Sulla approssimabilità dei numeri algebrici mediante numeri razionali.

Memoria di MARCO CUGIANI (a Milano)

A Giovanni Sansone nel suo 70^{mo} compleanno.

Sunto. - *Sfruttando il metodo di* ROTH-SCHNEIDER *si dimostra il seguente teorema:* « *Se* α *è algebrico di grado* $g > 1$ *e se esiste una successione* $\{p_n/q_n\}$ *di numeri razionali* $(0 < q_n \leq q_{n+1})$, *per cui si ha:* $q_n = q'_n \cdot q_n''$, *essendo* $q_n'' = b^{\lambda_n}$, *in modo che risulti* $\log q_n''/\log q_n \geq 1 - \eta - \varphi(q_n) \cdot \omega$ (η *ed* ω *costanti* ≥ 0) *ed inoltre:*

$$|\alpha - p_n/q_n| < q_n^{-(1+\eta+f(q_n))}$$

dove $\varphi(q_n) = (\log\log\log q_n)^{-\frac{1}{2}}$, $f(q_n) = \{(1 + 2\eta)(2g + 1) + \omega + \varepsilon\}\varphi(q_n)$

con $\varepsilon > 0$, *allora sarà:*

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \log q_{n+1}/\log q_n = +\infty\text{ ».}$$

I. - Introduzione - Risultati.

Del risultato ormai classico di K. F. ROTH ([1]), sulla approssimabilità di un numero algebrico mediante razionali, sono state date parecchie varianti. Ricordiamo qui in particolare quella dovuta a TH. SCHNEIDER ([2]) la quale conduce a una proposizione del seguente tenore:

« se α è algebrico di grado $g > 1$ e $\{p_n/q_n\}$ è una successione di numeri razionali, con $(p_n, q_n) = 1$, $q_{n+1} \geq q_n > 0$, i cui denominatori si possano scomporre nella forma: $q_n = q'_n \cdot q''_n$, dove $q''_n = b^{\lambda_n}$ con b intero fisso e λ_n intero; allora, posto

$$\eta = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log q'_n}{\log q_n},$$

e scelto $\mu > 1 + \eta$ e del resto qualunque, esiste al più un numero finito di frazioni p_n/q_n per le quali risulta:

$$|\alpha - p_n/q_n| < q_n^{-\mu}\text{ . »}$$

([1]) Si veda: K. F. ROTH, *Rationa' approximation to algebraic numbers*, « Mathematika », 2 (1955), 1-20.

([2]) Si veda: Th. SCHNEIDER, *Einfürung in die transzendenten Zahlen*, « Grund. Math. Wiss. 81 », Springer, Berlin (1957). Qui si allude al Satz 6, § 5, pag. 13.

Poichè è evidentemente $\eta \leq 1$ in ogni caso, dalla proposizione sopra enunciata viene implicato anche il teorema di ROTH.

Noi vogliamo dare del teorema di ROTH-SCHNEIDER una nuova variante, giungendo a dimostrare il seguente:

TEOREMA. - *Sia α algebrico di grado $g > 1$, sia poi assegnata una successione $\{p_n/q_n\}$, con $q_{n+1} \geq q_n > 0$, $(p_n, q_n) = 1$, tale che i q_n si possano decomporre nel modo seguente:*

$$q_n = q'_n \cdot q''_n, \quad q''_n = b^{\lambda_n}$$

con b e λ_n interi, b fisso, la quale inoltre soddisfaccia le due condizioni:

a) esistano due costanti η ed $\omega (0 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \omega)$ tali che risulti

$$\frac{\log q''_n}{\log q_n} \geq 1 - \eta - \frac{\omega}{(\log \log \log q_n)^{1/2}}; \tag{1}$$

b) esista un $\varepsilon > 0$, abbastanza piccolo, per cui si abbia:

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < q_n^{-(1+\eta+f(q_n))} \tag{2}$$

essendo:

$$f(q_n) = \{(4 + 2\eta)(2g + 1) + \omega + \varepsilon\}/(\log \log \log q_n)^{\frac{1}{2}};$$

risulterà allora:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = +\infty.$$

Da questo teorema si deduce un criterio di trascendenza, in base al quale si può affermare ad esempio che sono trascendenti tutti i numeri α della famiglia:

$$\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu a^{-c^\nu} \tag{3}$$

con a, c interi fissi, $a \geq 2$, $c \geq 2$, essendo i d_ν interi, diversi da zero per infiniti valori di ν, chiamiamoli ν^*, abbastanza fitti perchè la differenza di due successivi ν^* risulti sempre minore di una costante fissa; per ν abbastanza grande sia inoltre:

$$|d_\nu| \leq a^{c^{\nu-1}\left\{1-[\log(\nu-1)]^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right\}}$$

per un $\varepsilon > 0$ fisso.

Arrestandoci infatti al termine n-esimo (in corrispondenza di un $d_n \neq 0$), e ponendo:

$$p_n/q_n = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu a^{-c^\nu},$$

avremo, essendo ovviamente ogni termine non nullo maggiore del doppio di ognuno dei successivi (per ν abbastanza grande):

$$|\alpha - p_n/q_n| = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} d_\nu a^{-c^\nu} < 2d_{n+1}a^{-c^{n+1}}$$

(nell'ultimo membro si può scrivere $n+r$ invece di $n+1$ se risulta $d_{n+1} = d_{n+2} = \dots = d_{n+r-1} = 0$, $d_{n+r} \neq 0$, il che non altera sostanzialmente il ragionamento che segue). Abbiamo ora:

$$2d_{n+1}a^{-c^{n+1}} \leq a^{-\left(c^{n+1} - c^n + \frac{c^n}{(\log n)^{1/2-\varepsilon}} - \log_a 2\right)}$$

ricordando che: $q_n \leq a^{c^n}$, e ponendo:

$$q_n^X = a^{c^{n+1} - c^n + \frac{c^n}{(\log n)^{1/2-\varepsilon}} - \log_a 2}$$

otteniamo

$$X \geq c - 1 + \frac{1}{(\log n)^{1/2-\varepsilon}} + O\left(\frac{1}{c^n}\right)$$

ed essendo $c \geq 2$, ne viene

$$X \geq 1 + \frac{1 + o(1)}{(\log n)^{1/2-\varepsilon}} \tag{4}$$

Qui possiamo prendere $\eta = 0$ ed $\omega = 0$ e la (1) sarà sempre soddisfatta essendo $q_n'' = q_n$, mentre troviamo subito:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} \leq$$

$$\leq \lim \frac{c^{n+1} \log a}{c^{n-1} \log a} = c^2 < +\infty.$$

Ora se α fosse algebrico di grado g, avendosi:

$$\log\log\log q_n = \log n + O(1); \ (\log\log\log q_n)^{\frac{1}{2}} = (\log n)^{\frac{1}{2}} + o(1)$$

non potrebbe essere, a causa della (2), per un K opportuno:

$$X < 1 + \frac{K}{(\log n)^{1/2} + o(1)}$$

in evidente contrasto colla (4) per n abbastanza grande.

Ovviamente il precedente discorso si può applicare con lievi modificazioni più in generale a numeri del tipo:

$$\alpha = \sum \frac{d_\nu}{a^{c^\nu}} x^\nu \tag{3'}$$

per ogni x razionale e colle stesse limitazioni per a, c, d_ν; I numeri α del tipo (3') risultano dunque anch'essi trascendenti.

II. - Due lemmi preliminari.

Per la dimostrazione del nostro teorema ci serviremo di due lemmi che desumiamo dai lavori di ROTH, e di SCHNEIDER, e al cui enunciato dovremo premettere un breve richiamo della nozione di indice di un polinomio in un punto, la quale del resto è ormai classica in questo tipo di ricerche.

Sia $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ un polinomio non identicamente nullo, ed inoltre siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ed $r_1, r_2, \dots, r_m$ due m-ple di numeri reali $(r_i > 0)$. Poniamo:

$$Q(\alpha_1 + y_1, \dots, \alpha_m + y_m) = \Sigma c_{i_1, i_2, \dots, i_m} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_m^{i_m}$$

essendo le y_i nuove variabili. Diremo allora *indice del polinomio P nel punto* $A \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ *in relazione alla* m-pla $r_1, r_2, \dots r_m$, il numero θ, così definito:

$$\theta = \underset{\substack{i_1, i_2, \dots, i_m \\ c_{i_1, i_2, \dots, i_m} \neq 0}}{\operatorname{Min}} \left(\frac{i_1}{r_1} + \frac{i_2}{r_2} + \dots + \frac{i_m}{r_m}\right).$$

Indichiamo poi con:

$$\theta_m(B;\, q_1, q_2, \dots, q_m;\, r_1, r_2, \dots, r_m)$$

(dove gli argomenti sono suscettibili di valori reali positivi e di più i q_i interi) l'estremo superiore degli indici θ nei punti $A\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_m}{q_m}\right)$, mentre variano:

(*a*) la m-pla $p_1, p_2, \dots, p_m$, nella quale ogni numero p_i assumerà tutti i valori interi compatibili colla condizione $(p_i, q_i) = 1$;

b) il polinomio Q, non identicamente nullo, i cui coefficienti, interi, assumeranno tutti i valori compatibili colla condizione che il grado di Q rispetto ad ogni x_i non superi r_i, mentre il valore assoluto dei coefficienti stessi non supera B.

Passiamo ora ad enunciare il: (³)

LEMMA 1°. - *Sia m intero positivo e δ reale, tali che:*

$$0 < \delta < 1/m; \tag{5}$$

$r_1, r_2, \dots, r_m$ *siano numeri interi positivi per i quali si ha:*

$$r_m > 10/\delta \tag{6}$$

$$r_{j-1}/r_j > 1/\delta \qquad j = 2, 3, \dots, m. \tag{7}$$

(³) Si veda: K. F. ROTH, loc. cit. in (¹), Lemma 7, alla pag. 12.

I numeri $q_1, q_2, \dots, q_m$ interi soddisfino alle relazioni:

$$0 < q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m$$

(8) $$\log q_1 > m(2m+1)/\delta$$

(9) $$r_j \log q_j \geq r_1 \log q_1 \qquad (j = 2, 3, \dots, m);$$

allora si ha:

(10) $$\theta_m(q_1^{\delta r_1};\ q_1, q_2 \dots, q_m;\ r_1, r_2, \dots, r_m) < 10^m \delta^{\left(\frac{1}{2}\right)^m}.$$

E passiamo adesso a esporre il [4]:

LEMMA 2°. - *Sia α algebrico di grado g. Fissati un numero reale τ, e un numero m intero, tali che risulti:*

(11) $$0 < \tau < \frac{1}{2} \qquad \tau m^{\frac{1}{2}} - 1 > 2g;$$

allora, comunque si scelga una m-pla di numeri interi positivi $r_1, r_2, \dots, r_m$, si può sempre trovare un polinomio, non identicamente nullo, diciamo $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ a coefficienti razionali interi, colle seguenti proprietà:

a) tutte le derivate:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{i_m} \Phi$$

con

$$\frac{i_1}{r_1} + \frac{i_2}{r_2} + \dots + \frac{i_m}{r_m} \geq m\left(\frac{1}{2} + \tau\right)$$

sono identicamente nulle;

b) l'indice di Φ nel punto $A(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$ in relazione alla m-pla $r_1, r_2, \dots, r_m$ è maggiore di:

$$m\left(\frac{1}{2} - \tau\right);$$

c) esiste una costante γ dipendente solo da α per cui si ha:

$$e^{\gamma(r_1 + r_2 \dots + r_m)} \geq B$$

essendo B il massimo modulo dei coefficienti di Φ.

---

[4] Si veda: Th. SCHNEIDER, op. cit. in [2], § 5, Hilfssatz 11, pag. 26.

III - Determinazione dei parametri.

Prima di procedere alla dimostrazione vera e propria del nostro teorema, dovremo far vedere come i parametri $\tau, m, \delta, r_1, r_2, \ldots, r_m, q_1, \ldots, q_m$ possono essere scelti in guisa che risultino soddisfatte tutte le condizioni poste nei precedenti lemmi, nonchè le altre che verranno qui di seguito indicate e che risulteranno essenziali ai fini della dimostrazione.

Procederemo per assurdo e quindi cominceremo col supporre che contrariamente alla tesi da dimostrare si possa trovare una costante Δ per cui risulti:

$$\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < \Delta$$

per n abbastanza grande, anzi sarà equivalente il supporre, con una eventuale diversa scelta della costante Δ, che tale relazione sia soddisfatta per ogni n. Potremo dunque scrivere:

$$q_{n+1} < q_n^{\Delta}. \tag{12}$$

Poniamo adesso:

$$\delta = e^{-e^m}$$

e decidiamo di chiamare q_1 il primo dei numeri q_i per i quali si ha:

$$\log q_1 \geq e^{2e^m};$$

ponendo esattamente:

$$\log q_1 = ce^{2e^m}$$

risulterà a causa della (12): $1 \leq c < \Delta$, onde potremo scrivere:

$$\log\log\log q_1 = m + O(1); \quad (\log\log\log q_1)^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{2}} + o(1). \tag{13}$$

Con tali posizioni saranno inoltre soddisfatte la (5) e la (8) non appena m è abbastanza grande, e in più potremo fare in modo che risulti:

$$\log q_1 > m\gamma_1/\delta \tag{14}$$

dove:

$$\gamma_1 = \mathrm{Max}(\gamma, \log\{16(1 + |\alpha|)\})$$

essendo γ la costante che figura nel punto c) del lemma 2°.

Scegliamo poi una catena di valori q_i, e li indicheremo con q_j, in modo che risulti:

$$\frac{\log q_j}{\log q_{j-1}} > \frac{2}{\delta} = 2e^{em} \qquad (j = 2, 3, \ldots, m) \tag{15}$$

e scegliamo ciascun q_j in modo che sia il minimo dei q_i che soddisfa alla corrispondente relazione (15).

Ne risulterà allora, per la (12):

$$\log q_j / \log q_{j-1} \leq 2\,\Delta\, e^{em}$$

e si avrà:

$$q_m < q_1^{(2\Delta)^m \cdot e^{mem}},$$

ossia:

$$(\log\log\log q_m)^{\frac{1}{2}} \leq \left(m + \log m + O\left(\frac{1}{m}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{2}} + o(1). \tag{16}$$

Al valore di m prescelto verrà dunque ad essere associata una m-pla di denominatori q_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, in modo che oltre la (5) e la (8) sia soddisfatta la (15); se facciamo ulteriormente aumentare m, e variamo in conseguenza la m-pla dei q_j, queste tre relazioni saranno sempre soddisfatte; la (13), e la (16), valide per $m \to +\infty$, ci permettono poi, aumentando eventualmente ancora m, di fare in modo che, fissato $\sigma > 0$ e posto:

$$\tau = \frac{2g + 1 + \sigma}{(\log\log\log q_m)^{\frac{1}{2}}}$$

risultino soddisfatte anche le relazioni (11), oltre alle seguenti:

$$\delta < 9\sigma\tau < \frac{m\sigma\tau}{4} \tag{17}$$

$$\sigma\tau m > 10^m \cdot \delta^{(1/2)^m} \tag{18}$$

$$\tau(\log\log\log q_j)^{\frac{1}{2}} > 2g + 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{19}$$

$$\frac{1 + \eta + \tau\left(2 + 3\sigma + \dfrac{\omega}{2g+1}\right)}{1 - 2(1+\sigma)\tau} = 1 + \eta + \tau\left(2 + 3\sigma + \frac{\omega}{2g+1}\right) + \tag{20}$$

$$+ 2(1+\eta)(1+\sigma)\tau + O(\tau^2) \leq 1 + \eta + \frac{(4 + 2\eta)(2g+1) + \omega + \varepsilon}{(\log\log\log q_m)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \eta + f(q_m)$$

dove per l'arbitrarietà di σ, anche $\varepsilon > 0$ può essere scelto piccolo a piacere.

Fissato così definitivamente m, e quindi δ, nonchè la m-pla dei q_j, scegliamo un numero naturale r_1 tale che si abbia:

$$r_1 > 10 \log q_m/(\delta \log q_1) \tag{21}$$

e successivamente altri $m-1$ numeri naturali $r_j (j = 2, 3, \dots, m)$, definiti dalle relazioni:

$$r_1 \log q_1/\log q_j \leq r_j < 1 + r_1 \log q_1/\log q_j . \tag{22}$$

Grazie alla (22) anche la (9) sarà soddisfatta e, tenendo conto della (21), sarà soddisfatta anche la (6). Avremo inoltre:

$$\frac{r_j \log q_j}{r_1 \log q_1} < 1 + \frac{\log q_j}{r_1 \log q_1} \leq 1 + \frac{\log q_m}{r_1 \log q_1} < 1 + \frac{\delta}{10}$$

da cui, per la (15), otteniamo:

$$\frac{r_{j-1}}{r_j} > \frac{\log q_j}{\log q_{j-1}}\left(1 + \frac{\delta}{10}\right)^{-1} > \frac{1}{\delta}$$

onde anche la (7) sarà soddisfatta.

IV. - Dimostrazione del teorema.

Fissati così i valori dei parametri m, δ, τ, $q_1, q_2, \dots, q_m, r_1, r_2, \dots, r_m$ in modo che siano soddisfatte tutte le condizioni per la validità dei Lemmi 1° e 2°, costruiamo un polinomio Φ colle proprietà indicate nel lemma 2°.

Il polinomio $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ potrebbe non servire al nostro scopo in quanto potrebbe annullarsi nel punto $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_m}{q_m}\right)$.

Osserviamo allora che per il lemma 2°, comma c), e per la (7), avremo:

$$B \leq e^{\gamma(r_1 + r_2 + \dots + r_m)} < e^{\gamma m r_1}$$

e quindi per la (14):

$$B < q_1^{\delta r_1} . \tag{23}$$

Allora, per la (10) del lemma 1°, e per la (18) avremo:

$$\theta_m < 10^m \delta^{\left(\frac{1}{2}\right)^m} < \sigma \tau m$$

Esiste quindi almeno una m-pla di numeri interi non negativi $i_1, i_2, \dots, i_m$, per cui si ha:

$$\frac{i_1}{r_1} + \frac{i_2}{r_2} + \dots + \frac{i^m}{r_m} < \sigma \tau m \tag{24}$$

e tale che il polinomio corrispondente:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{1}{i_1!\, i_2! \dots i_m!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{i_m} \Phi$$

non si annulla nel punto $A(p_1/q_1, p_2/q_2, \dots, p_m/q_m)$.

Il polinomio $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ avrà coefficienti razionali interi, per il modo stesso con cui è costruito, inoltre detto B_1 il massimo modulo di tali coefficienti, ricordando la limitazione $\binom{n}{k} \leq 2^n$, si vede subito che sarà $B_1 < < 2^{r_1+r_2+\dots+r_m} B$. Il numero:

$$F = \left| F\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_m}{q_m}\right) \right| > 0$$

sarà dunque razionale, ed avremo inoltre che, scritto in forma ridotta, avrà per denominatore un divisore del numero:

$$q_1^{r_1} q_2^{r_2} \dots q_m^{r_m}.$$

Ora abbiamo per (1) e (19):

$$\text{(25)} \qquad \frac{\lambda_j \log b}{\log q_j} \geq 1 - \eta - \frac{\omega}{(\log\log\log q_j)^{\frac{1}{2}}} > 1 - \eta - \frac{\omega\tau}{2g+1} = 1 - \eta - \Omega.$$

In $q_1^{r_1} \cdot q_2^{r_2} \dots q_m^{r_m}$ è contenuto come fattore il numero

$$b^{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \dots + \lambda_m r_m}.$$

D'altra parte, a causa del lemma 2°, comma *a*), ogni termine del polinomio $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ dopo le sostituzioni $x_j \to p_j/q_j (j = 1, 2, \dots, m)$ si trasforma in una frazione il cui denominatore non può contenere un prodotto di potenze:

$$q_1^{i_1} \cdot q_2^{i_2} \dots q_m^{i_m},$$

per cui risulti

$$\frac{i_1}{r_1} + \frac{i_2}{r_2} + \dots + \frac{i_m}{r_m} \geq m\left(\frac{1}{2} + \tau\right).$$

Quindi se scriviamo il denominatore del numero F nella forma:

$$\Pi\, q_j'^{s_j}\, \Pi\, q_j''^{s_j} = Q' \cdot Q'' \qquad (s_j \leq r_j)$$

il fattore Q'' non può superare b^{Λ}, dove:

$$\Lambda = \max_{\left(\Sigma \frac{i_j}{r_j} < m\left(\frac{1}{2} + \tau\right)\right)} i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 + \dots + i_m\lambda_m.$$

Il denominatore di F non può dunque superare la quantità

$$q_1^{r_1}\cdot q_2^{r_2}\dots q_m^{r_m}/b^{\lambda_1 r_1+\lambda_2 r_2+\dots+\lambda_m r_m-\Lambda}.$$

Ora, posto:

$$H=b^{\sum_1^m (r_j-i_j)\lambda_j}$$

al variare di $i_1, i_2, \dots, i_m$, sempre sotto la condizione:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{i_j}{r_j}<m\left(\frac{1}{2}+\tau\right)$$

avremo per la (25) e la (9):

$$H\geq\left\{\prod_{j=1}^{m}q_j^{r_j-i_j}\right\}^{1-\eta-\Omega}\geq q_1^{\left(\Sigma\frac{r_j-i_j}{r_j}\right)(1-\eta-\Omega)r_1}\geq q_1^{m\left(\frac{1}{2}-\tau\right)(1-\eta-\Omega)r_1}$$

e quindi

$$b^{\Sigma\lambda_j r_j-\Lambda}=\operatorname{Min}H\geq q_1^{m\left(\frac{1}{2}-\tau\right)(1-\eta-\Omega)r_1}.$$

Il denominatore di F sarà dunque non maggiore di

$$q_1^{r_1}q_2^{r_2}\dots q_m^{r_m}/q_1^{m\left(\frac{1}{2}-\tau\right)(1-\eta-\Omega)r_1}.$$

Ora a causa di (22) e di (6) possiamo scrivere:

$$\frac{r_j\log q_j}{r_1\log q_1}<1+\frac{1}{r_j-1}\leq 1+\frac{1}{r_m-1}<1+\frac{\delta}{9}$$

e per la (17) avremo anche:

$$r_j\log q_j<(1+\sigma\tau)r_1\log q_1$$

e quindi:

$$q_1^{r_1}\cdot q_2^{r_2}\dots q_m^{r_m}<q_1^{m(1+\sigma\tau)r_1}.$$

Potremo allora scrivere (essendo ovviamente il numeratore di F almeno uguale ad 1):

$$F>q_1^{m\left(\frac{1}{2}-\tau\right)(1-\eta-\Omega)r_1-m(1+\sigma\tau)r_1}>q_1^{-\frac{m}{2}(1+\eta+2(1+\sigma)\tau+\Omega)r_1} \tag{26}$$

Vogliamo adesso trovare un valore approssimato dal di sopra per il numero F.

Pensiamo allo sviluppo di $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ per le potenze di $(x_1-\alpha)$, $(x_2-\alpha), \dots, (x_m-\alpha)$.

A causa del lemma 2°, comma *b*) e della (24) ogni termine di tale sviluppo contiene un fattore

$$(x_1-\alpha)^{h_1}(x_2-\alpha)^{h_2}\dots(x_m-\alpha)^{h_m}$$

per il quale è certamente:

$$\frac{h_1}{r_1}+\frac{h_2}{r_2}+\dots+\frac{h_m}{r_m}>m\left(\frac{1}{2}-(1+\sigma)\tau\right).$$

Ponendo in tale fattore $x_j=p_j/q_j (j=1, 2, \dots, m)$ avremo intanto a causa di (2) e (9):

$$\left|\left(\frac{p_1}{q_1}-\alpha\right)^{h_1}\left(\frac{p_2}{q_2}-\alpha\right)^{h_2}\dots\left(\frac{p_m}{q_m}-\alpha\right)^{h_m}\right|<\prod_{j=1}^{m} q_j^{-h_j\{1+\eta+f(q_j)\}}\leq$$

$$\leq q_1^{-r_1\Sigma(h_j/r_j)\cdot\{1+\eta+f(q_m)\}}<q_1^{-m\left\{\frac{1}{2}-(1+\sigma)\tau\right\}\{1+\eta+f(q_m)\}r_1}.$$

Se indichiamo con K il massimo modulo dei coefficienti dello sviluppo di $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ per le potenze degli $(x_j-\alpha)$ avremo:

$$F<K(r_1+1)(r_2+1)\dots(r_m+1)q_1^{-\frac{m}{2}\{1-2(1+\sigma)\tau\}\{1+\eta+f(q_m)\}r_1}.$$

Per ottenere una maggiorazione di K, ricordiamo ancora la nota relazione $\binom{n}{k}\leq 2^n$, onde, detto ancora B_1 il massimo modulo dei coefficienti di F, e posto $a=1+|\alpha|$, avremo:

$$K<(2a)^{r_1+r_2+\dots+r_m}(r_1+1)(r_2+1)\dots(r_m+1)B_1<$$
$$<(4a)^{r_1+r_2+\dots+r_m}\cdot 2^{r_1+r_2+\dots+r_m}B$$

e quindi per la (23): $K<(8a)^{mr_1}\cdot q^{\delta r_1}$, e infine per la (14):

$$K(r_1+1)(r_2+1)\dots(r_m+1)\leq K2^{mr_1}<q_1^{2\delta r_1}.$$

Giungiamo così, grazie alla (17), alla limitazione:

$$F<q_1^{-\frac{m}{2}(\{1-2(1+\sigma)\tau\}\{1+\eta+f(q_m)\}-\sigma\tau)r_1}. \tag{27}$$

Confrontando la (26) e la (27) otteniamo:

$$1+\eta+2(1+\sigma)\tau+\Omega>\{1-2(1+\sigma)\tau\}\{1+\eta+f(q_m)\}-\sigma\tau,$$

e quindi:

$$1+\eta+f(q_m)<\frac{1+\eta+(2+3\sigma)\tau+\Omega}{1-2(1+\sigma)\tau}=\frac{1+\eta+2\tau+3\sigma\tau+\overline{\frac{\omega\tau}{2g+1}}}{1-2(1+\sigma)\tau}$$

in evidente contrasto colla (20).

Da questa contraddizione risulta provato il teorema proposto.