\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$, si definiscono come limiti M_n di detto sviluppo asintotico i numeri

$$M_n = \operatorname*{Sup}_{z\in C}\left|\frac{f(z)-\sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n}\right| \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Questi limiti sono certamente finiti se $f(z)$ è limitata. Effettivamente, essendo

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-\sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n}=a_n \qquad (z\in C),$$

esiste un $r>0$ tale che

$$\left|\frac{f(z)-\sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n}\right|<|a_n|+1 \qquad (z\in C)$$

per $|z|<r$, e

$$\left|\frac{f(z)-\sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n}\right|\le\frac{M_0}{r^n}+\sum_0^{n-1}\frac{|a_\nu|}{r^{n-\nu}} \qquad (z\in C)$$

per $|z|\ge r$ con $M_0=\operatorname*{Sup}_{z\in C}|f(z)|<\infty$.

In questo lavoro dimostreremo che se C è un angolo piano $|\arg. z|<\alpha\pi/2$ di apertura $\alpha\pi\le 2\pi$ o un angolo $|\arg. z|=\alpha\pi/2$ di apertura $\alpha\pi\le\pi$ $(\alpha\ge 0)$ si ha

$$\text{(I)} \qquad |a_k|\le 2\left(\frac{en}{k}\right)^{(2-\alpha)k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$$

e

$$M_k \leq 5 \cdot 2^k \left(\frac{en}{k}\right)^{(2-\alpha)k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \tag{II}$$

per $0 < k \leq n$.

Sono anche ottenuti altri risultati simili. In particolare, da (I) deduciamo disuguaglianze di tipo analogo a quelle che dimostriamo nel [6] per i limiti delle derivate di una funzione analitica in un angolo $|\arg. z| < \alpha\pi/2$ di apertura $\alpha\pi \leq \pi$. Ricordiamo che GORNY [2], KOLMOGOROFF [4] e H. CARTAN [1] sono stati i primi che hanno riscontrato disuguaglianze di questo genere per i limiti di una funzione n volte derivabile nella semiretta R^+: $x > 0$ e nella retta R.

NOTAZIONI. - Indicheremo con A_α l'angolo $|\arg. z| < \alpha\pi/2$, con Λ_α l'angolo $|\arg. z| = \alpha\pi/2$ e $\bar{A}_\alpha$ la clausura di A_α, cioè: $\bar{A}_\alpha = A + \Lambda_\alpha$ per $\alpha > 0$.

§ 1. - Disuguaglianze fondamentali.

TEOREMA 1. - *Sia $f(z)$ una funzione analitica in A_α e continua in $\bar{A}_\alpha$. Se*

$$|f(z)| \leq A + B|z|^\lambda \qquad (\lambda > 0)$$

per $z \in \Lambda_\alpha$ con A, B e λ costanti, e

$$\overline{\lim_{z \to \infty}} \frac{\log|f(z)|}{|z|^{1/\alpha}} = \sigma < \infty \qquad (z \in A_\alpha),$$

si ha, qualunque sia $\mu > 0$,

$$|e^{-\sigma z^{1/\alpha}} f(z)| \leq e^{\alpha\mu}[A + (\lambda/\mu)^{\alpha\lambda} B|z|^\lambda] \tag{1.1}$$

per $z \in A_\alpha$.

DIMOSTRAZIONE. - Sia $\alpha = 1$. Allora

$$g_\rho(z) = \frac{f(z)}{(\rho + z)^\lambda} \qquad (\rho > 0)$$

è una funzione analitica in $\mathrm{Re}.\, z > 0$, continua in $\mathrm{Re}.\, z \geq 0$ e limitata sopra l'asse immaginario dato che

$$|g_\rho(iy)| \leq \operatorname*{Sup}_y \frac{A + B|y|^\lambda}{|\rho + iy|^\lambda} = \operatorname*{Sup}_y \frac{A\rho^{-\lambda} + B|y|^\lambda}{|1 + iy|^\lambda} \leq A\rho^{-\lambda} + B,$$

per essere

$$|1 + iy| \geq 1 \quad \text{e} \quad |1 + iy| \geq |y|.$$

Pertanto, siccome

$$\overline{\lim_{z \to \infty}} \frac{\log|g_\rho(z)|}{|z|} = \sigma \qquad (\mathrm{Re}.\, z > 0),$$

secondo un teorema di M. HEINS [3], risulta

$$|g_\rho(z)| \leq (A\rho^{-\lambda} + B)\, e^{\sigma x} \qquad (x = \mathrm{Re.}\, z).$$

Quindi

$$|e^{-\sigma z} f(z)| \leq \left(1 + \left|\frac{z}{\rho}\right|\right)^{\lambda} (A + B\rho^{\lambda})$$

per $\mathrm{Re.}\, z > 0$, qualunque sia $\rho > 0$. Basta prendere in questa disuguaglianza $\rho = \lambda |z| / \mu$ per ottenere (1.1) con $\alpha = 1$.

Per dimostrare completamente il teorema è sufficiente applicare il precedente risultato a $f(z^\alpha)$.

OSSERVAZIONE 1. – *L'espressione di destra di* (1.1) *è funzione non decrescente di* α *se* $\mu \leq \lambda$.

OSSERVAZIONE 2. – *Se* $r \geq 0$ *si ha*

$$A + Br^\lambda \leq e^{\alpha\mu}[A + (\lambda/\mu)^{\alpha\lambda} Br^\lambda]$$

qualunque sia $\mu \geq 0$.

Per dimostrare questo è sufficiente applicare (1.1) a

$$f(z) = A + Bz^\lambda$$

in A_α e prendere $z = r$, tenendo presente che allora $\sigma \leq 0$ [1].

COROLLARIO 1. – *Se il polinomio*

$$P(z) = \sum_0^n a_\nu z^\nu$$

soddisfa la disuguaglianza

$$|P(z)| \leq A + B|z|^n$$

in Λ_α $(0 < \alpha \leq 2)$, *risulta*

$$|P(z)| \leq e^{\alpha k}[A + (n/k)^{\alpha n} B |z|^n] \tag{1.2}$$

per $z \in A_\alpha$ *qualunque sia* $k > 0$.

DIMOSTRAZIONE. – Basta applicare (1.1) a $f(z) = P(z)$ e tener presente che in questo caso $\sigma \leq 0$.

TEOREMA 2. – *Se il polinomio*

$$P(z) = \sum_0^n a_\nu z^\nu$$

soddisfa le disuguaglianze

$$|P(z)| \leq A + B|z|^n \tag{1.3}$$

---

[1] In questo caso se $f(z) \not\equiv 0$ è $\sigma = 0$.

per $z \in \Lambda_\alpha$ *e* $0 \leq \alpha \leq 1$ *o per* $z \in A_\alpha$ *e* $0 < \alpha \leq 2$, *si ha*

$$(1.4) \qquad |a_k| \leq 2\left(\frac{en}{k}\right)^{\gamma k} A^{1-\frac{k}{n}} B^{\frac{k}{n}} \qquad (\gamma = 2 - \alpha)$$

per $0 < k \leq n$ [2].

DIMOSTRAZIONE. - Supponiamo in primo luogo che si verifica (1.3) in Λ_α $(0 \leq \alpha \leq 1)$. Applicando il corollario 1 a $P(z)$ in A_α e a $P(-z)$ in $A_{2-\alpha}$ e tenendo presente l'osservazione 1 e che $2 - \alpha \geq \alpha$, risulta

$$(1.5) \qquad |P(z)| \leq e^{\gamma k}[A + (n/k)^{\gamma n} B |z|^n]$$

per tutto z.

Pertanto, per le disuguaglianze di CAUCHY,

$$|a_k| \leq \frac{e^{\gamma k}}{r^k}[A + (n/k)^{\gamma n} B r^n]$$

per qualsiasi $r > 0$. Da questo si ottiene (1.4) ponendo

$$r = \left(\frac{k}{n}\right)^\gamma \sqrt[n]{\frac{A}{B}} \text{ [3]}.$$

Nel caso che si verifichi (1.3) in A_α $(0 < \alpha \leq 2)$, e per conseguenza in $\bar{A}_\alpha$, si può procedere nella stessa forma di prima, con la differenza che qui per ottenere (1.4) si deve solo applicare il corollario 1 a $P(-z)$ in $A_{2-\alpha}$ e tener presente l'osservazione 2.

TEOREMA 3. - *Se il polinomio*

$$P(z) = \sum_0^n a_\nu z^\nu$$

soddisfa la disuguaglianza

$$|P(z)| \leq A + B|z|^n \qquad (A + B \neq 0)$$

in Λ_α *per* $0 \leq \alpha \leq 1$ *o in* A_α *per* $0 < \alpha \leq 2$ *e mettiamo*

$$r_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^\gamma \sqrt[n]{\frac{A}{B}} \quad e \quad \gamma = 2 - \alpha,$$

si ha

$$(1.6) \qquad \left|\frac{1}{z^k}\sum_k^n a_\nu z^\nu\right| \leq 2^{k+1}\left(\frac{en}{k}\right)^{\gamma k} A^{1-\frac{k}{n}} B^{\frac{k}{n}}$$

---

(2) $|a_0| \leq A$ e $|a_n| \leq B$.

(3) Si può supporre senza alcun inconveniente che A e B sono differenti da zero.

per $|z| \leq r_0$ *e* $0 < k \leq n$, *e*

$$\left|\frac{1}{z^k}\sum_{0}^{k-1} a_\nu z^\nu\right| \leq 2^{k+2}\left(\frac{en}{k}\right)^{\gamma k} A^{1-\frac{k}{n}} B^{\frac{k}{n}} \tag{1.7}$$

per $|z| \geq r_0$ *e* $0 < k \leq n$.

DIMOSTRAZIONE. - Siccome secondo (1.5) si ha

$$|P(\zeta)| \leq e^{\gamma k}[A + (n/k)^{\gamma n} B(2r)^n]$$

sopra la circonferenza di centro z e raggio $r = |z|$, abbiamo

$$\left|\frac{1}{k!}P^{(k)}(z)\right| \leq \frac{e^{\gamma k}}{r^k}[A + (n/k)^{\gamma n} B(2r)^n]$$

per $|z| = r$, che per il principio del modulo massimo si deduce che vale anche per $|z| \leq r$.

Pertanto, essendo

$$\sum_{k}^{n} a_\nu z^\nu = \frac{1}{(k-1)!}\int_{0}^{z}(z-\zeta)^{k-1}P^{(k)}(\zeta)\,d\zeta,$$

risulta

$$\left|\frac{1}{z^k}\sum_{k}^{n} a_\nu z^\nu\right| \leq \frac{e^{\gamma k}}{r^k}[A + (n/k)^{\gamma n} B(2r)^n]$$

per $|z| \leq r$. Basta prendere qui $r = r_0$ per ottenere (1.6).

Soffermiamoci a provare (1.7). Tenendo presente il risultato precedente e (1.5), si deduce per $|z| = r_0$,

$$\left|\frac{1}{z^k}\sum_{0}^{k-1} a_\nu z^\nu\right| \leq \left|\frac{1}{z^k}\sum_{k}^{n} a_\nu z^\nu\right| + \left|\frac{1}{z^k}\sum_{0}^{n} a_\nu z^\nu\right| \leq$$

$$\leq 2^{k+1}\left(\frac{en}{k}\right)^{\gamma k} A^{1-\frac{k}{n}} B^{\frac{k}{n}} + (2^k + 2^{k-n})\left(\frac{en}{k}\right)^{\gamma k} A^{1-\frac{k}{n}} B^{\frac{k}{n}} \leq 2^{k+2}\left(\frac{en}{k}\right)^{\gamma k} A^{1-\frac{k}{n}} B^{\frac{k}{n}},$$

ossia

$$\left|\frac{1}{z^k}\sum_{0}^{k-1} a_\nu z^\nu\right| \leq 2^{k+2}\left(\frac{en}{k}\right)^{\gamma k} A^{1-\frac{k}{n}} B^{\frac{k}{n}}$$

per $|z| = r_0$. Per terminare basta osservare che questa disuguaglianza è valida anche per $|z| \geq r_0$ per il principio del modulo massimo, dato che

$$\frac{1}{z^k}\sum_{0}^{k-1} a_\nu z^\nu$$

è analitica fuori del circolo $|z| < r_0$, incluso il punto $z = \infty$.

§ 2. - Disuguaglianze per i coefficienti di uno sviluppo asintotico.

TEOREMA 4. - *Sia C un angolo Λ_α di apertura $\alpha\pi \leq \pi$ $(\alpha \geq 0)$ o un angolo A_α di apertura $\alpha\pi \leq 2\pi$. Se $f(z)$ è una funzione complessa definita in C che ammette lo sviluppo asintotico $\sum\limits_0^\infty a_\nu z^\nu$ con limiti M_n in C, si ha*

$$|a_k| \leq 2\left(\frac{en}{k}\right)^{\gamma k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \qquad (\gamma = 2-\alpha) \tag{2.1}$$

per $0 < k \leq n$.

DIMOSTRAZIONE. - Per $k = n$ la disuguaglianza (2.1) è evidente dato che $|a_n| \leq M_n$.

Sia $0 < k < n$. Dato che

$$P(z) = \sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu$$

soddisfa

$$|P(z)| \leq M_0 + M_n |z|^n$$

in C, di (1.4) ne risulta (2.1).

TEOREMA 5. - *Sia $f(z)$ una funzione analitica in un angolo A_α di apertura $\alpha\pi > 2\pi$ sopra la superficie di* RIEMANN *di* $\log z$. *Se $f(z)$ ammette lo sviluppo asintotico $\sum\limits_0^\infty a_\nu z^\nu$ con limiti M_n in A_α, si ha*

$$|a_k| \leq e^2\left(\frac{n}{ek}\right)^{\gamma k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \qquad (\gamma = 2-\alpha) \tag{2.2}$$

per $0 < k \leq n$.

DIMOSTRAZIONE. - Supponiamo che $f(z)$ è limitata in A_α, ossia $M_0 < \infty$, poichè, in caso contrario (2.2) è evidente. Allora, si vede facilmente che

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^t}{t^2} f(zt^{-\delta})dt \qquad (a > 0, \delta = \alpha - 2)$$

è una funzione analitica in A_2 che non dipende da a.

Pertanto, ponendo

$$c_\nu = \frac{a_\nu}{\Gamma(\delta\nu + 2)},$$

avremo

$$g(z) - \sum_0^{n-1} c_\nu z^\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^t}{t^2}\left[f(zt^{-\delta}) - \sum_0^{n-1} a_\nu (zt^{-\delta})^\nu\right] dt,$$

e per conseguenza

$$\left|\frac{g(z) - \sum\limits_0^{n-1} c_\nu z^\nu}{z^n}\right| \leq \frac{e^a}{2a^{\delta n+1}} M_n$$

per ogni $a > 0$, e in particolare

$$\left|\frac{g(z)-\sum_0^{n-1} c_\nu z^\nu}{z^n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{e}{\delta n+1}\right)^{\delta n+1} M_n \leq \frac{e}{2}\left(\frac{e}{\delta n}\right)^{\delta n} M_n \qquad \left(|g(z)| \leq \frac{e}{2} M_0\right)$$

da dove secondo il teorema 4 risulta

$$|a_k| \leq \Gamma(\delta k+2)\,|c_k| \leq \Gamma(\delta k+2)\, e\left(\frac{e}{\delta n}\right)^{\delta k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \leq$$
$$\leq e^2\left(\frac{n}{ek}\right)^{\gamma k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \qquad (\gamma = -\delta),$$

dato che per $x \geq 1$ è

$$\frac{\Gamma(x+2)}{x^x} = x(x+1)\int_0^\infty (e^{-t}t)^x dt < \int_0^\infty (e^{1-t}t)^x dt \leq \int_0^\infty e^{1-t}t\,dt = e$$

e per $0 < x < 1$,

$$\frac{\Gamma(x+2)}{x^x} \leq \frac{1+x}{x^x} < \frac{1+3/4}{(1/2)^{1/2}} = \frac{7}{4}\sqrt{2} < e.$$

OSSERVAZIONE 3. - *Le disuguaglianze* (2.1) *e* (2.2) *sono valide se si suppone che* $f(z)$ *ammette uno sviluppo asintotico finito:* $f(z) = \sum_0^n a_\nu z^\nu + o(z)^n$.

§ 3. - Disuguaglianze per le derivate.

TEOREMA 6. - *Sia* C *un angolo* Λ_α *di apertura* $\alpha\pi \leq \pi$ $(\alpha \geq 0)$ *o un angolo* $\bar{A}_\alpha$ *sopra la superficie di* RIEMANN *di* log.z. *Se* $f(z)$ *è* n *volte derivabile in* C [4], *e*

$$M_\nu = \sup_{z\in C} |f^{(\nu)}(z)| \qquad (0 \leq \nu \leq n),$$

si ha

$$|f^{(k)}(0)| \leq Aq^k\left(\frac{n}{k}\right)^{\gamma k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \qquad (\gamma = 1-\alpha) \tag{3.1}$$

per $0 < k \leq n$, *con*

$$A = \sqrt{\frac{2e}{\varepsilon}} \qquad e \qquad q = e^{2-\alpha+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

per $0 \leq \alpha \leq 2$, *e*

$$A = \sqrt{\frac{e^5}{2\varepsilon}} \qquad e \qquad q = e^{\alpha-2+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

per $\alpha > 2$.

---

(4) Da questo risulta se $C = \bar{A}_\alpha$ che $f(z)$ è analitica in A'_α ma non necessariamente in $\bar{A}_\alpha$. Si può dimostrare che se $f(z)$ è analitica in A_α e continua in $\bar{A}_\alpha$ e se $f^{(n)}(z)$ è limitata in A_α, esistono le derivate $f'(z)$, $f''(z)$ ..., $f^{(n-1)}(z)$ in $\bar{A}_\alpha$ e sono inoltre continue.

DIMOSTRAZIONE. - Effettivamente, essendo per la formula di TAYLOR

$$\left| f(z) - \sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu \right| \leq \frac{M_n}{n!} |z|^n \qquad \left(a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} \right),$$

per i teoremi 4 e 5, che sono applicabili qui secondo l'osservazione 3, e tenendo presente che

$$k! \leq e\, k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k}$$

e

$$n! > \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} > n^n e^{-n},$$

risulta

$$|f^{(k)}(0)| = k!\,|a_k| \leq 2 \left(\frac{\sqrt[k]{k!/k}}{\sqrt[n]{n!/n}} \right)^k e^{(2-\alpha)k} \left(\frac{n}{k} \right)^{(1-\alpha)k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \leq$$

$$\leq 2\, e\, k^{\frac{1}{2}} e^{(2-\alpha)k} \left(\frac{n}{k} \right)^{(1-\alpha)k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{2e}{\varepsilon}}\, e^{(2-\alpha+\varepsilon)k} \left(\frac{n}{k} \right)^{(1-\alpha)k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \qquad (0 < k \leq n)$$

per $0 \leq \alpha \leq 2$, e

$$|f^{(k)}(0)| \leq \sqrt{\frac{e^5}{2\varepsilon}}\, e^{(\alpha-2+\varepsilon)k} \left(\frac{n}{k} \right)^{(1-\alpha)k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \qquad (0 < k \leq n)$$

per $\alpha > 2$.

LEMMA. - *Se* $0 < n_1 \leq n \leq n_2$ *e* $q > 0$, *si verifica*

$$q^{n-n_1} \left(\frac{n_2 - n_1}{n - n_1} \right)^{n-n_1} \leq (1+q)^n \frac{n_1^{n_1 \frac{n_2-n}{n_2-n_1}} n_2^{n_2 \frac{n-n_1}{n_2-n_1}}}{n^n}. \tag{3.2}$$

DIMOSTRAZIONE. - Effettivamente, ponendo $u = n_2/n_1$ risulta

$$q^{n-n_1} \left(\frac{n_2 - n_1}{n - n_1} \right)^{n-n_1} : \frac{n_1^{n_1 \frac{n_2-n}{n_2-n_1}} n_2^{n_2 \frac{n-n_1}{n_2-n_1}}}{n^n} =$$

$$= \frac{n^n q^{n-n_1}}{n_1^{n_1} (n-n_1)^{n-n_1}} \left[\frac{(n_2 - n_1)\, n_1^{\frac{n_1}{n_2-n_1}}}{n_2^{\frac{n_2}{n_2-n_1}}} \right]^{n-n_1} =$$

$$= \frac{n^n q^{n-n_1}}{n_1^{n_1} (n-n_1)^{n-n_1}} \left[(u-1) u^{\frac{u}{1-u}} \right]^{n-n_1} < \frac{n^n q^{n-n_1}}{n_1^{n_1} (n-n_1)^{n-n_1}} \leq$$

$$\leq (1+q)^n,$$

dato che $(u-1) u^{\frac{u}{1-u}} < 1$.

TEOREMA 7. - *Sia* $f(z)$ *una funzione analitica in un angolo* A_α *di apertura*

$\alpha\pi \leq \pi$. *Se poniamo*

$$M_n = \operatorname*{Sup}_{z \in A_\alpha} | f^{(n)}(z) | \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

e

$$B_n = n^{(1-\alpha)n} M_n \qquad (B_0 = M_0),$$

si verifica

$$B_k \leq \sqrt{\frac{2e}{\varepsilon}}\, e^{(2-\alpha+\varepsilon)k}\, B_0^{1-\frac{k}{n}} B_n^{\frac{k}{n}} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{3.3}$$

per $0 \leq k \leq n$, *e*

$$B_n \leq \sqrt{\frac{2e}{\varepsilon}}\, [e^{1+\varepsilon}(e+1)^{1-\alpha}]^n\, B_{n_1}^{\frac{n_2-n}{n_2-n_1}} B_{n_2}^{\frac{n-n_1}{n_2-n_1}} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{3.4}$$

per $n_1 \leq n \leq n_2$.

DIMOSTRAZIONE. - Applicando il teorema 6 a

$$g(z) = f(a + z) \qquad (a \in A_\alpha)$$

in $\bar{A}_\alpha$, risulta

$$k^{(1-\alpha)k} | f^{(k)}(a) | = k^{(1-\alpha)k} | g^{(k)}(0) | \leq \sqrt{\frac{2e}{\varepsilon}}\, e^{(2-\alpha+\varepsilon)k}\, B_0^{1-\frac{k}{n}} B_n^{\frac{k}{n}}$$

per $a \in A_\alpha$ e per conseguenza (3.3).

Per ottenere (3.4) nen c'è che da applicare il risultato precedente a $f^{(n_1)}(z)$ e tener presente (3.2).

TEOREMA 8. - *a) Sia $f(x)$ una funzione n volte derivabile nella retta reale R. Se*

$$M_\nu = \operatorname*{Sup}_{x \in R} | f^{(\nu)}(x) | \qquad (0 \leq \nu \leq n)$$

si verifica

$$M_k \leq \sqrt{\frac{2e}{\varepsilon}}\, e^{(1+\varepsilon)k}\, M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{3.5}$$

per $0 < k \leq n$.

b) Sia $f(x)$ una funzione n volte derivabile nella semi-retta R^+: $x > 0$. Se

$$M_\nu = \operatorname*{Sup}_{x \in R^+} | f^{(\nu)}(x) | \qquad (0 \leq \nu \leq n),$$

si verifica

$$M_k \leq \sqrt{\frac{2e}{\varepsilon}} \left(\frac{e^{2+\varepsilon} n}{k}\right)^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{3.6}$$

per $0 < k \leq n$.

DIMOSTRAZIONE. - Si può procedere nello stesso modo del teorema 7 [5].

---

[5] Le dimostrazioni che abbiamo citato anteriormente di queste disuguaglianze elaborate da GORNY, H. CARTAN e MANDELBROJT, si basano in certe proprietà dei polinomi di TCHEBYCHEFF.

TEOREMA 9. – *Sia $f(z)$ una funzione analitica in un angolo A_α di apertura $\alpha\pi > \pi$ sulla superficie di* RIEMANN *di* log. z. *Se poniamo*

$$M_n = \sup_{z \in A_\alpha} | f^{(n)}(z) | \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

e

$$\gamma(\theta) = 1 - \alpha \quad \textit{per} \quad 0 \leq \theta \leq 2 - \alpha \qquad (\alpha \leq 2)$$

$$\gamma(\theta) = \frac{\theta - \alpha}{2} \quad \textit{per} \quad | \alpha - 2 | \leq \theta \leq \alpha$$

$$\gamma(\theta) = -1 \quad \textit{per} \quad 0 \leq \theta \leq \alpha - 2 \qquad (\alpha \geq 2),$$

si ha

$$| f^{(k)}(z) | \leq \sqrt{\frac{2e}{\varepsilon}}\, e^{(1+\varepsilon)k} \left(\frac{en}{k}\right)^{\gamma(\theta)k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{3.7}$$

per $\theta = \frac{2}{\pi} | \arg. z |$ *e* $0 < k \leq n$.

DIMOSTRAZIONE. – Si deduce dal teorema 6 osservando che z è vertice di un angolo di apertura $[1 - \gamma(\theta)]\pi \leq 2\pi$ contenuto in A_α.

§ 4. – Disuguaglianze per i limiti degli sviluppi asintotici.

TEOREMA 10. – *Sia C un angolo Λ_α di apertura $\alpha\pi \leq \pi$ $(\alpha \geq 0)$ o un angolo A_α di apertura $\alpha\pi \leq 2\pi$. Se $f(z)$ è una funzione complessa definita in C che ammette lo sviluppo asintotico $\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$ con limiti M_n in C, e poniamo*

$$B_n = n^{(2-\alpha)n} M_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

si ha

$$B_k \leq 5\, [2 e^{2-\alpha}]^k\, B_0^{1-\frac{k}{n}} B_n^{\frac{k}{n}} \tag{4.1}$$

per $0 \leq k \leq n$, *e*

$$B_n \leq 5\, [2(e+1)^{2-\alpha}]^n\, B_{n_1}^{\frac{n_2 - n}{n_2 - n_1}} B_{n_2}^{\frac{n - n_1}{n_2 - n_1}} \tag{4.2}$$

per $n_1 \leq n \leq n_2$.

DIMOSTRAZIONE. – Prima proveremo (4.1). Dato che il polinomio $P(z) = \sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu$ soddisfa la disuguaglianza

$$| P(z) | \leq M_0 + M_n | z |^n$$

per $z \in C$, ponendo

$$r_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^\gamma \sqrt[n]{\frac{M_0}{M_n}} \qquad e \qquad \gamma = 2 - \alpha$$

secondo il teorema 3 risulta

$$\left| \frac{1}{z^k} \sum_k^{n-1} a_\nu z^\nu \right| \leq 2^{k+1} \left(\frac{en}{k}\right)^{\gamma k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$$

per $|z| \leq r_0$, e

$$\left|\frac{1}{z^k}\sum_0^{k-1} a_\nu z^\nu\right| \leq 2^{k+2}\left(\frac{en}{k}\right)^{\gamma k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$$

per $|z| \geq r_0$.

Pertanto per $|z| \leq r_0$ si ha

$$\left|\frac{f(z) - \sum_0^{k-1} a_\nu z^\nu}{z^k}\right| \leq \left|\frac{1}{z^k}\sum_k^{n-1} a_\nu z^\nu\right| + M_n |z|^{n-k} \leq$$

$$\leq 2^{k+1}\left(\frac{en}{k}\right)^{\gamma k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} + M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \leq$$

$$\leq 5 \cdot 2^k \left(\frac{e}{k}\right)^{\gamma k} B_0^{1-\frac{k}{n}} B_n^{\frac{k}{n}},$$

e per $|z| \geq r_0$,

$$\left|\frac{f(z) - \sum_0^{k-1} a_\nu z^\nu}{z^k}\right| \leq \frac{M_0}{|z|^k} + \left|\frac{1}{z^k}\sum_0^{k-1} a_\nu z^\nu\right| \leq$$

$$\leq 2^k\left(\frac{n}{k}\right)^{\gamma k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} + 2^{k+2}\left(\frac{en}{k}\right)^{\gamma k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \leq$$

$$\leq 5 \cdot 2^k \left(\frac{e}{k}\right)^{\gamma k} B_0^{1-\frac{k}{n}} B_n^{\frac{k}{n}},$$

da dove si deduce finalmente (4.1).

Per dimostrare (4.2) è sufficiente applicare il risultato precedente a

$$g(z) = \frac{f(z) - \sum_0^{n_1-1} a_\nu z^\nu}{z^{n_1}}$$

e tener presente (3.2).

COROLLARIO 2. - *Sia C un angolo Λ_α di apertura $\alpha\pi \leq \pi$ $(\alpha \geq 0)$ o un angolo A_α di apertura $\alpha\pi \leq 2\pi$. Se $f(z)$ è una funzione complessa che ammette uno sviluppo asintotico $\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$ in C con limiti M_ν tali che*

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\sqrt[\nu]{M_\nu}}{\nu^{\alpha-2}} = 0 \tag{4.3}$$

e $M_n \neq \infty$, risulta $f(z) \equiv \sum_0^n a_\nu z^\nu$.

DIMOSTRAZIONE. - Effettivamente, siccome secondo (4.2) si verifica

$$B_{n+1} \leq 5\,[2(e+1)^{2-\alpha})^{n+1} B_n^{\frac{\nu-n-1}{\nu-n}} B_\nu^{\frac{1}{\nu-n}}$$

per $\nu \geq n+1$ con $B_n \neq \infty$ e per (4.3) si ha

$$\varlimsup_{\nu \to \infty} B_\nu^{\frac{1}{\nu}} = \varlimsup_{\nu \to \infty} \frac{M_\nu^{\frac{1}{\nu}}}{\nu^{\alpha-2}} = 0,$$

risulta $B_{n+1} = 0$ e $M_{n+1} = 0$, e pertanto $f(z) \equiv \sum_0^n a_\nu z^\nu$.

COROLLARIO 3. - *Sia C un angolo Λ_α di apertura $\alpha\pi \leq \pi \; (\alpha \geq 0)$ o un angolo A_α di apertura $\alpha\pi \leq 2\pi$. Se $f(z)$ è una funzione complessa che ammette uno sviluppo asintotico $\sum_0^\infty \alpha_\nu z^\nu$ in C con limiti M_n tali che*

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{M_n}}{n^{\alpha-2}} = \lambda < \infty \tag{4.4}$$

e $M_0 \neq \infty$, si verifica

$$|a_n| \leq 2M_0 \left(\frac{e^\gamma \lambda}{n^\gamma}\right)^n \qquad (\gamma = 2-\alpha;\; n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.5}$$

e si ha $f(z) = \sum_0^\infty a_\nu z^\nu$ per $z \in C$ se $\alpha < 2$ e $f(z) = \sum_0^\infty a_\nu z^\nu$ per $|z| < 1/2\lambda$ e $z \in C$ se $\alpha = 2$ (6).

DIMOSTRAZIONE. - Secondo (2.1) avremo

$$|a_n| \leq 2\left(\frac{e}{n}\right)^{\gamma n} M_0^{1-\frac{n}{\nu}} \left(\frac{\sqrt[\nu]{M_\nu}}{\nu^{\alpha-2}}\right)^n$$

per $\nu \geq n$, da dove risulta, tenendo presente (4.4) e facendo $\nu \to \infty$ di maniera conveniente, che

$$|a_n| \leq 2\, M_0 \left(\frac{e^\gamma \lambda}{n^\gamma}\right)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Applicando (4.1) nello stesso modo, si ottiene

$$M_n \leq 5\, M_0 \left(\frac{2e^\gamma \lambda}{n^\gamma}\right)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.6}$$

Pertanto,

$$\lim_{n \to \infty} \left| f(z) - \sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu \right| \leq \lim_{n \to \infty} M_n \, |z|^n = 0 \qquad (z \in C)$$

per tutto z se $\alpha < 2$ e per $|z| < 1/2\lambda$ se $\alpha = 2$.

---

(6) Si potrà migliorare questo limite? Certamente, se $f(z)$ è analitica in A_2 da questo e (4.5) si deduce che $f(z) = \sum_0^\infty a_\nu z^\nu$ per $|z| < 1/\lambda$ e $z \in C$.

BIBLIOGRAFIA

[1] CARTAN A., *Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives*, « Act. sc. et. ind. » n. 867, 1940.

[2] GORNY A., *Contribution à l'étude des fonctions dérivable d'une variable réele*, « Acta Math », t. 71, 1939.

[3] HEINS M., *On the Phragmén-Lindelöf Principle*, « Trans. Amer. Math. Soc. », t. 60, 1946.

[4] KOLMOGOROFF A., *Une généralisation de l'inégalité de J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées succeesives d'une fonction*, C. R. Acad. Sc., t. 207, 1938.

[5] MANDELBROJT S., *Séries adherentes. Regularisation des suites. Applications*, Gauthiers-Villars, Paris, 1952.

[6] RODRIGUEZ-SALINAS B., *Una desigualdad entre las cotas de las derivadas de una función analítica en un ángulo*, « Las Ciencias », Año XXIII, n. 4, 1958