Teoremi di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti.

Memoria di MARIA CINQUINI-CIBRARIO (a Pavia).

A Giovanni Sansone nel suo 70^mo compleanno.

Sunto. - *Sotto ipotesi molto ampie sono dimostrati alcuni teoremi di unicità e di dipendenza continua dai dati della soluzione del problema di* CAUCHY *(in senso generalizzato) del sistema*

$$(\mathrm{I})\quad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)\left\{\frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} + \sum_{r=1}^{h} \rho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)\frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r}\right\} = f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m), \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

La soluzione è ricercata nel campo funzionale, costituito dai sistemi di funzioni $z_i(x, y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, *che sono definite in un ben determinato campo, sono ivi assolutamente continue in* x *e lipschitziane in* $y_1, \dots, y_h$, *e soddisfano il sistema* (I) *quasi ovunque in tale campo.*

Abbiamo iniziato, recentemente, lo studio dei sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico in più variabili indipendenti [1] e abbiamo dimostrata l'esistenza, l'unicità e la dipendenza continua dai valori iniziali della soluzione, in senso generalizzato, del problema di CAUCHY per un sistema quasi-lineare della forma

$$(\mathrm{a})\quad \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} + \sum_{r=1}^{h} \rho_{ir}[x, y_1, \dots, y_h;\ z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)]\,\frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} = f_i[x, y_1, \dots, y_h;\ z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)], \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

mentre, anteriormente, erano stati dati da altro autore [2] alcuni teoremi di unicità, valevoli sotto ipotesi più generali e in un campo funzionale più ampio, sia per il sistema (a) che per il sistema

$$(\mathrm{b})\quad \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} = f_i\left[x, y_1, \dots, y_h, z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h); \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_h}\right], \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

(1) M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti*, « Ann. di Mat. », (4), XLIV (1957), 357-418. Tale memoria sarà indicata nel seguito con (M).

(2) S. CINQUINI, *Sopra l'unicità della soluzione dei sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine*, « Rendic. Istituto Lombardo », 88 (1955), 960-978. Il § 1 è dedicato ai sistemi non lineari in più di due variabili, il § 2 ai sistemi quasi-lineari.

Nel presente lavoro iniziamo lo studio di sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico in più di due variabili indipendenti di forma più generale del sistema (a); precisamente ci occupiamo qui di teoremi di unicità relativi al sistema (in m funzioni incognite e $h+1$ variabili indipendenti)

$$\text{(I)} \quad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}[(x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)] \left\{ \frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^{h} \rho_{ir}[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)] \frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} \right\} =$$

$$= f_i[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)], \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

La soluzione è ricercata nel campo funzionale costituito dai sistemi di funzioni

$$z_1(x, y_1, \dots, y_h), \qquad z_2(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h),$$

che sono *definite in un ben determinato campo* (che sarà specificato caso per caso), *e sono ivi assolutamente continue in x e lipschitziane in $y_1, \dots, y_h$; un tale sistema di funzioni costituisce nel suo campo di definizione una soluzione in senso generalizzato del sistema* (I), *se le funzioni stesse soddisfano il sistema* (I) *quasi ovunque.*

In questa prima ricerca le funzioni $A_{ij}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(i, j = 1, 2, \dots, m)$, sono supposte continue nel complesso delle variabili, mentre le funzioni $\rho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(i = 1, 2, \dots, m;\ r = 1, 2, \dots, h)$ sono supposte soltanto *quasi-continue in x*, e continue nel complesso delle variabili $y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m$, e infine le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, sono supposte soltanto *quasi-continue in tutto il loro campo di definizione.*

Nel § 1 le funzioni $A_{ij}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $\rho_{ir}(\dots\dots)$, $f_i(\dots\dots)$ $(i, j = 1, 2, \dots, m;$ $r = 1, 2, \dots, h)$, sono supposte definite per x variabile in un intervallo $(0, a_0)$ e per tutti i valori reali di $y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m$. Nel TEOREMA I, *supposte note due soluzioni (in senso generalizzato) del sistema* (I), *definite in nn campo*

$$D_\infty: \quad 0 \leq x \leq a, \qquad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

$(0 < a \leq a_0)$, *si dimostra che, se esse coincidono in un campo limitato (appartenente all'iperpiano $x = 0$), definito dalle*

$$x = 0, \qquad -H_1 \leq y_1 \leq H_1, \dots, -H_h \leq y_h \leq H_h,$$

(dove le H_r sono costanti positive), *coincidono anche in un campo ben determinato T appartenente al campo D_∞. Il risultato del* TEOREMA I permette di provare (TEOREMA II) *l'unicità della soluzione (in senso generalizzato) del sistema* (I), *che è definita in D_∞ e assume valori assegnati per $x = 0$*; si ha così *un teorema di unicità della soluzione del problema di* CAUCHY *(intesa in senso generalizzato) relativo al sistema* (I).

Nel § 2 sono dimostrati due teoremi (TEOREMA III e TEOREMA IV) relativi alla *dipendenza continua della soluzione del problema di* CAUCHY *(in senso generalizzato) dai dati* [3].

I teoremi dei §§ 1 e 2 permettono di provare che, *variando i dati del problema di* CAUCHY *(in senso generalizzato) in un campo limitato dall'iperpiano* $x=0$, *la soluzione può variare in un campo anch'esso limitato appartenente a* D_∞ (cfr. le considerazioni sviluppate nel n. 7)

Nel § 3 si dimostrano sia *un teorema di unicità* (TEOREMA V) *della soluzione del problema di* CAUCHY *(in senso generalizzato)*, sia *un teorema di dipendenza continua della soluzione dai dati* (TEOREMA VI), nel caso, in cui ci si riferisca a *soluzioni definite*, invece che in D_∞, *in un certo campo limitato* T (dello spazio delle variabili $x, y_1, \dots, y_h$), e anche nel caso (cfr. n. 13 *a*)), in cui anche *le funzioni* $A_{ij}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $\rho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots z_m)$, $f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(i, j=1, 2, \dots, m;\ r=1, 2, \dots, h)$ *sono definite in un campo limitato* C_0 dello spazio delle variabili $x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m$.

I risultati ottenuti nel presente lavoro hanno carattere di novità anche nel caso, in cui le variabili indipendenti sono due; il sistema (I) diviene allora

$$(\mathrm{I}')\quad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y, z_1(x, y), \dots, z_m(x, y))\left[\frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x}+\rho_i(x, y; z_1(x, y), \dots, z_m(x, y))\frac{\partial z_j(x, y)}{\partial y}\right]=$$
$$=f_i(x, y; z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)), \qquad (i=1, 2, \dots, m).$$

Qualche osservazione, relativa al sistema (I'), è contenuta nel § 4. Come è ben noto [4], alla forma (I') si può ricondurre un qualunque sistema di equazioni a derivate parziali in due variabili indipendenti, il quale sia di tipo iperbolico.

§ 1. - Teoremi di unicità.

1. Richiamiamo, per comodità, alcune definizioni già date in (*M*) [5].

DEFINIZIONE I. - « *Una funzione* $z_i(x, y_1, \dots, y_h)$, *definita nel campo*

$$D_\infty:\ 0 \le x \le a, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, \quad -\infty < y_h < +\infty,$$

si dice di classe G nel campo stesso, se, per ogni h-pla $(y_1, \dots, y_h)$ *reale fissata, è assolutamente continua in* x *nell'intervallo* $(0, a)$, *e, per ogni* x *fissato di*

---

[3] Si sarebbero potuti dimostrare prima i TEOREMI III e IV e dedurre poi da questi i risultati del § 1; ma si è preferito tenere il cammino inverso, per mettere meglio in evidenza i teoremi di unicità.

[4] Cfr. p. es.: M. CINQUINI-CIBRARIO, *Equazioni non lineari e teoria delle caratteristiche* (in « *Equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali* », C.I.M.E., Varenna, Villa Monastero, 1-10 giugno 1956), Cap. III, § 1, n. 5, p. 116-117, e Cap. IV, § 1, n. 1, p. 140-141.

[5] Cfr. (M), § 2, n. 1, p. 370-371.

$(0,\ a)$, *è lipschitziana nel complesso delle variabili* $y_1, \ldots, y_h$, *con costante di* LIPSCHITZ *indipendente da* x ».

La funzione $z(x, y_1, \ldots, y_h)$ è, evidentemente, *continua nel complesso delle variabili*, inoltre essa è *differenziabile nelle variabili* $y_1, \ldots, y_h$ *in quasi tutto* D_∞ [6].

DEFINIZIONE II. - « *Una funzione* $g\ (X;\ x, y_1, \ldots, y_h)$, *definita nel campo*

$$\Delta_\infty:\ 0 \leq X \leq a, \quad 0 \leq x \leq a, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \ldots, \quad -\infty < y_h < +\infty,$$

si dice di classe $G^{[1]}$ *nel campo stesso, se, per ogni* x *fissato di* $(0,\ a)$ *e ogni* h-pla *reale fissata* $(y_1, \ldots, y_h)$, *è assolutamente continua in* X *in* $(0,\ a)$, *e, per ogni* X *fissato di* $(0,\ a)$, *è di classe* G *nel campo* D_∞.

2. TEOREMA I. - *Le funzioni* $A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_h;\ z_1, \ldots, z_m)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$, *siano definite nel campo*

$$C_\infty:\ 0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \ldots, \quad -\infty < y_h < +\infty;$$
$$-\infty < z_1 < +\infty, \ldots, \quad -\infty < z_m < +\infty,$$

e siano ivi continue nel complesso delle variabili; se A *è il determinante, il cui elemento generico è* A_{ij}, *sia in tutto* C_∞

$$A = 1. \tag{1}$$

Esistano m^2 *funzioni* $\mu_{ij}\ (x)$, *definite nell'intervallo* $(0,\ a_0)$, *ivi quasi-continue, non negative e integrabili* [7], *tali che, per tutte le* $(h+m)$-ple *reali fissate* $(y_1, \ldots, y_h;\ z_1, \ldots, z_m)$, *e per ogni coppia di punti* x', x'' *dell'intervallo* $(0,\ a_0)$ *sia* [8]

$$\begin{aligned} &|A_{ij}(x', y_1, \ldots, y_h;\ z_1, \ldots, z_m) - A_{ij}(x'', y_1, \ldots, y_h;\ z_1, \ldots, z_m)| \leq \\ &\qquad \leq \left| \int_{x'}^{x''} \mu_{ij}(X)dX \right|, \qquad (i,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ m). \end{aligned} \tag{2}$$

Comunque siano i numeri positivi $H_s^{(0)}$, $(s = 1,\ 2, \ldots,\ h)$; $\Omega_l^{(0)}$, $(l = 1,\ 2, \ldots,\ m)$,

---

(6) Infatti per ogni $\bar{x}$ fissato di $(0,\ a)$ la funzione $z(\bar{x}, y_1, \ldots, y_h)$ è lipschitziana in $y_1, \ldots, y_h$, quindi (cfr. H. RADEMACHER, *Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen meherer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale*, « Math. Ann. », 79 (1919), 340-359; cfr. in particolare Parte I, n. 3, TEOREMA I, p. 347) la funzione $z(\bar{x}, y_1, \ldots, y_h)$ è differenziabile in $y_1, \ldots, y_h$ per quasi tutte le h-ple $(y_1, \ldots, y_h)$.

(7) In tutto il lavoro l'integrabilità è intesa nel senso di LEBESGUE.

(8) Dalle (2), tenuto conto della definizione di assoluta continuità, segue che per ogni $(h+m)$-pla reale fissata $(y_1, \ldots, y_h;\ z_1, \ldots, z_m)$ le funzioni $A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_h;\ z_1, \ldots, z_m)$ sono assolutamente continue in x nell'intervallo $(0,\ a_0)$.

esista una costante positiva $\Lambda^{(0)}$, *tale che sia*

$$|A_{ij}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) - A_{ij}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)| \leq \tag{3}$$
$$\leq \Lambda^{(0)} \{ \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s| + \sum_{l=1}^{m} |z_l - \bar{z}_l| \}, \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$

per ogni x *di* $(0, a_0)$ *e per tutte le coppie di* $(h+m)$-ple *reali* $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$, *soddisfacenti le*

$$|y_s| \leq H_s^{(0)}, |\bar{y}_s| \leq H_s^{(0)}, (s = 1, 2, \dots, h); |z_l| \leq \Omega_l^{(0)}, |\bar{z}_l| \leq \Omega_l^{(0)}, \quad (l = 1, 2, \dots, m).$$

Le funzioni $\rho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, h)$, *siano definite nel campo* C_∞, *per ogni* $(h+m)$-pla *reale fissata* $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$ *siano quasi-continue in* x *nell'intervallo* $(0, a_0)$, *e per ogni* x *fissato di* $(0, a_0)$ *siano continue nel complesso delle variabili* $y_1, \dots y_h; z_1, \dots, z_m$; *esistano* $h+1$ *funzioni* $M_r(x)$, $L(x)$, *definite in* $(0, a_0)$, *ivi quasi-continue, non negative e integrabili, tali che, per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$, *sia*

$$|\rho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)| \leq M_r(x) \qquad (i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, h), \tag{4}$$

per tutte le $(h+m)$-ple *reali* $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$,

$$|\rho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) - \rho_{ir}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)| \leq \tag{5}$$
$$\leq L(x) \{ \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s| + \sum_{l=1}^{m} |z_l - \bar{z}_l| \}, \qquad (i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, h),$$

per tutte le coppie di $(h+m)$-ple *reali* $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}_1, \dots \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$. *Le funzioni* $f_i(x, y_1, \dots y_h; z_1, \dots, z_m)$ *siano definite nel campo* C_∞ *e siano ivi quasi continue; comunque siano le costanti* $H_r^{(0)} (r = 1, 2, \dots, h)$, $\Omega_l^{(0)}$, $(l = 1, 2, \dots, m)$, *esistano* $m+1$ *funzioni* $N_i^{(0)}(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L_1^{(0)}(x)$, *definite in* $(0, a_0)$, *ivi quasi-continue, non negative e integrabili, tali che, per quasi tutte le* h-ple $(y_1, \dots, y_h)$ *soddisfacenti le* $|y_r| \leq H_r^{(0)}$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, *sia per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$

$$|f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)| \leq N_i^{(0)}(x), \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{6}$$

per tutte le m-ple *reali* $(z_1, \dots, z_m)$, *soddisfacenti le* $|z_l| \leq \Omega_l^{(0)}$, $(l = 1, 2, \dots, m)$;

$$|f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) - f_i(x, y_1, \dots, y_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)| \leq \tag{7}$$
$$\leq L_1^{(0)}(x) \sum_{l=1}^{m} |z_l - \bar{z}_l|, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le coppie di m-ple *reali* $(z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ *soddisfacenti le* $|z_l| \leq \Omega_l^{(0)}$, $|\bar{z}_l| \leq \Omega_l^{(0)}$, $(l = 1, 2, \dots, m)$.

In queste ipotesi siano

(8) $$z_1 = z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m = z_m(x, y_1, \dots, y_h)$$

(8*) $$z_1 = z_1^*(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m = z_m^*(x, y_1, \dots, y_h),$$

due sistemi di funzioni, definite nel campo

$$D_\infty: \quad 0 \leq x \leq a, \qquad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, \qquad -\infty < y_h < +\infty$$

(con $0 < a \leq a_0$), ivi di classe G, e soddisfacenti in quasi tutto D_∞ rispettivamente le

(I) $$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)] \left\{ \frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^{h} \rho_{ir}[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)] \frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} \right\} =$$

$$= f_i[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)], \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

(I*) $$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}[x, y_1, \dots, y_h; z_1^*(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m^*(x, y_1, \dots, y_h)] \left\{ \frac{\partial z_j^*(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^{h} \rho_{ir}[x, y_1, \dots, y_h; z_1^*(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m^*(x, y_1, \dots, y_h)] \frac{\partial z_j^*(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} \right\} =$$

$$= f_i[x, y_1, \dots, y_h; z_1^*(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m^*(x, y_1, \dots, y_h)], \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Sia

(9) $$z_i(0, y_1, \dots, y_h) = z_i^*(0, y_1, \dots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

identicamente per

$$|y_r| \leq H_r, \qquad (r = 1, 2, \dots, h),$$

dove le H_r sono costanti positive; allora è anche

(10) $$z_i(x, y_1, \dots, y_h) = z_i^*(x, y_1, \dots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

identicamente in tutto il campo

$$T: \quad 0 \leq x \leq a_1, \ -H_r + \int_0^x M_r(X)dX \leq y_r \leq H_r - \int_0^x M_r(X)dX, \quad (r = 1, 2, \dots, h),$$

dove a_1 è il più piccolo dei numeri a, α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_h$, essendo α_r il minimo valore di x per cui $\int_0^x M_r(X)dX = H_r$, se $\int_0^{a_0} M_r(X)dX \geq H_r$, e altrimenti essendo $\alpha_r = a_0$».

a) Risolvendo le (I) rispetto alle

$$\frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} \qquad (j = 1, 2, \dots, m),$$

si trova subito che in quasi tutto D_∞ è

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial z_j(x, y_1, \ldots, y_h)}{\partial x} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}[x, y_1, \ldots, y_h; z_1(x, y_1, \ldots, y_h), \ldots, z_m(x, y_1, \ldots, y_h)] \Big\{ f_i[\ldots\ldots] -$$

$$- \sum_{l=1}^{m} A_{il}[\ldots\ldots] \sum_{r=1}^{h} \rho_{lr}[\ldots\ldots] \frac{\partial z_l(x, y_1, \ldots, y_h)}{\partial y_r} \Big\}, \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

dove $\alpha_{ij}(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m)$ è il complemento algebrico di $A_{ij}(x, y_1, \ldots, z_h; z_1 \ldots, z_m)$ nel determinante A, e si tiene conto della (1). Per le ipotesi fatte esistono $2m$ costanti K_i, K_i^*, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, tali che per ogni x di $(0, a)$ e per tutte le coppie di h-ple reali $(y_1, \ldots, y_h)$, $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_h)$ sia

$$\text{(11)} \qquad | z_i(x, y_1, \ldots, y_h) - z_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_h) | \leq K_i \sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s |, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\text{(11*)} \qquad | z_i^*(x, y_1, \ldots, y_h) - z_i^*(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_h) | \leq K_i^* \sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s |, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

b) Nello spazio delle variabili $x, y_1, \ldots, y_h$ si consideri il campo

$$R: \quad 0 \leq x \leq a, \qquad -H_r \leq y_r \leq H_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots, h);$$

evidentemente il campo T appartiene al campo R.

Nel campo chiuso limitato R le funzioni $z_i(x, y_1, \ldots, y_h)$; $z_i^*(x, y_1, \ldots, y_h)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sono limitate; sia Ω una costante tale che in tutto R sia

$$\text{(12)} \qquad | z_i(x, y_1, \ldots, y_h) | \leq \Omega; \quad | z_i^*(x, y_1, \ldots, y_h) | \leq \Omega, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Nello spazio delle variabili $x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m$ si consideri il campo chiuso limitato

$$C_R: \ 0 \leq x \leq a, \ -H_r \leq y_r \leq H_r, \ (r = 1, 2, \ldots, h); \ -\Omega \leq z_i \leq \Omega, \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

In tale campo le funzioni $A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m)$ sono limitate; precisamente sia in tutto C_R

$$\text{(13)} \qquad | A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m) | \leq \mu, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

dove μ è una costante. Ne segue che in tutto C_R è anche

$$\text{(13')} \qquad | \alpha_{ij}(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m) | \leq \mu^{[1]}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

dove si è posto [9]

$$\mu^{[1]} = \mu^{m-1}(m-1)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Inoltre per le ipotesi fatte esiste una costante, che indicheremo con Λ, tale che se $(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ sono due punti di C_R, è

$$(14) \qquad |A_{ij}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) - A_{ij}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)| \leq$$
$$\leq \Lambda \left\{ \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s| + \sum_{l=1}^{m} |z_l - \bar{z}_l| \right\}.$$

Per le ipotesi fatte circa le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, esistono $m+1$ funzioni $N_i(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L^{[1]}(x)$, definite in $(0, a_0)$, ivi quasi continue, non negative e integrabili, tali che per quasi tutte le h-ple $(y_1, \dots, y_h)$, soddisfacenti le

$$|y_r| \leq H_r, \qquad (r = 1, 2, \dots, h)$$

sia per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$

$$(6') \qquad |f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)| \leq N_i(x), \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le m-ple reali $(z_1, \dots, z_m)$ con $|z_l| \leq \Omega$, $(l = 1, 2, \dots, m)$, e

$$(7') \qquad |f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) - f_i(x, y_1, \dots, y_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)| \leq$$
$$\leq L^{[1]}(x) \sum_{l=1}^{m} |z_l - \bar{z}_l|,$$

per tutte le coppie di m-ple reali $(z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ con $|z_l| \leq \Omega$, $|\bar{z}_l| \leq \Omega$, $(l = 1, 2, \dots, m)$.

Dalle (II), tenuto conto delle (4), (6'), (11), (13), (13'), segue che in quasi tutto R è

$$(15) \qquad \left|\frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x}\right| \leq \mu^{[1]}[m\mu K M(x) + N(x)], \qquad (j = 1, 2, \dots, m),$$

avendo posto

$$(16) \quad K = \sum_{l=1}^{m} K_l; \qquad (17) \quad M(x) = \sum_{r=1}^{h} M_r(x); \qquad (18) \quad N(x) = \sum_{l=1}^{m} N_l(x).$$

Analogamente si trova che in quasi tutto R è

$$(15^*) \qquad \left|\frac{\partial z_j^*(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x}\right| \leq \mu^{[1]}[m\mu K^* M(x) + N(x)], \qquad (j = 1, 2, \dots, m),$$

dove

$$(16^*) \qquad K^* = \sum_{l=1}^{m} K^*.$$

---

(9) Si applica qui la nota disuguaglianza di HADAMARD; cfr. p. es. la dimostrazione di L. TONELLI, *Sul teorema di* HADAMARD *relativo al valor maggiorante di un determinante.* « Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. XLVII, 212-218.

La (15) per quasi tutte le h-ple $(y_1, \dots, y_h)$ con $|y_r| \leq H_r$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, vale per quasi tutti gli x di $(0, a)$; quindi per quasi tutte le h-ple $(y_1, \dots, y_h)$ con $|y_r| \leq H_r$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, comunque siano x', x'' in $(0, a)$ è

$$(19) \qquad |z_j(x', y_1, \dots, y_h) - z_j(x'', y_1, \dots, y_h)| \leq$$
$$\leq \mu^{[1]} \left| \int_{x'}^{x''} [m\mu K M(X) + N(X)] dX \right|, \qquad (j = 1, 2, \dots, m),$$

e poichè il secondo membro della (19) non dipende da $y_1, \dots, y_h$, e il primo membro è funzione continua di $y_1, \dots, y_h$, segue che la (19) vale, comunque siano i punti $(x', y_1, \dots, y_h)$, $(x'', y_1, \dots, y_h)$ del campo R.

Tenuto conto delle (2), (11), (14), (16), (19) si verifica subito che ([10])

$$(20) \qquad |A_{ij}(x', y_s; z_l(x', y_s)) - A_{ij}(x'', y_s; z_l(x'', y_s))| \leq$$
$$\leq \left| \int_{x'}^{x''} [\mu_{ij}(X) + m\mu^{[1]}\Lambda(m\mu K M(X) + N(X))] dX \right|, \quad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$

comunque siano i punti $(x', y_1, \dots, y_h)$, $(x'', y_1, \dots, y_h)$ del campo R, e

$$(21) \qquad |A_{ij}(x, y_s; z_l(x, y_s)) - A_{ij}(x, \bar{y}_s; z_l(x, \bar{y}_s))| \leq$$
$$\leq \Lambda(1 + K) \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s|, \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$

comunque siano i punti $(x, y_1, \dots, y_h)$, $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$ del campo R.

c) Sia $(x, y_1, \dots, y_h)$, un punto *fissato* del campo D_∞, e sia i uno, *fissato*, tra i numeri $1, 2, \dots, m$; ragionando come in (M) (cfr. ivi § 2, n. 2, I, *b*), p. 373-374) si introduca il sistema di funzioni

$$g_{i1}(X; x, y_1, \dots, y_h), \quad g_{i2}(X; x, y_1, \dots, y_h), \dots, \quad g_{ih}(X; x, y_1, \dots, y_h),$$

definite nel campo

$$\Delta_\infty: 0 \leq X \leq a, \quad 0 \leq x \leq a, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, \quad -\infty < y_h < +\infty,$$

e ivi di classe $G^{[1]}$, soddisfacenti il sistema di equazioni differenziali, scritte sotto forma integrale ([11])

$$(22) \qquad g_{ir}(X; x, y_1, \dots, y_h) = y_r -$$
$$- \int_X^x \rho_{ir}[t, g_{is}(t; x, y_1, \dots, y_h); z_l(t, g_{is}(t; x, y_1, \dots, y_h))] dt, \qquad (r = 1, 2, \dots, h).$$

([10]) Qui e in seguito scriveremo spesso per brevità $z_i(x, y_s)$ invece di $z_i(x, y_1, \dots, y_h)$, $A_{ij}(x, y_s; z_l)$ invece di $A_{ij}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$; analogamente nel seguito scriveremo $\rho_{ir}(x, y_s; z_l)$, $f_i(x, y_s; z_l)$ invece di $\rho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$.

([11]) Per le (22) cfr. (M), § 2, n. 2, (IV), p. 372.

Si supponga che il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartenga al campo T; si verifica facilmente che per $0 \leq X \leq x$ è [12]

$$-H_r + \int_0^X H_r(t)dt \leq g_{ir}(X;\ x,\ y_1, \dots, y_h) \leq H_r - \int_0^X M_r(t)dt, \tag{23}$$
$$(r = 1,\ 2, \dots,\ h),$$

e quindi, in particolare

$$|\, g_{ir}(X;\ x,\ y_1, \dots, y_h) \,| \leq H_r, \qquad (r = 1,\ 2, \dots,\ h), \tag{24}$$

per $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartenente al campo T e $0 \leq X \leq x$.

d) Si indichino, provvisoriamente, con X, $Y_1, \dots, Y_h$ le coordinate correnti; si considerino in tali coordinate la i-esima equazione (I) e la i-esima equazione (I*), e in esse si ponga

$$Y_r = g_{ir}(X;\ x,\ y_1 \dots, y_h), \qquad (r = 1,\ 2, \dots,\ h). \tag{25}$$

Si ottengono così le

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}[X,\ g_{is}(X;\ x,\ y_1, \dots, y_h);\ z_l(X,\ g_{is}(X;\ x,\ y_1, \dots, y_h))] \times \tag{26}$$
$$\times \left\{ \frac{\partial z_j(X,\ g_{is}(X;\ x,\ y_1, \dots, y_h))}{\partial X} + \sum_{r=1}^{h} \rho_{ir}[\dots\dots] \frac{\partial z_j(X,\ g_{is}(X;\ x,\ y_1, \dots y_h))}{\partial Y_r} \right\} = f_i[\dots\dots],$$

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}[X,\ g_{is}(X;\ x,\ y_1, \dots, y_h);\ z_l^*(X,\ g_{is}(X;\ x,\ y_1, \dots, y_h))] \times \tag{26*}$$
$$\times \left\{ \frac{\partial z_j^*(X,\ g_{is}(X;\ x, y_1, \dots, y_h))}{\partial X} + \sum_{r=1}^{h} \rho_{ir}[\dots\dots] \frac{\partial z_j^*(X,\ g_{is}(X;\ x, y_1, \dots, y_h))}{\partial Y_r} \right\} = f_i[\dots\dots].$$

---

[12] Infatti dalle (4), supposto $0 \leq X \leq x$, segue

$$|\, g_{ir}(X;\ x,\ y_1, \dots, y_h) - y_r \,| \leq \int_X^x M_r(t)dt, \qquad (r = 1,\ 2, \dots,\ h),$$

cioè

$$y_r - \int_X^x M_r(t)dt \leq g_{ir}(X;\ x,\ y_1, \dots, y_h) \leq y_r + \int_X^x M_r(t)dt, \qquad (r = 1,\ 2, \dots,\ h),$$

e poichè (cfr. la definizione del campo T)

$$-H_r + \int_0^x M_r(t)dt \leq y_r \leq H_r - \int_0^x M_r(t)dt, \qquad (r = 1,\ 2, \dots,\ h),$$

si ottiene

$$-H_r + \int_0^X M_r(t)dt \leq g_{ir}(X;\ x,\ y_1, \dots, y_h) \leq H_r - \int_0^X M_r(t)dt, \qquad (r = 1,\ 2, \dots,\ h),$$

per ogni X tale che $0 \leq X \leq x$.

Per ogni x fissato di $(0, a)$, per quasi tutte le h-ple reali $(y_1, \ldots, y_h)$ le (26) e (26*) valgono per quasi tutti gli X di $(0, a)$ [13].

Si ponga

$$(27) \qquad u_i(x, y_1, \ldots, y_h) = z_i(x, y_1, \ldots, y_h) - z_i^*(x, y_1, \ldots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Dalle (26) e (26*) sottraendo si ottiene in modo evidente

$$(28) \sum_{j=1}^{m} A_{ij}[X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h); z_l(X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h))] \left\{ \frac{\partial u_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h))}{\partial X} + \right.$$
$$\left. + \sum_{r=1}^{h} \rho_{ir}[X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h); z_l(X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h))] \frac{\partial u_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h))}{\partial Y_r} \right\} =$$
$$= c_i[X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h)],$$

avendo posto

$$(29) \qquad c_i(X, Y_s) = - \sum_{j=1}^{m} \left\{ A_{ij}[X, Y_s; z_l(X, Y_s)] - A_{ij}[X, Y_s; z_l^*(X, Y_s)] \right\} \frac{\partial z_j^*(X, Y_s)}{\partial X} -$$
$$- \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{h} \left\{ A_{ij}[X, Y_s; z_l(X, Y_s)] \rho_{ir}[X, Y_s; z_l(X, Y_s)] - \right.$$
$$\left. - A_{ij}[X, Y_s; z_l^*(X, Y_s)] \rho_{ir}[X, Y_s; z_l^*(X, Y_s)] \right\} \frac{\partial z_j^*(X, Y_s)}{\partial Y_r} +$$
$$+ \left\{ f_i[X, Y_s; z_l(X, Y_s)] - f_i[X, Y_s; z_l^*(X, Y_s)] \right\}.$$

Anche la (28), per ogni x fissato, per quasi tutte le h-ple reali $(y_1, \ldots, y_h)$ vale per quasi tutti gli X di $(0, a)$.

e) Supposto che il punto $(x, y_1, \ldots, y_h)$ appartenga al campo T, e che sia $0 \leq X \leq x$, valgono le (24), e quindi, tenuto conto delle (12) è anche

$$(30) \qquad |z_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h))| \leq \Omega; \; |z_j^*(X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h))| \leq \Omega,$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

Allora per ogni x fissato di $(0, a_1)$, per quasi tutte le h-ple $(y_1, \ldots, y_h)$ tali che il punto $(x, y_1, \ldots, y_h)$ appartenga al campo T, le (15), (15*) (nelle quali si ponga X al posto di x e $g_{i1}(X; x, y_1, \ldots, y_h), \ldots, g_{ih}(X; x, y_1, \ldots, y_h)$ al posto di $y_1, \ldots, y_h$), valgono per quasi tutti gli X di $(0, x)$ [14]. Tenuto conto

---

[13] Per la corrispondenza biunivoca che, per ogni x fissato di $(0, a)$, le

$$X = X, \; Y_r = g_{ir}(X; x, y_1, \ldots, y_h), \qquad (r = 1, 2, \ldots, h),$$

pongono fra i campi

$$0 \leq X \leq a, \; -\infty < y_1 < +\infty, \ldots, -\infty < y_h < +\infty;$$
$$0 \leq X \leq a, \; -\infty < Y_1 < +\infty, \ldots, -\infty < Y_h < +\infty,$$

cfr. (M), § 2, n. 2, I, d), e), p. 374-376.

[14] Cfr. la precedente nota [12].

anche delle (4), (6'), (11), (11*) e (13), ne segue che entrambi i membri della (28) sono integrabili rispetto a X tra 0 e x; integrando si ottiene

$$(31)\quad \int_0^x \sum_{j=1}^m A_{ij}[X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h); z_l(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))] \Big\{ \frac{\partial u_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))}{\partial X} +$$

$$+ \sum_{r=1}^h \rho_{ir}[X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h); z_l(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))] \frac{\partial u_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))}{\partial Y_r} \Big\} dX =$$

$$= \int_0^x c_i(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h)) dX.$$

La (31), per ogni x fissato dell'intervallo $(0, a_1)$, vale per quasi tutte le h-ple $(y_1, \dots, y_h)$, tali che il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartenga al campo T.

Se $(x, y_1, \dots, y_h)$ è un punto del campo T, e se X', X'' sono due punti dell'intervallo $(0, x)$, dalle (11), (19) e (22), tenuto conto anche delle (4), (17), (24), si ottiene

$$(32)\quad | z_j(X', g_{is}(X'; x, y_1, \dots, y_h)) - z_j(X'', g_{is}(X''; x, y_1, \dots, y_h)) | \leq$$

$$\leq \left| \int_{X'}^{X''} [\mu_1(m\mu K M(X) + N(X)) + K_j M(X)] dX \right|, \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Dalle (32) e dalla definizione di funzione assolutamente continua segue che le funzioni $z_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))$, $(j = 1, 2, \dots, m)$, sono funzioni assolutamente continue di X nell'intervallo $(0, x)$; la stessa proprietà vale, evidentemente, per le funzioni

$$z_j^*(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h)), \quad u_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h)), \qquad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Allora, ragionando come in (M), § 2, n. 2, I, e), p. 375-376, si trova che, per ogni x fissato, per quasi tutte le h-ple $(y_1, \dots, y_h)$, tali che il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartenga al campo T, è, per quasi tutti gli X di $(0, x)$

$$(33)\quad \frac{du_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))}{dX} = \frac{\partial u_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))}{\partial X} +$$

$$+ \sum_{r=1}^h \rho_{ir}[X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h); z_l(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))] \frac{\partial u_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))}{\partial Y_r},$$

$$(j = 1, 2, \dots, m).$$

La (31) si può dunque scrivere

$$(34)\quad \sum_{j=1}^m \int_0^x A_{ij}[X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h); z_l(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))] \frac{du_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))}{dX} dX =$$

$$= \int_0^x c_i(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h)) dX,$$

e la (34), per ogni x fissato di $(0, a_1)$, vale per quasi tutte le h-ple $(y_1, \dots, y_h)$, tali che il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartenga al campo T.

f) Se $(x, y_1, \dots, y_h)$ è un *punto fissato* del campo T, le

$$A_{ij}[X,\ g_{is}(X;\ x,\ y_1, \dots, y_h);\ z_l(X,\ g_{is}(X;\ x,\ y_1, \dots, y_h))], \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

sono funzioni assolutamente continue di X nell'intervallo $(0, x)$; se infatti X', X'' sono due punti di $(0, x)$, dalle (19), (20), (21), (22), tenuto conto anche delle (4), (17) e (24), si ottiene

$$(35)\qquad \Big| A_{ij}[X',\ g_{is}(X',\ x,\ y_1, \dots, y_h);\ z_l(X', g_{is}(X';\ x,\ y_1, \dots y_h))] -$$
$$- A_{ij}[X'',\ g_{is}(X'';\ x,\ y_1, \dots, y_h);\ z_l(X'',\ g_{is}(X'';\ x,\ y_1, \dots, y_h))]\Big| \leq$$
$$\leq \left| \int_{X'}^{X''} [\mu_{ij}(X) + m\mu^{[1]}\Lambda(m\mu K M(X) + N(X)) + \Lambda(1+K)M(X)]dX \right|,$$
$$(i, j = 1, 2, \dots, m),$$

e il risultato segue dalla definizione di assoluta continuità.

Allora negli integrali, che compaiono a secondo membro della (34), si può integrare per parti, e poichè per le (9) e (27) è

$$(36)\qquad u_j(0,\ y_1, \dots, y_h) = 0, \qquad (j = 1, 2, \dots, m),$$

è quindi anche

$$(36')\qquad u_j(0,\ g_{is}(0;\ x,\ y_1, \dots, y_h)) = 0, \qquad (j = 1, 2, \dots, m),$$

e inoltre dalle (22) segue

$$(37)\qquad g_{ir}(x;\ x,\ y_1, \dots, y_h) = y_h, \qquad (r = 1, 2, \dots, h),$$

si ottiene

$$(38)\qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}[x,\ y_s;\ z_l(x,\ y_s)]\, u_j(x,\ y_1, \dots, y_h) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \int_0^x \frac{dA_{ij}[X. g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h); z_l(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))]}{dX} u_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))dX +$$
$$+ \int_0^x c_i(X,\ g_{is}(X;\ x,\ y_1, \dots, y_h))dX.$$

Anche la (38), per ogni x fissato di $(0, a_1)$, vale per quasi tutte le h-ple $(y_1, \dots, y_h)$, tali che il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartenga al campo T.

g) Nella (38) si facciano assumere successivamente all'indice i i valori $1, 2, \dots, m$; si ottiene così un sistema lineare nelle incognite $u_j(x, y_1, \dots, y_h)$,

$(j=1, 2, \ldots, m)$, il cui determinante A è uguale a 1 (cfr. la (1)); risolvendo rispetto alle $u_j(x, y_1, \ldots, y_h)$, $(j=1, 2, \ldots, m)$, si ottengono le

$$(39)\qquad u_j(x, y_1, \ldots, y_h) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}[x, y_s; z_l(x, y_s)] \times$$

$$\times \left\{ \int_0^x \left[\sum_{\nu=1}^{m} \frac{dA_{i\nu}[X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h); z_l(X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h))]}{dX} u_\nu(X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + c_i(X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h)) \right] dX \right\}, \qquad (j=1, 2, \ldots, m).$$

Per ogni punto x fissato nell'intervallo $(0, a_1)$ le (39) valgono per quasi tutte le h-ple $(y_1, \ldots, y_h)$, tali che il punto $(x, y_1, \ldots, y_h)$ appartenga al campo T.

h) Cerchiamo ora di maggiorare il secondo membro della (39); dalla (35) segue che per ogni punto $(x, y_1, \ldots, y_h)$ fissato del campo T è

$$(40)\qquad \left| \frac{dA_{ij}[X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h); z_l(X, g_{is}(X; x, y_1, \ldots, y_h))]}{dX} \right| \leq$$

$$\leq \mu_{ij}(X) + m\mu^{[1]}\Lambda(m\mu KM(X) + N(X)) + \Lambda(1+K)M(X), \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

per quasi tutti gli X di $(0, x)$ [15].

---

[15] Circa la disuguaglianza (40) rileviamo che *se* $\varphi(X)$ *è una funzione definita in un intervallo* $(0, \alpha)$, *e se comunque siano* X', X'' *in* $(0, \alpha)$, *è*

$$(a)\qquad |\varphi(X') - \varphi(X'')| \leq \left| \int_{X'}^{X''} v(t)dt \right|,$$

dove $v(X)$ *è una funzione definita in* $(0, \alpha)$, *ivi quasi-continua, non negativa e integrabile, la funzione* $\varphi(X)$ *è assolutamente continua in* $(0, \alpha)$, *ed ammette in quasi tutto* $(0, \alpha)$ *derivata* $\varphi'(X)$, *la quale in quasi tutto* $(0, \alpha)$ *soddisfa la*

$$(b)\qquad |\varphi'(X)| \leq v(X).$$

Che $\varphi(X)$ sia assolutamente continua in $(0, \alpha)$ segue dalla definizione di assoluta continuità e dalla (a); posto poi

$$(c)\qquad U(X) = \int_0^X v(t)dt,$$

in quasi tutto $(0, \alpha)$ esistono finite le derivate $\varphi'(X)$ ed $U'(X)$ ed è

$$(d)\qquad U'(X) = v(X).$$

Sia dunque X un punto di $(0, \alpha)$, nel quale esistono finite le derivate $\varphi'(X)$, $U'(X)$ e vale la (d), e sia $X+h$ un altro punto di $(0, \alpha)$; tenuto conto della (a) è

$$|\varphi(X+h) - \varphi(X)| \leq \left| \int_X^{X+h} v(t)dt \right|.$$

Tenuto conto delle (4), (5), (7'), (11*), (13), (14), (15*), (16*), (27), (29), segue che per quasi tutti i punti $(X, Y_1, \dots, Y_h)$ del campo

$$0 \leq X \leq a, \qquad |Y_s| \leq H_s, \qquad (s = 1, 2, \dots, h),$$

è

$$|c_i(X, Y_s)| \leq [m\mu^{[1]}\Lambda(m\mu K^* M(X) + N(X)) + \Lambda K^* M(X) + \\ + h\mu K L(X) + L_1(X)] \sum_{l=1}^{m} u_l(X, Y_s). \tag{41}$$

Posto

$$\begin{cases} S(X) = m\mu^{[1]}\Lambda(m\mu K M(X) + N(X)) + \Lambda(1 + K)M(X) \\ S_1(X) = m\mu^{[1]}\Lambda(m\mu K^* M(X) + N(X)) + \Lambda K^* M(X) + h\mu K L(X) + L_1(X), \end{cases}$$

dalle (39), tenuto conto anche della (13'), seguono le

$$|u_j(x, y_1, \dots, y_h)| \leq \mu^{[1]} \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \int_0^x [\mu_{il}(X) + S(X) + \\ + S_1(X)] \, |u_l(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))| \, dX, \qquad (j = 1, 2, \dots, m). \tag{42}$$

Le disuguaglianze (42) per ogni x fissato di $(0, a_1)$ valgono per quasi tutte le h-ple $(y_1, \dots, y_h)$, tali che il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartenga al campo T.

l) Le funzioni $u_i(x, y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, sono continue nel campo T; si indichi con $U(x)$ il limite superiore di

$$\sum_{i=1}^{m} |u_i(\bar{x}, y_1, \dots, y_h)|$$

nel campo chiuso

$$T(x): \quad 0 \leq \bar{x} \leq x, \quad -H_r + \int_0^{\bar{x}} M_r(t)dt \leq y_r \leq H_r - \int_0^{\bar{x}} M_r(t)dt, \qquad (r = 1, 2, \dots, h).$$

La funzione $U(x)$ è limitata, non negativa e non decrescente nell'intervallo $(0, a_1)$. Dalle (42) segue, evidentemente

$$|u_j(x, y_1, \dots, y_h)| \leq \mu^{[1]} \int_0^x \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \mu_{il}(X) + mS(X) + mS_1(X) \right) U(X) dX, \\ (j = 1, 2, \dots, m). \tag{43}$$

Dividendo per $|h|$ e tenendo conto della (c), si trova

$$\left| \frac{\varphi(X+h) - \varphi(X)}{h} \right| \leq \left| \frac{U(X+h) - U(X)}{h} \right|,$$

e al limite per h tendente a zero

$$|\varphi'(X)| \leq v(X),$$

cioè la (b), che dunque vale in quasi tutto $(0, \alpha)$.

Il primo membro di ognuna delle (43) è continuo in tutto il campo T; il secondo membro non dipende da $y_1, y_2, \ldots, y_h$; ne segue che le (43) valgono in tutto il campo T.

Sommando le m disuguaglianze (43), ottenute per $j = 1, 2, \ldots, m$, risulta

$$(44) \qquad \sum_{j=1}^{m} |u_j(x, y_1, \ldots, y_h)| \leq m\mu^{[1]} \int_0^x \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \mu_{il}(X) + mS(X) + mS_1(X) \right) U(X) dX;$$

la (44) vale in tutto il campo T.

Tenendo conto del modo nel quale è stata definita la funzione $U(x)$, segue che in tutto l'intervallo $(0, a_1)$ è anche

$$(45) \qquad U(x) \leq m\mu^{[1]} \int_0^x \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \mu_{il}(X) + mS(X) + mS_1(X) \right) U(X) dX.$$

Una semplice estensione del LEMMA di GRONWALL [16] assicura allora che in tutto $(0, a_1)$ è

$$(46) \qquad U(x) = 0.$$

Quindi in tutto T è

$$(47) \qquad u_i(x, y_1, \ldots, y_h) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Dalle (27) segue allora che in tutto T valgono le (10) e il TEOREMA I è dimostrato.

3. OSSERVAZIONE. - Il campo T, nel quale il TEOREMA I assicura la coincidenza delle soluzioni (8) e (8*) del sistema (I), è determinato sia dalle costanti H_r, $(r = 1, 2, \ldots, h)$, le quali definiscono il campo

$$-H_r \leq y_r \leq H_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots, h),$$

dell'iperpiano $x = 0$, in cui è identicamente

$$(9) \qquad z_i(0, y_1, \ldots, y_h) = z_i^*(0, y_1, \ldots, y_h),$$

sia dalle funzioni $M_r(x)$, $(r = 1, 2, \ldots, h)$, per le quali sono soddisfatte le (4).

Le costanti H_r, $(r = 1, 2, \ldots, h)$ siano fissate; esistano h funzioni $M_r^{[1]}(x)$, $(r = 1, 2, \ldots, h)$, definite in $(0, a_0)$, ivi quasi continue, non negative e integrabili, soddisfacenti, per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$, le

$$(48) \qquad M_r^{[1]}(x) \leq M_r(x), \qquad (r = 1, 2, \ldots, h),$$

$$(4^{[1]}) \qquad |\rho_{ir}(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m)| \leq M_r^{[1]}(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; r = 1, 2, \ldots, h),$$

---

(16) Cfr. G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, «Monografie matematiche del C.N.R.», Edizioni Cremonese, Roma 1956, Cap. I, § 2, n. 1, p. 15-16. Si vede subito che nel caso attuale il LEMMA di GRONWALL si può applicare, senza preoccuparsi se la funzione $U(x)$ (certo limitata, non negativa e quasi-continua in $(0, a_1)$), sia inoltre continua oppure no in $(0, a_1)$.

per tutte le $(h+m)$-ple reali $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$. Sia $a_1^{[1]}$ il più piccolo tra i numeri $a, \alpha_1', \dots, \alpha_h'$, dove α_r' è il minimo valore di x per cui

$$\int_0^x M_r^{[1]}(X)dX = H_r,$$

se

$$\int_0^{a_0} M_r^{[1]}(X)dX \geq H_r,$$

e altrimenti $\alpha'_r = a_0$; si consideri il campo

$$T^{[1]}: \quad 0 \leq x \leq a_1^{[1]}, \quad -H_r + \int_0^x M_r^{[1]}(X)dX \leq y_r \leq H_r - \int_0^x M_r^{[1]}(X)dX, \quad (r = 1, 2, \dots, h).$$

Evidentemente il campo T, definito nell'enunciato del TEOREMA I, appartiene al campo $T^{[1]}$. Sostituendo, nell'enunciato del TEOREMA I alle (4) le $(4^{[1]})$, si trova che le

$$(10) \qquad z_i(x, y_1, \dots, y_h) = z_i^*(x, y_1, \dots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

sono soddisfatte identicamente in tutto il campo $T^{[1]}$, che, in generale, è più ampio del campo T.

Quindi, se le costanti H_r, $(r = 1, 2, \dots, h)$ sono fissate, cioè se è fissato, nell'iperpiano $x = 0$, il campo in cui valgono le (9) (e cioè coincidono le due soluzioni (8) e (8*) del sistema (I), intese in senso generalizzato), una scelta opportuna delle funzioni $M_r^{[1]}(x)$, per le quali valgono le $(4^{[1]})$, può permettere di provare la coincidenza delle due soluzioni (8) e (8*) del sistema (I) in un campo più ampio $T^{[1]}$ (appartenente sempre al campo D_∞).

4. TEOREMA II - « *Valgano tutte le ipotesi del* TEOREMA I, *e inoltre le*

$$(9) \qquad z_i(0, y_1, \dots, y_h) = z_i^*(0, y_1, \dots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

siano soddisfatte identicamente in $y_1, \dots, y_h$. *Allora in tutto il campo* D_∞, *nel quale sono definite le soluzioni* (8) *e* (8*) *del sistema* (I) (*intese in senso generalizzato*), *è identicamente*

$$(10) \qquad z_i(x, y_1, \dots, y_h) = z_i^*(x, y_1, \dots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Quindi, se $\Phi_i(y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, *sono funzioni assegnate, definite per tutti i valori reali di* $y_1, \dots, y_h$, *e lipschitziane in* $y_1, \dots, y_h$, *non può esistere più di un sistema di funzioni* (8), *definite in un campo*

$$D_\infty: \quad 0 \leq x \leq a, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

(*con* $0 < a \leq a_0$), *ivi di classe* G, *soddisfacenti le* (I) *in quasi tutto* D_∞ *e soddisfacenti le*

$$(49) \qquad z_i(0, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

identicamente in $y_1, \dots, y_h$ ».

Il TEOREMA II *costituisce un teorema di unicità della soluzione del problema di* CAUCHY, *inteso in senso generalizzato, relativo al sistema* (I), *quando la varietà portante i dati sia l'iperpiano* $x = 0$.

La dimostrazione del TEOREMA II è immediata. Si osservi, in primo luogo, che nelle ipotesi del TEOREMA I (cfr. l'enunciato di tale teorema, in fine), se è

$$(50) \qquad \int_0^{a_0} M_r(X)dX < H_r, \qquad (r = 1, 2, \dots, h),$$

è certamente $\alpha_r = a_0$, e quindi $a_1 = a$.

In secondo luogo sia $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_h^{(0)})$ un punto qualunque, appartenente al campo D_∞; si scelgano i numeri positivi H_r, $(r = 1, 2, \dots, h)$ abbastanza grandi perchè oltre alle (50) valgano le

$$(50') \qquad \int_0^{x^{(0)}} M_r(X)dX + |y_r^{(0)}| \leq H_r, \qquad (r = 1, 2, \dots, h),$$

dalle quali seguono le

$$-H_r + \int_0^{x^{(0)}} M_r(X)dX \leq y_r^{(0)} \leq H_r - \int_0^{x^{(0)}} M_r(X)dX, \qquad (r = 1, 2, \dots, h).$$

Allora il punto $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_h^{(0)})$ appartiene al campo T (definito nell'enunciato del TEOREMA I), e, poichè nelle ipotesi attuali le (9) sono soddisfatte identicamente in $y_1, \dots, y_h$, e quindi, in particolare, per $|y_r| \leq H_r$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, segue che le (10) sono soddisfatte identicamente in T, e, in particolare che è

$$z_i(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_h^{(0)}) = z_i^*(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_h^{(0)}), \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

e poichè il punto $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_h^{(0)})$ è un punto qualsiasi del campo D_∞, il TEOREMA II è dimostrato.

5. OSSERVAZIONI. *a*) Se per quasi tutte le h-ple reali $(y_1, \dots, y_h)$, per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$, le (6') valgono per tutte le m-ple reali $(z_1, \dots, z_m)$, e le (7') per tutte le coppie di m-ple reali $(z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$, e se inoltre le (13) (e quindi le (13')) e le (14) sono soddisfatte in tutto il campo C_∞, le (15), (15*) valgono in quasi tutto il campo D_∞, le (19) e (20) valgono comunque siano i punti $(x', y_1, \dots, y_h)$, $(x'', y_1, \dots, y_h)$ in D_∞, e le (21), comunque siano i punti $(x, y_1, \dots, y_h)$, $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$ in D_∞.

b) Nelle ipotesi particolari fatte in *a*) il TEOREMA II può essere dimostrato direttamente, in modo indipendente dal TEOREMA I. Supposto infatti che $(x, y_1, \dots, y_h)$ sia un punto fissato qualsiasi del campo D_∞, basta riprendere in modo opportuno le considerazioni del n. 2, capoversi *c*), *d*), *e*), *f*), *g*), *h*); si giunge così a provare che le (39) e (42), nelle attuali ipotesi, per ogni

x fissato dell'intervallo $(0, a)$, valgono per quasi tutte le h-ple reali $(y_1, \dots, y_h)$.

Dalle (19) e dalle analoghe per le funzioni $z_i^*(x, y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, segue

$$(51) \qquad |z_i(x, y_1, \dots, y_h) - z_i(0, y_1, \dots, y_h)| \leq \mu^{[1]} \int_0^x [m\mu K M(X) + N(X)] dX, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(51^*) \qquad |z_i^*(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^*(0, y_1, \dots, y_h)| \leq \mu^{[1]} \int_0^x [m\mu K^* M(X) + N(X)] dX, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

in ogni punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ del campo D_∞. Poichè nelle ipotesi del TEOREMA II le (9) valgono identicamente in $y_1, \dots, y_h$, e si è posto

$$(27) \qquad u_i(x, y_1, \dots, y_h) = z_i(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^*(x, y_1, \dots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

è, evidentemente

$$(51') \qquad |u_i(x, y_1, \dots, y_h)| \leq \mu^{[1]} \int_0^x [m\mu(K + K^*) M(X) + 2N(X)] dX \leq$$

$$\leq \mu^{[1]} \int_0^a [m\mu(K + K^*) M(X) + 2N(X)] dX, \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Le funzioni $u_i(x, y_1, \dots, y_h)$ sono dunque limitate nel campo D_∞; se si indica con $U(x)$ il limite superiore di

$$\sum_{i=1}^m u_i(\bar{x}, y_1, \dots, y_h)$$

nel campo

$$0 \leq \bar{x} \leq x, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, \quad -\infty < y_h < +\infty,$$

e si ragiona come nel n. 2, l), si trova che le (43), (44), (47) valgono in tutto D_∞, e ne riesce provato direttamente il TEOREMA II.

c) Il TEOREMA I e l'OSSERVAZIONE del n. 3 valgono, in particolare, per il sistema

$$(a) \qquad \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} +$$

$$+ \sum_{r=1}^h \rho_{ir}[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)] \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} =$$

$$= f_i[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)], \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

studiato nella nostra precedente memoria (M) [17].

Il TEOREMA II estende le ipotesi del teorema di unicità dato in (M) [18].

---

[17] Il TEOREMA I non è stato dato in (M); quindi tale teorema e l'OSSERVAZIONE del n. 3 hanno interesse anche per il sistema (a).

[18] Cfr. (M), § 3, n. 2, TEOREMA IV, p. 402-403; in tale teorema sono fatte ipotesi notevolmente più restrittive delle attuali circa le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$.

§ 2. - Dipendenza continua della soluzione del problema di Cauchy (in senso generalizzato) dai valori iniziali.

6. Teorema III - « *Valgano tutte le ipotesi del* Teorema I, *tranne la* (9); *sia T il campo definito nel* Teorema I. *Allora, dato un numero positivo* ε, *si può determinare un numero positivo* σ *tale che, se è*

$$(52)\qquad |z_i(0, y_1, \dots, y_h) - z_i^*(0, y_1, \dots, y_h)| \leq \sigma, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per

$$|y_r| \leq H_r, \qquad (r = 1, 2, \dots, h),$$

è anche

$$(53)\qquad |z_i(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^*(x, y_1, \dots, y_h)| \leq \varepsilon, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

in tutto il campo T ».

Si riprendano le stesse disuguaglianze e gli stessi calcoli, sviluppati nella dimostrazione del Teorema I (cfr. § 1, n. 2, capoversi *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*)), fino a giungere alla (34), nella quale, al solito, si è posto

$$(27)\qquad u_i(x, y_1, \dots, y_h) = z_i(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^*(x, y_1, \dots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Dalla (34), integrando per parti, si ottengono, nelle ipotesi attuali, le

$$(54)\qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}[x, y_s; z_l(x, y_s)]u_j(x, y_s) -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} A_{ij}[0, g_{is}(0; x, y_1, \dots, y_h); z_l(0, g_{is}(0; x, y_1, \dots, y_h))]u_j(0, g_{is}(0; x, y_1, \dots, y_h)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_0^x \frac{dA_{ij}[X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h); z_l(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))]}{dX} u_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))dX +$$

$$+ \int_0^x c_i(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))dX, \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Risolvendo le equazioni (54) rispetto alle $u_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, u_m(x, y_1, \dots, y_h)$, si ottengono le

$$(55)\qquad u_j(x, y_1, \dots, y_h) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}[x, y_s, z_l(x, y_s)] \times$$

$$\times \Big\{ \sum_{\nu=1}^{m} A_{i\nu}[0, g_{is}(0; x, y_1, \dots, y_h); z_l(0, g_{is}(0, x, y_1, \dots, y_h))]u_\nu(0, g_{is}(0; x, y_1, \dots, y_h)) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{m} \int_0^x \frac{dA_{i\nu}[X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h); z_l(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))]}{dX} u_\nu(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))dX +$$

$$+ \int_0^x c_i(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))dX \Big\}, \qquad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Con le stesse considerazioni, mediante le quali nella dimostrazione del TEOREMA I (cfr. § 1, n. 2, h)) si è passati dalle (39) alle disuguaglianze (42), mantenendo le stesse notazioni, dalle (55) si ottengono le disuguaglianze

$$(56)\qquad |u_j(x, y_1, \dots, y_h)| \leq \mu\mu^{[1]} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} |u_\nu(0, g_{is}(0; x, y_1, \dots, y_h))| +$$
$$+ \mu_1 \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} \int_0^x (\mu_{i\nu}(X) + S(X) + S^{[1]}(X)) \, |u_\nu(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))| \, dX,$$
$$(j = 1, 2, \dots, m).$$

Queste disuguaglianze, per ogni x fissato, valgono per quasi tutte le h-ple reali $(y_1, \dots, y_h)$, tali che il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartenga al campo T. Seguendo un procedimento del tutto simile a quello tenuto nel § 1, n. 2, l), si indichi con $V(x)$ il limite superiore di

$$\sum_{i=1}^{m} |u_i(\bar{x}, y_1, \dots, y_h)|$$

nel campo

$$T(x): \quad 0 \leq \bar{x} \leq x, \quad -H_r + \int_0^{\bar{x}} M_r(X)dX \leq y_r \leq H_r - \int_0^{\bar{x}} M_r(X)dX,$$
$$(r = 1, 2, \dots, h).$$

Per le (27) e (52) è

$$(57)\qquad V(0) \leq m\sigma.$$

La funzione $V(x)$ è limitata, non negativa e non decrescente nell'intervallo $(0, a_1)$; dalle (56) e (57) segue che *in tutto il campo* T è

$$(58)\qquad |u_j(x, y_1, \dots, y_h)| \leq m^2\mu\mu^{[1]}\sigma + \mu^{[1]} \int_0^x \Big(\sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} \mu_{i\nu}(X) +$$
$$+ mS(X) + mS^{[1]}(X) \Big) V(X)dX, \qquad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Sommando le m disuguaglianze (58), si ottiene

$$(59)\qquad \sum_{j=1}^{m} |u_j(x, y_1, \dots, y_h)| \leq m^3\mu\mu^{[1]}\sigma + m\mu^{[1]} \int_0^x S^{[2]}(X) V(X)dX,$$

dove si è posto, per brevità

$$(60)\qquad S^{[2]}(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} \mu_{i\nu}(X) + mS(X) + mS^{[1]}(X).$$

Dalle (59) tenendo conto del modo, nel quale è stata definita la funzione $V(x)$, segue che in tutto l'intervallo $(0, a_1)$ è

$$(61)\qquad V(x) \leq m^3\mu\mu^{[1]}\sigma + m\mu^{[1]} \int_0^x S^{[2]}(X) V(X) \, dX,$$

dalla quale, applicando l'estensione del LEMMA di GRONWALL citata nella nota ([15]), segue che in tutto l'intervallo $(0, a_1)$ è

$$V(x) \leq m^3 \mu\mu^{[1]}\sigma e^{m\mu^{[1]}\int_0^x S^{[2]}(X)dX} \tag{62}$$

Dalle (58), tenuto conto della (62), segue allora che in tutto il campo T valgono le

$$\begin{aligned} |u_j(x, y_1, \dots, y_h)| &\leq m^2\mu\mu^{[1]}\sigma e^{m\mu^{[1]}\int_0^x S^{[2]}(X)dX} \leq \\ &\leq m^2\mu\mu^{[1]}\sigma e^{m\mu^{[1]}\int_0^{a_1} S^{[2]}(X)dX} \qquad (j = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \tag{63}$$

e la (53) è soddisfatta in tutto il campo T, quando nella (52) si scelga

$$\sigma < \frac{\varepsilon}{m^2\mu\mu^{[1]}} e^{-m\mu^{[1]}\int_0^{a_1} S^{[2]}(X)dX}. \tag{64}$$

7. Il TEOREMA III mette in evidenza *la dipendenza continua dai dati della soluzione del problema di* CAUCHY *(in senso generalizzato), relativo al sistema* (I); ciò è messo anche maggiormente in luce dalle considerazioni, che seguono.

Siano $\Phi_i(y_1, \dots, y_h)$, $\Phi_i^*(y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ due m-ple di funzioni, definite per tutti i valori reali delle variabili $y_1, \dots, y_h$, e lipschitziane nel complesso delle variabili; *sia*

$$\Phi_i(y_1, \dots, y_h) = \Phi_i^*(y_1, \dots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{65}$$

identicamente in tutti i punti (dello spazio delle variabili $y_1, \dots, y_h$) *che non sono interni al campo*

$$\delta: \quad -H_1 \leq y_1 \leq H_1, \quad -H_2 \leq y_2 \leq H_2, \dots, \quad -H_h \leq y_h \leq H_h,$$

dove le costanti H_r sono numeri reali positivi.

Se le (8), (8*) costituiscono due soluzioni (in senso generalizzato) del sistema (I), definite nel campo

$$D_\infty: \quad 0 \leq x \leq a, \ -\infty < y_1 < +\infty, \ -\infty < y_2 < +\infty, \dots, \ -\infty < y_h < +\infty,$$

e ivi di classe G, e se è

$$z_i(0, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{49}$$

$$z_i^*(0, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i^*(y_1, \dots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{49*}$$

identicamente in $y_1, \dots, y_h$, nel campo T, definito nel TEOREMA I, le due soluzioni (8) e (8*) possono essere distinte (e il TEOREMA III e, in particolare, le formule (62) e (63) permettono di limitare superiormente i valori $|z_i(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^*(x, y_1, \dots, y_h)|$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, quando siano limitati superiormente i valori $|\Phi_i(y_1, \dots, y_h) - \Phi_i^*(y_1, \dots, y_h)|$, $(i = 1, 2, \dots, m)$).

Si consideri poi il campo τ, definito dalle disuguaglianze

$$\tau:\ 0 \leq x \leq a, \quad -H_r - \int_0^x M_r(X)dX \leq y_r \leq H_r + \int_0^x M_r(X)dX, \qquad (r = 1, 2, \ldots, h).$$

Si vede immediatamente che il campo T appartiene al campo τ. Dal TEOREMA I segue poi subito che *nei punti del campo D_∞, non appartenenti al campo τ. è certamente* [19]

(10) $$z_i(x, y_1, \ldots, y_h) = z_i^*(x, y_1, \ldots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Le (10), per ragione di continuità, valgono poi anche in quei punti della frontiera del campo τ, che non sono interni al campo δ e neppure alla intersezione del campo τ con l'iperpiano $x = a$.

In conclusione, se noi supponiamo di avere risolto il problema di CAUCHY (in senso generalizzato) relativo al sistema (I), quando la varietà portante i dati sia l'iperpiano $x = 0$, le considerazioni del presente numero mettono in luce *quale influenza possa avere sulla soluzione di tale problema il mutare i dati iniziali in un campo limitato dell'iperpiano $x = 0$; precisamente se i valori iniziali vengono mutati nei punti interni al campo δ, nei punti esterni al campo τ la soluzione resta invariata.*

8. OSSERVAZIONE. Analogamente a quanto abbiamo rilevato nel § 1, n. 3, il campo T dipende, oltre che dalle costanti H_r, $(r = 1, 2, \ldots, h)$, anche dalle funzioni $M_r(x)$, $(r = 1, 2, \ldots, h)$; se, fissate le costanti H_r, esistono h funzioni $M_r^{[1]}(x)$, $(r = 1, 2, \ldots, h)$, definite in $(0, a_0)$, ivi quasi-continue, non negative

---

(19) Evidentemente se le (9) valgono, invece che nel campo δ, nel campo (dello spazio delle variabili $y_1, \ldots, y_h$)

$$\delta':\ b_r \leq y_r \leq b_r', \qquad (r = 1, 2, \ldots, h),$$

(dove le b_r, b_r' sono numeri reali arbitrarii), il TEOREMA I assicura che le (10) valgono nel campo

$$T':\ 0 \leq x \leq a_1',\ b_r + \int_0^x M_r(X)dX \leq y_r \leq b_r' - \int_0^x M(X)dX, \qquad (r = 1, 2, \ldots, h),$$

dove a_1' è il minore fra i numeri a, $\xi_1, \ldots, \xi_h$, essendo ξ_r il minimo valore di x, per cui

$$\int_0^x M_r(X)dX = \frac{b_r' - b_r}{2}, \qquad \text{se} \qquad \int_0^x M_r(X)dX \geq \frac{b_r' - b_r}{2},$$

e altrimenti essendo $\xi_r = a_0$.

Allora, se $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_h^{(0)})$ è un punto appartenente al campo D_∞ ed esterno al campo τ, si possono sempre determinare due h-ple di numeri $b_1, \ldots, b_h$; $b_1', \ldots, b_h'$, in modo che il punto $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_h^{(0)})$ sia interno al corrispondente campo T', e nessun punto del campo T' sia interno al campo τ.

È pure evidente che anche il TEOREMA II è valido, quando ai campi δ e T si sostituiscono i campi δ' e T'; così restano valide le considerazioni del presente n. 7.

e integrabili, soddisfacenti per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ le (48) e $(4^{[1]})$, allora le (53) valgono in tutto il campo $T^{[1]}$, che può essere più ampio del campo T.

Ripetendo poi le considerazioni del n. 7, il campo τ viene sostituito dal campo

$$\tau^{[1]}: \quad 0 \leq x \leq a, \quad -H_r - \int_0^x M_r^{[1]}(X)dX \leq y_r \leq H_r + \int_0^x M_r^{[1]}(X)dX,$$
$$(r = 1, 2, \dots, h),$$

e tale campo appartiene al campo τ.

Quindi, fissate le costanti H_r, cioè il campo δ dell'iperpiano $x = 0$, una scelta opportuna delle funzioni $M_r^{[1]}(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, può permettere di ampliare sia il campo T, nel quale sappiamo limitare superiormente i valori $| z_i(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^*(x, y_1, \dots, y_h) |$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, sia il campo, costituito dai punti del campo D_∞ esterni al campo $\tau^{[1]}$, nel quale valgono le (10).

9. Il teorema, che dimostreremo nel presente numero, *non è del tutto analogo* al TEOREMA II di unicità, dimostrato nel § 1, n. **4**; esso vale nelle ipotesi introdotte nel § 1, n. **5**, *a*) e *b*), alquanto più restrittive di quelle del TEOREMA I.

TEOREMA IV - « *Valgano le ipotesi del* TEOREMA I, *tranne la* (9); *inoltre esistano due costanti* μ *e* Λ, *tali che sia*

$$(13) \qquad | A_{ij}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) | \leq \mu, \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$

in ogni punto $(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$ *del campo* C_∞,

$$(14) \qquad | A_{ij}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) - A_{ij}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) | \leq$$
$$\leq \Lambda \left\{ \sum_{r=1}^{h} | y_r - \bar{y}_r | + \sum_{l=1}^{m} | z_l - \bar{z}_l | \right\}, \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$

per ogni x *di* $(0, a_0)$ *e per tutte le coppie di* $(h + m)$*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ [20].

Esistano $m + 1$ *funzioni* $N_i(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L_1(x)$, *definite in* $(0, a_0)$, *ivi quasi continue, non negative e integrabili, tali che per quasi tutte le* h*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h)$, *sia, per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$

$$(6') \qquad | f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) | \leq N_i(x), \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le m*-ple reali* $(z_1, \dots, z_m)$,

$$(7') \qquad | f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) - f_i(x, y_1, \dots, y_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) | \leq$$
$$\leq L_1(x) \sum_{l=1}^{m} | z_l - \bar{z}_l |, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le coppie di m*-ple reali* $(z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ [21].

---

[20] L'ipotesi (14) include la (3).

[21] Le ipotesi attuali (6'), (7') includono le (6) e (7).

Allora dato un numero reale positivo ε *arbitrario, si può determinare un numero reale positivo* σ, *tale che, quando sia*

$$|z_i(0, y_1, \dots, y_h) - z_i^*(0, y_1, \dots, y_h)| < \sigma, \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{52}$$

per tutte le h-ple reali $(y_1, \dots, y_h)$, *sia anche*

$$|z_i(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^*(x, y_1, \dots, y_h)| < \varepsilon, \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{53}$$

in tutto il campo D_∞ ».

Riprendendo le considerazioni sviluppate sia nel § 1, n. 5, *b*), sia nella dimostrazione del TEOREMA III, si trova che le (56), per ogni x fissato di $(0, a)$, valgono per tutte le h-ple reali $(y_1, \dots, y_h)$. Ragionando come nel § 1, n. 5, *b*), dalle (51) e (51*), tenuto conto delle (27) e (52), si ottengono le

$$|u_i(x, y_1, \dots, y_h)| \leq \sigma + \mu^{[1]}\int_0^x [m\mu(K + K^*)M(X) + 2N(X)]dX \leq \tag{66}$$

$$\leq \sigma + \mu^{[1]}\int_0^a [m\mu(K + K^*)M(X) + 2N(X)]dX, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

le quali valgono in tutto il campo D_∞.

Le funzioni $u_i(x, y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, sono dunque limitate nel campo D_∞; indicato con $V(x)$ il limite superiore di

$$\sum_{i=1}^{m} |u_i(\bar{x}, y_1, \dots, y_h)|$$

nel campo

$$0 \leq \bar{x} \leq x, \qquad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

si verifica subito che valgono le (58)-(63), e precisamente che le (58), (59), (63) sono verificate in tutto D_∞, e le (61), (62) in tutto $(0, a)$. Scelto quindi σ in modo da soddisfare la (64), se per tutte le h-ple reali vale la (52), in tutto D_∞ vale la (53).

Il TEOREMA IV mette in evidenza *la dipendenza continua dai dati della soluzione del problema di* CAUCHY (*in senso generalizzato*) *per il sistema* (I), *quando la varietà portante i dati sia l'iperpiano* $x = 0$.

10. OSSERVAZIONE. - I TEOREMI III e IV valgono, in particolare, per il sistema (a) studiato nella nostra memoria citata (M).

Il TEOREMA III, le considerazioni del n. 7 e l'osservazione del n. 8 hanno carattere di novità anche per il sistema (a), il TEOREMA IV estende le ipotesi di un teorema, contenuto nella nostra memoria (M) [22].

---

[22] Cfr. (M), § 3, n. 1, TEOREMA III, p. 397-402. Le attuali ipotesi, relative alle funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$ sono notevolmente più ampie.

§ 3. Ulteriori Teoremi.

11. TEOREMA V. - *Le funzioni* $A_{ij}(x, y_1, ..., y_h; z_1, ..., z_m)$, $(i, j = 1, 2, ..., m)$; $\rho_{ir}(x, y_1, ..., y_h; z_1, ..., z_m)$, $(r = 1, 2, ..., h; i = 1, 2, ..., m)$, $f_i(x, y_1, ..., y_h; z_1, ..., z_m)$, $(i = 1, 2, ..., m)$, *soddisfino le ipotesi del* TEOREMA I. *Siano* H_r, $(r = 1, 2, ..., h)$ *costanti positive, sia* T *il campo definito nel* TEOREMA I *e siano*

$$(8) \qquad z_1 = z_1(x, y_1, ..., y_h), ..., z_m = z_m(x, y_1, ..., y_h),$$

$$(8^*) \qquad z_1 = z_1^*(x, y_1, ..., y_h), ..., z_m = z_m^*(x, y_1, ..., y_h)$$

due m-ple di funzioni, definite nel campo T, *ognuna delle quali in* T *è continua nel complesso delle variabili ed è funzione assolutamente continua di* x *su ogni segmento* $y_1 = \text{cost.}, ..., y_h = \text{cost.}$, *tutto appartenente al campo* T; *esistano* $2m$ *costanti* K_i, K_i^*, $(i = 1, 2, ..., m)$, *tali che sia*

$$(11) \qquad |z_i(x, y_1, ..., y_h) - z_i(x, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_h)| \leq K_i \sum_{r=1}^{h} |y_r - \bar{y}_r|, \qquad (i = 1, 2, ..., m),$$

$$(11^*) \qquad |z_i^*(x, y_1, ..., y_h) - z_i^*(x, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_h)| \leq K_i^* \sum_{r=1}^{h} |y_r - \bar{y}_r|, \qquad (i = 1, 2, ..., m),$$

comunque siano i punti $(x, y_1, ..., y_h)$, $(x, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_h)$ *nel campo* T. *Allora se in quasi tutto* T *le funzioni* (8) *soddisfano le* (I) *e le* (8*) *le* (I*), *ed è*

$$(9) \qquad z_i(0, y_1, ..., y_h) = z_i^*(0, y_1, ..., y_h), \qquad (i = 1, 2, ..., m),$$

identicamente per

$$|y_r| \leq H_r, \qquad (r = 1, 2, ..., h),$$

è anche

$$(10) \qquad z_i(x, y_1, ..., y_h) = z_i^*(x, y_1, ..., y_h), \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

identicamente in T ».

Per dimostrare il presente TEOREMA basta ripetere, con qualche opportuna modificazione, le considerazioni fatte nella dimostrazione del TEOREMA I.

Ci limitiamo ad alcune osservazioni. Si indichi, in primo luogo con Ω una costante tale che in tutto il campo T sia

$$|z_i(x, y_1, ..., y_h)| \leq \Omega, \quad |z_i^*(x, y_1, ..., y_h)| \leq \Omega, \qquad (i = 1, 2, ..., m).$$

Esiste allora una costante μ, tale che in tutto il campo

$$C_R: \ 0 \leq x \leq a, \ -H_r \leq y_r \leq H_r, \ (r = 1, 2, ..., h), \quad -\Omega \leq z_i \leq \Omega, \ (i = 1, 2, ..., m),$$

sia

$$(13) \qquad |A_{ij}(x, y_1, ..., y_h; z_1, ..., z_m)| \leq \mu, \qquad (i, j = 1, 2, ..., m),$$

e si possono ripetere, con poche modificazioni, le considerazioni del § 1, n. 2, *b*), giungendo a stabilire le disuguaglianze (13'), (14), (6'), (7') (in C_R o, rispettivamente, in quasi tutto C_R), e (15), (15*), (19), (20), (21) (in quasi tutto T o, rispettivamente, in tutto T).

In secondo luogo, quando, per un indice *i fissato* tra i numeri 1, 2,..., *m*, si introduce il sistema di equazioni differenziali, scritte in forma integrale

$$(22)\qquad g_{ir}(X;\ x,\ y_1,\dots,\ y_h) = y_r -$$
$$-\int_X^x \rho_{ir}[X,\ g_{is}(X;\ x,\ y_1,\dots,\ y_h);\ z_l(X,\ g_{is}(X;\ x,\ y_1,\dots,\ y))]dX, \qquad (r = 1,\ 2,\dots,\ h),$$

le funzioni $\rho_{ir}[X,\ Y_1,\dots,\ Y_h;\ z_1(X,\ Y_1,\dots,\ Y_h),\dots,\ z_m(X,\ Y_1,\dots,\ Y_h)]$ nelle ipotesi attuali non sono definite per $0 \leq X \leq a$ e per tutti i valori reali di $Y_1,\dots,\ Y_h$, ma soltanto nel campo T (pensato nello spazio delle variabili $X,\ Y_1,\dots,\ Y_h$), nel quale sono definite le funzioni $z_i(X,\ Y_1,\dots,\ Y_h)$, $(i = 1,\ 2,\dots,\ m)$. Si definiscano allora per tutti gli X di $(0,\ a_1)$ e per tutti i valori reali di $Y_1,\dots,\ Y_h$ le funzioni $R_{ir}(X,\ Y_1,\dots,\ Y_h)$ come segue

$$(67)\qquad R_{ir}(X,\ Y_1,\dots,\ Y_h) = \rho_{ir}[X,\ Y_1,\dots,\ Y_h;\ z_1(X,\ Y_1,\dots,\ Y_h),\dots,\ z_m(X,\ Y_1,\dots,\ Y_h)],$$

per

$$0 \leq X \leq a_1,\quad -H_s + \int_0^X M(t)dt \leq Y_s \leq H_s - \int_0^X M_s(t)dt, \qquad (s = 1,\ 2,\dots,\ h),$$

$$(67_1)\qquad R_{ir}(X,\ Y_1,\dots,\ Y_h) = R_{ir}\left(X,\ -H_1 + \int_0^X M_1(t)dt,\ Y_2,\dots,\ Y_h\right)$$

per

$$0 \leq X \leq a_1,\quad Y_1 < -H_1 + \int_0^X M_1(t)dt,\quad -H_s + \int_0^X M_s(t)dt \leq Y_s \leq H_s - \int_0^X M_s(t)dt,$$
$$(s = 2,\ 3,\dots,\ h).$$

$$(67_1')\qquad R_{ir}(X,\ Y_1,\dots,\ Y_h) = R_{ir}\left(X,\ H_1 - \int_0^X M_1(t)dt,\ Y_2,\dots,\ Y_h\right),$$

per

$$0 \leq X \leq a_1,\quad Y_1 > H_1 - \int_0^X M_1(t)dt,\quad -H_s + \int_0^X M_s(t)dt \leq Y_s \leq H_s - \int_0^X M_s(t)dt,$$
$$(s = 2,\ 3,\dots,\ h).$$

$$(67_2)\qquad R_{ir}(X,\ Y_1,\dots,\ Y_h) = R_{ir}\left(X,\ Y_1,\ -H_2 + \int_0^X M_2(t)dt,\ Y_3,\dots,\ Y_h\right),$$

per

$$0 \leq X \leq a_1, \quad -\infty < Y_1 < +\infty, \quad Y_2 < -H_2 + \int_0^X M_2(t)dt,$$

$$-H_s + \int_0^X M_s(t)dt \leq Y_s \leq H_s - \int_0^X M_s(t)dt, \qquad (s = 3, 4, \dots, h),$$

$$(67_2') \qquad R_{ir}(X, Y_1, \dots, Y_h) = R_{ir}\left(X, Y_1, H_2 - \int_0^X M_2(t)dt, Y_3, \dots, Y_h\right),$$

per

$$0 \leq X \leq a_1, \quad -\infty < Y_1 < +\infty, \quad Y_2 > H_2 - \int_0^X M_2(t)dt,$$

$$-H_s + \int_0^X M_s(t)dt \leq Y_s \leq H_s - \int_0^X M_s(t)dt, \qquad (s = 3, 4, \dots, h),$$

. . . .

$$(67_h) \qquad R_{ir}(X, Y_1, \dots, Y_h) = R_{ir}\left(X, Y_1, \dots, Y_{h-1}, -H_h + \int_0^X M_h(t)dt\right),$$

per

$$0 \leq X \leq a_1, \quad -\infty < Y_1 < +\infty, \dots, \quad -\infty < Y_{h-1} < +\infty,$$

$$Y_h < -H_h + \int_0^X M_h(t)dt,$$

$$(67_h') \qquad R_{ir}(X, Y_1, \dots, Y_h) = R_{ir}\left(X, Y_1, \dots, Y_{h-1}, H_h - \int_0^X M_h(t)dt\right),$$

per

$$0 \leq X \leq a_1, \quad -\infty < Y_1 < +\infty, \dots, \quad -\infty < Y_{h-1} < +\infty,$$

$$Y_h > H_h - \int_0^X M_h(t)dt.$$

Per quasi tutti gli X di $(0, a_1)$ valgono allora le

$$| R_{ir}(X, Y_1, \dots, Y_h) | \leq M_r(X), \qquad (r = 1, 2, \dots, h; \ i = 1, 2, \dots, m)$$

per tutte le h-ple reali $(Y_1, \dots, Y_h)$,

$$| R_{ir}(X, Y_1, \dots, Y_h) - R_{ir}(X, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_h) | \leq L(X)(1 + K) \sum_{s=1}^{h} | Y_s - \bar{Y}_s |$$

$$(r = 1, 2, \dots, h; \ i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le coppie di h-ple reali $(Y_1, \dots, Y_h)$, $(\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_h)$, dove

$$K = \sum_{l=1}^{m} K_l. \tag{16}$$

Allora al sistema di equazioni differenziali, scritte sotto forma integrale,

$$g_{ir}(X; x, y_1, \dots, y_h) = y_r - \tag{68}$$
$$- \int_X^x R_{ir}[t, g_{i1}(t; x, y_1, \dots, y_h), \dots, g_{ih}(t; x, y_1, \dots, y_h)]dt, \qquad (r = 1, 2, \dots, h)$$

si possono applicare i teoremi di esistenza e di unicità di CARATHÉODORY ([23]); le funzioni $g_{ir}(X, x, y_1, \dots, y_h)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, così costruite, sono definite in tutto il campo

$$0 \leq X \leq a_1, \quad 0 \leq x \leq a_1, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, \quad -\infty < y_h < +\infty.$$

Come nella dimostrazione del TEOREMA I (cfr. § 1, n. 2, *c*)), si prova che, se il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartiene al campo I, è per ogni X di $(0, x)$

$$- H_r + \int_0^X M_r(t)dt \leq g_{ir}(X; x, y_1, \dots, y_h) \leq H_r - \int_0^X M_r(t)dt, \tag{23}$$
$$(r = 1, 2, \dots, h),$$

e quindi in tale caso le funzioni $g_{ir}(X; x, y_1, \dots, y_h)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$ soddisfano anche le equazioni (22).

12. TEOREMA VI - « *Siano soddisfatte le stesse ipotesi del* TEOREMA V, *tranne la* (9); *allora, se* ε *è un numero positivo arbitrario fissato, si può determinare un numero, tale che quando sia*

$$| z_i(0, y_1, \dots, y_h) - z_i^*(0, y_1, \dots, y_h) | < \sigma, \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{52}$$

per

$$| y_r | \leq H_r, \qquad (r = 1, 2, \dots, h),$$

è anche

$$| z_i(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^*(x, y_1, \dots, y_h) | < \varepsilon, \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{53}$$

in tutto il campo T ».

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del TEOREMA III, integrata dalle osservazioni fatte nella dimostrazione del TEOREMA V.

13. OSSERVAZIONI. - *a*) I TEOREMI V e VI continuano ad essere validi, anche quando le funzioni $A_{ij}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $\rho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$ $(i, j = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, h)$, invece che nel campo C_∞, sono definite in un campo limitato C_0, che definiremo tra poco.

([23]) Cfr. C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Teubner, Leipzig, 1918 cfr. Kap. XI, pp. 665-688, e in particolare, n. 582, p. 672, n. 583, p. 674.

Precisamente siano $M_r^{(0)}(x)$ funzioni definite in un intervallo $(0, a_0)$, ivi quasi-continue non negative e integrabili; siano $H_r^{(0)}$, $(r = 1, 2, \ldots, h)$, $\Omega_i (i = 1, 2, \ldots, m)$, costanti positive, e sia

$$H_r^{(0)} \geq \int_0^{a_0} M_r^{(0)}(X)dX, \qquad (r = 1, 2, \ldots, h).$$

Le funzioni $A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m)$, $\rho_{ir}(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m)$, $f_i(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m)$, $(i, j = 1, 2, \ldots, m; r = 1, 2, \ldots, h)$ siano definite nel campo [24]

$$C_0: \begin{cases} 0 \leq x \leq a_0, \quad -H_r^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(X)dX \leq y_r \leq H_r^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}(X)dX, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (r = 1, 2, \ldots, h), \\ \qquad -\Omega_i \leq z_i \leq \Omega_i, \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

e soddisfino ipotesi, che si deducono facilmente da quelle fatte nel TEOREMA I (cfr. le (1)-(7)); si deve inoltre fare l'ipotesi che, in quasi tutto $(0, a_0)$, sia

$$M_r^{(0)}(x) \leq M_r(x), \qquad (r = 1, 2, \ldots, h),$$

e inoltre

$$H_r^{(0)} \geq H_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots, h),$$

e che in tutto il campo T le funzioni (8) e (8*) soddisfino le

$$|z_i(x, y_1, \ldots, y_h)| \leq \Omega_i; \; |z_i^*(x, y_1, \ldots, y_h)| \leq \Omega_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

L'artificio di cui ci siamo serviti nella dimostrazione del TEOREMA V, permette di dimostrare i TEOREMI V e VI anche nelle attuali ipotesi.

b) Le considerazioni fatte in *a*) permettono di estendere ancora le ipotesi, sotto le quali valgono alcuni dei teoremi dimostrati nel presente lavoro, e precisamente di estendere i risultati ottenuti al caso, in cui le funzioni $A_{ij}(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m)$, $\rho_{ir}(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m)$, $f_i(x, y_1, \ldots, y_h; z_1, \ldots, z_m)$, $(i, j = 1, 2, \ldots, m; r = 1, 2, \ldots, h)$, pur essendo definite in tutto il campo C_∞ non soddisfano le ipotesi del TEOREMA I in tutto C_∞, ma soltanto in ogni campo limitato tutto appartenente a C_∞.

c) I TEOREMI V e VI e le OSSERVAZIONI *a*) e *b*) valgono, in particolare, per il sistema (*a*); nella nostra memoria (*M*) non erano state fatte ipotesi del tipo di quelle introdotte in tali teoremi [25].

---

[24] In particolare potrebbe essere identicamente in $(0, a_0)$: $M_r^{(0)}(x) = 0$, $(r = 1, 2, \ldots, h)$; il campo $C^{(0)}$ sarebbe allora definito dalle

$$0 \leq x \leq a_0, \quad -H_r \leq y_r \leq H_r, \quad (r = 1, 2, \ldots, h) \quad , \quad -\Omega_i \leq z_i \leq \Omega_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

[25] Per il sistema (a) un teorema di unicità valido sotto ipotesi anche più ampie del TEOREMA V (anche tenendo conto dell'osservazione fatta in *a*)), e in un campo funzionale più ampio è stato dato da S. CINQUINI, l. c. in [2].

§ 4. Il caso di due variabili indipendenti.

14. I TEOREMI I-VI dimostrati nel presente lavoro, e tutte le considerazioni e osservazioni relative valgono, in particolare, nel caso, in cui le variabili indipendenti sono due, e cioè per il sistema

$$(\mathrm{I}') \quad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y; z_1(x, y), \dots, z_m(x, y))\left[\frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x} + \rho_i(x, y; z_1(x, y), \dots, z_m(x, y))\frac{\partial z_j(x, y)}{\partial y}\right] =$$

$$= f_i(x, y; z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)), \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Il TEOREMA V, tenuto conto anche dell'osservazione del n. 13, *a*), estende ampiamente le ipotesi di un teorema di A. DOUGLIS [26]; tale autore suppone che le funzioni $A_{ij}(x, y; z_1, \dots, z_m)$, $\rho_i(x, y; z_1, \dots, z_m)$, $f_i(x, y; z_1, \dots, z_m)$, $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ siano continue nel loro campo di definizione; che le funzioni $A_{ij}(x, y; z_1, \dots, z_m)$, $A_{ij}(x, y; z_1, \dots, z_m)$ $\rho_i(x, y; z_1, \dots, z_m)$ $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ soddisfino una condizione di LIPSCHITZ uniforme in tutte le variabili, che le funzioni $f_i(x, y; z_1 \dots, z_m)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ siano lipschitziane in $z_1, \dots, z_m$ soltanto; l'unicità è dimostrata nel campo funzionale delle funzioni $z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)$ lipschitziane in x e y.

Nelle nostre ipotesi le funzioni $A_{ij}(x, y; z_1, \dots, z_m)$, $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ sono continue nel complesso delle variabili e lipschitziane soltanto in y, z_1, $\dots$, z_m (con costante di LIPSCHITZ, indipendente da x), e in x soddisfano le condizioni (2), (che portano ad una assoluta continuità in x uniforme, per così dire, rispetto a $y, z_1, \dots, z_m$); le funzioni $\rho_i(x, y; z_1, \dots, z_m)$ sono continue soltanto in $y, z_1, \dots, z_m$, mentre in x *sono quasi-continue*, le funzioni $f_i(x, y; z_1, \dots, z_m)$ *sono soltanto quasi-continue in tutte le variabili*; valgono le condizioni (4) e (6) (di integrabilità), e inoltre le (5) e (7), che sono condizioni di CARATHÉODORY, più generali della condizione di LIPSCHITZ; infine il campo funzionale, nel quale sono dimostrati i nostri teoremi di unicità, è quello delle funzioni $z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)$ assolutamente continue in x e lipschitziane in y (con costante di LIPSCHITZ indipendente da x).

15. Se, in particolare, il sistema (I') si riduce al sistema

$$(a') \quad \frac{\partial z_i(x, y)}{\partial x} + \rho_i(x, y; z_1(x, y), \dots, z_m(x, y))\frac{\partial z_i(x, y)}{\partial y} = f_i(x, y; z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)),$$

$$(i = 1, 2, \dots, m),$$

---

[26] A. DOUGLIS, *Some existence theorems for hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables*, « Comm. pure appl. Math. », vol. V, (1952), 119-154, cfr. § 3, p. 128-129.

anch'esso studiato in una nostra precedente memoria ([27]), i TEOREMI I, III, V e VI, le osservazioni relative e le considerazioni del n. 7 hanno carattere di novità anche per il sistema (a') rispetto ai risultati contenuti nella memoria stessa; i TEOREMI II e IV estendono le ipotesi di due teoremi ivi dimostrati ([28]).

Nel caso particolare del sistema (a') e anche del sistema non lineare

$$(b') \qquad \frac{\partial z_i(x, y)}{\partial x} = f_i\left(x, y; z_1(x, y), \dots, z_m(x, y); \frac{\partial z_i(x, y)}{\partial y}\right), \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

teoremi di unicità di carattere molto generale sono stati dati da altro autore con metodi del tutto differenti ([29]).

([27]) M. CINQUINI-CIBRARIO, *Nuovi teoremi di esistenza e di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali*, « Ann. della Scuola Normale Superiore di Pisa », (3), IX, 1955, 65-113.

([28]) Cfr. l. c. in ([27]), § 4, n. 24, TEOREMA VI, p 107, e n. 25, TEOREMA VII, p. 111-112; in questi due teoremi le ipotesi relative alle funzioni $f_i(x, y; z_1, \dots, z_m)$ sono notevolmente più restrittive delle attuali.

([29]) S. CINQUINI, l. c. in ([2]), § 2, p. 969-978 per il sistema (a').

S. CINQUINI, *Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine*, « Rendic. Acc. Naz. dei Lincei », (VIII), XVII, 1954, Nota I, p. 188-191, Nota II, p. 339-344, per il sistema (b').