Le geometrie di Galois.

Memoria di BENIAMINO SEGRE (a Roma).

A Giovanni Sansone nel suo 70mo compleanno.

Sunto. - *Studio sistematico di varie proprietà — di carattere algebrico, geometrico ed aritmetico — inerenti agli spazi di Galois. ossia agli spazi proiettivi sopra un corpo finito.*

INTRODUZIONE.

Il presente lavoro pone nuovi legami fra la Geometria algebrica e l'aritmetica, mediante l'indagine approfondita di diverse questioni negli spazi proiettivi sopra un campo di GALOIS. Sono quindi particolarmente lieto di dedicarlo — in occasione del suo 70° compleanno — all'Amico GIOVANNI SANSONE, che ha dato all'Aritmetica contributi d'importanza forse non minore di quelli che a lui deve l'Analisi.

Molte delle ricerche compiute in Geometria algebrica nell'ultimo trentennio si svolgono sopra campi del tutto generali: ma la quasi totalità di esse suppone che il campo base sia infinito, in quanto ben sovente le cose si presentano sotto luce assai diversa nei campi finiti, ove sorgono inoltre problemi speciali, come quello di determinare il numero dei punti situati su di una varietà algebrica assegnata (1). A quest'ultimo ordine d'idee possono venire collegati i cosidetti metodi apiristici, introdotti dal CIPOLLA nello studio delle congruenze secondo un modulo primo e delle equazioni algebriche in un campo di GALOIS; metodi che sono poi stati usati e generalizzati da vari altri Autori, fra i quali — oltre al SANSONE — vanno ricordati V. AMATO, G. MIGNOSI, B. SCARPIS e G. SCORZA.

Procedimenti di carattere puramente geometrico-combinatorio vengono invece qui impiegati nel § I, che si occupa delle quadriche in uno spazio di GALOIS. Si trovano così risultati già altrimenti acquisiti in tale classico argomento, ai quali però se ne aggiungono altri di tipo nuovo. Ciò fa preconizzare ulteriori approfondimenti delle suddette questioni, e l'utilizzazione di metodi consimili nell'investigare differenti categorie di varietà algebriche in uno spazio di GALOIS.

Problemi di carattere assai diverso si presentano nello studio di certe classi di insiemi di punti in uno spazio di GALOIS: ed è curioso osservare come — nonostante il loro carattere apparentemente astratto — problemi di quella natura siano stati posti e parzialmenti risolti in vista di

(1) Difficoltà ancora maggiori si incontrano negli spazi sopra corpi non commutativi; per alcune semplici questioni che allora si presentano. cfr. SEGRE [10].

significative applicazioni alla Fisica (principalmente da JÄRNEFELT e KUSTAANHEIMO) ed alla Statistica (da R. C. BOSE). All'indagine di problemi siffatti sono dedicati i §§ III e IV, concernenti rispettivamente gli insiemi piani e quelli spaziali od iperspaziali. In tale indagine intervengono talora in guisa essenziale considerazioni aritmetiche, ed anche sviluppi di calcolo numerico; ma è sovente mediante opportune argomentazioni algebrico-geometriche che le svariate difficoltà che vi si incontrano possono venir superate.

Alcune delle proprietà geometriche accessorie all'uopo occorrenti (come quelle generalizzanti i teoremi di CEVA e MENELAO) conservano la loro validità nei campi infiniti, e trovansi raccolte nel § II: tuttavia, in complesso, le geometrie di GALOIS nascono qui con caratteristiche proprie, che le mostrano degne di studio indipendentemente dai possibili legami od applicazioni alle suaccennate discipline.

Informazioni un po' meno sommarie sul contenuto, si desumono dall'Indice posto alla fine del lavoro. Un riassunto abbastanza particolareggiato di molte delle proprietà qui esposte è offerto dalla Conferenza tenuta nell'agosto 1958 al Congresso Internazionale di Edimburgo (SEGRE [11]), alla quale rinviamo altresì per ulteriori precisazioni storiche e bibliografiche sugli argomenti trattati; cfr. inoltre SEGRE [12]. Taluna fra tali proprietà è già nota, ma viene inclusa all'uopo di rendere più agevole la lettura.

Va infine rilevato come l'attuale Memoria suggerisca — esplicitamente od implicitamente — tutto un complesso di questioni nelle direzioni più svariate, alle quali è sperabile possa darsi risposta prossimamente. (2) Fra siffatte questioni segnaliamo soltanto quelle inerenti alle geometrie asintotiche che si ottengono con procedimento di limite dalla geometria di uno spazio di GALOIS di data dimensione, quando si faccia crescere indefinitamente la dimensione di questo o l'ordine del relativo campo base.

§ I. - LE QUADRICHE NEGLI SPAZI DI GALOIS.

1. Specie e tipi delle quadriche di $S_{r,q}$, e loro spazi subordinati. - Le quadriche di un dato $S_{r,q}$ — e cioè di uno spazio proiettivo di dimensione r sopra un campo di GALOIS d'ordine q — costituiscono in esso un sistema lineare ∞^R, ove

$$R = r(r+3)/2,$$

e sono quindi tante quanti i punti di un $S_{R,q}$, ossia il loro numero complessivo vale $q^R + q^{R-1} + ... + q + 1$ (ved. p. es. SEGRE [2], n. 157).

Diremo che una quadrica di $S_{r,q}$ è *di specie* (r, q, h, k), od anche più semplicemente — se ciò non dà luogo ad equivoci — *di specie* (h, k), quando

(2) Ved. al riguardo SEGRE [13].

essa abbia uno spazio doppio di dimensione $h-1$, e quando $k-1$ denoti la massima dimensione degli spazi subordinati di $S_{r,q}$ giacenti su di essa. Si dice allora che la quadrica è h volte specializzata; risulta poi sempre

$$0 \leqslant h \leqslant k \leqslant (r+h+1)/2,$$

il caso $h=0$ avendo luogo se, e soltanto se, la quadrica è priva di punti doppi (ossia se non è singolare). Va anche rilevato l'altro caso estremo $h=k=r$, in cui la quadrica si riduce ad un iperpiano doppio; ed è chiaro che in $S_{r,q}$ vi sono $q^r+q^{r-1}+\ldots+q+1$ quadriche di questa specie.

In particolare, per $r=1$ (ossia sulla retta), vi sono tre sorta di «quadriche»: quelle di specie (1, 1), ridotte ad un punto da contarsi due volte, in numero di $q+1$; quelle di specie (0, 1), date dalle varie coppie non ordinate di punti distinti di $S_{1,q}$, in numero dunque di $q(q+1)/2$; le rimanenti sono quelle — di specie (0, 0) — formate dalle coppie di punti distinti coniugati in un'estensione quadratica del campo base di $S_{1,q}$, ed il loro numero vale quindi

$$(q^2+q+1)-(q+1)-q(q+1)/2 = q(q-1)/2.$$

Nel piano, ossia per $r=2$, le «quadriche» sono *a priori* delle seguenti cinque specie diverse. 1) Quelle di specie (2, 2), date dalle rette di $S_{2,q}$ contate due volte, in numero di

$$q^2+q+1.$$

2) Quelle di specie (1, 2), formate dalle coppie non ordinate di rette distinte di $S_{2,q}$, in numero dunque di

$$(q^2+q+1)(q^2+q)/2 = q(q+1)(q^2+q+1)/2.$$

3) Quelle di specie (1, 1), consistenti di due rette distinte coniugate in una estensione quadrica del campo base; di esse — per ciò che precede — ve n'è $q(q-1)/2$ in ogni fascio di rette, sicchè il loro numero complessivo vale

$$q(q-1)(q^2+q+1)/2.$$

4) Quelle di specie (0, 1), date dalle coniche C_2 irriducibili di $S_{2,q}$ contenenti almeno un punto, e quindi (ove si badi alle intersezioni di C_2 con le rette del fascio di centro un tale punto) contenenti esattamente $q+1$ punti di $S_{2,q}$. Ad ogni siffatta C_2 appartengono pertanto $(q+1)q(q-1)(q-2)(q-3)$ quintuple ordinate di punti di $S_{2,q}$, necessariamente a tre a tre non allineati. Poichè, com'è subito visto, $S_{2,q}$ contiene in tutto

$$(q^2+q+1)\cdot q(q+1)\cdot q^2\cdot(q-1)^2\cdot(q-2)(q-3)$$

quintuple siffatte, e ciascuna di esse determina una ed una sola C_2 che la contenga, la quale viene a risultare di specie (0, 1), così il numero delle

« quadriche » di $S_{2,q}$ di specie $(0, 1)$ è dato da

$$q^2(q-1)(q^2+q+1)=q^5-q^2.$$

5) *A priori*, vi potrebbero infine essere « quadriche » di specie $(0, 0)$, date dalle eventuali coniche totalmente prive di punti di $S_{2,q}$. Siccome però il numero complessivo delle « quadriche » di $S_{2,q}$ delle prime quattro specie vale

$$\begin{aligned}(q^2+q+1)+q(q+1)(q^2+q+1)/2+q(q-1)(q^2+q+1)/2+(q^5-q^2) &= \\ = q^5+q^4+q^3+q^2+q+1,&\end{aligned}$$

e quindi uguaglia proprio quello di tutte le « quadriche » di $S_{2,q}$, così *in nessun* $S_{2,q}$ *esistono « quadriche » di specie* $(0, 0)$. Ciò equivale alla seguente ben nota proposizione, di cui abbiamo dianzi ottenuto una nuova dimostrazione, concettualmente la più semplice possibile:

Ogni conica irriducibile di $S_{2,q}$ *contiene sempre esattamente* $q+1$ *punti di* $S_{2,q}$.

Riferiamoci ora ad una qualunque quadrica di $S_{r,q}$ di specie (h, k), per la quale $k \geqslant 1$, e ad un intero s arbitrario che soddisfi alle limitazioni

$$1 \leqslant s \leqslant k.$$

La quadrica conterrà allora degli $S_{s-1,q}$ subordinati: il numero di questi spazi (o punti, se $s=1$) verrà denotato con $a_{k,s}^{r,q,h}$, od anche più semplicemente con $a_{k,s}$, quando ciò non dia luogo ad equivoci: allora, per maggiore chiarezza, muniremo sovente la a coll'indicazione del tipo della quadrica, secondo la definizione che diamo poco appresso. Giungeremo ad una larga estensione della proposizione precedente, stabilendo il

TEOREMA I. - *Le quadriche non singolari (ossia aventi* $h=0$) *degli spazi di Galois sono tutte necessariamente di uno dei seguenti tre tipi, che denotiamo rispettivamente come tipo* I, *tipo* II *e tipo* III.

I) *Se la dimensione* r *dello spazio ambiente* $S_{r,q}$ *è pari risulta necessariamente* $r=2k$, *ove* $k-1$ *denoti — come dianzi — la dimensione massima degli spazi subordinati di* $S_{r,q}$ *che stanno sulla quadrica, e per ogni* s *compreso fra* 1 *e* k *si ha*:

$$a_{k,s}^{\mathrm{I}}=\prod_{i=k-s+1}^{k}(q^i+1)\cdot\prod_{i=0}^{s-1}(q^{k-i}-1)/\prod_{i=0}^{s-1}(q^{s-i}-1).$$

II) *Se* r *è dispari può intanto risultare* $r=2k-1$, *ove* k *abbia ancora il suddetto significato, nel qual caso si ha*:

$$a_{k,s}^{\mathrm{II}}=\prod_{i=k-s}^{k-1}(q^i+1)\cdot\prod_{i=0}^{s-1}(q^{k-i}-1)/\prod_{i=0}^{s-1}(q^{s-i}-1).$$

III) *Se r è d i s p a r i può soltanto più risultare $r = 2k + 1$, ed in tal caso — se $k > 0$ — si ha:*

$$a_{k,s}^{\mathrm{III}} = \prod_{i=k-s+2}^{k+1} (q^i + 1) \cdot \prod_{i=0}^{s-1} (q^{k-i} - 1) / \prod_{i=0}^{s-1} (q^{s-i} - 1);$$

questa relazione sussiste anche per $k = 0$, $s = 1$, nel qual caso essa diventa $a_{0,1}^{\mathrm{III}} = 0$.

Osserviamo anzitutto che, in base a ciò che precede, il teor. I certamente sussiste per $r = 1$ e per $r = 2$. Potremo quindi supporre $r \geqslant 3$, e stabilirlo per induzione rispetto ad r, ammettendolo negli spazi di dimensione inferiore ad r.

Sia Q una qualunque quadrica non singolare di $S_{r,q}$, e sia P uno dei suoi punti. Notiamo che Q contiene certamente qualche punto P di $S_{r,q}$, ciò avendo luogo — in base ad un teorema precedente — per la sezione di Q con un qualunque piano di $S_{r,q}$. Indichiamo poi con S^* l'iperpiano tangente in P a Q, con S' un qualunque $S_{r-2,q}$ giacente in S^* che non passi per P, e con Q^*, Q' rispettivamente le sezioni di Q con S^*, S'. È allora evidente che Q^* non è altro che il cono proiettante Q' da P, e che Q' è una quadrica non singolare di $S' = S_{r-2,q}$, alla quale è quindi lecito applicare il teor. I.

Denotando con (r', q, h', k') la s p e c i e di Q', si ha poi manifestamente

$$r' = r - 2, \qquad h' = 0, \qquad k' = k - 1,$$

eppertanto

$$r' - 2k' = r - 2k.$$

Ne discende che Q è d e l l o s t e s s o t i p o d i Q' e può quindi soltanto risultare di tipo I, II, III. In uno qualunque di questi tre casi, il numero $a_{k,1}$ dei punti di Q può ottenersi nel modo seguente.

Le rette per P di $S_{r,q}$ sono in numero di $q^{r-1} + q^{r-2} + \ldots + 1$ e quelle di S^* per P sono in numero di $q^{r-2} + q^{r-3} + \ldots + 1$. Ne discende che in $S_{r,q}$ vi sono esattamente q^{r-1} rette per P non situate in S^*, e ciascuna di queste incontra Q in uno ed un sol punto distinto da P. Le rette di S^* per P incontranti Q altrove sono le generatrici di Q^* uscenti da P: esse sono tante quanti i punti di Q', e cioè sono in numero di $a_{k',1} = a_{k-1,1}$ (da porsi uguale allo zero per $k = 1$) e ciascuna di esse viene a contenere q punti di Q distinti da P. Risulta pertanto

$$a_{k,1} = q^{r-1} + 1 + q a_{k-1,1};$$

e poichè questa condizione viene di fatto soddisfatta da ciascuna delle tre espressioni date dal teor. I per $s = 1$, ossia da:

$$a_{k,1}^{\mathrm{I}} = (q^k + 1)(q^k - 1)/(q - 1),$$
$$a_{k,1}^{\mathrm{II}} = (q^{k-1} + 1)(q^k - 1)/(q - 1),$$
$$a_{k,1}^{\mathrm{III}} = (q^{k+1} + 1)(q^k - 1)/(q - 1),$$

ne consegue intanto il teor. I per $s = 1$.

Per completare la dimostrazione di quel teorema, potremo ora supporre $s \geqslant 2$ e procedere per induzione rispetto ad s, ammettendo la validità del teor. I per valori inferiori di questo carattere. Raggiungeremo il nostro intento valutando in due mòdi diversi il numero delle coppie formate da un S_{s-2} ed un S_{s-1} che si appartengano e stiano su Q.

Fissato un qualunque S_{s-2} di Q, il che può farsi in $a_{k,s-1}$ modi diversi, denotiamo con S_{r-s+1} lo spazio polare di S_{s-2} rispetto a Q (il quale contiene S_{s-2}), con S'' un qualunque spazio di dimensione $r-2s+2$ che stia in S_{r-s+1} e sia sghembo con S_{s-2}, e con Q'' la quadrica sezione di Q con S''. Detta quindi $(r''. q, h'', k'')$ la specie di Q'', ne risulta che è

$$r'' = r - 2s + 2, \qquad h'' = 0, \qquad k'' = k - s + 1,$$

eppertanto $r'' - 2k'' = r - 2k$, sicchè Q'' è dello stesso tipo di Q. D'altro canto, gli S_{s-1} giacenti su Q e passanti per S_{s-2} sono quelli proiettanti da S_{s-2} i singoli punti di Q'', e sono quindi in numero di $a_{k'',1} = a_{k-s+1,1}$. Il numero richiesto alla fine del precedente capoverso è dato pertanto da $a_{k,s-1}a_{k-s+1,1}$.

Lo stesso numero viene anche espresso dal prodotto del numero, $a_{k,s}$, degli S_{s-1} giacenti su Q, per quello, $(q^s-1)/(q-1)$, degli S_{s-2} di un dato S_{s-1}. Vale quindi la formula

$$a_{k,s}(q^s-1)/(q-1) = a_{k,s-1}a_{k-s+1,1},$$

che permette il calcolo induttivo di $a_{k,s}$: e poichè essa viene di fatto soddisfatta da ciascuna delle tre espressioni date dal teor. I, ne consegue la piena validità di questo teorema.

Se in esso facciamo in particolare $s = k$, otteniamo senz'altro il seguente

Corollario. - *Una qualunque quadrica non singolare di $S_{r,q}$, che sia di tipo* I, II *o* III *(per la quale dunque r valga ordinatamente $2k$, $2k-1$, $2k+1$), contiene un numero di spazi di dimensione massima, $k-1$, dato rispettivamente da*

$$a^{\mathrm{I}}_{k,k} = \prod_{i=1}^{k}(q^i+1), \qquad a^{\mathrm{II}}_{k,k} = \prod_{i=0}^{k-1}(q^i+1), \qquad a^{\mathrm{III}}_{k,k} = \prod_{i=2}^{k+1}(q^i+1).$$

Volgiamoci ora a considerare una qualsivoglia quadrica Q di $S_{r,q}$ che sia singolare, e cioè che possegga un S_{h-1} doppio, con $h \geqslant 1$. Scelto in $S_{r,q}$ un qualunque spazio S_{r-h} sghembo con S_{h-1}, e detta Q^* la relativa sezione con Q, è chiaro che Q^* risulta non singolare e che Q non è altro che il cono proiettante Q^* da S_{h-1}. Pertanto, indicando con (r^*, q, h^*, k^*) la specie di Q^*, si ha manifestamente:

$$r^* = r - h, \qquad h^* = 0, \qquad k^* = k - h.$$

Per definizione, a seconda che Q^* e di tipo I, II o III (il che non viene a dipendere dalla scelta dell' S_{r-h}), diremo che la quadrica Q è di tipo I, II o III; nei tre casi risulta

$$r^* = 2k^*, \qquad r^* = 2k^* - 1, \qquad r^* = 2k^* + 1,$$

e quindi:

$$r = 2k - h, \qquad r = 2k - h - 1, \qquad r = 2k - h + 1.$$

Se $k > h$, gli spazi di dimensione massima $(k-1)$ giacenti su Q provengono biunivocamente per proiezione da S_{h-1} da quelli di dimensione massima $(k^* - 1)$ giacenti su Q^*. Dettone $b_{h,k}$ il numero, in virtù del precedente corollario si avrà quindi:

$$b^{\mathrm{I}}_{h,k} = \prod_{i=1}^{k-h} (q^i + 1), \qquad b^{\mathrm{II}}_{h,k} = \prod_{i=0}^{k-h-1} (q^i + 1), \qquad b^{\mathrm{III}}_{h,k} = \prod_{i=2}^{k-h+1} (q^i + 1).$$

Nel caso in cui si abbia $h = k$, la quadrica Q contiene un solo S_{k-1}, dato dal suo S_{h-1} doppio, onde allora si dovrà assumere

$$b_{h,k} = 1 \qquad \text{(per } h = k\text{)}.$$

Notiamo ora che, assegnato un qualunque intero s soddisfacente alle limitazioni $1 \leqslant s \leqslant k$, vi saranno certamente sul cono Q degli spazi S_{s-1}: a ciascuno di essi resterà associato un intero t soddisfacente alle

$$0 \leqslant t \leqslant l,$$

ove $t - 1$ denoti la dimensione dell'intersezione di tale S_{s-1} col vertice S_{h-1} di Q, ed l indichi il più piccolo degli interi h, s. Il numero degli spazi S_{s-1} suddetti corrispondenti ad un dato t verrà designato con $a^{r,q,h}_{k,s,t}$, od anche — secondochè Q è di tipo I, II o III — con $a^{\mathrm{I}}_{h,k,s,t}$, $a^{\mathrm{II}}_{h,k,s,t}$ od $a^{\mathrm{III}}_{h,k,s,t}$, sottintendendo l'indice in alto quando ciò non si presti ad equivoci. In particolare risulterà quindi

$$a_{h,k,k,h} = b_{h,k},$$

ove le b si esprimano con le formule precedenti. È chiaro poi che il numero complessivo degli S_{s-1} giacenti su Q verrà dato dalla

$$a^{r,q,h}_{k,s} = \sum_{t=0}^{l} a^{r,q,h}_{k,s,t}.$$

Allo scopo di determinare i vari caratteri a, testè introdotti, incominciamo con l'occuparci del caso $t = h$, il quale (poichè $l \leqslant s$) esige che si abbia $s \geqslant h$. Per esso, ciascuno degli S_{s-1} in questione dovrà contenere S_{h-1}, eppertanto segherà S_{r-h} secondo uno spazio di dimensione $s^* - 1$, ove

$$s^* = s - h,$$

il quale giacerà su Q^*. Viceversa, ogni S_{s^*-1} di Q^* è congiunto ad S_{h-1} da un S_{s-1} di Q soddisfacente alle condizioni volute. Risulta dunque:

$$a_{k,s,h}^{r,q,h} = a_{h,k,s,h} = a_{k^*,s^*} = a_{k-h,s-h},$$

dove l'ultimo membro va calcolato mediante la 1ª, 2ª, o 3ª formula del teor. I, secondochè Q è di tipo I, II o III, nell'ipotesi che sia $s > h$ (e cioè $s^* \geqslant 1$), mentre esso va sempre posto uguale all'unità se $s = h$. Per $s = k$, la formula precedente viene naturalmente a coincidere con quella dianzi ottenuta in tale ipotesi.

Volgiamoci infine al caso generale in cui si abbia $t \leqslant h$. Ora procederemo in altra guisa, pervenendo a risultati che per $t = h$ collimeranno coi precedenti. Più precisamente, raggiungeremo il nostro intento determinando, in due modi diversi, quante sono le *coppie* (S_{s-1}, S_{k-1}) costituite da un S_{s-1} di Q che si appoggi ad S_{h-1} secondo un S_{t-1}, e da un S_{k-1} che giaccia su Q e contenga quell'S_{s-1}.

Preso uno qualunque degli $a_{h,k,s,t}$ S_{s-1} del tipo suddetto, i vari S_{k-1} di Q che lo contengono sono tutti e soli gli spazi di dimensione massima che stanno sulla quadrica, $\bar{Q}$, segata su Q dallo spazio $S_{\bar{r}}$ polare di quell'S_{s-1} rispetto a Q. Poichè tale S_{s-1} si appoggia allo spazio doppio S_{h-1} di Q secondo un S_{t-1}, così risulta

$$\bar{r} = r - s + t.$$

È poi chiaro che $\bar{Q}$ ha il carattere

$$\bar{k} = k,$$

ed ammette come spazio doppio $S_{\bar{h}-1}$ lo spazio congiungente S_{s-1} ed S_{h-1}, talchè si ottiene:

$$\bar{h} = h + s - t.$$

Ne consegue che in ogni caso sussiste l'uguaglianza $\bar{r} + \bar{h} = r + h$ (oltre alla $\bar{k} = k$), onde $\bar{Q}$ e Q *sono sempre dello stesso tipo*. Il numero degli S_{k-1} richiesti vale dunque $b_{\bar{h},\bar{k}} = b_{h+s-t,k}$, e quello delle coppie (S_{s-1}, S_{k-1}) è

$$a_{h,k,s,t} \quad b_{h+s-t,k},$$

ove si sottintende l'indicazione del *tipo*, che è il medesimo per i due simboli a e b.

Consideriamo, in secondo luogo, uno qualunque dei $b_{h,k}$ S_{k-1} di Q. Esso passerà necessariamente per S_{h-1}; e (tenendo conto p. es. di SEGRE [2, n. 159]) si vede facilmente che il numero $c_{h,k,s,t}$ degli S_{s-1} di un tale

S_{k-1} che si appoggiano ad S_{h-1} secondo un S_{t-1} (non assegnato) può venir espresso nella forma

$$c_{h,k,s,t} = \frac{\prod_{i=0}^{t-1}(q^{h-i}-1)}{\prod_{i=0}^{t-1}(q^{t-i}-1)} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{s-t-1}(q^{k-h-i}-1)}{\prod_{i=0}^{s-t-1}(q^{s-t-i}-1)} \cdot q^{(h-t)(s-t)},$$

ove si convenga di sostituire la prima o la seconda frazione con l'unità, rispettivamente se $t=0$ o se $t=s$.

Dall'analisi precedente discende che è

$$a_{h,k,s,t} = c_{h,k,s,t}\ \ b_{h,k}/b_{h+s-t,k},$$

onde — conoscendosi già i valori delle b e delle c — se ne derivano tutte le a per le quadriche di $S_{r,q}$ dei diversi tipi.

Come controllo, possiamo confrontare col caso già trattato in cui $t=h$, distinguendo due sottocasi secondochè $s=k$ od $s<k$. Anzitutto, se $t=h$, $s=k$ risulta

$$a_{h,k,s,t} = a_{h,k,k,h} = b_{h,k},$$

$$c_{h,k,s,t} = c_{h,k,k,h} = 1, \qquad b_{h+s-t,k} = b_{k,k} = 1,$$

e la relazione ottenuta nell'ultimo capoverso è dunque soddisfatta. Lo stesso ha luogo nell'ipotesi in cui sia $t=h$, $s<k$, come tosto si desume dal teor. I e dalle seguenti conseguenze immediate di formule precedenti:

$$a_{h,k,s,h} = a_{k-h,s-h}, \quad c_{h,k,s,h} = \prod_{i=0}^{s-h-1}(q^{k-h-i}-1)\Big/\prod_{i=0}^{s-h-1}(q^{s-h-i}-1),$$

$$b^{\mathrm{I}}_{h,k}/b^{\mathrm{I}}_{s,k} = \prod_{i=k-s+1}^{k-h}(q^i+1), \quad b^{\mathrm{II}}_{h,k}/b^{\mathrm{II}}_{s,k} = \prod_{i=k-s}^{k-h-1}(q^i+1), \quad b^{\mathrm{III}}_{h,k}/b^{\mathrm{III}}_{s,k} = \prod_{i=k-s+2}^{k-h+1}(q^i+1).$$

Un altro controllo si ha anche subito nell'ipotesi che sia $h=0$, la quale implica che debba essere $t=0$, rilevando che risulta:

$$a_{0,k,s,0} = a_{k,s}, \qquad c_{0,k,s,0} = \prod_{i=0}^{s-1}(q^{k-i}-1)\Big/\prod_{i=0}^{s-1}(q^{s-i}-1),$$

$$b^{\mathrm{I}}_{0,k}/b^{\mathrm{I}}_{s,k} = \prod_{i=k-s+1}^{k}(q^i+1), \quad b^{\mathrm{II}}_{0,k}/b^{\mathrm{II}}_{s,k} = \prod_{i=k-s}^{k-1}(q^i+1), \quad b^{\mathrm{III}}_{0,k}/b^{\mathrm{III}}_{s,k} = \prod_{i=k-s+2}^{k+1}(q^i+1),$$

ed applicando ancora il teor. I.

Rileviamo infine tre casi particolari, che ci verranno utili nel seguito, ciascuno dei quali potrebbe anche naturalmente venire trattato in modo diretto.

1) Per $s = 1$, $t = 0$ risulta

$$c_{h,k,1,0} = q^h(q^{k-h} - 1)/(q - 1), \qquad b_{h,k}/b_{h+1,k} = a_{k-h,1}(q - 1)/(q^{k-h} - 1),$$

e quindi:

$$a_{h,k,1,0} = q^h a_{k-h,1}.$$

Poichè — in base alla definizione delle a — si ha inoltre $a_{h,k,1,1} = (q^h - 1)/(q - 1)$, così:

Il numero complessivo dei punti situati su di una quadrica di specie (r, q, h, k) *è dato da*

$$a_{k,1}^{r,q,h} = (q^h - 1)/(q - 1) + q^h a_{k-h,1}.$$

2) Per $s = 2$, $t = 0$ risulta

$$c_{h,k,2,0} = q^{2h}(q^{k-h} - 1)(q^{k-h-1} - 1)/[(q^2 - 1)(q - 1)],$$

$$b_{h,k}/b_{h+2,k} = a_{k-h,2}\ (q^2 - 1)(q - 1)/[(q^{k-h} - 1)(q^{k-h-1} - 1)],$$

eppertanto:

Il numero delle rette situate su di una quadrica di specie (r, q, h, k), *e non contenenti nessun punto doppio di questa, vale*

$$a_{h,k,2,0} = q^{2h} a_{k-h,2}.$$

3) Similmente si vede che:

Il numero delle rette situate su di una quadrica di specie (r, q, h, k), *e contenenti esattamente un punto doppio di questa, vale*

$$a_{h,k,2,1} = q^{h-1}(q^h - 1)a_{k-h,1}/(q - 1).$$

Possiamo riassumere alcuni dei risultati dianzi ottenuti, col seguente

TEOREMA II. - *Le quadriche di uno spazio di Galois, di cui* (r, q, h, k) *denoti la specie, possono venire distinte in tre tipi, secondochè la somma* $r + h$ *uguaglia* $2k$, $2k - 1$ *o* $2k + 1$; *e non ve ne sono d'altri tipi. In ciascuno dei vari casi possibili, gli sviluppi precedenti forniscono il numero degli spazi di data dimensione che giacciono su di una quadrica, nota che sia la specie di questa. Ogni quadrica di uno spazio di Galois ha sempre lo stesso tipo delle sue sezioni cogli spazi polari dei vari spazi semplici che le appartengono, come pure — quand'essa è un cono — di quelle cogli spazi di dimensione massima sghembi col vertice.*

2. **Omografie fra quadriche.** - Dimostreremo ora il seguente

TEOREMA I. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due quadriche di un $S_{r,q}$ risultino fra loro omografiche, è ch'esse siano della stessa specie (e quindi pure dello stesso tipo). Più precisamente, il numero $d_{k,h}$ delle omografie trasformanti l'una nell'altra due quadriche di specie (r, q, h, k) è dato da*

$$d^{\mathrm{I}}_{k,h} = q^{k^2-h(h-1)/2} \prod_{i=0}^{h-1} (q^{h-i} - 1) \prod_{i=1}^{k-h} (q^{2i} - 1),$$

$$d^{\mathrm{II}}_{k,h} = 2q^{k(k-1)-h(h-1)/2} \prod_{i=0}^{h-1} (q^{h-i} - 1) \prod_{i=1}^{k-h} (q^{2i} - 1)/(q^{k-h} + 1),$$

$$d^{\mathrm{III}}_{k,h} = 2q^{k(k+1)-h(h-1)/2} \prod_{i=0}^{h-1} (q^{h-i} - 1) \prod_{i=1}^{k-h+1} (q^{2i} - 1)/(q^{k-h+1} - 1);$$

in queste formule, l'indice I, II *o* III *in alto denota il tipo della quadrica, e il* $\prod_{i=0}^{h-1}$ *come pure il* $\prod_{i=1}^{k-h}$ *vanno posti uguali all'unità rispettivamente per* $h = 0$ *e per* $h = k$.

In particolare, detto numero $d_{k,h}$ uguaglia l'ordine del gruppo delle omografie di $S_{r,q}$ trasformanti in sè una quadrica qualunque, di data specie (r, q, h, k); mentre invece il numero complessivo delle quadriche di $S_{r,q}$ di tale specie (per i valori ammissibili di r, h e k) vale

$$\prod_{i=0}^{r} (q^{r+1} - q^i)/[(q - 1)d_{k,h}].$$

Dallo studio — fatto al principio del numero precedente — delle quadriche di S_r per $r = 1, 2$, segue senza difficoltà che il teor. I sussiste per questi valori di r. Potremo quindi supporre $r \geqslant 3$, e dimostrare il teorema per induzione rispetto ad r, ammettendolo per le quadriche degli spazi di dimensione inferiore ad r.

Incominciamo con lo stabilire la prima parte del teor. I per i c o n i di $S_{r,q}$, ossia nell'ipotesi che sia $h > 0$. Se Q e Q' sono due coni della stessa specie di $S_{r,q}$, $S'_{r,q}$, denotiamone rispettivamente i vertici con S_{h-1} ed S'_{h-1}. Questi due spazi sono degli iperpiani se $h = r$; in tale ipotesi, le due quadriche sono manifestamente fra loro omografiche e si ha $k = h$, talchè esse risultano di tipo I. Attualmente il numero delle omografie fra $S_{r,q}$ ed $S'_{r,q}$ trasformanti Q in Q' si determina subito direttamente, e vale

$$q^{r(r+1)/2} \prod_{i=0}^{r-1} (q^{r-i} - 1);$$

e tale numero viene appunto a coincidere col valore fornito per $h = k = r$ dalla formula del teor. I esprimente $d^{\mathrm{I}}_{k,h}$.

Basterà dunque limitarci al caso in cui si abbia $0 < h < r$. In quest'ipotesi, l'eventualità $h = k$ implica che $r + h$ superi $2k$, ed uguagli quindi $2k + 1$, onde Q e Q' non possono che essere di tipo III. Senza fare nessuna restrizione su k (che quindi risulta $\geqslant h$), consideriamo in $S_{r,q}$, $S'_{r,q}$ due spazi S^*_{r-h}, S'^*_{r-h} che siano rispettivamente sghembi con S_{h-1}, S'_{h-1}, e le relative sezioni Q^*, Q'^* con Q, Q'. Dall'ipotesi che Q e Q' siano della stessa specie segue subito (n. 1) che anche Q^* e Q'^* lo sono: sicchè, per l'induzione ammessa, Q^* e Q'^* risultano fra loro omografiche (e precisamente in $d_{k-h,0}$ modi diversi), onde pure Q e Q' possono venir trasformate l'una nell'altra mediante un'omografia fra $S_{r,q}$ ed $S'_{r,q}$.

È chiaro che una qualunque siffatta omografia dovrà mutare S_{h-1} in S'_{h-1}, ed inoltre S^*_{r-h} in un qualsiasi spazio S'^*_{r-h} sghembo con S'_{h-1}. Quest'ultimo spazio può venir scelto conseguentemente in un certo numero di modi; e si verifica tosto che tale numero vale $q^{h(r-h+1)}$. Quando si sia fissato S'^*_{r-h} in uno dei modi anzidetti, l'omografia richiesta sarà soltanto più astretta a subordinare fra S_{h-1} ed S'_{h-1} una qualunque delle omografie che intercedono fra tali spazi, il numero delle quali vale (cfr. SEGRE [2, n. 161])

$$\prod_{i=0}^{h-1} (q^h - q^i)/(q-1),$$

ed a subordinare fra S^*_{r-h} ed S'^*_{r-h} una qualunque delle $d_{k-h,0}$ omografie che mutano Q^* in Q'^*. Fissate poi che siano tali omografie subordinate, l'omografia fra $S_{r,q}$ ed $S'_{r,q}$ induce una ben determinata corrispondenza fra le rette appoggiate ad S_{h-1}, S^*_{r-h} e quelle appoggiate ad S'_{h-1}, S'^*_{r-h}, e rimane univocamente definita quando di un dato punto di una tale retta, distinto dai due punti di appoggio, si assegni il corrispondente sulla retta omologa, pure distinto dai due punti d'appoggio, il che può farsi in $q-1$ modi diversi.

In conclusione si ha quindi

$$d_{k,h} = q^{h(r-h+1)} \prod_{i=0}^{h-1} (q^h - q^i) \cdot d_{k-h,0};$$

dal che, per l'induzione ammessa, seguono subito le formule del teor. I nel caso attuale ($h > 0$).

Infine, qualora si abbia $h = 0$, proveremo la parte restante del teorema poggiando sul seguente l e m m a, del quale — per brevità — omettiamo la non difficile dimostrazione.

Siano: Q e Q' due quadriche non singolari di due spazi S_r, S'_r definiti sopra uno stesso campo arbitrario (finito od infinito); O, O' due loro punti *qualsiansi;* $\bar{S}_{r-1}$, $\bar{S}'_{r-1}$ *gli iperpiani tangenti in* O, O' *a* Q, Q', *e* $\bar{Q}$, $\bar{Q}'$ *le quadriche da essi rispettivamente segate su* Q, Q'. *E si supponga di conoscere un'omografia fra* $\bar{S}_{r-1}$, $\bar{S}'_{r-1}$ *che trasformi* $\bar{Q}$ *in* $\bar{Q}'$ *(e quindi* O *in* O'*). Allora esiste sempre una ed una sola omografia fra* S_r, S'_r *che muti* Q *in* Q' *ed* O *in* O' *subordinando fra* $\bar{Q}$ *e* $\bar{Q}'$ *la data omografia.*

Prendiamo ora due quadriche Q, Q' non singolari qualsiansi di due spazi $S_{r,q}$, $S'_{r,q}$, le quali abbiano la stessa specie (r, q, h, k) (con $h = 0$). Esse contengono lo stesso numero $a_{k,1}$ di punti, e questo numero risulta positivo in virtù dell'ipotesi $r \geqslant 3$ (n. 1). Un'omografia che trasformi Q in Q', dovrà mutare un dato punto O di Q in uno, O', degli $a_{k,1}$ punti di Q'. Siano (come nel lemma) $\bar{S}_{r-1}$, $\bar{S}'_{r-1}$ gli iperpiani tangenti a Q, Q' in O, O', e $\bar{Q}$, $\bar{Q}'$ le relative sezioni. In virtù del teor. II del n. 1, $\bar{Q}$, $\bar{Q}'$ sono della stessa specie $(\bar{r}, q, \bar{h}, \bar{k})$ ed hanno lo stesso tipo delle Q, Q', essendo precisamente:

$$\bar{r} = r - 1, \quad \bar{h} = 1, \quad \bar{k} = k.$$

Poichè $\bar{h} > 0$, esistono — come già sappiamo — esattamente $d_{\bar{k},\bar{h}} = d_{k,1}$ omografie fra $\bar{S}_{r-1}$, $\bar{S}'_{r-1}$ che mutano $\bar{Q}$ in $\bar{Q}'$ e — in base al lemma — ciascuna di queste può venir estesa in uno ed un sol modo in un'omografia trasformante Q in Q'. Risulta pertanto

$$d_{k,0} = a_{k,1}\, d_{k,1};$$

e poichè i valori che così si ottengono per $d_{k,0}$ nei diversi casi in cui Q e Q' siano di tipo I, II, III, e cioè

$$d^{\mathrm{I}}_{k,0} = q^{k^2} \prod_{i=1}^{k} (q^{2i} - 1),$$

$$d^{\mathrm{II}}_{k,0} = 2q^{k(k-1)} \prod_{i=1}^{k} (q^{2i} - 1)/(q^k + 1),$$

$$d^{\mathrm{III}}_{k,0} = 2q^{k(k+1)} \prod_{i=1}^{k+1} (q^{2i} - 1)/(q^{k+1} - 1),$$

coincidono con quelli dati nel teor. I, così la prima parte di questo rimane completamente stabilita.

La seconda parte del teor. I è conseguenza immediata della prima, qualora si ammetta l'e s i s t e n z a in $S_{r,q}$ di tutte le specie che risultano *a priori* possibili in base al n. 1, e si tenga presente (vedi SEGRE [2, n. 161]) che il numero delle omografie fra due $S_{r,q}$ vale $\prod_{i=0}^{r} (q^{r+1} - q^i)/(q - 1)$. La suddètta esistenza si stabilisce poi agevolmente per via algebrica, scrivendo le equazioni di tali quadriche (cfr. p. es. DICKSON [1]), ma segue anche subito direttamente dal procedimento induttivo dianzi adottato. La seconda parte del teor. I viene ulteriormente precisata dal

TEOREMA II. - *Relativamente al numero $e_{r,h}$ delle quadriche specializzate h volte di un $S_{r,q}$ vi sono due casi da distinguere, secondochè la differenza $r-h$ è pari o dispari. Nel primo caso, posto $r-h=2s$, il numero di tali quadriche vale*

$$e'_{r,h}=q^{s(s+1)}\prod_{i=1}^{s}(q^{2i+1}-1)\prod_{i=0}^{h-1}(q^{r-i+1}-1)/\prod_{i=0}^{h-1}(q^{h-i}-1),$$

e le quadriche in questione hanno tutte la stessa specie, ciascuna essendo di tipo I. *Nel secondo caso, posto $r-h=2s-1$, il numero delle quadriche suddette vale*

$$e''_{r,h}=q^{s(s+1)}\prod_{i=1}^{s-1}(q^{2i+1}-1)\prod_{i=0}^{h-1}(q^{r-i+1}-1)/\prod_{i=0}^{h-1}(q^{h-i}-1),$$

e tali quadriche risultano di due specie diverse; precisamente, una parte di esse è di tipo II *e l'altra è di tipo* III, *i numeri degli elementi delle due parti stando fra loro nel rapporto $(q^s+1):(q^s-1)$. Nelle formule precedenti va convenuto, al solito, di sostituire l'unità in luogo dei $\prod\limits_{i=0}^{-1}$ che vengono a comparirvi per $h=0$.*

Stabiliamo anzitutto il teor. II per $h=0$, distinguendo due casi secondochè r è pari o dispari.

Se $h=0$ ed $r=2s$, con le notazioni del n. 1 risulta $k=s$, e le quadriche di cui si tratta sono tutte di tipo I. Dall'ultima e dalla prima formula del teor. I segue allora che è

$$\begin{aligned} e'_{r,0} &= \prod_{i=0}^{2s}(q^{2s+1}-q^i)/[(q-1)d^{\mathrm{I}}_{s,0}]= \\ &=\left[q^{\sum\limits_{0}^{2s} i}\prod_{i=0}^{2s}(q^{i+1}-1)\right]:\left[q^{s^2}(q-1)\prod_{i=1}^{s}(q^{2i}-1)\right]= \\ &=q^{s(s+1)}\prod_{i=1}^{s}(q^{2i+1}-1), \end{aligned}$$

in conformità con la prima formula del teor. II.

Se $h=0$ ed $r=2s-1$, con le notazioni del n. 1 può soltanto risultare $s=k$ oppure $s=k+1$ e, corrispondentemente, le quadriche in discorso sono di tipo II o di tipo III. Detti $e^{\mathrm{II}}_{r,0}$ ed $e^{\mathrm{III}}_{r,0}$ i numeri rispettivi di tali quadriche, dall'ultima e dalla seconda e terza formula del teor. I segue che è:

$$e^{\mathrm{II}}_{r,0} = \prod_{i=0}^{2s-1} (q^{2s} - q^i)/[(q-1)d^{\mathrm{II}}_{s,0}] =$$

$$= \left[q^{\sum\limits_0^{2s-1} i} \prod_{i=0}^{2s-1} (q^{i+1} - 1)\right] : \left[2q^{s(s-1)}(q-1) \prod_{i=1}^{s} (q^{2i} - 1)/(q^s+1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} q^{s^2}(q^s + 1) \prod_{i=1}^{s-1} (q^{2i+1} - 1),$$

$$e^{\mathrm{III}}_{r,0} = \prod_{i=0}^{2s-1} (q^{2s} - q^i)/[(q-1)d^{\mathrm{III}}_{s-1,0}] =$$

$$= \left[q^{\sum\limits_0^{2s-1} i} \prod_{i=0}^{2s-1} (q^{i+1} - 1)\right] : \left[2q^{s(s-1)}(q-1) \prod_{i=1}^{s} (q^{2i} - 1)/(q^s - 1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} q^{s^2}(q^s - 1) \prod_{i=1}^{s-1} (q^{2i+1} - 1),$$

eppertanto

$$e''_{r,0} = e^{\mathrm{II}}_{r,0} + e^{\mathrm{III}}_{r,0} = q^{s(s+1)} \prod_{i=1}^{s-1} (q^{2i+1} - 1),$$

$$e^{\mathrm{II}}_{r,0} : e^{\mathrm{III}}_{r,0} = (q^s + 1) : (q^s - 1),$$

come asserito dal teor. II.

Ci resta ora soltanto più da dimostrare il teor. II per $h > 0$. Ciò potrebbe ottenersi a partire dal teor. I, mediante una verifica diretta di tipo analogo a quella testè svolta per $h = 0$. Tale verifica, anche se priva di difficoltà effettive, si presenterebbe un po' macchinosa dal punto di vista formale. Possiamo però evitarla, osservando che le quadriche specializzate un dato numero h (>0) di volte di un $S_{r,q}$ si ottengono tutte come quadriche non specializzate entro le stelle di centri i diversi S_{h-1} di $S_{r,q}$. Poichè tali S_{h-1} (ved. ad esempio Segre [2, n. 159]) sono in numero di

$$\prod_{i=0}^{h-1} (q^{r-i+1} - 1)/ \prod_{i=0}^{h-1} (q^{h-i} - 1),$$

otteniamo così che questo numero uguaglia (per quel dato h) ciascuno dei rapporti

$$e'_{r,h} : e'_{r-h,0} = e''_{r,h} : e''_{r-h,0} = e^{\mathrm{II}}_{r,h} : e^{\mathrm{II}}_{r-h,0} = e^{\mathrm{III}}_{r,h} : e^{\mathrm{III}}_{r-h,0};$$

e ciò fornisce senz'altro il teor. II per $h > 0$, come conseguenza del caso $h = 0$ già acquisito.

Poichè conosciamo (n. 1) il numero complessivo delle quadriche di $S_{r,q}$, ne discende che:

I numeri $e_{r,h}$, *definiti nel teor.* II, *soddisfano all' identità*

$$e_{r,0} + e_{r,1} + \dots + e_{r,r} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{r(r+3)/2}.$$

3. **Specie e tipi delle sezioni spaziali delle quadriche.** - Sia Q una data quadrica di $S_{r,q}$ ($r \geqslant 2$), che supporremo d'ora innanzi non singolare; va tuttavia avvertito che le varie proprietà che esporremo potrebbero venir estese in modo consimile alle quadriche specializzate, sia pure con qualche maggiore complicazione formale. Ci proponiamo di classificare e numerare le diverse possibilità che gli $S_{r'}$ di $S_{r,q}$ presentano nei riguardi del gruppo delle trasformazioni omografiche di Q in sè, il che equivale a classificare e numerare le sezioni delle diverse specie di Q coi singoli $S_{r'}$ di $S_{r,q}$.

Incominciamo dal caso delle sezioni di Q cogli iperpiani ($r' = r - 1$). Fra queste, ve ne saranno tante di specializzate quanti sono i punti di Q, ossia (con le notazioni del n. 1) $a_{k,1}$. Tutte queste sezioni sono manifestamente della stessa specie $(\bar{r}, \bar{q}, \bar{h}, \bar{k})$, ove

$$\bar{r} = r - 1, \quad \bar{h} = 1, \quad \bar{k} = k,$$

e perciò (n. 2, teor. I) esse risultano fra loro a due a due omografiche. Le rimanenti sezioni iperpiane sono in numero di

$$f_r = (q^{r+1} - 1)/(q - 1) - a_{k,1};$$

dunque, a seconda che Q è di tipo I, II, III, onde r ordinatamente uguaglia $2k$, $2k - 1$, $2k + 1$, avuto riguardo alle espressioni delle $a_{k,1}$ date nel n. 1 risulta:

$$f_r^{\mathrm{I}} = q^{2k}, \quad f_r^{\mathrm{II}} = q^{k-1}(q^k - 1), \quad f_r^{\mathrm{III}} = q^k(q^{k+1} + 1).$$

Dimostreremo ora il

TEOREMA I. - *Se Q è di tipo* II *o* III, *tutte le* f_r^{II} *od* f_r^{III} *sezioni di Q cogli iperpiani non tangenti sono di tipo* I, *sicchè esse risultano a due a due omografiche. Invece, se Q è di tipo* I, *delle* f_r^{I} *sezioni di Q cogli iperpiani non tangenti precisamente* $q^k(q^k + 1)/2$ *sono di tipo* II *(e fra loro omografiche), mentre le altre* $q^k(q^k - 1)/2$ *risultano di tipo* III *(e pure omografiche fra loro).*

Detta (r', q, h', k') la specie della sezione di Q con un iperpiano non tangente, si ha intanto

$$r' = r - 1, \qquad h' = 0.$$

Dunque, se Q è tipo II o III, ossia se r è dispari, r' risulta pari e quella sezione è di tipo I. Se invece Q è di tipo I, ossia se $r = 2k$, risulta $r' = 2k - 1$, onde può soltanto aversi $k' = k$ oppure $k' = k - 1$, e nei due casi rispettivamente la sezione è di tipo II o III.

Gli iperpiani di $S_{r,q}$ la cui sezione con Q presenta la prima di queste ultime due particolarità, sono tutti e soli quelli ottenibili scegliendo uno qualsiasi degli $a^{\mathrm{I}}_{k,k}$ S_{k-1} di Q, e poi prendendo uno qualunque dei q^k iperpiani di $S_{r,q}$ che passano per tale S_{k-1}, ma non per il relativo S_k polare (il quale contiene S_{k-1}). Ogni siffatto iperpiano dà una sezione di tipo II, e lo si ottiene in tal guisa $a^{\mathrm{II}}_{k,k}$ volte, in corrispondenza agli $a^{\mathrm{II}}_{k,k}$ S_{k-1} giacenti nella relativa sezione. Avuto riguardo al corollario del n. 1, risulta così che il numero degli iperpiani in discorso vale

$$a^{\mathrm{I}}_{k,k}\ q^k/a^{\mathrm{II}}_{k,k} = q^k(q^k + 1)/2.$$

Le varie proprietà enunciate nel teor. I seguono ora in modo immediato.

Dualizzando il teor. I, si ottiene la classificazione dei p u n t i di $S_{r,q}$ rispetto a Q. Per ciò che concerne le r e t t e, impiegando le notazioni del n. 1 (il quale fornisce l'espressione delle a nei vari casi) abbiamo il seguente

TEOREMA II. - *Delle $(q^r - 1)(q^{r+1} - 1)/[(q - 1)(q^2 - 1)]$ rette di $S_{r,q}$, precisamente $a_{k,2}$ giacciono su Q, $a_{k,1}(q^{r-2} + \ldots + q + 1 - a_{k-1,1})$ toccano Q (senza stare su Q), $a_{k,1}q^{r-1}/2$ sono corde di Q, e le rimanenti risultano esterne a Q. Il numero di queste ultime rette verrà denotato con g_k (munito quando occorra dell'indicazione del tipo di Q); esso potrà senz'altro venire calcolato, nei vari casi, in base a ciò che precede.*

Basterà giustificare i risultati relativi alle corde ed alle tangenti. Ora ogni corda di Q può venir ottenuta, ed in due modi diversi, scegliendo uno degli $a_{k,1}$ punti di Q, e conducendo per esso una retta di $S_{r,q}$ che non giaccia nel relativo S_{r-1} tangente; poichè queste rette sono in numero di q^{r-1}, il numero complessivo delle corde vale $a_{k,1}q^{r-1}/2$ (che è di fatto sempre un intero). Ogni tangente di Q si ottiene, ed una sola volta, scegliendone come punto di contatto uno qualunque degli $a_{k,1}$ punti di Q, e conducendo per esso una retta che stia nel relativo S_{r-1} tangente, ma che sia distinta dalle generatrici del cono da questo segato su Q; poichè le rette dell'S_{r-1} per detto punto sono in numero di $q^{r-2} + \ldots + q + 1$, e le generatrici di quel cono sono in numero di $a_{k-1,1}$, così il numero complessivo delle tangenti di Q vale proprio $a_{k,1}(q^{r-2} + \ldots + q + 1 - a_{k-1,1})$.

Dal teor. II, tenuto conto del n. 1, si desume subito che è:

$$g_0^{\mathrm{III}} = 1, \qquad g_1^{\mathrm{I}} = q(q-1)/2, \qquad g_1^{\mathrm{II}} = 0, \qquad g_1^{\mathrm{III}} = q^2(q^2+1)/2,$$

$$g_2^{\mathrm{I}} = q^3(q-1)(q^2+1)/2, \qquad g_2^{\mathrm{II}} = q^2(q-1)^2/2, \qquad \text{ecc.}$$

Perverremo a risultati equivalenti a quelli forniti per le g dal teor. II, posti però in forma maggiormente esplicita, come conseguenza del

TEOREMA III. - *L' S_{r-2} polare di una retta l non tangente rispetto ad una qualunque quadrica Q di un $S_{r,q}$ $(r \geqslant 3)$, sega Q secondo una quadrica Q' (non singolare), che è sempre dello stesso tipo di Q nel caso in cui l sia una corda di Q; mentre invece, se l è esterna rispetto a Q e Q è di tipo* I, II *o* III, *la quadrica Q' risulta rispettivamente di tipo* I, III *o* II, *sicchè il suo carattere k' acquista allora ordinatamente il valore $k-1$, $k-2$ o k.*

Se r è p a r i, Q è necessariamente di tipo I ed anche $r-2$ risulta pari, onde Q' è allora necessariamente di tipo I e non v'è null'altro da dimostrare. Se r è d i s p a r i, onde Q è di tipo II o III, anche $r-2$ risulta dispari e quindi di tipo II o III: basterà dimostrare che allora, se l è una corda di Q, le quadriche Q e Q' risultano sempre dello stesso tipo, e viceversa.

Ora infatti, se l incontra Q nei due punti distinti P e P' (entrambi definiti sul campo base di $S_{r,q}$) lo spazio S_{r-2} risulta l'intersezione degli iperpiani S_{r-1}, S'_{r-1} tangenti a Q in P, P'. Inoltre, in virtù del teor. II del n. 1, il cono segato su Q da S_{r-1} ha lo stesso tipo di Q, e viene segato a sua volta da S'_{r-1} secondo una quadrica — coincidente manifestamente con Q' — la quale è ancora di quel medesimo tipo. La parte diretta dell'affermazione fatta alla fine del precedente capoverso è così dimostrata; e da essa segue poi agevolmente la parte inversa.

Poggiando sul teor. III, passiamo a stabilire il

TEOREMA IV. - *I numeri g definiti dal teor.* II *possono venir espressi mediante le a, determinate nel n.* 1, *con le formule*:

$$g_k^{\mathrm{I}} = (q-1)q^{2k-1}a_{k,1}^{\mathrm{I}}/\{2(q+1)\},$$

$$g_k^{\mathrm{II}} = (q-1)q^{2k-2}a_{k,1}^{\mathrm{II}}[(q^{2k-2}-1)/(q-1)-a_{k-1,1}^{\mathrm{II}}]/\{2[(q^{2k-2}-1)/(q-1)-a_{k-2,1}^{\mathrm{III}}](q+1)\}$$

$$g_k^{\mathrm{III}} = (q-1)q^{2k}a_{k,1}^{\mathrm{III}}[(q^{2k}-1)/(q-1)-a_{k-1,1}^{\mathrm{III}}]/\{2[q^{2k}-1)/(q-1)-a_{k,1}^{\mathrm{II}}](q+1)\}.$$

Onde provare questi risultati, valutiamo in due modi diversi quante sono le coppie formate da un piano π che n o n t o c c h i Q, e che quindi seghi Q secondo una conica irriducibile C_2, e da una retta l di di π che sia e s t e r n a a C_2.

Una conica irriducibile C_2 contiene sempre esattamente $q+1$ punti P di Q (n. 1), e può venire ottenuta a partire da ciascuno di tali P come sezione di Q con un un piano π per esso, che non tocchi Q nè in P nè altrove. I piani π di $S_{r,q}$ per P sono tanti quante le rette di un $S_{r-1,q}$, e quindi (cfr. ad esempio SEGRE [2, n. 159]) in numero di

$$(q^{r-1}-1)(q^r-1)/[(q-1)(q^2-1)].$$

Quelli fra essi che toccano Q in P sono i piani per P dell'S_{r-1} tangente in P a Q, onde il loro numero vale:

$$(q^{r-2}-1)(q^{r-}\ \ -1)/[(q-1)(q^2-1)].$$

I piani per P che toccano Q altrove sono poi quelli che, non stando in quell'S_{r-1}, lo incontrano secondo una generatrice del cono da esso segato su Q. Tale cono possiede $a_{k-1,1}$ generatrici, e per ciascuna di queste passano q^{r-2} piani non giacenti in S_{r-1}.

In definitiva, poichè i punti P di Q sono in numero di $a_{k,1}$, ed ognuno dei suddetti piani π proviene nel modo indicato da $q+1$ punti P, ne discende che il numero complessivo di quei piani vale

$$\frac{a_{k,1}}{q+1}\{(q^{r-1}-1)(q^r-1)/[(q-1)(q^2-1)]-$$
$$-(q^{r-2}-1)(q^{r-1}-1)/[(q-1)(q^2-1)]-q^{r-2}a_{k-1,1}\}=$$
$$=q^{r-2}a_{k,1}[(q^{r-1}-1)/(q-1)-a_{k-1,1}]/(q+1).$$

È poi chiaro (cfr. il terzo capoverso del n. 1) che ciascuno di detti piani contiene $q(q-1)/2$ rette l esterne alla relativa C_2, ossia esterne a Q.

Consideriamo, viceversa, una qualunque delle g_k rette di $S_{r,q}$ esterne a Q. Detti S_{r-2} lo spazio polare di l rispetto a Q, e Q' la quadrica segata da questo spazio su Q, i piani π per l non tangenti a Q sono precisamente quelli che congiungono l ad un qualunque punto di S_{r-2} che non stia su Q'. In virtù poi del teor. III, questo numero vale $(q^{r-1}-1)/(q-1)-\overset{\mathrm{I}}{a}_{k-1,1}$, $(q^{r-1}-1)/(q-1)-\overset{\mathrm{III}}{a}_{k-2,1}$, o $(q^{r-1}-1)/(q-1)-\overset{\mathrm{II}}{a}_{k,1}$ secondochè Q è di tipo I, II, o III.

Uguagliando nei tre casi i numeri delle coppie (π, l) determinati dai precedenti due capoversi, e risolvendo rispetto a g_k le relazioni che ne conseguono, si ottengono i risultati espressi dal teor. IV. E si può verificare ch'essi naturalmente coincidono con quelli forniti dal teor. II. Si noti inoltre che dalle due ultime formule del teor. IV segue la

$$\overset{\mathrm{II}}{g}_{k+1}\ \overset{\mathrm{III}}{g}_{k}=[(q-1)q^{2k}/\{2(q+1)\}]^2\overset{\mathrm{II}}{a}_{k+1,1}\ \overset{\mathrm{II}}{a}_{k,1},$$

avente una certa analogia con la prima di tali formule.

Consideriamo da ultimo un qualunque $S_{r'}$ di $S_{r,q}$ $(1<r'<r)$, che non stia su Q, e che quindi seghi Q secondo una quadrica Q', la cui specie verrà denotata con (r', q, h', k'). A norma del n. 1, i caratteri di questa saranno tali che $r'+h'-2k'$ potrà soltanto avere uno dei valori 0, -1, o $+1$, ed allora rispettivamente Q' risulterà di tipo I, II, o III. Un tale spazio $S_{r'}$ tocca la quadrica Q se e soltanto se $h'>0$, nel qual caso esso la tocca precisamente lungo lo spazio $S_{h'-1}$ doppio di Q'; inoltre Q' contiene degli spazi massimi, ciascuno dei quali passa per $S_{h'-1}$, se $h'>0$, ed ha dimensione $k'-1$ $(\leqslant k-1)$: il numero di questi spazi è dato dal corollario del n. 1, e vale esattamente $\overset{j'}{a}_{k',k'}$, ove denotiamo con $j'=\mathrm{I, II, III}$ il tipo di Q', ed ognuno di essi giace manifestamente su Q.

Preso reciprocamente uno qualunque degli $a^j_{k,k'}$ spazi $S_{k'-1}$ giacenti su Q, ove j indichi il tipo di Q, ci domandiamo quali e quanti siano gli spazi $S_{r'}$ per esso che segano su Q una quadrica di specie (r', q, h', k'). Consideriamo all'uopo lo spazio $S^*_{r-k'}$ polare di quell'$S_{k'-1}$ rispetto a Q: esso incontrerà Q secondo una quadrica Q^*, di specie $(r-k', q, k', k)$, la quale risulta un cono di vertice $S_{k'-1}$ avente lo stesso tipo di Q (n. 1). Gli spazi $S_{r'}$ richiesti saranno allora quelli che soddisfanno alle due seguenti condizioni.

1) La quadrica Q' segata su Q da un siffatto $S_{r'}$ non deve contenere spazi di dimensione maggiore di $k'-1$. All'uopo occorre e basta che $S_{r'}$ non contenga nessuno degli $S_{k'}$ generatori del cono Q^*.

2) lo spazio $S_{r'}$ non deve toccare la quadrica Q se $h'=0$ o, se $h'>0$, deve toccarla secondo uno spazio $S_{h'-1}$, necessariamente situato su $S_{k'-1}$. Ciò accade se, e soltanto se, lo spazio congiungente $S_{r'}$ ed $S^*_{r-k'}$ coincide coll'$S_{r,q}$ se $h'=0$ o, se $h'>0$, risulta uno spazio $S_{r-h'}$ (polare di $S_{h'-1}$ rispetto a Q); e a tal fine è manifestamente necessario e sufficiente che $S_{r'}$ ed $S^*_{r-k'}$ si seghino secondo uno spazio, S_s, di dimensione

$$s = r' + (r-k') - (r-h') = r' + h' - k'.$$

Il suddetto S_s contiene $S_{k'-1}$ e, affinchè valga la 1), esso deve avere a comune col cono Q^* il solo vertice $S_{k'-1}$. Avuto riguardo al n. 1, ciò esige che si abbia

$$k'-1 \leqslant s \leqslant (k'-1)+2,$$

il che è pienamente d'accordo con quanto già osservato circa i valori possibili dell'espressione $r'+h'-2k'$. Distinguiamo ora tre casi, secondochè Q' è di tipo $j' = \mathrm{I}$, II, o III.

I) Se Q' è di tipo $j'=\mathrm{I}$, ossia se $r'+h'-2k'=0$, non può che risultare $s=k'$. Allora, in virtù della condizione 1), S_s è uno qualunque degli $S_{k'}$ che giacciono in $S^*_{r-k'}$ e passano per $S_{k'-1}$, senza stare tuttavia su Q^*. Il numero degli $S_{k'}$ che passano per $S_{k'-1}$ e giacciono in $S^*_{r-k'}$ vale $(q^{r-2k'+1}-1)/(q-1)$, quello degli $S_{k'}$ generatori di Q^* è $a^j_{k-k',1}$ (dove $j = \mathrm{I}$, II, III denota il tipo di Q, che coincide con quello di Q^*), sicchè il numero dei suddetti S_s vale

$$(q^{r-2k'+1}-1)/(q-1) - a^j_{k-k',1}.$$

Gli spazi $S_{r'}$ richiesti sono quegli $S_{r'}$ di $S_{r,q}$ che passano per un siffatto $S_s = S_{k'}$, in modo che quest'ultimo ne risulti proprio l'intersezione con $S^*_{r-k'}$. E si vede facilmente che, quando si sia fissato $S_{k'}$ in uno qualunque dei modi indicati, lo spazio $S_{r'}$ può conseguentemente venir scelto in

$$q^{(r-2k')(r'-k')} \prod_{i=0}^{r'-k'-1} (q^{k'-i}-1) / \prod_{i=0}^{r'-k'-1} (q^{r'-k'-i}-1)$$

guise diverse.

II) Se Q' è di tipo $j' = \text{II}$, ossia se $r' + h' - 2k' = -1$, non può che risultare $s = k' - 1$, onde S_s deve necessariamente coincidere con l'$S_{k'-1}$ inizialmente scelto. Dunque, attualmente gli spazi $S_{r'}$ richiesti sono quegli $S_{r'}$ di $S_{r,q}$ che passano per tale $S_{k'-1}$, in modo ch'esso ne risulti proprio l'intersezione con $S^*_{r-k'}$, sicchè il loro numero vale

$$q^{(r-2k'+1)(r'-k'+1)} \prod_{i=0}^{r'-k'} (q^{k'-i} - 1) / \prod_{i=0}^{r'-k'} (q^{r'-k'+1-i} - 1).$$

III) Se Q' è di tipo $j' = \text{III}$, ossia se $r' + h' - 2k' = +1$, non può che risultare $s = k' + 1$. Allora, in virtù della condizione 1), S_s è uno qualunque degli $S_{k'+1}$ che giacciono in $S^*_{r-k'}$ e passano per il vertice $S_{k'-1}$ del cono Q^*, senza tuttavia contenere nessun $S_{k'}$ generatore di questo cono. In virtù dei teoremi II e IV (applicati a Q^* come quadrica non degenere entro la stella di centro $S_{k'-1}$), il numero di siffatti $S_{k'+1}$ vale $g^j_{k-k'}$, e può venire espresso in funzione di q e di $k - k'$ nel modo ivi specificato. Nelle ipotesi attuali, gli spazi $S_{r'}$ richiesti sono quegli $S_{r'}$ di $S_{r,q}$ che passano per uno dei suddetti $S_{k'+1}$ in modo che quest'ultimo ne risulti proprio l'intersezione con $S^*_{r-k'}$; sicchè si vede facilmente che, per ciascuna delle $g^j_{k-k'}$ scelte suddette, i corrispondenti $S_{r'}$ risultano in numero di

$$q^{(r-2k'-1)(r'-k'-1)} \prod_{i=0}^{r'-k'-2} (q^{k'-i} - 1) / \prod_{i=0}^{r'-k'-2} (q^{r'-k'-1-i} - 1).$$

In ciascuno dei tre casi possibili I, II, III, possiamo — in base a ciò che precede — valutare in due modi diversi il numero delle coppie $(S_{r'}, S_{k'-1})$ tali che $S_{r'}$ seghi su Q una quadrica Q' di specie (r', q, h', k') ed $S_{k'-1}$ sia uno spazio (di dimensione massima) giacente su Q' (e cioè appartenente a Q ed a $S_{r'}$). Uguagliando le due espressioni così ottenibili per quel numero, perveniamo ad una relazione che senz'altro fornisce il numero dei suddetti $S_{r'}$. Ne consegue il

TEOREMA V. - *Sia Q una qualunque quadrica non singolare di $S_{r,q}$ ($r \geqslant 3$), di specie $(r, q, 0, k)$, di cui $j = \text{I, II, III}$ denoti il tipo. Le sezioni di Q con gli spazi $S_{r'}$ subordinati di $S_{r,q}$ ($1 < r' < r$) sono tutte quadriche Q' di specie (r', q, h', k'), dove h' e k' denotano interi non negativi tali che $h' \leqslant k' \leqslant k$ e che $r' + h' - 2k'$ valga 0, -1, o $+1$. Viceversa, in ciascuno di questi tre casi — corrispondentemente ai quali Q' riesce di tipo $j' = \text{I, II}$, o III — scelti ad arbitrio r', h', k' soddisfacenti alle condizioni indicate, esistono sempre delle sezioni Q' di Q che li ammettono quali caratteri della propria specie; ed il numero $n = n^{j'}$ di siffatte Q' si esprime in tali tre casi rispettivamente* *nella forma:*

$$n^{\mathrm{I}}=[(q^{r-2k'+1}-1)/(q-1)-a^{j}_{k-k',\,j}]\cdot[q^{(r-2k')(r'-k')}\prod_{i=0}^{r'-k'-1}(q^{k'-i}-1)/\prod_{i=0}^{r'-k'-1}(q^{r'-k'-i}-1)]a^{j}_{k,k'}/a^{\mathrm{I}}_{k,k'},$$

$$n^{\mathrm{II}}=[q^{(r-2k'+1)(r'-k'+1)}\prod_{i=0}^{r'-k'}(q^{k'-i}-1)/\prod_{i=0}^{r'-k'}(q^{r'-k'+1-i}-1)]a^{j}_{k,k'}/a^{\mathrm{II}}_{k',k'},$$

$$n^{\mathrm{III}}=g^{j}_{k-k'}[q^{(r-2k'-1)(r'-k'-1)}\prod_{i=0}^{r'-k'-2}(q^{k'-i}-1)/\prod_{i=0}^{r'-k'-2}(q^{r'-k'-1-i}-1)]a^{j}_{k,k'}/a^{\mathrm{III}}_{k',k'},$$

dove le a, g vengono fornite rispettivamente dal teor. I *del n.* 1 *e dal teor.* IV *del presente numero.*

Il precedente teor. V include, come caso estremamente particolare, il teor. I di questo numero. Così infatti, ad esempio, si supponga Q di tipo $j=\mathrm{I}$, ossia $r=2k$, e si voglia il numero n^{III} delle sezioni iperpiane di tipo III della Q. Per esse risulta:

$$r'=r-1, \qquad k'=k-1, \qquad h'=0,$$

e quindi (in virtù del teor. IV del presente numero e del teor. I del n. 1):

$$g^{j}_{k-k'}=g^{\mathrm{I}}_{1}=q(q-1)/2,$$

$$a^{j}_{k,k'}=a^{\mathrm{I}}_{k,k-1}=\prod_{i=2}^{k}(q^{i}+1)\cdot(q^{k}-1)/(q-1),$$

$$a^{\mathrm{III}}_{k',k'}=a^{\mathrm{III}}_{k-1,k-1}=\prod_{i=2}^{k}(q^{i}+1);$$

sicchè l'ultima formula del teor. V, avuto anche riguardo alla $r=2k$, ora porge:

$$n^{\mathrm{III}}=q^{k}(q^{k}-1)/2,$$

in conformità appunto col teor. I.

Osserviamo infine che i numeri n definiti nel teor. V debbono soddisfare ad un certo numero di identità, ottenibili nel modo seguente. Si scelga un qualunque intero r' soddisfacente alle limitazioni $1<r'<r$, e si considerino i vari $S_{r'}$ di $S_{r,q}$. Essi sono complessivamente (cfr. ad esempio Segre [2, n. 159]) in numero di

$$\prod_{i=0}^{r'}(q^{r-i+1}-1)/\prod_{i=0}^{r'}(q^{r'-i+1}-1);$$

e questo numero deve manifestamente eguagliare la somma dei numeri n delle quadriche delle varie specie giacenti su Q ed aventi r' come primo carattere, alla quale somma si aggiunga — se $r'\leqslant k-1$ — il numero $a_{k,r'+1}$ (fornito dal teor. I del n. 1) degli $S_{r'}$ che stanno su Q.

§ II. - ALCUNE PROPRIETÀ DELLE CURVE PIANE ALGEBRICHE.

4. Una generalizzazione dei teoremi di Menelao e di Ceva. - Nel presente numero, e nel successivo, ci riferiremo ad enti definiti in spazi sopra un campo γ qualsiasi (finito od infinito). Nelle dimostrazioni potremo ammettere senza restrizioni essenziali che γ sia algebricamente chiuso, in quanto è lecito sostituire ivi a γ la propria chiusura algebrica. Indicheremo con C_n (o C_n^0, $C_n^1, \ldots$) una curva piana algebrica d'ordine n sopra γ, e con G_n (o G_n^0, $G_n^1, \ldots$) un gruppo di n punti definito su γ. Chiaramente, i punti di un G_n avranno in questo opportune molteplicità (positive) e potranno appartenere singolarmente a γ o ad un'estensione algebrica di γ; osservazioni analoghe valgono relativamente alle C_n.

Ci proponiamo di dimostrare la seguente estensione del teorema di Menelao (incluso in essa per $n = 1$). In un piano proiettivo π sopra γ, consideriamo un triangolo di cui denotiamo i vertici con A_1, A_2, A_3 ed i lati a questi rispettivamente opposti con a_1, a_2, a_3. Scelto poi comunque in π un punto U non situato su nessuna di tali rette, sia U_i la proiezione di U da A_i su a_i. Allora un punto P della retta a_i può venir determinato mediante una coordinata non omogenea, λ_i, assumendo (per $i=1, 2, 3$):

$$\lambda_1 = (A_2\ A_3\ U_1\ P), \qquad \lambda_2 = (A_3\ A_1\ U_2\ P), \qquad \lambda_3 = (A_1\ A_2\ U_3\ P).$$

È subito visto che, introdotte in π le coordinate proiettive omogenee $(x_1, x_2, x_3$ aventi $A_1A_2A_3$ come triangolo fondamentale ed U come punto unità, e dette (x_1, x_2, x_3) le coordinate del suddetto punto P, risulta ordinatamente

$$\lambda_1 = x_2/x_3, \qquad \lambda_2 = x_3/x_1, \qquad \lambda_3 = x_1/x_2;$$

se dunque P non coincide con nessun punto A, la corrispondente λ risulta finita e non nulla (e viceversa). Ciò premesso, possiamo enunciare il

TEOREMA I. - *Una C_n^0 di π che non passi per nessun vertice del triangolo $A_1A_2A_3$ sega i lati di questo secondo tre G_n, i $3n$ punti dei quali offrono esattamente $3n - 1$ condizioni indipendenti alle curve piane algebriche d'ordine n che debbano contenerli. Più precisamente, scelti sui lati a_1, a_2, a_3 del triangolo tre gruppi di n punti G_n^1, G_n^2, G_n^3 non contenenti nessun punto A, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una C_n^0 che non passi per nessun punto A e che seghi sulle rette a_1, a_2, a_3 rispettivamente i gruppi G_n^1, G_n^2, G_n^3, è che il prodotto delle coordinate λ relative ai $3n$ punti di quei gruppi valga $(-1)^n$.*

Posto per abbreviare

$$N_h = \begin{cases} (n - h + 2)(n - h + 1)/2 & \text{se } h \leqslant n \\ 0 & \text{se } h > n, \end{cases}$$

si ha intanto che le C_n di π costituiscono un sistema lineare ∞^{N_0-1}.

Poichè la prima parte del teor. I è evidente per $n = 1, 2$, basterà stabilirla nell'ipotesi che sia $n \geqslant 3$. Detti G_n^1, G_n^2, G_n^3 i gruppi di punti ordinatamente segati da C_n^0 sulle rette a_1, a_2, a_3, è subito visto che la più generale C_n passante per i $3n$ punti di quei gruppi è data da

$$C_n = C_n^0 + a_1 a_2 a_3 C_{n-3},$$

ove si denoti con un medesimo simbolo una curva ed una forma nelle x che uguagliata a zero la rappresenti, e dove C_{n-3} indichi un'arbitraria forma di grado $n-3$ nelle x. Le suddette C_n costituiscono pertanto un sistema lineare ∞^{N_3}; e la prima parte del teor. I segue tosto da ciò che risulta:

$$(N_0 - 1) - N_3 = 3n - 1.$$

Si rilevi che, fra le C_n testè considerate, quelle che contengono un punto A ammettono conseguentemente le rette a_1, a_2, a_3 quali componenti, e costituiscono il sistema lineare $\infty^{N_3 - 1}$ delle C_n spezzate in queste rette ed in una C_{n-3} variabile.

Supposto ora $n \geqslant 1$, e scritta esplicitamente l'equazione di C_n^0 nella forma

$$c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + c_3 x_3^n + \ldots = 0,$$

ove i puntini hanno un ovvio significato e le c denotano elementi non nulli di γ, i gruppi G_n^i vengono forniti dalle equazioni

$$\begin{aligned} G_n^1: &\quad x_1 = 0, \quad c_2 x_2^n + \ldots + c_3 x_3^n = 0, \\ G_n^2: &\quad x_2 = 0, \quad c_3 x_3^n + \ldots + c_1 x_1^n = 0, \\ G_n^3: &\quad x_3 = 0, \quad c_1 x_1^n + \ldots + c_2 x_2^n = 0. \end{aligned}$$

Conseguentemente si ha:

$$\prod_{P \in G^1_n} \lambda_1 = (-1)^n c_3/c_2, \qquad \prod_{P \in G^2_n} \lambda_2 = (-1)^n c_1/c_3, \qquad \prod_{P \in G^3_n} \lambda_3 = (-1)^n c_2/c_1,$$

sicchè il prodotto di tutte le λ risulta sempre uguale a $(-1)^n$. Ciò dimostra la necessità della condizione enunciata nella seconda parte del teor. I.

Per stabilire la sufficienza di questa condizione, si supponga ch'essa sia soddisfatta da tre gruppi G_n^1, G_n^2, G_n^3 giacenti ordinatamente su a_1, a_2, a_3, e non contenenti nessun punto A. La suddetta condizione definisce univocamente uno, P, dei $3n$ punti di questi gruppi, quando si conosca la posizione dei rimanenti $3n - 1$. Pertanto, in virtù di quanto sopra, esistono C_n passanti per $3n - 1$ punti siffatti ma per nessun punto A, in quanto $(N_0 - 1) - (3n - 1) > N_3 - 1$; poichè ciascuna di esse deve avere ulteriormente a comune il punto P con $a_1\, a_2\, a_3$, ciò completa la dimostrazione del teorema.

OSSERVAZIONE I. - Il teor. I precisa risultati ben noti, relativi al caso più generale del passaggio di una curva piana per i punti comuni ad altre due; relativamente a tali risultati, cfr. ad es. B. SEGRE [1]. Rileviamo che n punti di una retta offrono sempre n condizioni indipendenti alle C_n. Così pure, scelti comunque su due rette a_1, a_2 due gruppi G_n^1, G_n^2 che non contengano il punto $A_3 = a_1 a_2$, i loro $2n$ punti offrono sempre $2n$ condizioni indipendenti alle C_n che li debbano contenere; invero, con le precedenti notazioni e supposto $n \geqslant 2$ (in quanto il caso $n = 1$ risulta ovvio), tali C_n sono quelle esprimibili nella forma

$$C_n = C_n^0 + a_1 a_2 C_{n-2}$$

e costituiscono dunque un sistema lineare ∞^{N_2}, con

$$N_2 = (N_0 - 1) - 2n.$$

Questo sistema non sega su a_3 la g_n^n completa, ma soltanto la g_n^{n-1} dei gruppi G_n esprimibili — al variare di G_{n-2} su a_3 — nella forma:

$$G_n = G_n^3 + A_1 A_2 G_{n-2}.$$

OSSERVAZIONE II. - Il teor. I ha manifesto carattere proiettivo. Nella formulazione della sua seconda parte interviene il punto U, di cui al secondo capoverso del presente numero; tuttavia, tale formulazione risulta indipendente dalla scelta di questo punto.

OSSERVAZIONE III. - Una retta r_i che passi per A_i, ma che non sia una retta a, può — per $i = 1, 2, 3$ — venir rappresentata con un'equazione del tipo

$$r_1: \quad x_3 = \mu x_2, \qquad r_2: \quad x_1 = \mu x_3, \qquad r_3: \quad x_2 = \mu x_1,$$

ove μ denoti un elemento non nullo di γ. È subito visto che, entro i fasci di centri A_i, $-\mu$ è la duale della coordinata λ dianzi introdotta sulle rette a_i. Per dualità, dal teor. I si ha quindi subito la seguente estensione del teorema di CEVA (incluso in essa per $n = 1$).

TEOREMA II. - *Presi tre gruppi di n rette di π passanti per i punti A_1, A_2, A_3 e distinte dalle rette a, affinchè in π esista un inviluppo algebrico di classe n che non tocchi nessuna delle a ed ammetta le $3n$ rette assegnate quali tangènti spiccate dai punti A_1, A_2, A_3, occorre e basta che il prodotto delle coordinate μ relative alle $3n$ rette assegnate uguagli l'unità.*

5. Ulteriore estensione dei precedenti teoremi. - Allo scopo di completare la trattazione del n. 4, premettiamo un

LEMMA. - *Presi comunque $n+1$ punti distinti sopra una retta S_1, gli $n+1$ G_n di S_1 costituiti — nei vari modi possibili — da n di tali punti risultano sempre linearmente indipendenti fra loro.*

Non è restrittivo supporre che S_1 contenga qualche punto distinto dagli $n+1$ punti assegnati, poichè, in caso contrario, basterebbe sostituire al campo γ di definizione di S_1 una sua qualunque estensione. Introduciamo allora su S_1 una coordinata non omogenea x, che diventi ∞ in un punto distinto da quegli $n+1$ punti; e siano $x=c_i$ (per $i=1, 2, ..., n+1$) le coordinate di tali punti. Posto per abbreviare

$$f(x)=(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_{n+1}),$$

gli $n+1$ G^n considerati nel lemma si ottengono uguagliando a zero i polinomi

$$f^{(i)}(x)\equiv f(x)/(x-c_i).$$

Un' identità della forma

$$k_1f^{(1)}(x)+k_2f^{(2)}(x)+\dots+k_{n+1}f^{(n+1)}(x)=0,$$

ove le k denotino costanti, può aver luogo soltanto per valori tutti nulli delle k_i, come si vede agevolmente ponendo in essa $x=c_i$ ed osservando che le c risultano per ipotesi a due a due distinte fra loro; e ciò dimostra il lemma.

Consideriamo ora k rette distinte $a_1, a_2, ..., a_k$ di un piano π, tali che per nessun punto di π passino più di due di esse, talchè i $k(k-1)/2$ punti $A_{ij}=a_ia_j$ $(i \neq j;\ i, j=1, 2, ..., k)$ risulteranno distinti fra loro. Si scelga poi arbitrariamente su a_i un gruppo G_n^i di n punti $(i=1, 2, ..., k)$, nessuno dei quali sia un punto A, e si definiscano le N come nel n. 4. I casi $k=1$, 2 e $k=3$ essendo già esauriti dall'Oss. I e dal teor. I del n. 4, ci proponiamo di dimostrare il seguente

TEOREMA I$_k$. - *Se $k \geqslant 4$, affinchè in π esista una C_n^0 che non passi per nessun punto A e che seghi precisamente G_n^i su a_i (per $i=1, 2, ..., k$), occorre e basta che sussistano le $k(k-1)(k-2)/6$ condizioni fornite dal teor. I del n. 4 per i G_n assegnati sui lati di ciascun triangolo formato da tre distinte delle k rette a. In tale ipotesi, le C_n di π passanti per i dati gruppi G_n^i costituiscono un sistema lineare ∞^{N_k}.*

Notiamo anzitutto come la seconda parte di questo teorema sia conseguenza agevole della prima. Invero, se $k>n$, ciascuna delle C_n ivi considerate non può che coincidere con C_n^0, e si ha d'altro canto $N_k=0$. Se invece $k \leqslant n$, le C_n suddette sono quelle espresse dalla

$$C_n = C_n^0 + a_1 a_2 \dots a_k C_{n-k},$$

al variare della forma C_{n-k} (che si riduce ad una costante se $k = n$), e sono quindi proprio ∞^{N_k}.

In base all'Oss. I ed al teor. I del n. 4, il teor. I_k risulta già verificato per $k = 1, 2, 3$. Potremo dunque stabilirlo per induzione rispetto a k, ammettendo la validità dei teoremi I_{k-1} ed I_{k-2}. E basterà anzi dimostrare la sufficienza delle condizioni di cui alla prima parte del teor. I_k, in quanto la necessità di tali condizioni segue immediatamente dal teor. I del n. 4. In altri termini, ammesso che dette condizioni risultino tutte soddisfatte, dovremo provare l'esistenza di una C_n^0 che contenga i k gruppi G_n^i ma nessun punto A.

In virtù del teor. I_{k-1}, il sistema lineare Σ delle C_n di π passanti per i gruppi

$$G_n^2,\ G_n^3, \dots,\ G_n^k \tag{1}$$

ha la dimensione N_{k-1}. Inoltre, in base al teor. I_{k-2}, ciascuno dei sistemi lineari Σ_i costituiti, per $i = 2, 3, \dots, k$, dalle C_n di π che passano per tutti i gruppi (1) tranne al più G_n^i, ha la dimensione N_{k-2}; ed è poi chiaro che Σ risulta contenuto totalmente in ciascuno dei Σ_i. Pertanto, dette g_n^d, $g_n^{d_i}$ le serie lineari segate rispettivamente da Σ, Σ_i sulla retta a_1, si ha che la serie lineare g_n^d sta in ognuna delle $g_n^{d_i}$. Di più, ancora in forza del teor. I_{k-1}, ciascuna delle $g_n^{d_i}$ contiene il gruppo G_n^1; poichè la nostra meta è palesemente raggiunta ove si dimostri che anche g_n^d contiene G_n^1, così l'assunto rimarrà stabilito quando si faccia vedere che *g_n^d risulta precisamente l'intersezione delle $g_n^{d_2}, g_n^{d_3}, \dots, g_n^{d_k}$.*

Valutiamo intanto le d, d_i. All'uopo osserviamo che, se $k > n$, nessuna curva di Σ può contenere come parte la retta a_1; invece, se $k \leqslant n$, le curve di Σ aventi a_1 quale componente sono quelle spezzate in $a_1 a_2 \dots a_k$ ed in una C_{n-k} variabile. Sia in un caso che nell'altro, le curve di Σ contenenti a_1 come parte costituiscono dunque un sistema lineare di dimensione $N_k - 1$. Poichè Σ ha la dimensione N_{k-1}, così (tenuto conto della definizione delle N data nel n. 4) ne discende che è:

$$d = N_{k-1} - N_k = \begin{cases} n - k + 2 & \text{se } n \geqslant k - 2 \\ 0 & \text{se } n < k - 2; \end{cases}$$

e si noti che il valore di d nella prima alternativa si riduce a quello, 0, della seconda nel caso in cui sia $n = k - 2$. In modo perfettamente analogo si vede che, per ogni $i = 2, 3, \ldots, k$, risulta:

$$d_i = N_{k-2} - N_{k-1} = \begin{cases} n - k + 3 & \text{se } n \geqslant k - 2 \\ 0 & \text{se } n < k - 2. \end{cases}$$

Pertanto, se $n < k - 2$ si ha

$$d_2 = d_3 = \ldots = d_k = d \qquad (= 0),$$

e quindi (siccome g_n^d sta in ciascuna delle $g_n^{d_i}$):

$$g_n^{d_2} = g_n^{d_3} = \ldots = g_n^{d_k} = g_n^d,$$

talchè g_n^d risulta allora effettivamente l'intersezione delle $g_n^{d_2}, g_n^{d_3}, \ldots, g_n^{d_k}$.

Se invece $n \geqslant k - 2$, avuto anche riguardo alla $k \geqslant 4$ si ha che valgono le

$$d_2 = d_3 = \ldots = d_k = d + 1 < n.$$

Dunque allora g_n^d, che — come sappiamo — è contenuta in ciascuna delle serie lineari $g_n^{d_2}, g_n^{d_3}, \ldots, g_n^{d_k}$, potrebbe non risultare l'intersezione di queste ultime soltanto qualora si avesse

$$g_n^{d_2} = g_n^{d_3} = \ldots = g_n^{d_k}. \tag{2}$$

Ammettiamo per assurdo che valgano le (2), e denotiamo con G_{n-k+2} un qualunque gruppo di $n - k + 2$ punti della retta a_1. In virtù della definizione di $g_n^{d_i}$, si ha che questa serie lineare contiene il gruppo di n punti formato aggregando a G_{n-k+2} il gruppo di $k - 2$ punti che si ottiene da A_{12}, $A_{13}, \ldots, A_{1k}$ sopprimento A_{1i}. In forza del lemma, ne discende che alla serie lineare data dai vari membri delle (2) appartiene il gruppo di n punti formato aggregando a G_{n-k+2} un qualunque gruppo di $k - 2$ punti della retta a_1; sicchè quella serie lineare coincide con la g_n^n completa di a_1, e si ha dunque

$$d_2 = d_3 = \ldots = d_k = n,$$

in contrasto con un risultato precedente. Questa contraddizione completa la dimostrazione del teor. I_k.

Per dualità, dal teor. I_k se ne deduce subito un altro che, per brevità, non stiamo ad enunciare esplicitamente. Questo teorema duale, estensione del teor. II del n. 4, verrà in seguito richiamato come TEOREMA II_k.

6. Intorno al numero dei punti delle C_n di un $S_{2,q}$. - Denoteremo genericamente con h_n il numero dei punti di $S_{2,q}$ giacenti su di una C_n di $S_{2,q}$. Mentre si ha sempre $h_n > 0$ per $n = 1$ e per $n = 2$ (n. 1), per $n \geqslant 3$ può ben risultare $h_n = 0$. Così, ad esempio, si verifica subito direttamente che *nessuno* *dei 7 punti di $S_{2,2}$ giace sulla cubica di $S_{2,2}$ rappresentata dall'equazione:*

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1 x_2 x_3 = 0\,;$$

l'asserto segue anche da ciò che, in un'opportuna estensione cubica del campo base dell'$S_{2,2}$, quella cubica viene a spezzarsi in tre rette non formanti fascio, fra loro coniugate in tale estensione.

Incominciamo con lo stabilire il

TEOREMA I. – *Per una qualunque C_n che si spezzi in n rette distinte di $S_{2,q}$, il numero h_n dei suoi punti soddisfa alla doppia limitazione*

$$nq - n(n-3)/2 \leqslant h_n \leqslant nq + 1.$$

Vale il segno di uguaglianza nella limitazione inferiore se, e soltanto se, per nessun punto di $S_{2,q}$ escono più di due rette di C_n; e nella limitazione superiore se, e soltanto se, le n rette di C_n appartengono ad uno stesso fascio.

Detti $P_1, P_2, \ldots, P_k$ i punti di $S_{2,q}$ comuni a due o più rette di C_n, denotiamo con r_i il numero delle rette di C_n uscenti da P_i. È chiaro che risulta

$$2 \leqslant r_i \leqslant n \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

e che le due alternative considerate nella seconda parte del precedente enunciato equivalgono rispettivamente a ciò che si abbia l'uguaglianza in tutte le limitazioni inferiori, od in tutte quelle superiori (che allora si riducono ad una sola, in quanto il secondo caso implica che sia $k = 1$).

Il numero delle coppie ordinate di rette distinte di C_n è $n(n-1)$, ed ognuna di tali coppie consta di due rette segantisi in un punto P_i. Poichè, d'altro canto, il numero delle coppie ordinate di rette distinte di C_n uscenti da P_i vale $r_i(r_i - 1)$, si ha dunque

$$n(n-1) = \sum_{i=1}^{k} r_i(r_i - 1).$$

Da qui e dalle precedenti limitazioni si ricavano le

$$2 \sum_{i=1}^{k} (r_i - 1) \leqslant n(n-1) \leqslant n \sum_{i=1}^{k} (r_i - 1),$$

le due suddette alternative equivalendo a ciò che qui rispettivamente si abbia l'uguaglianza nella limitazione inferiore od in quella superiore.

Notiamo infine che ciascuna delle n rette di C_n contiene $q+1$ punti, e che nell'insieme complessivo dei loro $n(q+1)$ punti il punto P_i viene a figurare contato r_i volte. Si ha pertanto

$$h_n = n(q+1) - \sum_{i=1}^{k} (r_i - 1).$$

Basta ora combinare questo risultato con quello del precedente capoverso per dedurne il teor. I.

OSSERVAZIONE I. - La limitazione superiore $h_n \leqslant nq + 1$ vale *a fortiori* — ed anzi col segno di disuguaglianza — se C_n si spezza in n rette che non siano tutte distinte, ed anche nell'ipotesi che qualcuna di tali rette non sia definita nel campo base di $S_{2,q}$, ma soltanto in un'opportuna estensione di questo (ond'essa viene a contenere al più un sol punto di $S_{2,q}$).

Ci proponiamo di dimostrare il

TEOREMA II. - *Per una C_n di $S_{2,q}$, che (in nessuna estensione del campo base) non si spezzi in n rette, il numero h_n dei suoi punti soddisfa alla limitazione*

$$h_n \leqslant (n-1)q + [n/2] + 1. \tag{3}$$

Questa può venire migliorata colla

$$h_n \leqslant (n-1)q + [n/2], \tag{4}$$

nell'ipotesi che C_n sia del tutto priva di componenti rettilinee.

Incominciamo con lo stabilire la seconda parte di questo teorema. Sia dunque C_n una curva di $S_{2,q}$ che non abbia nessuna componente rettilinea: essa allora, con ogni retta di $S_{2,q}$ che la incontri in un punto, avrà in esso una determinata molteplicità d'intersezione ($\geqslant 1$ e $\leqslant n$). Nelle ipotesi attuali si ha $n \geqslant 2$, onde la (4) certamente sussiste se $h_n < 2$.

Supposto dunque $h_n \geqslant 2$, consideriamo entro l'insieme $\mathfrak{J}$ degli h_n punti di C_n la corrispondenza, T, che associa fra loro due punti A, B distinti di C_n — definiti sul campo base di $S_{2,q}$ — quando la retta AB ha in A con C_n molteplicità d'intersezione superiore all'unità. Denotato poi con a_A ($\geqslant 0$) il numero dei punti B distinti che T associa ad un dato $A \in \mathfrak{J}$, e con b_B ($\geqslant 0$) il numero dei punti A distinti che T^{-1} associa ad un dato $B \in \mathfrak{J}$, poniamo

$$a' = \min_{A \in \mathfrak{J}} a_A, \qquad a'' = \max_{A \in \mathfrak{J}} a_A,$$

$$b' = \min_{B \in \mathfrak{J}} b_B, \qquad b'' = \max_{B \in \mathfrak{J}} b_B.$$

Queste definizioni implicano intanto senz'altro le limitazioni

$$a' \leqslant a'', \qquad b' \leqslant b'';$$

essendo poi

$$\sum_{A \in \mathfrak{J}} a_A = \sum_{B \in \mathfrak{J}} b_B, \tag{5}$$

in quanto ciascuno dei due membri uguaglia il numero delle coppie ordinate di punti A, B distinti di $\mathfrak{J}$ che si corrispondono in T, questo numero risulta non inferiore ad $a'h_n$ e $b'h_n$, e non superiore ad $a''h_n$ e $b''h_n$, onde se ne traggono ancora le precedenti limitazioni ed inoltre le

$$a' \leqslant b'', \qquad b' \leqslant a''.$$

Ciò premesso, e posto per abbreviare

$$m = [n/2],$$

distinguiamo due casi secondochè risulta $a' \leqslant m - 1$ od $a' \geqslant m$.

Se $a' \leqslant m - 1$, consideriamo un punto $A \in \mathfrak{J}$ — certamente esistente — per il quale si abbia $a_A = a'$. Fra le $q + 1$ rette di $S_{2,q}$ uscenti da A ve n'è almeno una avente in A incontro almeno bipunto con C_n; ogni eventuale intersezione ulteriore di tale retta con C_n è un punto B corrispondente ad A in T: dunque il numero di quelle intersezioni ulteriori non supera

$$a_A = a' \leqslant m - 1,$$

onde la suddetta retta per A ha in tutto al più m intersezioni distinte con C_n. Poichè ciascuna delle q rette restanti per A incontra C_n in al più $n - 1$ punti distinti da A, ne segue senz'altro la (4).

Se invece $a' \geqslant m$, risulta $b'' \geqslant a' \geqslant m$, e quindi $b'' \geqslant m$. Consideriamo un punto $B \in \mathfrak{J}$ per il quale si abbia $b_B = b''$; e siano $A_1, A_2, \ldots, A_{b''}$ i punti A trasformati di B mediante T^{-1}. Almeno una delle $q + 1$ rette di $S_{2,q}$ uscenti da B incontra C_n in B contato almeno due volte, e dunque in al più $n - 2$ punti ulteriori; ognuna delle rimanenti q rette per B ha poi al più $n - 1$ intersezioni ulteriori con C_n: ma va rilevato che, fra le intersezioni ulteriori con le varie rette per B, figurano i punti $A_1, A_2, \ldots, A_{b''}$ contati ciascuno almeno due volte. Risulta pertanto

$$\begin{aligned} h_n &\leqslant 1 + (n-2) + [(n-1)q - b''] \leqslant \\ &\leqslant (n-1)q + (n-1-m) = (n-1)q + [(n-1)/2], \end{aligned}$$

onde anche nelle presenti ipotesi segue la (4).

Mostreremo ora come, poggiando sul teor. I e relativa Oss. I, e sulla seconda parte del teor. II (testè stabilita), si possa dedurre la prima parte di questo teorema. Riferiamoci dunque ad una C_n che, in nessuna estensione del campo di base, non si spezzi in n rette; se C_n non ammette nessuna componente rettilinea, per essa vale — come s'è visto — la (4) e quindi *a fortiori* la (3). Ci rimane quindi soltanto da considerare il caso in cui C_n abbia qualche componente rettilinea e dunque risulti:

$$C_n = C_r + C_s \qquad (\text{con } r \geqslant 1,\ s \geqslant 1,\ r + s = n),$$

ove C_r consti di r rette e C_s sia del tutto priva di componenti rettilinee.

Detti h_r, h_s i numeri di punti di $S_{2,q}$ che rispettivamente stanno su C_r, C_s, si ha intanto palesemente

$$h_n \leqslant h_r + h_s;$$

inoltre, applicando a C_r, C_s i risultati richiamati al principio del presente capoverso, otteniamo le:

$$h_r \leqslant rq + 1, \qquad h_s \leqslant (s-1)q + [s/2] \leqslant (s-1)q + [n/2].$$

Da tutte queste limitazioni, avuto riguardo alla $r + s = n$, segue subito la (3).

OSSERVAZIONE II. - Tanto nella (3) quanto nella (4), fornite dal teor. II, può talora sussistere l'*uguaglianza*, come mostrano i seguenti *esempi*. Per ciò che concerne la (3), basta considerare una C_3 ($n = 3$) che si spezzi in una conica irriducibile di $S_{2,q}$ ed in una retta esterna a tale conica, e ricordare un risultato del n. 1. In quanto alla (4), si consideri la cubica irriducibile di $S_{2,3}$ ($n = q = 3$) rappresentata dall'equazione

$$x_1^3 + x_3^3 - x_1 x_3^2 - x_2^2 x^3 = 0;$$

i punti di $S_{2,3}$ giacenti su di essa risultano in numero di $h_3 = 7$, essendo precisamente quelli di coordinate

$$(0,\ 1,\ 0), \qquad (0, \pm 1,\ 1) \qquad (1, \pm 1,\ 1), \qquad (-1, \pm 1,\ 1),$$

onde vale di fatto la (4) col segno di uguaglianza.

OSSERVAZIONE III. - Le considerazioni dell'Oss. II non escludono che, in certi casi, i risultati espressi dal teor. II possano venire affinati. Assumiamo ad esempio $n = 4$, q dispari, e consideriamo una C_4 di $S_{2,q}$ che sia non singolare e per la quale risulti $h_4 \geqslant 81$. Su C_4 potrà esservi un certo numero $r \leqslant 24$ di punti R di flesso, ed un certo numero $r' \leqslant 2.28 = 56$ di punti R' di contatto di C_4 con una sua bitangente, con la condizione che sia i punti R che i punti R' appartengano al campo base, γ, di $S_{2,q}$; invero, poichè q è dispari, è lecito applicare le formule di PLÜCKER alla curva definita da C_4 sopra la chiusura algebrica di γ. I punti A di C_4 distinti dai punti R ed R' suddetti sono in numero positivo ($= h_4 - r - r' \geqslant 81 - 24 - 56 = 1$): distinguiamo due casi, secondochè per qualcuno o per nessuno di essi la relativa tangente a C_4 abbia a non incontrare ulteriormente C_4 in qualche punto di $S_{2,q}$ (definito su γ).

Nel primo caso, come pure nell'ipotesi che C_4 ammetta un punto di ondulazione (definito su γ), basta valutare il numero delle intersezioni di C_4 con le singole rette di $S_{2,q}$ uscenti da un punto A che soddisfi alla condizione indicata, o che sia un punto di ondulazione di C_4, per vedere che dev'essere $h_4 \leqslant 3q + 1$.

Alla stessa conclusione giungeremo nel secondo caso, e nell'ipotesi che C_4 non abbia punti di ondulazione sopra γ. È chiaro che allora a_A assume il valore 2 in ogni punto A che non sia un punto R od R', mentre risulta invece $a_A = 1$ se A è un punto R od R'. Attualmente la (5) fornisce dunque:

$$\sum_{B \in \mathfrak{J}} b_B = r + r' + 2(h_4 - r - r') =$$
$$= 2h_4 - (r + r') \geqslant 2h_4 - 80.$$

Se per ogni punto B di C_4 si avesse $b_B \leqslant 1$, il primo membro di queste relazioni sarebbe $\leqslant h_4$, ond'esse implicherebbero la $h_4 \leqslant 80$, che contraddirebbe il supposto. Pertanto, in corrispondenza ad almeno un punto B dev'essere $b_B \geqslant 2$; e basta valutare il numero delle intersezioni di C_4 con le singole rette di $S_{2,q}$ uscenti da un punto B siffatto, per ottenere la $h_4 \leqslant 3q + 1$.

È poi facile sincerarsi che questa limitazione vale anche se C_4 è singolare, purchè C_4 non abbia componenti rettilinee. A parziale miglioramento della (4), otteniamo così che:

Il numero h_4 dei punti di $S_{2,q}$ — con q dispari — situati su di una qualunque C_4 di $S_{2,q}$, che non abbia componenti rettilinee, soddisfa alla limitazione

$$h_4 \leqslant \min(80,\ 3q + 1).$$

OSSERVAZIONE IV. - Se per una C_n di $S_{2,q}$ risulta $h_n = nq + 1$, si ha intanto che dev'essere $n \leqslant q + 1$, in quanto il numero h_n dei punti di C_n non può superare quello $(q + 1)q + 1$ dei punti di $S_{2,q}$. Ne discende che, se vale la $h_n = nq + 1$, resta escluso che possa sussistere una delle (3), (4), sicchè — in forza del teor. II — C_n deve spezzarsi in n rette. In virtù poi del teor. I e dell'Oss. I, tali rette appartengono ciascuna ad $S_{2,q}$ e sono n rette distinte di un fascio. Pertanto:

Una C_n di $S_{2,q}$ che contenga $nq + 1$ punti di $S_{2,q}$, risulta necessariamente spezzata in n rette distinte di $S_{2,q}$ appartenenti ad un medesimo fascio.

Così, ad esempio (per $n = 4$, $q = 3$), si constata direttamente che la C_4 di $S_{2,3}$ di equazione

$$x_2x_3(x_2^2 - x_3^2) + x_3x_1(x_3^2 - x_1^2) + x_1x_2(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

contiene tutti i $13 = nq + 1$ punti di $S_{2,3}$. E tale C_4 si spezza effettivamente nelle 4 rette di $S_{2,3}$ uscenti dal punto (1, 1, 1), in quanto il primo membro della sua equazione può anche venir scritto nella forma

$$(x_3 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 + x_3).$$

Ne consegue il fatto, a prima giunta paradossale, che *esistono omografie di $S_{2,3}$ che non lasciano fissa la suddetta C_4, ma che trasformano in sè l'insieme dei suoi punti.*

7. Sul numero delle bitangenti delle curve piane. - Facciamo ora alcune considerazioni elementari sulle bitangenti delle C_n piane, le quali ci verranno utili più tardi.

In base alle classiche formule di PLÜCKER, il numero d delle bitangenti della C_n generale di un S_2 sopra il campo complesso è dato da

$$d = n(n-2)(n-3)(n+3)/2.$$

A questo risultato si può anche giungere nel modo seguente. Si consideri su C_n la corrispondenza algebrica che associa al generico punto di C_n ciascuno dei suoi $n-2$ tangenziali. Scelta poi genericamente una retta l di S_2, le tangenti a C_n in punti fra loro omologhi nella corrispondenza suddetta segano l in punti che si corrispondono in una nuova corrispondenza, T. Si vede facilmente che T ha gli indici $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)(n-2)(n+1)$, e che i suoi punti uniti sono quelli segati su l dalle $3n(n-2)$ tangenti di flesso e dalle d bitangenti di C_n, contati sia gli uni che gli altri due volte, ai quali vanno aggiunte le n intersezioni di l e C_n contate ciascuna $(n-2)(n+1)$ volte. In base al principio di CHASLES risulta quindi

$$n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n+1) = 2d + 6n(n-2) + n(n-2)(n+1),$$

onde la formula precedente.

Le suddette argomentazioni si trasportano integralmente senza difficoltà alla C_n generale di un S_2 sopra un campo γ qualsiasi, sotto le condizioni che γ sia a l g e b r i c a m e n t e c h i u s o ed abbia c a r a t t e r i s t i c a $p \neq 2$ (la necessità della prima condizione è evidente; per la seconda, cfr. SEGRE [6] ed un altro lavoro dello stesso autore di prossima pubblicazione, concernente il caso $p=2$). Quando γ sia del tipo testè specificato, se si specializza C_n in una qualunque C_n^0 di S_2 che sia *priva di componenti multiple*, il gruppo G_d delle d bitangenti di C_n viene di conseguenza a specializzarsi in un ben determinato gruppo G_d^0 di d rette di S_2, univocamente determinato da C_n^0. Ed è chiaro che una retta l di S_2 che abbia a comune con C_n^0 (sopra γ) r_l punti distinti, avendo in ciascuno di questi molteplicità d'intersezione con C_n^0 superiore all'unità, conta in G_n^0 almeno $r_l(r_l-1)/2$ volte. Se dunque C_n^0 ammette più rette l siffatte, deve risultare

$$\sum_l r_l(r_l-1) \leqslant 2d = n(n-2)(n-3)(n+3).$$

Questa limitazione varrà poi *a fortiori* nell'ipotesi che γ, di caratteristica $\neq 2$, n o n sia algebricamente chiuso, e ci si limiti a rette che abbiano il suddetto comportamento con C_n s o p r a γ. Ciò si vede subito considerando la chiusura algebrica $\bar{\gamma}$ di γ, ed applicando il precedente risultato alla curva indotta da C_n quando si ampli il campo base di S_2 da γ a $\bar{\gamma}$.

§ III. - I k-ARCHI PIANI

8. Generalità sui k-insiemi. - Ogni sottoinsieme di un $S_{r,q}$ è necessariamente un insieme di un numero finito,

$$k \leqslant 1 + q + q^2 + \ldots + q^r,$$

di punti di $S_{r,q}$, e lo si chiamerà brevemente un *k-insieme*; il numero k verrà detto l'*ordine* di quest'ultimo. È evidente che ogni k-insieme è dato dalla totalità dei punti (sul relativo campo base) di qualche *varietà algebrica* di $S_{r,q}$, e che anzi una siffatta varietà algebrica può sempre venir scelta in più modi (cfr. ad esempio l'ultimo capoverso del n. 6).

Da questo punto di vista può quindi dirsi che *qualsiasi proposizione geometrica relativa ad un $S_{r,q}$ esprime delle proprietà di geometria algebrica;* ma lo studio di tali proposizioni può venir delimitato e condotto in due modi assai diversi, e cioè con riferimento ad enti che rispettivamente siano varietà algebriche o k-insiemi opportunamente definiti. La prima impostazione è quella che sta p. es. alla base del § I e del n. 6 di questo lavoro; essa potrebbe dar luogo a molteplici ricerche ulteriori, sulle quali però qui per brevità sorvoliamo. Sulla seconda impostazione s'imperniano il presente § III ed il successivo § IV, dedicati allo studio di taluni k-insiemi di tipi particolarmente interessanti. Tale studio risulta assai più significativo e complesso di quanto a tutta prima non ci si potrebbe attendere, ed ancor più lo sarebbe quello dei k-insiemi generali.

Relativamente a questi ultimi ci limiteremo qui ad alcune semplici considerazioni concernenti il caso piano, estendibili senza difficoltà agli spazi superiori, le quali pongono implicitamente numerose questioni, e potrebbero offrire così lo spunto per una vasta categoria d'indagini ulteriori.

Dato un qualunque k-insieme K di $S_{2,q}$, si fissi ad arbitrio un intero n positivo. Allora ad ogni C_n di $S_{2,q}$ resta associato un intero

$$\nu = \nu(C_n),$$

dato dal numero ($\geqslant 0$) dei punti comuni a K e C_n. Lo studio della distribuzione degli interi ν in corrispondenza alle varie C_n di $S_{2,q}$ offre manifesto interesse; particolare rilievo ha poi la considerazione degli interi

$$M_n = \min_{C_n} \nu, \qquad N_n = \max_{C_n} \nu,$$

e la determinazione del modo com'essi vengono a dipendere da n, specie per i valori più piccoli di n.

Così, ad esempio, si vede subito che è $N_n = k$ non appena si abbia $k \leqslant n(n+3)/2$, mentre invece risulta

$$n(n+3)/2 \leqslant N_n \leqslant k$$

se $n(n+3)/2 < k$. Si dimostra inoltre (SEGRE [8]) che:

Se per un k-insieme di $S_{2,q}$ risulta $N_1 = 2$, $N_2 \geqslant q/2+2$, allora ne discende che è $N_2 = k$, ossia il k-insieme è contenuto in una conica irriducibile, salvo che q sia pari, nel qual caso può anche risultare $N_2 = k-1$ ed allora il k-insieme consta di $k-1$ punti di una conica e del nucleo di questa.

Questo risultato fornisce parziale risposta al seguente interessante problema, sul quale però qui non aggiungeremo altro. Fissato k, e detto n il più grande intero tale che $n(n+3)/2$ sia inferiore a k, si tratterebbe di *caratterizzare le successioni di interi $N_1, N_2, \ldots, N_n$ tali che esista qualche k-insieme di $S_{2,q}$ che 'li ammetta quali caratteri N.*

La considerazione degli interi $\nu(C_1)$, e quindi pure di M_1 ed N_1, conserva significato ed importanza per k-insiemi di un piano grafico anche non desarguesiano. In particolare, molti degli sviluppi dei successivi nn. 9-11 valgono ancora per insiemi siffatti, con ovvie varianti inessenziali.

Notiamo infine che ogni k-insieme K definisce univocamente un *insieme complementare*, $S_{2,q} - K$, il quale consta di $q^2 + q + 1 - k$ punti, detti i *punti di $S_{2,q}$ esterni a K.*

9. Generalità sui k-archi di $S_{2,q}$. - Un k-insieme di $S_{2,q}$ verrà chiamato un *k-arco*, e brevemente denotato con k_q, se per esso il carattere N_1 (di cui al n. 8) acquista il suo valore minimo $N_1 = 2$, ossia se *mai tre punti dell'insieme risultano allineati.*

Relativamente ad un dato k_q, gli interi $\nu(C_1)$ (di cui al n. 8) possono soltanto assumere i valori 0, 1, 2. In altri termini, rispetto a k_q le rette di $S_{2,q}$ si distribuiscono in tre diverse categorie, da dirsi rispettivamente *esterne, tangenti*, e *secanti* (o *corde*), secondochè esse hanno 0, 1, o 2 punti a comune con k; l'unico punto comune a k_q e ad una sua tangente chiamasi il relativo *punto di contatto*, dicendosi anche che k_q e la tangente *si toccano* in tale punto.

Per un punto A arbitrariamente fissato di k_q passano $k-1$ secanti; sicchè è chiaro che ciascuna delle rimanenti $(q+1)-(k-1)$ rette del fascio di centro A tocca k_q in A. Pertanto:

Un k_q ammette sempre lo stesso numero

$$t = q - k + 2$$

di tangenti in ogni suo punto.

Poichè dev'essere ovviamente $t \geqslant 0$, ne segue che in ogni caso risulta $k \leqslant q+2$, l'uguaglianza $k = q + 2$, implicando che k_q sia del tutto privo di tangenti. Pertanto, in quest'ultimo caso, i punti di k_q si distribuiscono in $k/2$ coppie di punti distinti allineati con un punto esterno (arbitrariamente fissato), sicchè allora k, e quindi pure q, dev'essere un numero pari. Ne discende che:

Secondochè q è pari o dispari (*ossia a seconda che il campo base ha caratteristica $p = 2$ o $p > 2$*), *il massimo di k per i vari k-archi di $S_{2,q}$ vale $q+2$ o $q+1$. Un k_q per il quale k raggiunga quel massimo chiamasi un' o v a l e.*

È subito visto che il massimo suddetto viene effettivamente raggiunto, sia nel c a s o p a r i che nel c a s o d i s p a r i. Infatti, in base al n. 1, si ha intanto che:

Se q è dispari, ogni conica irriducibile di $S_{2,q}$ è un $(q+1)_q$, ossia risulta un' ovale.

È da rilevare che questa proprietà ammette un' i n v e r s a, dimostrandosi (SEGRE [3,4]) che:

Se q è dispari, ogni $(q+1)_q$ è una conica.

Riotterremo poi questa proposizione (n. 14), come caso particolare di altre assai più generali. Si ha inoltre subito che:

Se q è pari, ossia della forma 2^h, si ottiene un' ovale $(q+2)_q$ aggregando ai punti di una conica irriducibile di $S_{2,q}$ il relativo nucleo.

Questo risultato ammette ancora un i n v e r s o per $h = 1, 2, 3$; invece in tutti gli altri casi ($h \geqslant 4$) — con una sola eventuale eccezione per $h = 6$ — esistono ovali di $S_{2,2^h}$ n o n o t t e n i b i l i in alcun modo a partire da una conica coll'aggregare a questa il suo nucleo (SEGRE [7]; cfr. altresì LUNELLI e SCE [2]). La completa classificazione delle o v a l i n e l c a s o p a r i è tuttora un problema insoluto, di notevole rilievo. Ancora più significativo è lo studio — che faremo parzialmente in seguito (nn. 13-15) — della c o m p l e t e z z a dei k_q, dicendo (per definizione) che

un k-arco di $S_{2,q}$ è completo od incompleto, secondochè esso non è od è contenuto in qualche $(k+1)$-arco di $S_{2,q}$.

È evidente, in base a ciò che precede, che *ogni k_q o è esso stesso completo, oppure è un sottoinsieme di qualche arco completo* (non necessariamente determinato univocamente da k_q); e che, in particolare, *ogni ovale risulta completa.* Invece, sia nel caso dispari (SEGRE [5]) che nel caso pari (TALLINI [1]), *ogni q-arco di $S_{2,q}$ risulta incompleto.* Anche quest'ultimo risultato rientra in altri assai più generali, che stabiliremo più tardi (nn. 14, 13).

10. **Equazioni diofantee inerenti ad un k_q.** - Dato un k-arco K di $S_{2,q}$, ad ogni punto O di $S_{2,q}$ e s t e r n o a K resta associato un intero i ($\geqslant 0$) — che denomineremo l'*indice* di O (rispetto a K) — esprimente il numero

delle corde di K passanti per O. Se j ($\geqslant 0$) denota il numero delle tangenti di K uscenti da O, risulta manifestamente

$$2i + j = k;$$

sicchè, posto per abbreviare

$$l = [k/2],$$

valgono le

$$j \equiv k \pmod 2, \qquad 0 \leqslant i \leqslant l.$$

Avuto anche riguardo al n. 9, la prima di queste relazioni mostra fra l'altro che:

Se k è dispari, per ogni punto del piano di un k-arco passa qualche tangente di questo.

Notiamo inoltre che:

Aggregando ad un k-arco un punto O ad esso esterno si ottiene un $(k+1)$-arco se, e soltanto se, il punto O ha l'indice zero.

Ne discende che, detto c_i ($\geqslant 0$) il numero dei punti esterni a K d'indice i,

il k-arco risulta completo nel caso, e nel caso soltanto, ch'esso abbia $c_0 = 0$.

Gli $l + 1$ interi testè definiti:

$$c_0, c_1, \dots, c_l \tag{6}$$

sono manifestamente caratteri proiettivi di K, e risultano legati dalle seguenti tre equazioni diofantee. Si ha anzitutto la

$$\sum_{i=0}^{l} c_i = q^2 + q + 1 - k, \tag{7}$$

conseguenza immediata del fatto che i $q^2 + q + 1 - k$ punti esterni a K si distribuiscono in $l + 1$ insiemi disgiunti di $c_0, c_1, \dots, c_l$ elementi, rispettivamente costituiti dai punti (esterni) d'indice $0, 1, \dots, l$. Valutando poi in due modi diversi il numero delle coppie costituite da una corda di K e da un punto esterno a K giacente su di essa, si ottiene la

$$\sum_{i=0}^{l} i c_i = \binom{k}{2}(q - 1). \tag{8}$$

Infine, esprimendo il fatto ovvio che sono tante le coppie formate da un quadrangolo inscritto in K e da uno dei suoi punti diagonali, quante le coppie di corde di K segantisi in un punto esterno, si giunge alla

$$\sum_{i=0}^{l} \binom{i}{2} c_i = 3\binom{k}{4}. \tag{9}$$

Accanto agli $l+1$ caratteri (6), determinati da K in quell'ordine nel modo indicato, possiamo introdurne altri, definiti come segue a meno dell'ordine. Numeriamo comunque le $k(k-1)/2$ corde di K ed indichiamo con r la r-ma di tali corde; denotiamo poi con d_i^r il numero (≥ 0) dei punti esterni a K che stanno sulla corda r e che sono d'indice i ($r=1, 2, \ldots, k(k-1)/2$; $i=1, 2, \ldots, l$). Poichè i punti di r esterni a K sono in numero di $q-1$ e si distribuiscono in l insiemi disgiunti di $d_1^r, d^r, \ldots, d_l^r$ elementi, rispettivamente d'indice $1, 2, \ldots, l$, così risulta:

$$\sum_{i=1}^{l} d_i^r = q-1 \qquad (r=1, 2, \ldots, k(k-1)/2). \tag{10}$$

Valutando poi in due modi diversi il numero delle coppie costituite da una corda di K e da un punto esterno a K d'indice i giacente su essa, si ottiene la

$$\sum_{r=1}^{k(k-1)/2} d_i^r = ic_i \qquad (i=1, 2, \ldots, l). \tag{11}$$

Infine, contando in due modi diversi quante son le corde di K distinte dalla r che escono dai singoli punti di r esterni a K, si perviene alla

$$\sum_{i=2}^{l} (i-1)d_i^r = \binom{k-2}{2} \qquad (r=1, 2, \ldots, k(k-1)/2). \tag{12}$$

Notiamo che, sommando i due membri della (10) rispetto ad $r=1, 2, \ldots, k(k-1)/2$ ed i due membri della (11) rispetto ad $i=1, 2, \ldots, l$, e confrontando poi fra loro le due relazioni risultanti, si ricade nella (8). Parimente, se si sommano fra loro a membro a membro le (10), (12), si ottiene la

$$\sum_{i=1}^{l} id_i^r = (k-2)(k-3)/2 + q - 1;$$

basta ora sommare i due membri di questa rispetto ad $r=1, 2, \ldots, k(k-1)/2$, e confrontare quindi con la relazione che si deduce dalla (11) moltiplicandone i due membri per i e sommando poi rispetto ad $i=1, 2, \ldots, l$, per giungere alla

$$\sum_{i=1}^{l} i^2 c_i = k(k-1)(k-2)(k-3)/4 + (q-1)k(k-1)/2, \tag{13}$$

la quale risulta altresì conseguenza immediata delle (8), (9).

Diremo che un k_q è *simmetrico* quando, con le precedenti notazioni, d_i^r risulta i n d i p e n d e n t e d a r per $i=1, 2, \ldots, l$. Condizioni n e c e s s a r i e affinchè ciò accada, fornite senz'altro dalla (11), sono che *$2ic_i$ sia divisibile per $k(k-1)$* ($i=1, 2, \ldots, l$); e queste condizioni, se k è un numero primo dispari, implicano che $c_1, c_2, \ldots, c_l$ siano divisibili per k.

Avuto riguardo alla (7) ed al fatto — precedentemente acquisito — che un k-arco completo ha $c_0 = 0$, ne discende che:

Affinchè per un dato numero k primo dispari possa esistere qualche k_q completo e simmetrico, occorre che k divida $q^2 + q + 1$.

Per esempi concreti al riguardo veggasi il n. 15. A quelli può venire aggiunto il caso $k = 7$, $q = 11$, che risulta aritmeticamente possibile (cfr. il primo capoverso del n. 15) in quanto, per tali valori di k e q, le equazioni diofantee (7)-(12) rimangono soddisfatte ove si assuma $c_0 = 0$, $c_1 = 63$, $c_2 = 42$, $c_3 = 21$, $d^r = 3$, $d_2^r = 4$, $d_3^r = 3$.

11. **Indice e rango di un k-arco.** - Dato un k-arco K, il più piccolo ed il più grande degli interi $i = 0, 1, \ldots, l$ tali che il corrispondente carattere c_i (n. 10) risulti non nullo, saranno rispettivamente denominati l'*indice* e il *rango* di K, e designati con a e b. Risulta chiaramente

$$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant l.$$

Inoltre, in virtù del n. 10,

Un k-arco è completo se, e soltanto se, esso ammette l'indice a positivo.

Proveremo ora che:

Affinchè un k_q abbia l'indice ed il rango uguali fra loro, occorre e basta che q risulti pari e k_q sia un'ovale (ossia si abbia $k = q + 2$), nel qual caso è sempre di fatto $a = b = q/2 + 1$.

Che nelle condizioni indicate si abbia $a = b = q/2 + 1$, segue in modo pressoché immediato dai nn. 9, 10. Basterà dunque dimostrare la necessità di quelle condizioni, ossia — avuto ancora riguardo ai nn. 9, 10 — l'incompatibilità delle $a = b$, $k \leqslant q + 1$.

Consideriamo un qualunque k_q avente $a = b$. Per esso, con le notazioni del n. 10, dev'essere:

$$c_i = d_i^r = 0 \qquad \text{se } i \neq a,$$

onde dalla (10) si trae

$$d_a^r = q - 1 \qquad\qquad (r = 1, 2, \ldots, k(k-1)/2),$$

e le (11), (12), (7) rispettivamente forniscono le:

$$ac_a = (q-1)k(k-1)/2, \qquad (a-1)(q-1) = (k-2)(k-3)/2,$$
$$c_a = q^2 + q + 1 - k.$$

Se ora eliminiamo le a, c_a fra le ultime tre equazioni, otteniamo la

$$(q - k + 2)[2(q - k + 1)q + (k-1)(k-2)] = 0;$$

e poichè questa risulta manifestamente incompatibile con la $k \leqslant q + 1$, ne discende l'asserto.

Dalle precedenti definizioni dei caratteri a e b, segue subito che le (7), (8), (13) equivalgono alle

$$\sum_{i=a}^{b} c_i = q^2 + q + 1 - k,$$

$$\sum_{i=a}^{b} ic_i = (q-1)k(k-1)/2,$$

$$\sum_{i=a}^{b} i^2 c_i = k(k-1)(k-2)(k-3)/4 + (q-1)k(k-1)/2.$$

Sostituendo le espressioni così fornite per le tre somme a primo membro nelle relazioni evidenti

$$a \leqslant \sum_{i=a}^{b} ic_i / \sum_{i=a}^{b} c_i \leqslant b, \qquad a \leqslant \sum_{i=a}^{b} i^2 c_i / \sum_{i=a}^{b} ic_i \leqslant b$$

(ove nessuna uguaglianza può sussistere, se non nel caso dianzi trattato in cui $a = b$), se ne traggono delle *limitazioni per l'indice a e per il rango b di un k-arco* che, per brevità, omettiamo però di scrivere esplicitamente. Un'altra limitazione si ricava similmente dalla

$$\sum_{i=a}^{b} (i-a)(i-b)c_i \leqslant 0,$$

ossia dalla

$$a \left\{ b \sum_{i=a}^{b} c_i - \sum_{i=a}^{b} ic_i \right\} \leqslant \left\{ b \sum_{i=a}^{b} ic_i - \sum_{i=a}^{b} i^2 c_i \right\}.$$

In virtù di ciò che precede, se si esclude che sia $a = b$, tanto l'una che l'altra delle due espressioni entro graffe risulta positiva, onde si trae che:

Per un k_q che abbia $k \neq q+2$, l'indice a ed il rango b soddisfano alla limitazione:

$$a \leqslant \frac{2(b-1)(q-1)k(k-1) - k(k-1)(k-2)(k-3)}{4b(q^2+q+1-k) - 2(q-1)k(k-1)}. \tag{14}$$

Ne discende che:

Se per un k_q che abbia $k \neq q+2$ il rango b soddisfa alla

$$b < \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2(q-1)k(k-1) - 4(q^2+q+1-k)}, \tag{15}$$

allora k_q risulta certamente i n c o m p l e t o.

Ed invero, se vale la (15), il secondo membro della (14) è inferiore all'unità; dunque il primo membro, che è un intero $a \geqslant 0$, non può ch'essere nullo, onde l'asserto.

Poichè $b \leqslant l = [k/2]$, la (15) certamente sussiste se è:

$$(16) \qquad 2[k/2]\{(q-1)k(k-1)-2(q^2+q+1-k)\}<k(k-1)(k-2)(k-3).$$

Orbene, se k è pari, sicchè allora $2[k/2]=k$, si può sopprimere il fattore k dai due membri della (16) e quindi scrivere la risultante limitazione sotto la forma

$$(q-k+2)\{(k-1)(k-2)-2q\}<0;$$

in quest'ultima il primo fattore risulta positivo (n. 9), essendo per ipotesi $k \neq q+2$, ond'esso pure può venire omesso. Se k è dispari, sicchè allora $2[k/2]=k-1$, si può sopprimere il fattore $k-1$ dai due membri della (16); poichè ciascuno dei due membri della relazione a cui si perviene in tal guisa è un intero pari, così — aggiungendo 2 al primo membro — si vede che detta relazione risulta equivalente alla

$$(q-k+1)\{k(k-3)-2q\}\leqslant 0,$$

ove il primo fattore è certamente positivo se k_q non è un'ovale. Si conclude che:

Un k-arco di $S_{2,q}$ è sempre incompleto qualora si supponga che k sia abbastanza piccolo rispetto a q, e precisamente se:

$$q \geqslant \begin{cases} k(k-3)/2+2 & \textit{per } k \textit{ pari} \\ k(k-3)/2 & \textit{per } k \textit{ dispari} \end{cases}$$

(il k-arco, fra l'altro, non potendo allora essere un'ovale).

12. **Proprietà algebriche delle tangenti di un k-arco.** - Consideriamo un qualunque k-arco K di $S_{2,q}$, per il quale risulti

$$3 \leqslant k \leqslant q+1;$$

allora K, in ogni suo punto, ammette un numero fisso positivo

$$t=q-k+2$$

di tangenti (n. 9). Scegliamo poi tre punti A_1, A_2, A_3 distinti qualsiansi di K: essi non saranno allineati, e potranno quindi venire presi quali punti fondamentali di un sistema di coordinate proiettive omogenee (x_1, x_2, x_3) in $S_{2,q}$.

Denoteremo con P uno qualunque dei $k-3$ punti di K distinti da A_1, A_2, A_3, e con r una qualunque delle $3(q-1)$ rette di $S_{2,q}$ passanti per uno ed uno solo dei punti A_1, A_2, A_3. Tali rette saranno quelle rappresentate dalle singole equazioni

$$x_3=\mu x_2, \qquad x_1=\mu x_3, \qquad x_2=\mu x_1,$$

ove μ è un parametro — coordinata della r nel fascio di centro il punto A che essa contiene — assumente (una ed una sola volta) tutti i valori non nulli del campo base di $S_{2,q}$. In virtù di una nota estensione del teorema di

WILSON (ved. ad esempio SEGRE [2, n. 59]), il prodotto di tali valori uguaglia sempre $(-1)^q$.

Rileviamo ora che le $3t$ rette che toccano K in uno dei punti A_1, A_2, A_3 possono precisamente ottenersi dalle $3(q-1)$ rette r suddette, coll'omettere le $3(k-3)$ rette del tipo A_1P, A_2P, A_3P. Poichè, in virtù del teorema di CEVA (n. 4), il prodotto delle coordinate μ relative alle 3 rette congiungenti A_1, A_2, A_3 con uno stesso punto P (non situato su nessun lato del triangolo $A_1 A_2 A_3$) vale precisamente $+1$, ne consegue che:

Il prodotto delle coordinate μ relative alle $3t$ tangenti a K in tre suoi punti A_1, A_2, A_3 distinti qualsiansi vale sempre $(-1)^q$.

Tale prodotto uguaglia quindi l'unità se q è pari; esso poi non uguaglia l'unità, ma è invece il suo quadrato che l'uguaglia, se q è dispari. Basta pertanto applicare il teor. II del n. 4 (se $k=3$) ed il teor. II_k del n. 5 (se $k \geqslant 4$), per inferirne senz'altro i seguenti due teoremi, relativi rispettivamente al caso pari ed al caso dispari.

TEOREMA I. - *Se q è pari e $3 \leqslant k \leqslant q+1$, ad o g n i k-arco K di $S_{2,q}$ può venire associato un inviluppo a l g e b r i c o Γ di classe $t = q-k+2$, non contenente come parte nessuno dei fasci col centro su K, in modo che le kt tangenti di K coincidano precisamente colle rette di Γ uscenti dai singoli punti di K.*

TEOREMA II. - *Se q è dispari e $k \geqslant 3$, un inviluppo Γ del tipo considerato nel teor. I non esiste. Ad o g n i k-arco K di $S_{2,q}$ può ora invece venire associato un inviluppo a l g e b r i c o Δ di classe $2t$, non contenente come parte nessuno dei fasci col centro su K, in modo che le rette di Δ uscenti da un qualunque punto A di K siano le t rette (distinte) tangenti in A a K contate ciascuna doppiamente. Ne discende che un' eventuale componente multipla di Δ non può essere che doppia, senza tuttavia che Δ possa ridursi ad un inviluppo di classe t da contarsi due volte.*

13. **Sulla completezza dei k_q nel caso in cui q sia pari.** - Preso un qualunque k-arco K di $S_{2,q}$, nell'ipotesi in cui q sia pari e $k \geqslant 3$, consideriamo in relazione ad esso l'inviluppo Γ di cui al teor. I del n. 12, e distinguiamo due alternative secondochè Γ contiene o non contiene come componente qualche fascio.

Nel primo caso, in base alla definizione di Γ, il centro O di un fascio componente di Γ non appartiene a K, ed ogni retta congiungente O ad un punto A di K t o c c a K in A, ossia non incontra K fuori di A. Pertanto

$$K' = K \cup O$$

è un k'-arco, con $k' = k+1$, sicchè K risulta i n c o m p l e t o.

Nel secondo caso, possiamo applicare a Γ la duale della seconda parte del teor. II del n. 6. Poichè, per definizione di Γ, le kt tangenti di K sono

kt rette distinte di $S_{2,q}$ definite ciascuna sul campo base ed appartenenti a Γ, così nelle attuali ipotesi dev'essere:

$$kt \leqslant (t-1)q + [t/2],$$

ossia

$$(q - t + 2)t \leqslant (t-1)q + [t/2].$$

Pertanto, se si suppone che sia

$$q > t^2 - 2t + [t/2] \tag{17}$$

la precedente relazione non sussiste, sicchè — non potendo presentarsi la seconda alternativa — dovrà allora necessariamente presentarsi la prima. Ne consegue che attualmente K può venire ampliato in un k'-arco K', con $k' = k + 1$, avente quindi in ogni punto $t' = q - k' + 2 = t - 1$ tangenti. Se K' non è un'ovale, ossia se $t' \geqslant 1$ e $t \geqslant 2$, la (17) implica la

$$q > t'^2 - 2t' + [t'/2],$$

sicchè K' sarà a sua volta contenuto in qualche k''-arco, con $k'' = k' + 1 = k + 2$; e così via. Ne risulta l'esistenza di (almeno) un'ovale K^* contenente K, ottenibile coll'aggregare a K un insieme di t punti O opportunamente scelti.

L'argomentazione precedente non esclude naturalmente la possibilità che vi siano altre ovali contenenti K. Ammessa tale possibilità, sia P un punto di un'ovale siffatta, che è lecito assumere non situato su K^*. È chiaro allora che nessuna corda di K può passare per P, in quanto in caso contrario la nuova ovale verrebbe ad avere tre punti distinti a comune con una tale corda. Dunque ogni retta congiungente P ad un punto A di K incontra K^* in un punto ulteriore (n. 9), il quale — non potendo stare in K — è necessariamente un punto O di K^* ma non di K. Poichè punti A diversi vengono in questa guisa a determinare punti O distinti, così il numero $k = q - t + 2$ dei primi non può superare quello t dei secondi, e si ha pertanto

$$q \leqslant 2t - 2. \tag{18}$$

Il confronto delle (17), (18) mostra che nelle ipotesi attuali deve risultare $t = q = 2$, e quindi $k = 2$.

Abbiamo così stabilito il seguente teorema.

Se q è pari e, supposto che valga la (17) con $t \geqslant 0$ intero, se si pone $k = q - t + 2$, allora ogni k-arco di $S_{2,q}$ è contenuto in un'ovale, e risulta dunque incompleto se $t > 0$. L'ovale suddetta rimane univocamente definita dal k-arco, con una sola eccezione nel caso banale in cui si abbia $k = t = q = 2$.

Per $t = 1, 2, 3, 4$, la (17) fornisce ordinatamente le limitazioni:

$$q > -1, \qquad q > 1, \qquad q > 4 \qquad q > 10.$$

Le prime due di queste non pongono alcuna restrizione per il numero q, che è — come sappiamo — della forma $q = 2^h$, con $h \geqslant 1$; le altre due lasciano soltanto fuori rispettivamente i casi $q = 2, 4$ e $q = 2, 4, 8$, che si trattano agevolmente in modo diretto. Come corollario del precedente teorema, vediamo così che:

Se q è pari e $t = 1, 2, 3, 4$, ove si eccettui soltanto il caso in cui $q = 8$, $t = 4$, ogni $(q - t + 2)_q$ risulta incompleto, in quanto appartiene necessariamente ad un'ovale, la quale risulta da esso determinata univocamente tranne se $q = 2$ e $t = 2$ oppure $q = 2, 4$ e $t = 3, 4$.

Il suddetto caso di eccezione $q = 8$, $t = 4$ è già stato approfondito in SEGRE [7], con l'effettiva determinazione di 6_8 completi.

14. **Sulla completezza dei k_q nel caso in cui q sia dispari.** - Preso un qualunque k-arco K di $S_{2,q}$, nell'ipotesi in cui q sia dispari e k (che allora è $\leqslant q + 1$) sia $\geqslant 3$, consideriamo in relazione a K l'inviluppo Δ di cui al teor. II del n. 12. Questo contiene una parte Δ' priva di componenti multiple (la quale non può mancare e può anche essere riducibile), ed un'eventuale parte Δ'' da contarsi due volte; dette rispettivamente t' e t'' le classi di Δ', Δ'', si ha dunque

$$2t = t' + 2t'', \qquad t' > 0, \qquad t'' \geqslant 0,$$

eppertanto

$$t' = 2t_1, \qquad \text{ove } 1 \leqslant t_1 = t - t'' \leqslant t.$$

Dalle proprietà di Δ enunciate nel teor. II del n. 12, segue che Δ' non può contenere come componente nessun fascio col centro su K; e che ciascuna delle $t' = 2t_1$ tangenti di Δ' uscenti da un qualunque punto A di K appartiene necessariamente al campo base di $S_{2,q}$, tali $2t_1$ tangenti essendo certe t_1 distinte fra le t rette che toccano K in A, contate ciascuna due volte.

Distinguiamo due alternative, senonchè $t_1 = 1$ o $t_1 \geqslant 2$.

Se $t_1 = 1$, l'inviluppo Δ' risulta di 2ª classe. Tale inviluppo è poi di certo irriducibile, poichè altrimenti esso avrebbe una retta doppia sulla quale dovrebbero stare tutti i punti A del k-arco K, contrariamente all'ipotesi $k \geqslant 3$. Sia dunque C_2 la conica-luogo (irriducibile) inviluppata da Δ'. Le due tangenti a C_2 condotte da un qualunque punto A di K coincidono fra loro; sicchè attualmente A sta su C_2, eppertanto C_2 contiene K per intero.

Se $t_1 \geqslant 2$, possiamo applicare a Δ', in relazione ai fasci di centri i k punti A di K, le considerazioni duali di quelle svolte alla fine del n. 7. Otteniamo così la limitazione

$$kt_1(t_1 - 1) \leqslant 2t_1(2t_1 - 2)(2t_1 - 3)(2t_1 + 3),$$

ossia, sopprimendo dai due membri il fattore positivo $t_1(t_1 - 1)$ e ricordando che $k = q - t + 2$, la:

$$q \leqslant 16t_1^2 + t - 38.$$

Poichè — come s'e visto — risulta $t \geqslant t_1$, così nell'ipotesi che si abbia

$$q \geqslant 16t^2 + t - 37 \tag{19}$$

la precedente limitazione non può sussistere; allora dunque non può presentarsi la seconda alternativa, e si presenta di conseguenza la prima, implicante che sia $K \subset C_2$.

Avuto riguardo a ciò che due distinte coniche irriducibili non possono avere più di quattro punti a comune, mentre poi un 4_3 sta su di una sola conica irriducibile di $S_{2,3}$, abbiamo in conclusione che:

Se q è dispari e, supposto che valga la (19) *con $t \geqslant 1$, se si definisce k assumendo $k = q - t + 2$, allora* ***ogni*** *k-arco di $S_{2,q}$ è contenuto in una* ***conica*** *irriducibile, da esso univocamente definita, e risulta dunque* ***incompleto*** *se $t > 1$.*

Va rilevato che, nel caso $t = 1$, la (19) si riduce a $q \geqslant -20$, e non pone quindi nessuna condizione per il numero (positivo) q. Il teorema precedente viene così ad includere il risultato secondo cui, *nel caso di q dispari, ogni ovale di $S_{2,q}$ consiste dei punti di una conica irriducibile;* risultato questo di cui già è stato detto (n. 9), il quale era stato ottenuto avanti con un metodo più diretto di tutt'altro tipo. Tale metodo fu già applicato anche nello studio del caso $t = 2$ [SEGRE, 5], ma diventa rapidamente assai macchinoso al crescere di t. È probabile tuttavia che, mediante esso o eventualmente per altre vie, si possa giungere a stabilire il teorema enunciato nel precedente capoverso sotto condizioni meno onerose della (19) (e lo stesso può dirsi per il teorema del n. 13, in relazione alla (17)). Così accade il fatto per $t = 2$, nella quale ipotesi la condizione espressa dalla (19) — che in virtù di essa diventa $q \geqslant 29$ — può venire completamente omesssa nell'enunciato di quel teorema, dimostrandosi [SEGRE, 5] che:

Se q è dispari, ***ogni*** *q-arco di S_q appartiene ad una conica (ed è quindi incompleto).*

Qualche condizione risulta però necessaria se $t > 2$, come ad esempio si trae dall'esistenza di 6_7, 6_9, 7_9, 8_9 completi, di cui al numero successivo.

Allo scopo di determinare — per convenienti valori di k e q — dei k_q completi (con q dispari) che non siano coniche, premettiamo un certo numero di osservazioni — presumibilmente note — relative alle coniche sopra un qualunque campo (finito od infinito) di **caratteristica diversa da due**.

1) Per un punto O situato nel piano di una conica Γ (irriducibile), ma non giacente su Γ, si conducano due rette seganti Γ in punti A, B e C, D

distinti. *Il punto O risulta esterno a Γ se, e soltanto se, il birapporto (ABCD) è il quadrato di un elemento del campo base.*

Per dimostrarlo, introduciamo su Γ una coordinata proiettiva, t, che nei punti A, B, C, D assuma rispettivamente i valori a, b, 0, ∞. Allora si ha $(ABCD) = a/b$. Inoltre l'involuzione determinata sopra Γ dalle coppie AB e CD ha l'equazione $tt' = ab$: essa è quindi iperbolica, ossia il punto O risulta esterno a Γ, nel caso e nel caso soltanto in cui ab (e quindi pure a/b) sia un quadrato, onde l'asserto.

2) Siano $f(x)$ una forma quadratica ternaria di discriminante $\Delta \neq 0$, ed $A(a)$ un punto che non stia sulla conica $f(x) = 0$. Allora *il punto A risulta esterno a questa conica se, e soltanto se,* $-\Delta f(a)$ *è un quadrato.*

La proprietà si dimostra subito, dopo aver rilevato ch'essa è invariante di fronte ai cambiamenti di coordinate, con l'assumere A come punto $(0, 0, 1)$ e la polare di A come retta $x_3 = 0$.

3) Suppongasi ora che *il campo base contenga dei non quadrati,* e che *il prodotto di due non quadrati sia sempre un quadrato.* Queste condizioni sono ad es. soddisfatte per il campo reale e per ogni campo finito di caratteristica $\neq 2$. Mostreremo che, nelle ipotesi suddette, se A, B, C sono tre punti distinti di una conica Γ ed r denota una qualunque retta del piano di Γ non passante per nessuno di essi,

i tre punti segati su r dai lati del triangolo ABC risultano tutti esterni, oppure due interni ed uno esterno rispetto a Γ.

Si può ridurre l'equazione di Γ alla forma $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0$ assumendo A, B, C come punti fondamentali delle coordinate e disponendo convenientemente del punto unità. Detta $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ l'equazione di r (ove $a_1a_2a_3 \neq 0$), le intersezioni di questa retta coi lati del triangolo ABC sono i punti $(0, a_3, -a_2)$, $(-a_3, 0, a_1)$, $(a_2, -a_1, 0)$. In virtù di 2), le condizioni affinchè essi siano esterni a Γ si traducono ordinatamente in ciò che i numeri a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2 siano dei quadrati; poichè in ogni caso, il prodotto di questi tre numeri risulta un quadrato, ne consegue l'impossibilità che nessuna od esattamente due di quelle condizioni siano soddisfatte, onde l'asserto.

4) Da 1) - 3) si deduce poi senz'altro che:

Se il campo base soddisfa alle condizioni enunciate in 3), *due punti A, B distinti di una conica Γ la spezzano in due «archi» aventi a comune soltanto gli «estremi» A e B, ove si convenga che due punti C, D di Γ — distinti fra loro e da A, B — stiano o no sullo stesso arco a seconda che il birapporto (ABCD) è o no un quadrato, ossia secondochè il punto O segato da CD su AB risulta esterno od interno rispetto a Γ.*

5) Detto Γ' uno qualunque dei due archi testè considerati, pongasi

$$\Gamma^* = \Gamma' \cup P,$$

ove P denoti il polo di AB rispetto a Γ. Dimostreremo che:

Se -1 non è il quadrato di un elemento del campo base, le corde di Γ^* riempiono interamente il piano di Γ.

Occorre provare che per ogni punto O di questo piano passa qualche corda di Γ^*. Ciò è intanto evidente se O giace su una delle rette PA, PB condotte da P a toccare Γ. Potremo quindi supporre che la PO non sia una di tali rette, e cioè risulti secante od esterna rispetto a Γ.

Nel primo caso, le intersezioni C, D di Γ e PO si corrispondono nell'involuzione su Γ di polo P, la quale ammette A e B quali punti doppi, onde risulta $(ABCD) = -1$. Tenuto conto di 4) e dell'ipotesi che -1 non sia un quadrato, ne discende che uno (ed uno solo) dei punti C, D appartiene a Γ', sicchè la retta OP è attualmente corda di Γ^*.

Nel secondo caso, denotiamo con A', B' le intersezioni di Γ ed OA, OB, rispettivamente residue ad A, B, e con M l'intersezione di AB, $A'B'$. I punti M ed O, quali punti diagonali del quadrangolo $ABA'B'$ inscritto in Γ, risultano coniugati rispetto a Γ. Ma anche M e P sono coniugati rispetto a Γ, in quanto M sta sulla polare AB di P rispetto a Γ. Ne consegue che OP è la polare di M; e poichè ora si suppone OP esterna rispetto a Γ, se ne inferisce che il punto M risulta interno a Γ. In virtù di 4), da qui si trae che uno (ed uno solo) dei punti A', B' appartiene a Γ', sicchè una delle rette OA, OB è corda di Γ^*.

La proposizione dianzi enunciata rimane così stabilita.

Rileviamo che, nel caso particolare in cui il campo base sia d'ordine q finito, la condizione che -1 non sia un quadrato si traduce in ciò che risulti

$$q \equiv 3 \qquad (\mathrm{mod}\ 4).$$

In tale ipotesi q è dispari, e la proposizione suddetta offre senz'altro un modo di costruire dei $(q+5)/2$ *-archi completi*; quest'ultimo risultato collima con quello precedentemente ottenuto al riguardo da LOMBARDO-RADICE [1].

15. I $k_{2,q}$ completi per i primi valori di q. - Dato q, i risultati del n. 11 e quelli dei nn. 13, 14 pongono per k delle limitazioni — rispettivamente inferiori e superiori — necessarie per l'esistenza di *k_q completi che non siano ovali.* Le limitazioni suddette verranno indicate brevemente come *condizioni aritmetiche*, in quanto non è detto — e di fatto non è sempre vero — ch'esse siano sufficienti per l'effettiva esistenza di k_q completi. Allo scopo di stabilire tale esistenza, dovranno venire escogitate opportune considerazioni *analitico-geometriche* di carattere costruttivo, le quali risulteranno generalmente assai diverse da caso a caso. Nel presente numero ci proponiamo di dare vari esempi in proposito, relativi ai più piccoli valori di q.

Le condizioni aritmetiche attinenti ai valori di q che soddisfano alla limitazione $q \leqslant 13$, dànno come soli valori possibili per k quelli specificati nella seguente tabella:

$$q = 7,\quad k = 6; \qquad q = 8,\quad k = 6; \qquad q = 9,\quad 6 \leqslant k \leqslant 8;$$
$$q = 11,\quad 7 \leqslant k \leqslant 10; \qquad q = 13,\quad 7 \leqslant k \leqslant 12.$$

Qui mostreremo che:

Mentre esistono di fatto dei 6_7, 6_8, 6_9, 7_9, 8_9, 8_{11} *completi, non esiste invece nessun* 7_{13} *completo.*

Un esempio interessante, abbastanza generale, è stato dato da L. LOMBARDO-RADICE [1] (cfr. anche la fine del n. 14), il quale ha dimostrato che:

In ogni $S_{2,q}$ *per il quale* $q \equiv 3 \pmod 4$, *esistono dei* $(q+5)/2$*-archi completi.*

Questa proposizione importa fra l'altro l'esistenza di 6_7-archi e di 8_{11}-archi completi. Il primo di tali risultati era già stato acquisito algebricamente da SEGRE [5, p. 378] e fu poi riottenuto da LUNELLI e SCE [1] con l'uso di una calcolatrice elettronica. Esso può venir stabilito in forma più completa ed in modo del tutto elementare, mostrando che:

Ogni 5*-arco di* $S_{2,7}$ *appartiene sempre ad esattamente quattro diversi* 6_7 *completi (nessuno dei quali risulta simmetrico), onde i* 6*-archi completi di un* $S_{2,7}$ *sono in numero di* $2^5 \cdot 7^3 \cdot 57$.

Invero, i cinque punti di un dato 5_7 stanno su di una ed una sola conica, la quale contiene $7 + 1 - 5 = 3$ punti ulteriori, nessuno dei quali può giacere su di una corda del 5_7. D'altronde, ogni corda del 5_7 contiene due punti di questo e tre punti (intersezioni coi lati del triangolo determinato dai rimanenti tre punti del 5_7) situati ciascuno su due corde, onde ognuno dei $7 + 1 - (2 + 3) = 3$ suoi punti restanti sta su quella sola corda. Notiamo infine che, mentre i punti di $S_{2,7}$ sono in numero di $1 + 7 + 7^2 = 57$, quelli dei vari tipi dianzi menzionati sono complessivamente in numero di

$$5 + 3 + 10 \cdot 3 : 2 + 10 \cdot 3 = 53,$$

sicchè ne rimangono $57 - 53 = 4$. È ora chiaro che, aggregando uno qualunque di questi quattro punti al 5_7, si ottiene un 6_7 che non sta su di una conica, ed è quindi completo (in quanto, in virtù del n. 14, un eventuale 7_7 contenente il 6_7 dovrebbe stare su di una conica); come pure, viceversa, ogni 6_7 completo contenente il dato 5_7 è ottenibile da questo nel modo indicato. Il numero totale dei 6-archi completi di $S_{2,7}$ ne discende allora facilmente; e si ha poi subito che nessuno di essi è simmetrico (nel senso del n. 10), in quanto per essi le (7), (8), (9) forniscono $c_1 = 18$, $c_2 = 27$, $c_3 = 6$, e le $2ic_i$ non risultano divisibili per $k(k-1) = 30$.

Poichè, come si è detto nel n. 13, l'esistenza di 6_8 completi trovasi già stabilita in SEGRE [7], così ci resta soltanto più da dimostrare che vi sono dei 6_9, 7_9, 8_9 completi, e che non v'è alcun 7_{13} completo. Giungeremo successivamente a tali risultati poggiando sul n. 10 e rammentando che, affinchè un k-arco sia completo, occorre e basta che esso abbia $c_0 = 0$.

S t u d i o d e i 6 - a r c h i c o m p l e t i d i $S_{2,9}$. - Se esiste un 6_9 completo, per esso (con le notazioni del n. 10) risulta $q = 9$, $k = 6$, $l = 3$, $c_0 = 0$, onde il sistema formato dalle (7), (8), (13) fornisce:

$$c_1 = 60, \qquad c_2 = 15, \qquad c_3 = 10.$$

Notiamo ora che nessuna corda di 6_9 può contenere più di due punti esterni a 6_9 d'indice 3; ed invero, se la retta congiungente due punti di 6_9 contenesse tre punti siffatti, questi (per la definizione di indice) risulterebbero punti diagonali del quadrangolo determinato dai quattro rimanenti punti di 6_9: vi sarebbe quindi un quadrangolo coi tre punti diagonali allineati, onde (ved. p. es. SEGRE [2], n. 103) la caratteristica del campo base di $S_{2,9}$ varrebbe 2, mentre invece essa è attualmente uguale a 3. Si ha pertanto;

$$d_3^r \leqslant 2 \qquad (r = 1, 2, \ldots, 15);$$

d'altra parte la (11) fornisce:

$$\sum_{r=1}^{15} d_3^r = 3c_3 = 30,$$

sicchè dev'essere necessariamente

$$d_3^r = 2 \qquad (r = 1, 2, \ldots, 15),$$

ossia

Ciascuna delle 15 corde di 6_9 *risulta retta diagonale del quadrangolo determinato dai quattro punti di* 6_9 *che non stanno su di essa.*

Tenuto conto dell'ultima equazione, dalle (10), (12) si ricava poi che dev'essere:

$$d_1^r = 4, \qquad d_2^r = 2 \qquad (r = 1, 2, \ldots, 15).$$

Osserviamo inoltre che, viceversa, un 6_9 godente della proprietà testè enunciata ammette per le d proprio i valori dianzi specificati; ma allora le (11) forniscono per c_1, c_2, c_3 i valori sopraindicati, onde la (7) mostra che dev'essere $c_0 = 0$, sicchè il 6_9 risulta c o m p l e t o e s i m m e t r i c o (n. 10).

Proveremo da ultimo che:

Ogni 4-arco di $S_{2,9}$ *appartiene a sei diversi* 6_9 *completi, talchè un* $S_{2,9}$ *contiene esattamente* $2^6 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 13$ *6-archi completi, e due qualsiansi di questi risultano fra loro omografici in 60 modi diversi.*

Detto $P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ un qualunque 4-arco di $S_{2,9}$, possiamo assumere $P_1\, P_2\, P_3$ quali punti fondamentali e P_4 come punto unità di un sistema di coordinate proiettive omogenee (x_1, x_2, x_3) in $S_{2,9}$. Le x risultano così variabili in un campo di GALOIS d'ordine 9, e possono quindi esprimersi nella forma

$$x = m + i\,n,$$

dove m, n s o n o i n t e r i r i d o t t i mod 3 ed i soddisfa alla $i^2 = -1$.

Denotiamo poi con P_5, P_6 i rimanenti due punti di un 6_9 completo, supposto esistente, che contenga i quattro punti $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$.

La retta P_5P_6 deve allora coincidere con una delle tre rette diagonali del quadrangolo determinato da questi ultimi, ad esempio — per fissare le idee — con la retta

$$x_1 = x_2 + x_3$$

congiungente i punti diagonali $(P_1P_2,\ P_3P_4)$ e $(P_1P_3,\ P_2P_4)$. I punti P_5 e P_6 apparterranno quindi a tale retta, e saranno distinti da quei due, i quali hanno le coordinate $(1,\ 1,\ 0)$ e $(1,\ 0,\ 1)$, e dai punti $(-1,\ 1,\ 1)$ e $(0,\ -1,\ 1)$ ov'essa incontra le rette P_1P_4 e P_2P_3; in altri termini, le coordinate di P_5 e P_6 saranno del tipo

$$P_5(1+a,\ a,\ 1), \qquad P_6(1+b,\ b,\ 1),$$

ove a e b denotano due elementi, della forma $m + in$ suddetta, distinti fra loro e da 0, $+1$ e -1.

Esprimiamo ora che la retta P_3P_4 (di equazione $x_1 = x_2$) è una diagonale del quadrangolo $P_1P_2P_5P_6$. Poichè su essa si tagliano già per costruzione P_1P_2 e P_5P_6, dovranno o P_1P_5 e P_2P_6 oppure P_1P_6 e P_2P_5 formar fascio con quella; e potremo sempre ridurci alla prima alternativa, con l'eventuale scambio di P_5 e P_6, il che si traduce nella condizione

$$a = b + 1\,.$$

Esprimiamo poscia che la retta P_2P_4 è una diagonale del quadrangolo $P_1P_3P_5P_6$, ossia che su essa si tagliano P_1P_5 e P_3P_6, oppure P_1P_6 e P_3P_5. La prima alternativa equivale alla $b = a(1+b)$, che — unita alla precedente — porta alle $a = -1$, $b = 1$, le quali però vanno escluse in base a quanto sopra. Rimane dunque soltanto la seconda alternativa; questa si traduce nella condizione $a = b\,(1+a)$, che — in forza della precedente — fornisce

$$a = -1 \pm i, \qquad b = 1 \pm i.$$

Abbiamo così due possibili scelte per P_5, P_6 in corrispondenza ad ognuna delle tre diagonali del quadrangolo $P_1P_2P_3P_4$, e ne otteniamo quindi sei in tutto; si verifica poi, come ora accenneremo, che ciascuna di esse porta di fatto ad un 6_9 completo. All'uopo, con riferimento ad una qualunque delle due scelte dianzi specificate, non v'è che da constatare l'ulteriore concorrenza delle seguenti terne di rette

$$(P_1P_2,\ P_4P_5,\ P_3P_6), \qquad (P_1P_4,\ P_2P_5,\ P_3P_6), \qquad (P_2P_3,\ P_1P_5,\ P_4P_6),$$
$$(P_1P_3,\ P_2P_5,\ P_4P_6), \qquad (P_1P_4,\ P_3P_5,\ P_2P_6), \qquad (P_2P_3,\ P_4P_5,\ P_1P_6),$$

e da osservare che, conseguentemente, $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ gode della suddetta proprietà caratteristica dei 6_9 completi.

In base alla determinazione canonica testè ottenuta per le coordinate dei sei punti P, si ha senz'altro che i vari 6_9 completi risultano fra loro a due a due omografici. Più precisamente, da ciò che precede risulta che vi sono 4 diverse omografie trasformanti due 6_9 completi l'uno nell'altro, in modo che una data quaterna di punti dell'uno si muti in una quaterna di punti dell'altro comunque assegnata; e poichè un 6_9 contiene $\binom{6}{4} = 15$ quaterne di punti, così il numero delle omografie trasformanti due 6_9 completi l'uno nell'altro è dato da $4 \cdot 15 = 60$. In particolare:

I sei punti di un 6_9 completo vengono mutati in sè da un gruppo di 60 sostituzioni, subordinate da un gruppo di altrettante omografie che trasformano il 6_9 in sè.

Poichè le omografie tra due $S_{2,9}$ sono in numero di $2^8 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ (cfr. ad es. SEGRE [2, n. 161]), così il numero complessivo dei 6_9 completi di un $S_{2,9}$ si ottiene dal precedente dividendolo per 60, e vale quindi $2^6 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 13$.

Sui 7_9 ed 8_9 completi. - Passiamo ad occuparci anzitutto dei 7_9 completi. Per essi, con le notazioni del n. 10, si ottiene

$$c_0 = 0, \qquad c_1 = 21, \qquad c_2 = 42, \qquad c_3 = 21\,;$$

ma si possono avere *a priori* diverse determinazioni per le d_i^r, a seconda del tipo di 7_9. Qui ci limiteremo a quei 7_9 — di cui dimostreremo l'esistenza — che sono simmetrici nel senso del n. 10, per i quali cioè le d_i^r hanno valori d_i indipendenti da r. Per un siffatto 7_9, supposto esistente, le (11) senz'altro forniscono

$$d_1 = 1, \qquad d_2 = 4, \qquad d_3 = 3\,;$$

e questi valori delle d vengono intanto a soddisfare alle (10), (12). Da qui, con argomentazioni analoghe a quelle dianzi svolte per i 6_9 completi, si trae che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un 7-arco di $S_{2,9}$ risulti un 7_9 completo simmetrico, è che ognuna delle 21 corde del 7-arco contenga esattamente tre punti diagonali del pentagono determinato dai punti del 7-arco che non stanno su di essa.

Ne discende anche che, omettendo un punto di un 7_9 completo simmetrico, si ottiene un 6-arco rispetto al quale esattamente tre punti del piano hanno indice 3. Riferiamoci ora ad un $S_{2,9}$ in cui si siano introdotte coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3), colle $x = m + in$ del tipo suddetto, e su esso consideriamo il 6-arco determinato dai punti:

$$A_1\,(0,\ 1,\ 1), \qquad A_2\,(1,\ 0,\ 1), \qquad A_3\,(0,\ -1,\ 1),$$

$$A_4\,(i,\ 0,\ 1), \qquad A_5\,(1,\ -1,\ 1), \qquad A_6\,(i,\ 1,\ 1).$$

È subito visto che i punti A non stanno su di una conica, e che il 6-arco da essi costituito ammette tre punti d'indice tre, dati dai punti:

$$M\,(0,\,1,\,0), \qquad N\,(1,\,0,\,0), \qquad P\,(1+i,\,-i,\,1);$$

più precisamente, le seguenti terne constano di punti fra loro allineati:

$$\begin{array}{ccc} MA_1A_3, & MA_2A_5, & MA_4A_6, \\ NA_1A_6, & NA_2A_4, & NA_3A_5, \\ PA_1A_2, & PA_3A_4, & PA_5A_6. \end{array}$$

Ne consegue che le 15 corde di quel 6-arco contengono complessivamente soltanto 84 dei 91 punti di $S_{2,9}$. Dei rimanenti sette punti, uno, e precisamente

$$A_0(-1-i,\,i,\,1),$$

cade fuori dei lati del triangolo MNP (i quali non contengono nessun punto A), mentre gli altri sei punti si distribuiscono a coppie sui tre lati di quel triangolo nel modo seguente:

$$\begin{array}{lll} M'(-i,\,-i,\,1), & M''(-1,\,-i,\,1) & \text{su } NP, \\ N'(1+i,\,-1-i,\,1), & N''(1+i,\,1-i,\,1) & \text{su } MP, \\ P'(1+i,\,-1,\,0), & P''(1+i,\,1,\,0) & \text{su } MN; \end{array}$$

e si verifica inoltre che le rette congiungenti A_0 coi punti M', M'', N', N'', P', P'' passano ordinatamente per i punti A_5, A_6, A_1, A_3, A_2, A_4. Vediamo così che:

Se al suddetto 6-*arco* $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ *si aggrega il punto* A_0, *si ottiene un* 7_9 *completo; e si constata poi, ricorrendo al precedente criterio, che tale* 7_9 *risulta simmetrico. Aggregando invece a quel* 6-*arco una qualunque delle coppie* $M'M''$, $N'N''$, $P'P''$ *si ottiene un* 8-*arco; un siffatto* 8_9 *risulta completo, poichè altrimenti esso apparterrebbe ad una conica* (*n.* 14), *mentre invece il* 6-*arco iniziale non giace sopra nessuna conica.*

Inesistenza di 7_{13} completi. - Supponiamo, per assurdo, che in un $S_{2,13}$ esista qualche 7-arco completo. Per un siffatto 7_{13} si ha $q=13$, $k=7$, $l=3$, $c_0=0$, onde il sistema formato dalle (7), (8), (13) porge

$$c_1 = 129, \qquad c_2 = 18, \qquad c_3 = 29.$$

Conseguentemente la (11) fornisce

$$\sum_{r=1}^{21} d_3^r = 3c_3 = 87 > 4.21,$$

sicchè per almeno una corda r di 7_{13} dev'essere

$$d_3^r > 4;$$

e per un tale r ha poi necessariamente da essere $d_3^r = 5$, dovendo risultare $d_2^r + 2d_3^r = 10$ in base alla (12). Pertanto, sopprimendo dal dato 7_{13} i due punti che stanno sulla retta r si ottiene *un 5-arco, il quale ha precisamente 5 dei suoi 15 punti diagonali giacenti su quella retta*; e sia $A_1A_2A_3A_4A_5$ un siffatto 5-arco. I 10 lati di questo tagliano r complessivamente soltanto in 5 punti distinti; ne consegue che ciascuno dei 5 quadrangoli aventi per vertici quattro di quei punti A deve avere almeno un punto diagonale sulla r (altrimenti i suoi lati incontrerebbero r in 6 punti distinti), ed ha quindi esattamente u n punto diagonale su r, in quanto su r vi sono in tutto solamente 5 punti diagonali.

Ciò premesso, introduciamo in $S_{2,13}$ come segue un sistema di coordinate proiettive non omogenee (x, y), date da interi ridotti mod 13. Assumiamo: r quale asse x, il punto diagonale O del quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$ situato su r quale punto improprio di tale asse, la retta diagonale del quadrangolo opposta ad O quale asse y, in modo che uno dei suoi punti diagonali risulti il punto improprio di tale asse, infine il punto A_1 quale punto unità. In tale riferimento, e detto A_2 l'ulteriore vertice di quel quadrangolo situato sul lato A_1O, le coordinate dei punti A sono allora necessariamente della forma:

$$A_1(1,\ 1), \qquad A_2(-1,\ 1), \qquad A_3(1,\ a), \qquad A_4(-1,\ a), \qquad A_5(b,\ c),$$

con a, b, c (interi mod 13) soggetti alle condizioni:

$$a \neq (0,\ 1), \qquad b \neq (1,\ -1), \qquad c \neq (0,\ 1,\ a),$$

per ovvi motivi geometrici.

I cinque punti diagonali situati su r risultano così il punto improprio O dell'asse x, ed inoltre i punti M, N, P, Q ordinatamente segati su tale asse dalle rette A_1A_3, A_2A_4, A_1A_4, A_2A_3, dati pertanto da:

$$M(1,\ 0), \qquad N(-1,\ 0), \qquad P\left(\frac{a+1}{a-1},\ 0\right), \qquad Q\left(\frac{1+a}{1-a},\ 0\right).$$

Questi quattro punti, a prescindere dall'ordine, debbono coincidere — per ciò che precede — con quelli segati sull'asse x dalle rette A_1A_5, A_2A_5, A_3A_5, A_4A_5. Con facile discussione, e tenuto conto delle anzidette disuguaglianze, si vede che — affinchè ciò accada — occorre che a soddisfi (mod 13) ad una delle seguenti equazioni:

$$a^2 + a - 1 = 0, \qquad a^2 - a - 1 = 0.$$

Siccome però nè l'una nè l'altra delle corrispondenti congruenze mod 13 ammette soluzioni, ne consegue che:

In $S_{2,13}$ non esiste nessun 7-arco completo,

sebbene le condizioni aritmetiche (di cui ai nn. 10, 11, 14) per l'esistenza di un siffatto 7_{13} risultino soddisfatte.

16. **Proprietà dei k_q di carattere asintotico, e miglioramento di alcuni dei precedenti risultati.** - I teoremi del n. 13 e quelli del n. 14 — anche se conseguiti per vie un po' differenti — hanno uno spiccato carattere comune, messo in evidenza dal seguente enunciato, in cui rientrano gli aspetti qualitativi sia degli uni che degli altri:

Dato un qualunque intero $a \geqslant 0$, esiste un $A = A(a)$ tale che, se

$$q \geqslant A \quad e \quad k \geqslant q - a,$$

ogni k-arco di $S_{2,q}$ sia contenuto in un'ovale (definita da esso univocamente), e quindi risulti incompleto se non è già esso stesso un'ovale.

Si ha così un notevole esempio di proprietà di geometria asintotica, relativa cioè a spazi $S_{2,q}$ di GALOIS di ordine q sufficientemente grande. Ricerche sistematiche secondo un siffatto indirizzo asintotico potrebbero presentare grande interesse in sè, ed anche in vista di eventuali applicazioni geometriche (alla teoria degli spinori, ecc.) e fisiche. Qui però ci limiteremo ad alcune considerazioni complementari sull'osservazione precedente, riserbandoci di aggiungere poi (n. 25) qualche altro esempio negli spazi superiori.

Va anzitutto rilevata una profonda divergenza che si presenta fra il caso in cui q sia dispari e quello in cui q sia pari: mentre infatti un'ovale è nel primo caso un ente algebrico così semplice come una conica (n. 14), la situazione risulta completamente diversa al riguardo nel secondo caso (n. 9). Conviene dunque separare nel precedente enunciato le due possibilità ed introdurre in luogo di $A(a)$ due diverse funzioni $A'(a)$, $A''(a)$, relative rispettivamente al caso in cui q sia dispari ed a quello in cui q sia pari. Possiamo allora *definire tali funzioni univocamente*, imponendo loro la condizione di rappresentare il più piccolo intero positivo per il quale quell'enunciato sussista.

Notiamo ora che i teoremi dei nn. 13, 14 dànno per le suddette funzioni $A'(a)$ ed $A''(a)$ le seguenti limitazioni superiori:

$$A'(a) \leqslant 16a^2 + 65a + 28,$$
$$A''(a) \leqslant a^2 + 2a + [a/2] - 2.$$

Ciò suggerisce tutta una serie di problemi importanti ma difficili (parzialmente già adombrati dopo il primo enunciato del n. 14), relativi alla determinazione esatta di $A'(a)$ ed $A''(a)$ per particolari valori di a, al miglioramento delle suddette limitazioni per opportune classi di valori di a, ed infine alla ricerca di limitazioni inferiori.

Anche di tali questioni qui non intendiamo occuparci diffusamente. Osserviamo soltanto che, in virtù dei nn. 13, 14, risulta:

$$A'(0) = 1, \qquad A''(0) = A''(1) = 1, \qquad A''(2) = 9.$$

In base a ciò che precede, e poichè q è della forma p^h, si ha inoltre:

$$A'(1) \leqslant 108, \qquad A''(3) \leqslant 17;$$

e questi risultati possono venire migliorati o meno, ossia in essi non vale o vale il segno di uguaglianza, secondochè non esistono od esistono 106_{107} e 13_{16} completi.

Rileviamo infine che l'esistenza di 6_7 e di 8_9 completi (n. 15) equivale rispettivamente alle limitazioni inferiori $A'(1) \geqslant 8$, $A'(1) \geqslant 10$; queste vengono a loro volta migliorate dalla

$$A'(1) \geqslant 14,$$

conseguenza del fatto — provato da LUNELLI e SCE [1] con l'uso di una calcolatrice elettronica — che esistono dei 10_{11} e dei 12_{13} completi. Un'altra limitazione inferiore si deduce dal risultato di LOMBARDO-RADICE richiamato nel n. 15 e qui ottenuto nel n. 14; da questo segue infatti subito che è

$$A'(2r-1) \geqslant 4r+4,$$

per ogni intero positivo r tale che $4r+3$ sia una potenza di un numero primo.

§ IV. - K-ARCHI E K-CALOTTE SPAZIALI E IPERSPAZIALI.

17. Ulteriori nozioni sui k-insiemi. - Le considerazioni dal n. 8, concernenti la classificazione degli insiemi di punti di un piano di GALOIS e lo studio di certe categorie di k-insiemi, potrebbero venire estese agli spazi superiori in varie direzioni: qui non ci occuperemo sistematicamente di ciò, ma qualche esempio in proposito verrà dato poi nel n. 20.

Una categoria importante di insiemi, alla quale essenzialmente limiteremo il nostro studio, è data dagli insiemi $K^s_{r,q}$, così denotando gli insiemi di K punti di un $S_{r,q}$ tali che $s+1$ — ma non $s+2$ — qualsiansi dei loro punti risultino sempre linearmente indipendenti $(2 \leqslant s \leqslant r)$; particolare rilievo hanno fra quelli gli insiemi per cui, r essendo $\geqslant 3$, il carattere s assume uno dei valori estremi $s=r$ od $s=2$; siffatti K-insiemi verranno rispettivamente chiamati *K-archi (sghembi)* e *K-calotte*, e saranno denotati più semplicemente con $K_{r,q}$ e con $K^*_{r,q}$ (qui, a differenza che nel § III, usiamo la lettera K in luogo della k onde rammentare che attualmente si suppone $r \geqslant 3$). Un $K^s_{r,q}$ che non sia contenuto in nessun $(K+1)^s_{r,q}$ verrà poi detto *completo*; mentre lo si dirà invece *incompleto* qualora esista qualche $(K+1)^s_{r,q}$ che lo contenga.

Per dati r, q, s, soddisfacenti alle limitazioni $2 \leqslant s \leqslant r$, i numeri K per i quali esista di fatto qualche $K^s_{r,q}$ ammettono un massimo, M, che denoteremo più specificatamente con $[M]^s_{r,q}$; riserberemo inoltre la notazione $M^s_{r,q}$ ad indicare quei $K^s_{r,q}$ — manifestamente completi — per i quali K raggiunge il suo massimo M. Di speciale importanza godono, fra questi, gli $M^s_{r,q}$ per i quali s assume l'uno o l'altro dei valori estremi r o 2: essi verranno rispettivamente chiamati le *ovali* (*sghembe*) e gli *ovaloidi* di $S_{r,q}$, e saranno denotati più semplicemente con $M_{r,q}$ e con $M^*_{r,q}$, mentre $[M]_{r,q}$ e $[M]^*_{r,q}$ ne designerà l'ordine.

Ciò che precede suggerisce senz'altro tutto un complesso di problemi concernenti la completezza dei $K^s_{r,q}$, fra i quali vanno segnalati quelli relativi alla costruzione degli $M^s_{r,q}$ — in particolare di ovali ed ovaloidi — ed alla determinazione dei caratteri M, od almeno di limitazioni superiori ed inferiori a cui questi debbano soddisfare. Si tratta in genere di problemi piuttosto ardui, di taluno dei quali avremo ad occuparci nel seguito. Essi ammettono diverse estensioni, che però di solito offrono un grado di difficoltà minore, onde — per brevità — di esse qui non tratteremo. Ci limiteremo soltanto, al riguardo, a segnalare lo studio degli insiemi $K^{s,t}_{r,q}$ (che già compaiono nella letteratura [cfr. SEGRE, 11] per $s = 2$, mentre essi poi si riducono ai $K^s_{r,q}$ per $t = 0$), definibili come quegli insiemi di K punti di $S_{r,q}$ tali che, se posseggono $s + 1$ punti fra loro dipendenti, vengono di conseguenza a contenere tutto uno spazio lineare di dimensione $\geqslant 1$ congiungente due o più di tali punti, in guisa inoltre che t risulti la massima dimensione degli spazi lineari appartenenti all'insieme.

18. **I K-archi di $S_{r,q}$** - Dalla definizione generale di K-arco (data nel numero precedente) segue subito che:

Per ogni intero h tale che $1 \leqslant h \leqslant r - 2$, h punti distinti qualsivogliano di un K-arco sghembo di $S_{r,q}$ risultano sempre linearmente indipendenti, ossia sono congiunti da un S_{h-1}. La proiezione dei rimanenti $K' = K - h$ punti del K-arco, da questo S_{h-1} sopra un S_{r-h} di $S_{r,q}$ sghembo con S_{h-1}, è sempre a sua volta un $K'_{r-h,q}$.

Se $K > r - 2$, si può in particolare assumere in ciò che precede $h = r - 2$, ossia $r - h = 2$, $K' = K - r + 2$. Dal dato $K_{r,q}$ si viene così a ricavare per proiezione, ed anzi in guise diverse, un $(K - r + 2)_q$ piano; ma questo esige (n. 9) che si abbia

$$K - r + 2 \leqslant q + 2 \qquad \text{se } q \text{ è pari,}$$

$$K - r + 2 \leqslant q + 1 \qquad \text{se } q \text{ è dispari.}$$

Pertanto:

Per ogni $K_{r,q}$ risulta $K \leqslant q + r$ se q è pari e $K < q + r$ se q è dispari, *talchè sussistono sempre le limitazioni*

$$[M]_{r,q} \leqslant q + r \quad \textit{se } q \textit{ è pari} \quad \textit{e} \quad [M]_{r,q} < q + r \quad \textit{se } q \textit{ è dispari.}$$

Nulla più di ciò è noto finora nel caso pari. I risultati precedenti sono invece già stati migliorati nel caso dispari, essendosi dimostrato [SEGRE, 5] che:

Se q è dispari ed inoltre $q > r + 1 \geqslant 5$, risulta $[M]_{r,q} \leqslant q + r - 3$. Sussiste poi l'uguaglianza $[M]_{r,q} = q + 1$ se, q essendo dispari e $> r + 1$, si ha $r = 2, 3, 4$; per $r = 3$, e quindi $M = q + 1$, un $(q + 1)_{3,q}$ è sempre dato dai punti di una cubica sghemba.

Un'ampia generalizzazione viene ora offerta dal seguente teorema, avente carattere asintotico, ma che — volendo — potrebbe venire agevolmente formulato in modo più circostanziato.

Fissati comunque gli interi $r \geqslant 3$ e $c \lesseqgtr 0$, se si assume q dispari sufficientemente grande rispetto ad essi e $K = q + 1 - c$, ogni K-arco di $S_{r,q}$ risulta contenuto in una curva razionale normale di $S_{r,q}$. Poichè i punti di questa costituiscono un $(q + 1)_{r,q}$ completo, deve quindi essere $c \geqslant 0$; si ha dunque:

$$[M]_{r,q} = q + 1$$

per q dispari abbastanza grande rispetto ad r, nel qual caso le ovali sghembe vengono così tutte ad identificarsi con le curve razionali normali.

Con le notazioni ed ipotesi specificate nel precedente enunciato, si consideri un qualunque K-arco di $S_{r,q}$. Poichè q — per quanto supposto — è grande rispetto ad r e c, possiamo senz'altra restrizione ritenere $K \geqslant r + 3$ e scegliere, in un modo qualsiasi, $r + 3$ punti $P_1, P_2, \dots, P_{r+3}$ distinti del dato $K_{r,q}$.

In virtù del primo teorema del presente numero, se dallo spazio S_{r-3} congiungente un'arbitraria $(r - 2)$-pla di tali punti P si proiettano i rimanenti

$$k = K - (r - 2) = q - (c + r - 3)$$

punti di $K_{r,q}$, su di un piano π sghembo con quell'S_{r-3}, si ottiene un k_q piano. In forza del primo teorema del n. 16, basta dunque assumere $q \geqslant A(c + r - 3)$, per poterne inferire che questo k_q giace su di una conica irriducibile; sicchè il dato $K_{r,q}$ viene conseguentemente ad appartenere al cono proiettante tale conica dall'S_{r-3}.

Ne risulta che $K_{r,q}$ sta su ciascuno degli $\binom{r+3}{r-2}$ coni quadratici ottenibili nel modo suddetto al variare della $(r - 2)$-pla di punti P inizialmente considerata, ed è quindi contenuto nell'intersezione di tali coni. Ora [SEGRE, 5, n. 4] quest'intersezione non è altro che la curva C razionale normale di $S_{r,q}$ passante per i punti $P_1, P_2, \dots, P_{r+3}$, la quale — sul campo base di $S_{r,q}$ — contiene esattamente $q + 1$ punti (ad $r + 1$ ad $r + 1$ indipendenti), ed è quindi un $(q + 1)_{r,q}$. D'altro canto, un tale $(q + 1)_{r,q}$ è di fatto completo, in quanto la precedente argomentazione mostra che in ogni caso dev'essere $K \leqslant q + 1$. Allo stesso risultato si giunge osservando che, preso in $S_{r,q}$ un qualunque punto P che non stia su C, per esso e per $r-1$ punti scelti opportunamente su C passa un iperpiano, il quale — avendo già $r-1$ punti a comune con la curva C d'ordine r — sega C in un punto ulteriore; dunque aggregando P ai punti di C non si ottiene mai un $(q+2)_{r,q}$, il che dimostra la completezza di quel $(q+1)_{r,q}$. Con ciò tutte le affermazioni del precedente enunciato rimangono giustificate.

19. **Prime proprietà delle K-calotte.** - Nella definizione delle K-calotte $K^*_{r,q}$ di un $S_{r,q}$, data nel n. 17, non escludiamo che K possa avere il valore 0 od il valore 1, nei quali casi rispettivamente $K_{r,q}$ risulta l'insieme vuoto o si riduce ad un solo punto. Da quella definizione segue allora subito che:

La sezione di una K-calotta $S_{r,q}$ con un qualunque spazio subordinato di $S_{r,q}$ è sempre ancora una calotta (il cui ordine K' soddisfa naturalmente alle limitazioni $0 \leqslant K' \leqslant K$).

Rispetto ad una K-calotta di $S_{r,q}$, le rette di $S_{r,q}$ si classificano in tre tipi: *corde, tangenti* e *rette esterne,* a seconda del numero, rispettivamente 2, 1 o 0, dei punti di $K_{r,q}$ giacenti su esse. Presa in $S_{r,q}$ una qualsivoglia $K^*_{r,q}$ (d'ordine $K \geqslant 1$), e detto P un suo punto arbitrario, fra le $(q^r-1)/(q-1)$ rette di $S_{r,q}$ uscenti da P esattamente $K-1$ sono corde, sicchè la rimanenti risultano tangenti (e cioè *toccano* $K^*_{r,q}$ in P). Abbiamo pertanto il

Teorema I. - *Una qualunque $K^*_{r,q}$ ammette sempre in ogni suo punto lo stesso numero*

$$t = (q^r - 1)/(q-1) - K + 1$$

(non negativo) di tangenti.

Vedremo poi (nn. 21, 22) che, se $r \geqslant 3$, questo numero t risulta di necessità p o s i t i v o, con una sola eccezione possibile per $q=2$ e $k=2^r$, nel qual caso si ha manifestamente $t=0$. Ora dimostreremo il

Teorema II. - *Data una $K^*_{r,q}$ arbitraria, per la quale si abbia $r \geqslant 3$, $K \geqslant 2$, $t \geqslant 1$, e presi due suoi punti P, P' distinti qualsiansi, è possibile (eventualmente in più modi diversi) di riferire biunivocamente le t tangenti in P alle t tangenti in P' in guisa che tangenti omologhe risultino fra loro **i n c i d e n t i**.*

Denotiamo con $l_1, l_2, \ldots, l_t$ le rette che toccano $K^*_{r,q}$ in P: esse, per ciò che precede, sono necessariamente t rette distinte fra loro e dalla PP'. Presa una qualunque di esse, ad es. per fissare le idee la l_1, consideriamo il piano $\pi = l_1P'$: esso conterrà in tutto un certo numero t' di dette rette l, ove $1 \leqslant t' \leqslant t$, e non sarà restrittivo supporre che queste siano le $l_1, l_2, \ldots, l_{t'}$. Tali rette vengono manifestamente ad identificarsi con le tangenti in P al k-arco segato da π su $K^*_{r,q}$, talchè, in virtù del n. 9, dovrà risultare

$$t' = q - k + 2.$$

Il suddetto k-arco piano contiene manifestamente P', ed ammette t' tangenti pure in P' (n. 9), che denoteremo, in un qualsiasi ordine, con $l'_1, l'_2, \dots, l'_{t'}$: e ciascuna di queste verrà di conseguenza a toccare anche $K^*_{r,q}$ in P'. Conveniamo ora di associare l'_1 ad l_1, l'_2 ad $l_2, \dots, l'_{t'}$ ad $l_{t'}$; e, se $t' < t$, applichiamo ancora una volta la stessa argomentazione, sostituendo $l_{t'+1}$ ad l_1, e così via, fino ad esaurire tutte le l. In tal modo otterremo un riferimento biunivoco fra le t tangenti in P e le t tangenti in P', che palesemente soddisfa alle condizioni volute.

20. **Le K-calotte situate su di una quadrica.** - Esporremo ora alcune proprietà delle $K^*_{r,q}$ (con $r \geqslant 3$) che giacciono sopra una quadrica Q di $S_{r,q}$. Al riguardo vi sono due casi da distinguere, secondochè Q non contiene o contiene delle rette.

a) Se Q non contiene nessuna retta, allora (e soltanto allora) la Q stessa risulta una c a l o t t a, secondo la definizione del n. 17. In virtù del n. 1, la suddetta proprietà ha luogo se, e soltanto se, la quadrica Q è di specie $(3,\ q,\ 0,\ 1)$, sicchè allora sussiste l'uguaglianza

$$r = 3$$

e Q risulta una quadrica non singolare e del tipo III di $S_{3,q}$, che verrà brevemente detta una *quadrica ellittica* (per analogia con le quadriche non rigate di uno spazio reale). Una quadrica siffatta contiene precisamente (n. 1)

$$a^{\mathrm{III}}_{1,1} = q^2 + 1$$

punti. Inoltre è subito visto che, per un qualunque punto di S_3 che non stia su Q, passano $q + 1$ tangenti, e quindi $[(q^2 + 1) - (q + 1)]/2 = q(q - 1)/2$ corde di Q: poichè quest'ultimo numero risulta in ogni caso positivo, ne consegue che Q è una $(q^2 + 1)$-calotta c o m p l e t a, e che:

Per una K-calotta contenuta in una quadrica ellittica dev'essere $K \leqslant q^2 + 1$, ove il segno di uguaglianza ha luogo se, e soltanto se, la K-calotta coincide con la quadrica, onde essa è allora completa.

b) Se Q è una quadrica, la cui specie verrà denotata con $(r,\ q,\ h,\ k)$, che non sia una quadrica ellittica, in particolare non appena si abbia

$$r \geqslant 4,$$

allora Q contiene un certo numero (positivo):

$$a = a^{r,q,h}_{k,2}$$

di rette, calcolabile in base al n. 1 e precisato più oltre. Sotto tali condizioni, otteremo una limitazione superiore per l'ordine K di una qualunque $K^*_{r,q}$ giacente su Q, valutando in due modi diversi il numero n delle coppie formate da un punto di $K^*_{r,q}$ e da una retta per esso che stia su Q. Distinguiamo all'uopo tre sottocasi.

b_1) Se Q è non singolare, ossia se $h=0$, per ogni punto di Q passano (n. 1) $a_{k-1,1}$ rette di Q, e si ha quindi:

$$n = Ka_{k-1,1}.$$

Allora d'altronde, sempre in virtù del n. 1, Q contiene $a = a_{k,2}$ rette, e ciascuna di queste — in base alla definizione stessa di K-calotta — può contenere al più due punti $K^*_{r,q}$. Si ha dunque

$$n \leqslant 2a_{k,2},$$

e quindi $K \leqslant 2a_{k,2}/a_{k-1,1}$. Applicando il teor. I del n. 1, e specificando il tipo di Q col munire K dell'indicazione (I, II o III) di questo, otteniamo così le limitazioni:

$$K^{\mathrm{I}} \leqslant 2(q^k+1)(q^k-1)/(q^2-1),$$

$$K^{\mathrm{II}} \leqslant 2(q^{k-1}+1)(q^k-1)/(q^2-1),$$

$$K^{\mathrm{III}} \leqslant 2(q^{k+1}+1)(q^k-1)/(q^2-1).$$

Queste possono venir conglobate nella

$$K \leqslant 2q^{r-2} + \dots,$$

ove nel secondo membro i puntini stanno per termini in q di grado inferiore a quello scritto (i quali vengono a dipendere dal tipo di Q).

Così, ad esempio, la seconda di quelle limitazioni (per $k=2$) mostra che:

Per ogni K-calotta situata su di una quadrica Q non singolare nè ellittica di $S_{3,q}$, risulta

$$K \leqslant 2(q+1).$$

Va rilevato che in questa limitazione l'uguaglianza è p. es. raggiunta dalla sezione di Q con una coppia di piani di $S_{3,q}$ che si seghino secondo una retta esterna a Q. L'enunciato precedente vale poi anche se si suppone Q *singolare*, come si vede subito direttamente, ed in conformità con quanto diremo più oltre in b_2) e b_3), e suggerisce ulteriori approfondimenti su cui però qui non insistiamo.

Un altro esempio si ottiene (ancora per $k=2$) dalla prima delle suddette limitazioni, secondo cui:

Per ogni K-calotta situata su di una quadrica non singolare di $S_{4,q}$, risulta

$$K \leqslant 2(q^2+1).$$

Si porrebbe al riguardo la questione di vedere se qui, e similmente nelle altre limitazioni precedenti, possa valere il segno di uguaglianza quando si scelga convenientemente la K-calotta; ma di ciò non intendiamo ora occuparci.

b_2) Supponiamo in secondo luogo che Q sia singolare, e che almeno un punto O di $K^*_{r,q}$ risulti doppio per Q. In tali ipotesi, le rette congiungenti O ai rimanenti punti di $K^*_{r,q}$ sono $K-2$ rette distinte, e ciascuna di queste giace palesemente su Q. D'altro canto, le rette di Q uscenti da O sono tante quanti i punti della sezione Q' di Q con un iperpiano di $S_{r,q}$ che non passi per O; poichè tale sezione è di specie $(r-1,\ q,\ h-1,\ k-1)$, ed ha lo stesso tipo di Q, così (n. 1, 1) il numero di quelle rette vale

$$a = (q^{h-1}-1)/(q-1) + q^{h-1}a_{k-h,1} \geq K-1.$$

Attualmente si ha quindi la limitazione

$$K \leq (q^{h-1}-1)/(q-1) + q^{h-1}a_{k-h,1} + 1 = q^{r-2} + \dots,$$

nella quale l'uguaglianza è per es. raggiunta per $h=1,\ k=2,\ r=3$, ove si assuma $K^*_{r,q} = O \cup Q'$. In particolare, per $r=4,\ h=1$ si ottiene

$$K \leq q^2+2q+2 \qquad \text{o} \qquad K \leq q^2+2$$

secondochè $k=3$ o $k=2$, ossia a seconda che Q risulta di tipo II o III.

b_3) Supponiamo da ultimo che Q sia singolare, ma che ogni punto di $K^*_{r,q}$ risulti semplice per Q. In tali ipotesi, per ciascun punto di $K^*_{r,q}$ passano (n. 1, 1):

$$a^{r-2,q,h}_{k-1,1} = (q^h-1)/(q-1) + q^h a_{k-h-1,1}$$

rette di Q, nessuna delle quali sta nell'S_{h-1} doppio di Q, onde il carattere n dianzi definito vale K volte questo numero. D'altro canto, le rette di Q non giacenti in S_{h-1} sono di due tipi: quelle sghembe con S_{h-1}, in numero (n. 1, 2) di $q^{2h}a_{k-h,2}$, e quelle semplicemente appoggiate ad S_{h-1}, in numero (n. 1, 3) di $q^{h-1}(q^h-1)a_{k-h,1}/(q-1)$. Poichè ciascuna delle rette suddette contiene al più due punti di $K^*_{r,q}$, ne discende la limitazione:

$$K \leq 2\,\frac{q^{2h}a_{k-h,2} + q^{h-1}(q^h-1)a_{k-h,1}/(q-1)}{(q^h-1)/(q-1) + q^h a_{k-h-1,1}} = 2q^{r-2} + \dots .$$

In particolare, per $r=4,\ h=1$ da essa si ottiene

$$K \leq 2(q+1)^2 \qquad \text{oppure} \qquad K \leq 2(q^2+1)$$

secondochè $k=3$ o $k=2$, ossia a seconda che Q risulta di tipo II o III. Nel primo di questi due casi Q viene generata da $q+1$ piani di un sistema, ciascuno dei quali contiene al più $q+2$ punti di $K^*_{r,q}$; la prima delle suddette due limitazioni può quindi venir migliorata con la

$$K \leq (q+1)(q+2).$$

Dall'analisi precedente discende fra l'altro che:

Per ogni K-calotta situata su di una quadrica non ellittica di qualunque *specie di un $S_{r,q}$ risulta sempre $K \leqslant 2q^{r-2} + \ldots$, dove nel secondo membro i puntini stanno per termini in q di grado inferiore a quello scritto.*

21. **Il problema degli ovaloidi nel caso pari.** - In tutto il presente numero supporremo q pari, e quindi della forma

$$q = 2^h.$$

Ad ogni data $K^*_{r,q}$ resta associato — come sappiamo — un carattere $t \geqslant 0$ (definito dal teor. I del n. 19): e ci proponiamo di vedere se e come esso possa di fatto assumere i valori più bassi, il che equivale ad esaminare come vanno le cose per i valori più alti di K.

Anzitutto, se $t = 0$, il che equivale a supporre

$$K = (q^r - 1)/(q - 1) + 1,$$

la $K^*_{r,q}$ risulta totalmente priva di tangenti. Della stessa proprietà gode quindi la K'-calotta segata su essa da un qualunque $S_{r',q}$ subordinato all'$S_{r,q}$ che la contiene: e ciò implica che per essa si abbia sempre

$$K' = 0 \qquad \text{oppure} \qquad K' = (q^{r'} - 1)/(q - 1) + 1.$$

In particolare, dunque, ogni piano di $S_{r,q}$ o non incontra $K_{r,q}$ o l'incontra secondo un'ovale $(q + 2)_q$.

Poichè $r \geqslant 3$, possiamo considerare un $S_{3,q}$ di $S_{r,q}$ che abbia un punto a comune con $K^*_{r,q}$, e che quindi l'incontri secondo una $K'^*_{3,q}$, ove (per ciò che precede):

$$K' = q^2 + q + 2.$$

Consideriamo in $S_{3,q}$ una retta l che non incontri $K'^*_{3,q}$ (come tale, potrà per es. venir assunta una qualunque delle $q(q-1)/2$ rette complanari ed esterne ad una delle suddette ovali); allora, per quanto sopra, i punti di $K'^*_{3,q}$ si distribuiscono a $q + 2$ a $q + 2$ in tanti insiemi disgiunti, ciascuno situato in un piano per l. Ciò esige che $q + 2 = 2(2^{h-1} + 1)$ divida K', e quindi pure

$$K' - (q + 2) = q^2 = q^{2h};$$

sicchè 2^{h-1} dev'essere dispari, e si ha quindi $h = 1$, $q = 2$.

Supposto reciprocamente $q = 2$, consideriamo — se esiste — una qualunque K-calotta di $S_{r,q}$ che abbia $t = 0$, e l'insieme ad essa complementare

$$H = S_{r,q} - K^*_{r,q}.$$

Poichè ogni retta di $S_{r,q}$ contiene $q + 1 = 3$ punti, e può avere a comune con $K^*_{r,q}$ soltanto 0 o 2 punti, così ogni retta congiungente due punti distinti di H appartiene per intero ad H: e ciò esige che H sia uno spazio subordinato di $S_{r,q}$, anzi un iperpiano, dovendo H avere almeno un punto a comune con o g n i retta di $S_{r,q}$. Quest'argomentazione può venire facilmente invertita, onde si conclude col

TEOREMA I. - *Se q è pari, esistono K-calotte prive di tangenti soltanto per $q = 2$, nel qual caso risulta*

$$[M]^*_{r,2} = 2^r.$$

Gli ovaloidi di un $S_{r,2}$ sono precisamente gli insiemi di 2^r punti che da esso si ottengono col sopprimere i punti di un suo qualunque iperpiano.

Completeremo questi risultati dimostrando intanto il

TEOREMA II. - *Se q è pari, ma diverso da 2, risulta*

$$[M]^*_{3,q} = q^2 + 1.$$

Ovaloidi di $S_{3,q}$ sono allora ad esempio le quadriche ellittiche di questo spazio.

In virtù del n. 20, a), qualunque sia q, una quadrica ellittica di $S_{3,q}$ è una $(q^2 + 1)$-calotta (completa). Risulta perciò in ogni caso

$$[M]^*_{3,q} \geqslant q^2 + 1;$$

e, per dimostrare il teor. II, basta far vedere che — supposto q p a r i e d i v e r s o d a 2 — non può esistere una $K^*_{3,q}$ con

$$K \geqslant q^2 + 2.$$

Ammettiamo per assurdo l'esistenza di una siffatta $K^*_{3,q}$: in forza del teor. I del n. 19, essa avrà in ogni suo punto P esattamente t tangenti, con

$$t = (q^2 + q + 2) - K \leqslant q;$$

e sarà inoltre $t \geqslant 1$, in virtù dell'ipotesi $q \neq 2$ e del teor. I. Presa una, l, delle t tangenti in P a $K^*_{3,q}$, fra i $q+1$ piani di $S_{3,q}$ per essa ve ne saranno al più $t - 1 \leqslant q - 1$ contenenti un'altra tangente di $K^*_{3,q}$ in P; e sia π uno qualunque dei piani rimanenti. Il piano π dovrà segare $K^*_{3,q}$ secondo un k-arco contenente P, il quale — per costruzione — avrà in P la s o l a tangente l. Ciò implica (n. 9) che risulti

$$k = q + 1;$$

e da qui — in virtù dell'ultima proposizione del n. 13 — discende che in π esiste un punto O, non situato nel suddetto k-arco, in cui concorrono tutte le sue tangenti, queste essendo precisamente le $q+1$ rette di π uscenti da O. Ci proponiamo di dimostrare che:

Nelle ipotesi attuali, la retta congiungente O ad un qualunque punto P' di $K^*_{3,q}$ tocca $K^*_{3,q}$ in P'.

Invero, se invece esiste un punto P' di $K^*_{3,q}$ tale che OP' n o n tocchi

$K^*_{3,q}$ in P', si ha intanto che P' non può appartenere al k-arco e quindi neppure a π, sicchè la retta OP' non giace in π. D'altro canto, le t rette tangenti in P' a $K^*_{3,q}$ segano π in t punti, distinti fra loro e da O, congiunti ad O da al più $t \leqslant q$ tangenti. Una qualunque fra le rimanenti rette del fascio di centro O (le quali sono in numero $\geqslant q+1-t \geqslant 1$), risulta per costruzione sghemba rispetto a ciascuna delle rette tangenti in P' a $K^*_{3,q}$; essa è però necessariamente una tangente del suddetto k-arco, e quindi pure di $K^*_{3,q}$. Ciò essendo in contrasto col teor. II del n. 19, ne consegue la proprietà dianzi enunciata.

In base a questa, l'insieme che si ottiene aggregando O alla data $K^*_{3,q}$ risulta una K'-calotta, con

$$K' = K + 1 > q^2 + 2,$$

alla quale quindi potrà ancora venire applicata l'argomentazione precedente, deducendone una $(K+2)$-calotta; e così via. Si giunge così a costruire in $S_{3,q}$ calotte d'ordine comunque elevato; e l'assurdità di questa conclusione dimostra il teor. II.

La questione generale di vedere se in $S_{3,q}$ esistano o meno nel caso pari degli *ovaloidi che non siano delle quadriche ellittiche* appare piuttosto difficile, e rinviamo per essa a SEGRE [13], ove le vien data risposta affermativa; si confronti ciò con quanto s'è detto nel n. 9 per le ovali nel caso pari, e con quanto si dimostrerà nel n. 22 per gli ovaloidi nel caso dispari. Osserviamo unicamente a quel riguardo che, mediante argomentazioni consimili a quelle che svolgeremo nel n. 22, e tenendo conto del fatto ovvio che (analogamente a ciò che accade per q dispari) *per* $q = 4$ *ogni* $(q+1)$*-arco è una conica,* si vede che:

I soli ovaloidi di un $S_{3,4}$ *sono le quadriche ellittiche di tale spazio.*

Ancora più difficile è lo studio degli ovaloidi di $S_{r,q}$ per $r \geqslant 4$, e la determinazione dei relativi ordini M^*. Otterremo intanto in proposito certi risultati parziali (espressi dal successivo teor. III), che poi miglioreremo nel caso dispari, per stabilire i quali premettiamo un

LEMMA. - *Se in un* $S_{n,q}$, *con* $n \geqslant 3$ *(q dispari o pari), è dato un t-insieme di punti il quale abbia almeno* $q+1$ *punti a comune con ogni piano di* $S_{n,q}$ *allora dev'essere:*

$$t \geqslant q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1;$$

in questa relazione l'uguaglianza ha luogo se, e soltanto se, i punti del t-insieme sono quelli di un iperpiano di $S_{n,q}$.

Supposto per assurdo

$$t < q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1,$$

vi sarà in $S_{n,q}$ qualche punto non appartenente al t-insieme; e sia O un tal punto. Poichè le rette congiungenti O coi singoli punti del t-insieme sono in numero non superiore a t, mentre le rette di $S_{n,q}$ per O sono in numero di $q^{n-1}+...+q+1>t$, così in $S_{n,q}$ dovrà esistere qualche retta per O priva di punti a comune col t-insieme; e sia l una retta siffatta. I punti del t-insieme possono allora venir distribuiti in $q^{n-2}+...+q+1$ insiemi d i s g i u n t i, situati nei $q^{n-2}+...+q+1$ piani di $S_{n,q}$ passanti per l; e, in virtù di quanto supposto nel lemma, tali insiemi risultano costituiti ciascuno da almeno $q+1$ punti. Ciò esige che si abbia

$$t \geqslant (q+1)(q^{n-2}+q^{n-3}+...+q+1),$$

in contrasto con l'ipotesi ammessa per t, la quale è dunque da rigettare.

La stessa conclusione si trae similmente dall'ipotesi che sia

$$t = q^{n-1}+q^{n-2}+...+q+1,$$

qualora si ammetta in più che esista in $S_{n,q}$ una qualche retta l priva di punti a comune con l'insieme. Quell'ipotesi implica pertanto che o g n i r e t t a di $S_{n,q}$ a b b i a q u a l c h e p u n t o a c o m u n e c o l t-i n s i e m e.

Da qui si trae — come vedremo — che, in detta ipotesi, *ogni retta congiungente due punti del t-insieme deve appartenere per intero a quest'ultimo;* il quale risulta allora conseguentemente uno spazio subordinato di $S_{n,q}$, e perciò un $S_{n-1,q}$ in forza del supposto valore di t.

Onde dedurre quanto asserito (in corsivo) nel precedente capoverso, supponiamo per assurdo che una retta di $S_{n,q}$ congiungente due punti distinti del t-insieme contenga un punto O che non stia in quest'ultimo. Le rette congiungenti O ai singoli punti del t-insieme risultano così in numero non superiore a $t-1$, e quindi i n f e r i o r e al numero $q^{n-1}+...+q+1$ delle rette di $S_{n,q}$ uscenti da O. Ma allora almeno una di queste rette non ha punti a comune col t-insieme, contrariamente a quanto stabilito nel penultimo capoverso. Questa contraddizione prova in conclusione che, se vale l'uguaglianza nella limitazione data dal lemma, il t-insieme dev'essere un $S_{n-1,q}$; viceversa, in quest'ipotesi vale manifestamente la suddetta uguaglianza. Con ciò il lemma rimane completamente dimostrato.

Siamo ora in grado di dedurre dal teor. II una sua ampia generalizzazione. Poichè, come vedremo (n. 22, teor. I), il teor. II vale — ed anzi in forma più precisa — anche nel caso dispari, così nella seguente generalizzazione di quello potremo omettere ogni condizione sulla parità di q. Sussiste precisamente il

TEOREMA III. - Se $q \neq 2$, $r \geqslant 4$, *risulta* $[M]^*_{r,q} \leqslant q^{r-1}+1$. *Qualora, per opportuni r, q, in questa relazione valesse l'uguaglianza, ciò che* (n. 22) *potrebbe al più aver luogo soltanto per valori pari di q, si ha inoltre che — corrispondentemente a siffatti r, q — le tangenti ad un qualunque ovaloide di $S_{r,q}$ in un suo punto arbitrario verrebbero a riempire un iperpiano.*

Ciò è però di fatto impossibile, talchè si ha:

$$[M]^*_{r,q} \leqslant q^{r-1}.$$

Consideriamo un'arbitraria K-calotta di $S_{r,q}$ $(K \geqslant 1)$, e denotiamo con O un suo punto qualsiasi. Allora la data $K^*_{r,q}$ definisce nella stella di centro O un t-insieme di rette, dato dalle t rette tangenti in O a $K^*_{r,q}$, dove t risulta determinato del teor. I del n. 19. Un qualunque $S_{3,q}$ di $S_{r,q}$ passante per O sega $K^*_{r,q}$ secondo una $K'^*_{3,q}$ (n. 19), la quale passa per O ed ammette ivi come tangenti precisamente le t' rette del suddetto t-insieme che stanno in quell'$S_{3,q}$. D'altronde, in forza del teor. II se q è pari, ed in virtù del teor. I del successivo n. 22 se q è dispari, risulta sempre

$$t' \geqslant q+1.$$

In virtù del lemma (applicato entro la stella di dimensione $n = r-1$ delle rette di $S_{r,q}$ uscenti da O), da qui si deduce che in ogni caso dev'essere

$$t \geqslant q^{r-2} + q^{r-3} + \dots + q + 1,$$

ciò che (in virtù del teor. I del n. 19) equivale alla $K \leqslant q^{r-1} + 1$. Si ha di più che in questa relazione, ossia nella precedente, l'uguaglianza può aver luogo soltanto se le rette del suddetto t-insieme riempiono un iperpiano di $S_{r,q}$ (passante per O). La prima parte del teor. III è così dimostrata.

Stabiliremo la parte restante per assurdo, ammettendo che in $S_{r,q}$ $(q \neq 2,\ r \geqslant 4)$ vi sia una $K^*_{r,q}$ contenente $K = q^{r-1} + 1$ punti. In ogni punto O di questa calotta resterà allora definito un S_{r-1} tangente, luogo delle $t = q^{r-2} + q^{r-3} + \dots + q + 1$ rette tangenti ad essa in O. Pertanto O risulta il solo punto di $K^*_{r,q}$ situato in S_{r-1}, onde ogni piano di S_{r-1} che non passi per O (e di piani siffatti ne esistono certamente in virtù dell'ipotesi $r \geqslant 4$) non avrà nessun punto in comune con $K^*_{r,q}$; inoltre, un piano di $S_{r,q}$ che passi per O contiene esattamente una o $q+1$ delle t rette ivi tangenti a $K^*_{r,q}$ (e ciò secondochè esso non giace o giace in S_{r-1}), talchè la sua intersezione con $K^*_{r,q}$ verrà rispettivamente a constare di $q+1$ punti o del solo punto O.

Ciò, premesso, sia π un piano di $S_{r,q}$ (certamente esistente per ciò che precede) il quale seghi $K^*_{r,q}$ secondo un $(q+1)$-arco. Gli S_3 di $S_{r,q}$ per π sono in numero di

$$q^{r-3} + \dots + q + 1 = (q^{r-2} - 1)/(q-1);$$

e ciascuno di essi, in virtù del teor. II, ha a comune con $K^*_{r,q}$ al più q^2+1 punti, dati da quelli del suddetto $(q+1)$-arco e da al più

$$(q^2+1) - (q+1) = q(q-1)$$

punti ulteriori. Dunque il numero complessivo di punti di $K^*_{r,q}$ situati in π

e nei singoli S_3 per π non supera

$$(q+1)+q(q-1)\cdot(q^{r-2}-1)/(q-1)=q^{r-1}+1.$$

Ma poichè quest'ultimo numero uguaglia precisamente quello dei punti di $K^*_{r,q}$, così *ogni* S_3 per π deve segare su $K^*_{r,q}$ una (q^2+1)-calotta.

Preso un punto O qualsiasi di $K^*_{r,q}$ che non giaccia in π, il relativo S_{r-1} tangente segherà π lungo una retta l non passante per O; e sia χ un qualunque piano di S_{r-1} passante per l ma non per O. In base a quanto sopra, il piano χ (e quindi anche la retta l) non contiene nessun punto di $K^*_{r,q}$; inoltre, ciascuno dei rimanenti q piani per l dell'S_3 congiungente π e χ contiene o $q+1$ punti, od un sol punto, o nessun punto di $K^*_{r,q}$. Detti x_1, x_2, x_3 i numeri $(\geqslant 0)$ di quelli fra tali piani che ordinatamente sono delle specie suddette, dovrà dunque essere:

$$x_1+x_2+x_3=q, \qquad (q+1)x_1+x_2=q^2+1,$$

e quindi, eliminando x_1:

$$qx_2+(q+1)x_3=q-1.$$

Dall'impossibilità di soddisfare a questa condizione con interi x_2, x_3 non negativi, segue l'assurdità delle ipotesi ammesse; e ciò completa la dimostrazione del teor. III.

22. **Il problema degli ovaloidi nel caso dispari.** - D'ora innanzi, salvo esplicito avviso in contrario, supporremo sempre *q dispari*. Sia $K^*_{r,q}$ una qualunque K-calotta di $S_{r,q}$ $(K\geqslant 2,\ r\geqslant 3)$, ed l la retta congiungente due suoi punti A, B distinti. Un qualunque punto P di $K_{r,q}$, distinto da A e B, è allora congiunto ad l da un piano il quale sega $K^*_{r,q}$ secondo un k-arco (n. 19), che contiene A, B e quindi $k-2$ punti ulteriori, fra i quali v'è P. In virtù dell'ipotesi che q sia dispari e dei nn. 9, 14, risulta poi

$$k\leqslant q+1;$$

e *l'uguaglianza* ha qui luogo se, e soltanto se, quel k-arco è una *conica irriducibile*. Più generalmente, ognuno dei $q^{r-2}+q^{r-3}+$ $+\ldots+q+1$ piani π di $S_{r,q}$ passanti per l sega $K^*_{r,q}$ secondo un k-arco, eventualmente ridotto a soli punti A, B, il quale contiene A, B e quindi $k-2$ punti ulteriori; qui k denota un intero $(\geqslant 2)$ che può naturalmente variare da piano a piano, ma che sempre soddisfa all'anzidetta limitazione ed all'avvertenza testè indicata nel caso di uguaglianza. Ne consegue che è

$$K=2+\sum_{\pi}(k-2)\leqslant 2+(q-1)(q^{r-2}+q^{r-3}+\ldots+q+1),$$

ossia

$$K\leqslant q^{r-1}+1;$$

e si ha poi che, affinchè in questa limitazione valga l'uguaglianza, occorre che $K^*_{r,q}$ venga incontrata lungo una conica irriducibile da ogni piano che ne contenga due punti distinti.

Orbene, mediante considerazioni algebrico-geometriche che per brevità omettiamo, tanto più ch'esse sono dello stesso tipo (ma più semplici) di quelle che svolgeremo più tardi nello stabilire il teor. I del n. 24, si dimostra il seguente:

LEMMA. - *In uno spazio proiettivo S_r, di dimensione $r \geqslant 2$, sopra un qualunque campo (finito od infinito), sia dato un insieme $\mathfrak{J}$ di (almeno due) punti che, da ogni piano S_r che passi per due suoi punti distinti, venga segato secondo una conica irriducibile. Allora $\mathfrak{J}$ consta dei punti di una quadrica di S_r, sulla quale non può giacere nessuna retta.*

In base al primo capoverso del presente numero, basta applicare questo lemma ed i risultati del n. 20, a) per dedurne i seguenti teoremi, il primo dei quali (analogo al teor. II del n. 21) risale al BARLOTTI [1], mentre il secondo rientra nel teor. III del n. 21, ma è qui acquisito in modo più semplice.

TEOREMA I. - *Se q è dispari risulta sempre*

$$[\mathrm{M}]^*_{3,q} = q^2 + 1,$$

i soli ovaloidi di $S_{3,q}$ essendo allora le quadriche ellittiche di un tale spazio.

TEOREMA II. - *Se q è dispari ed $r \geqslant 4$, risulta sempre*

$$[\mathrm{M}]^*_{r,q} \leqslant q^{r-1}.$$

Nei nn. 24, 25 generalizzeremo poi la seconda parte del teor. I ed affineremo il teor. II.

23. **Sulla completezza delle K-calotte.** - Il problema generale di determinare per quali valori di K, r, q esistano delle *calotte $K^*_{r,q}$ complete che non siano degli ovaloidi,* e quello di costruire siffatte calotte, implicano la risoluzione di questioni estremamente ardue, sulle quali non intendiamo trattenerci qui sistematicamente. Al riguardo daremo soltanto alcuni esempi di calotte di quel tipo; assegneremo poi (n. 24) un criterio di completezza relativo al caso in cui sia $r = 3$ e q dispari, dal quale trarremo varie conseguenze anche per $r \geqslant 4$.

In un S_{n-1} sopra un campo di GALOIS d'ordine $q = 2$, i punti sono in numero di $2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 = 2^n - 1$ ed hanno coordinate $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ espresse da interi mod 2, non tutti nulli, ciascuno rappresentabile quindi o con lo zero o con l'unità. Un punto che abbia esattamente a coordinate non nulle verrà detto *di tipo a*; i $2^n - 1$ punti di S_{n-1} vengono così a suddividersi in n gruppi dei vari tipi $a = 1, 2, \dots, n$, quelli di tipo a essendo in numero di $\binom{n}{a}$.

Due punti $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, $B(y_1, y_2, ..., y_n)$ distinti di S_{n-1} determinano una retta, la quale contiene uno ed un sol punto ulteriore, dato precisamente dal punto $C(x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n)$. Si prova allora il seguente lemma, di cui lasciamo la facile dimostrazione al Lettore.

Al variare di A e B negli insiemi dei punti di S_{n-1} di dati tipi a e b, ove $a+b \geqslant n$ ed $A \neq B$ (senza però escludere la possibilità che si abbia $a=b$), il terzo punto della retta AB varia assumendo tutte e sole le posizioni C il cui tipo c soddisfi alle condizioni:

$$c \equiv a+b \pmod 2), \qquad |a-b| \leqslant c \leqslant 2n-a-b.$$

Denotando con k un qualunque intero positivo, stabiliremo ora il

TEOREMA I. - *L'insieme $\mathfrak{J}$ dei punti di un $S_{6k-3,2}$ aventi per tipo uno qualsivoglia dei numeri*

$$4k-1, \qquad 4k, \qquad 4k+1, ..., \quad 6k-2$$

risulta una calotta completa. Questa ha precisamente l'ordine

$$K = \binom{6k-2}{0} + \binom{6k-2}{1} + ... + \binom{6k-2}{2k-1} < 2^{6k-3},$$

onde (n. 21. teor. I) $\mathfrak{J}$ non è mai un ovaloide.

Detti A, B due punti distinti arbitrari dell'insieme $\mathfrak{J}$ suddetto, per i relativi tipi a, b si ha (in base alla definizione stessa di $\mathfrak{J}$):

$$a \geqslant 4k-1, \qquad b \geqslant 4k-1,$$

Poichè attualmente $n = 6k-2$, il tipo c del terzo punto C della retta AB soddisfa alle limitazioni

$$c \leqslant 2n-a-b \leqslant 4k-2,$$

sicchè C non appartiene di certo all'insieme $\mathfrak{J}$. Ciò dimostra intanto che $\mathfrak{J}$ è una K-calotta di $S_{6k-3,2}$.

Sia poi C un qualunque punto di $S_{6k-3,2}$ che non stia in $\mathfrak{J}$, e quindi abbia tipo c soddisfacente alle

$$1 \leqslant c \leqslant 4k-2.$$

Ne consegue che è

$$8k-2 \leqslant 2n-c \leqslant 12k-5,$$

ond'è possibile di scegliere nella successione del teor. I due numeri a, b, tali che

$$a+b = 2n-c.$$

Se ne trae allora agevolmente l'esistenza in $\mathfrak{J}$ di un punto A di tipo a e di un punto B di tipo b tali che la retta AB passi per C; e ciò dimostra la completezza della K-calotta $\mathfrak{J}$.

In modo perfettamente analogo al teor. I, si stabilisce il

TEOREMA II. - *L'insieme* $\mathfrak{J}$ *dei punti di un* $S_{6k,2}$ *aventi per tipo uno qualsivoglia dei numeri*

$$4k+1, \quad 4k+2, \ldots, \quad 6k+1$$

risulta una calotta completa, d'ordine

$$K=\binom{6k+1}{0}+\binom{6k+1}{1}+\ldots+\binom{6k+1}{2k},$$

che non è mai un ovaloide.

Ragionando ancora come nella dimostrazione del teor. I, ma con qualche lieve variante per ciò che concerne i punti dell'insieme $\mathfrak{J}$ di tipo più basso, si provano inoltre i due seguenti teoremi.

TEOREMA III. - *Una calotta completa d'ordine*

$$K=\binom{6k}{0}+\binom{6k}{1}+\ldots+\binom{6k}{2k-1}+\binom{6k-1}{2k},$$

che non è mai un ovaloide, vien data dall'insieme $\mathfrak{J}$ *dei punti di un* $S_{6k-1,2}$ *aventi per tipo uno qualsivoglia dei numeri*

$$4k, \quad 4k+1, \ldots, \quad 6k,$$

ove fra i punti di tipo $4k$ *si includano in* $\mathfrak{J}$ *soltanto quelli che hanno la prima coordinata uguale all'unità.*

TEOREMA IV. - *Una calotta completa d'ordine*

$$K=\binom{6k+3}{0}+\binom{6k+3}{1}+\ldots+\binom{6k+3}{2k}+\binom{6k+2}{2k+1},$$

che non è mai un ovaloide, vien data dall'insieme $\mathfrak{J}$ *dei punti di un* $S_{6k+2,2}$ *aventi per tipo uno qualsivoglia dei numeri*

$$4k+2, \quad 4k+3, \ldots, \quad 6k+3,$$

ove fra i punti di tipo $4k+2$ *si includano in* $\mathfrak{J}$ *soltanto quelli che hanno la prima coordinata uguale all'unità.*

In un $S_{3,3}$, ossia per $r=q=3$, ogni ovaloide è una quadrica ellittica, la quale contiene $q^2+1=10$ punti (n. 22, teor. I). Possiamo stabilire che:

In $S_{3,3}$ *esistono delle* $8^*_{3,3}$ *complete, che non sono quindi degli ovaloidi.*

All'uopo basta, introdotte in $S_{3,3}$ coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4), con le x interi ridotti mod 3 non tutti nulli, considerare gli otto punti di coordinate:

$$(1,\ 0,\ 0,\ 0),\quad (0,\ 1,\ 0,\ 0),\quad (0,\ 0,\ 1,\ 0),\quad (0,\ 0,\ 0,\ 1),$$
$$(1,\ 1,\ 1,\ 1),\quad (1,\ 1,-1,-1)\quad (1,-1,\ 1,-1,)\quad (1,-1,-1,\ 1).$$

Si verifica invero agevolmente che questi formano una $8^*_{3,3}$ completa, ossia che mai tre di essi sono allineati e che ogni altro punto di $S_{3,3}$ risulta allineato con due distinti (opportunamente scelti) di quei punti. Il presente risultato, d'altronde, verrà poi ritrovato in forma diversa ed esteso agli spazi superiori col teor. V del n. 26.

In un $S_{3,4}$, ossia per $r = 3$, $q = 4$, ogni ovaloide è una quadrica ellittica (n. 21), la quale contiene $q^2 + 1 = 17$ punti. Possiamo dimostrare che:

In $S_{3,4}$ esistono delle $14^*_{3,4}$ complete, che non sono quindi degli ovaloidi.

Introduciamo all'uopo in $S_{3,4}$ delle coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4), con le x della forma

$$x = m + in,$$

ove m ed n denotino interi ridotti mod 2 ed i sia un elemento del campo base soddisfacente alla

$$i^2 + i + 1 = 0.$$

Detta j l'altra soluzione di quest'equazione, ossia posto $j = i + 1$, si avrà dunque

$$ij = i + j = 1, \qquad i^2 = j, \qquad j^2 = 1.$$

Ciò premesso, consideriamo in $S_{3,4}$ i punti

$$(1,\ 1,\ 1,\ i), \qquad (1,\ 1,\ 1,\ j), \qquad (1,\ 1,\ i,\ i)$$

e quelli che da essi si deducono permutando in tutti i modi possibili le coordinate. Si ottengono così complessivamente $4 + 4 + 6 = 14$ punti di $S_{3,4}$ e, mediante calcoli un po' lunghi, ma privi affatto di difficoltà, si constata ch'essi costituiscono una $14^*_{3,4}$ completa. La proprietà, d'altronde, verrà poi ritrovata ed estesa agli spazi superiori col teor. VI del n. 26.

Rileviamo che i 14 punti della suddetta $14^*_{3,4}$ stanno a due a due su sette rette uscenti dal punto $(1, 1, 1, 1)$; alla loro volta tali rette giacciono a tre a tre sui sette piani rappresentati dalle equazioni

$$x_1 = x_2, \quad x_1 = x_3, \quad x_1 = x_4, \quad x_2 = x_3, \quad x_2 = x_4, \quad x_3 = x_4,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

di cui ne passano tre per ciascuna di esse. Un semplice procedimento geometrico per costruire delle $14^*_{3,4}$ complete viene fornito da SEGRE [13], ma II, ov'esso trovasi esteso anche a certe $(3q + 2)^*_{3,q}$ coplete con q pari arbitrario.

I risultati dianzi stabiliti per via algoritmica sulle $8^*_{3,3}$ e sulle $14^*_{3,4}$, e quello sulle $5^*_{3,2}$ fornito dal teor. I ove si faccia $k = 1$, rientrano nella seguente proposizione generale, a cui perverremo con procedimento geometrico costruttivo di tipo diverso da quello accennato alla fine del precedente capoverso.

TEOREMA V. - *Dato un qualunque q (pari o dispari, della forma $q = p^h$), si può determinare (almeno) un K soddisfacente alle limitazioni*

$$(q^2 + q + 4)/2 \leqslant K \leqslant (q^2 + 3q + 6)/2,$$

in guisa che in $S_{3,q}$ esista qualche K-calotta completa, la quale non risulti un ovaloide.

In particolare, se $q \equiv 3 \pmod 4$, ciò che precede ha luogo addirittura per K uguale al primo membro delle suddette limitazioni. Se invece q è dispari $\neq 3$ ed inoltre $q \not\equiv 1 \pmod 3$, quanto sopra — oltre che eventualmente per K uguale a quel primo membro — ha sempre luogo per almeno un valore di K maggiore di esso e soddisfacente alle limitazioni indicate.

Onde costruire le K-calotte di cui al precedente enunciato, consideriamo in $S_{3,q}$ una quadrica ellittica, Q, ed un qualunque punto P che non giaccia su di essa. Le $q^2 + q + 1$ rette di $S_{3,q}$ uscenti da P vengono allora a distinguersi notoriamente come segue in tre tipi (n. 3), a seconda del loro comportamento rispetto a Q:

rette tangenti, in numero di $q + 1$, date dalle rette $c = PC$ che congiungono P ai singoli punti C della conica (irriducibile), Γ, segata su Q dal piano π polare di P;

rette secanti o *corde*, in numero di

$$h = q(q - 1)/2,$$

ciascuna a delle quali incontra Q in una coppia di punti A', A'' distinti;

rette esterne, in numero di $q(q + 1)/2$, ciascuna delle quali è la polare rispetto a Q di una retta secante contenuta nel piano π della suddetta conica Γ.

In ognuna delle h coppie A', A'' scegliamo — per ora ad arbitrio — uno dei due punti, che designeremo con A^*, e consideriamo l'insieme $\mathfrak{J}$ formato dai vari punti P, C, A^*. Questo consta complessivamente di

$$H = 1 + (q + 1) + h = (q^2 + q + 4)/2$$

punti; ed è subito visto che $\mathfrak{J}$ risulta anzi sempre una H-calotta. Questa o è completa, oppure appartiene ad una od anche eventualmente a più calotte complete. Scelta quindi una K-calotta completa contenente $\mathfrak{J}$, risulterà intanto

$$K \geqslant H,$$

ed è con ciò dimostrata l'esistenza in ogni caso di qualche K-calotta completa soddisfacente alla prima delle limitazioni del teor. V.

Se $H = K$ (ossia $k = K - H = 0$), non v'è altro da aggiungere. Supporremo dunque

$$k = K - H \geqslant 1,$$

nel qual caso denoteremo con $O_1, O_2, \dots, O_k$ i k punti della K-calotta che non stanno nell'insieme $\mathfrak{J}$ suddetto. Ciascuna delle k rette PO_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) dovrà allora manifestamente risultare esterna rispetto a Q, il che val quanto dire che il piano polare di O_i rispetto a Q dovrà segare la quadrica Q secondo una conica (irriducibile), Γ_i, incontrante Γ in due punti C_i', C_i'' distinti (congiunti dalla polare di PO_i).

Poichè, in virtù delle ipotesi ammesse, nessuna corda di $\mathfrak{J}$ può passare per O_i, così — per $i = 1, 2, \ldots, k$ fissato — le

$$H - 1 = (q + 1) + h$$

rette del tipo O_iC, O_iA^* risulteranno fra loro distinte, e saranno quindi precisamente, in un ordine opportuno, le $q + 1$ tangenti e le h corde di Q uscenti da O_i. Ciò implica, fra l'altro, che *ciascuno dei* $q - 1$ *punti di* Γ_i *distinti da* C'_i, C_i'' *debba essere un punto* A^*.

Dimostreremo ora che, *se* $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, k$), *le coniche* Γ_i, Γ_j *non possono tagliarsi su* Γ (il che val quanto dire che C_i', C_i'', C_j', C_j'' risultano quattro punti distinti di Γ), *tranne in un caso che determineremo.*

Suppongasi all'uopo che le due coniche Γ_i e Γ_j di Q — le quali sono manifestamente distinte fra loro, tali essendo O_i ed O_j — abbiano a comune un punto C di Γ; esse dovranno allora conseguentemente segarsi in un secondo punto D di Q, che può eventualmente coincidere con C (nel qual caso Γ_i e Γ_j vengono a toccarsi in C). Relativamente a tale punto D potranno *a priori* soltanto presentarsi quattro possibilità, che passiamo ad esaminare successivamente, dimostrando la contraddittorietà delle prime tre di esse.

1) Se $D = C$, ossia se le coniche Γ_i, Γ_j si toccano in C, allora la retta O_iO_j — quale polare della tangente comune a Γ_i e Γ_j in C — dovrebbe toccare Q in C. Ma allora i tre punti distinti C, O_i, O_j della K-calotta dianzi considerata risulterebbero allineati, il che non può essere per la definizione stessa di calotta.

2) Se D fosse un punto di Γ distinto da C, i piani delle tre coniche Γ, Γ_i, Γ_j verrebbero a formare fascio attorno alla retta CD, sicchè i loro poli rispetto a Q — ossia P, O_i, O_j, che sono tre punti distinti della K-calotta — risulterebbero allineati, il che non può essere.

3) Se D è un punto distinto da C e non situato su Γ, le coniche Γ_i, Γ_j non possono toccarsi nè in C nè in D. Consideriamo allora il cono proiettante Γ_i dal punto P. Poichè C, ma non D, sta su Γ, così questo cono ha in C, ma non in D, lo stesso piano tangente di Q, il che val quanto dire ch'esso tocca Γ_j in C, ma non in D. Ne discende che tale cono (che ha già tre intersezioni con Γ_j, due in C ed una in D), deve necessariamente incontrare Γ_j in un punto, A_j, che supporremo intanto distinto da C e da D; sicchè la retta PA_j, generatrice di quel cono, deve risultare

appoggiata a Γ_i in un punto, A_i, distinto da C, D ed A_j. Notiamo ora che nè A_i nè A_j possono venire a cadere in un punto C_1 di Γ; poichè, altrimenti, la loro congiungente — che, per costruzione, passa per P — dovrebbe toccare Q in C_1, sicchè A_i ed A_j verrebbero ad identificarsi entrambi con C_1, e quindi dovrebbero coincidere fra loro, contrariamente a ciò che precede. D'altro canto A_i ed A_j, essendo punti di Γ_i e Γ_j non situati su Γ, risultano per quanto sopra punti (del tipo A^*) della suddetta K-calotta; sicchè questa viene ad avere in P, A_i, A_j tre punti allineati distinti, ciò che è assurdo.

4) Supponiamo infine che, ferme restando le ipotesi inizialmente fatte in 3), il punto A_j ivi considerato venga a coincidere con D o con C. La prima di queste alternative non può però presentarsi, poichè essa implicherebbe il passaggio del piano tangente in D a Q per P, sicchè D starebbe su Γ, contro al supposto. Resta dunque soltanto l'alternativa che A_j coincida con C. In quest'ipotesi, il cono proiettante Γ_i da P sega Q — fuori di Γ_i — secondo una conica, Γ_i', tangente in C alla Γ_j. In virtù di ciò che s'è detto in 1), il polo O_i' del piano di Γ_i' risulta allineato con C ed O_j. È chiaro allora che la K-calotta dianzi considerata, la quale contiene C, non può avere sulla retta CO_i' più di un punto O_j.

L'analisi precedente prova che un punto C di Γ può appartenere ad al più due distinte coniche Γ_i. Dunque fra i $2k$ punti di Γ:

$$C_1',\ C_2', \dots,\ C_k',\ C_1'',\ C_2'', \dots,\ C_k''$$

almeno k risultano distinti; e questo implica che sia

$$k \leqslant q+1, \quad \text{e quindi} \quad K = H + k \leqslant H + q + 1,$$

il che dimostra che ciascuna delle K-calotte costruibili nel modo dianzi indicato deve anche soddisfare alla seconda limitazione del teor. V.

Possiamo ora facilmente stabilire di più che:

Con la sola eventuale eccezione dei casi $q = 2, 3, 4$, *nessuna delle suddette K-calotte può risultare un ovaloide.*

Invero, ove così non fosse, in virtù del n. 21 (teor. II) e del n. 22 (teor. I) dovrebbe essere $K = q^2 + 1$; ma allora si avrebbe

$$q^2 + 1 \leqslant (q^2 + 3q + 6)/2 \quad \text{ossia} \quad q(q-3) \leqslant 4,$$

relazione palesemente assurda non appena si supponga $q \geqslant 5$. Nei casi esclusi in cui $q = 2, 3, 4$, l'esistenza di $K^*_{3,q}$ soddisfacenti alle condizioni volute dal teor. V risulta già dalle precedenti determinazioni di $5^*_{3,2}$ complete (date dal teor. I per $k = 1$), nonchè di $8^*_{3,3}$ e di $14^*_{3,4}$ complete (ved. le considerazioni successive al teor. IV). L'esistenza di $8^*_{3,3}$ complete rientra anche in particolare nella prima affermazione della rimanente parte del teor. V, che ora appunto passiamo a stabilire.

Supponiamo all'uopo $q \equiv 3 \pmod 4$, e quindi q dispari. In tale ipotesi, scegliamo ad arbitrio un punto C di Γ, e denotiamo con γ, c il piano e la retta ivi rispettivamente tangenti a Q, Γ. Detta poi Δ la conica segata su Q da un piano per c comunque fissato, distinto da π e da γ, è chiaro che un qualsiasi piano ω passante per la retta CP e d i s t i n t o da γ sega Q secondo una conica, Ω, la quale passa per C senza toccare ivi nè Γ nè Δ; e siano rispettivamente C', D le ulteriori intersezioni di Ω con Γ, Δ (distinte da C).

In virtù delle ipotesi ammesse, ed a norma della fine del n. 14, i punti C, C' spezzano Ω in d u e a r c h i CC', uno determinato dei quali c o n t i e n e i l p u n t o D; inoltre, l'insieme $\mathfrak{J}$ formato dal punto P e dai vari archi CC' definiti da tale condizione, ed in tal guisa ottenibili al variare del piano ω $(\neq \gamma)$ attorno a CP, è una H-calotta del tipo dianzi considerato, alla quale vengono per costruzione ad appartenere interamente le coniche Γ e Δ. Ci proponiamo di dimostrare che *tale H-calotta risulta completa,* ossia che o g n i punto O di $S_{3,q}$ è situato su q u a l c h e c o r d a d i quella.

La proprietà è infatti manifesta qualora il punto O giaccia sull'una o sull'altra delle rette c, CP; essa inoltre segue subito — in base a ciò che precede ed alla fine del n. 14 — se O non sta su γ, in quanto allora per O passa qualche corda del $(q+5)/2$-arco completo segato sulla H-calotta dal piano $\omega = CPO$. Basterà dunque stabilirla nell'ipotesi che O appartenga a γ, ma non stia nè su c nè su CP. All'uopo osserviamo che il punto O, non stando su c, non giace di certo su π. Possiamo dunque considerare il cono quadrico proiettante Γ da O, il quale segherà Q — oltre che in Γ — lungo un'ulteriore conica, Γ', passante per C. Si vede facilmente che, poichè O non sta per ipotesi su CP, la Γ' non tocca in C la conica Γ; ne discende senz'altro che neppure le coniche Γ' e Δ possono toccarsi in C. Queste ultime — giacendo su Q — avranno pertanto a comune un punto, D, distinto da C; e la retta OD, appoggiandosi conseguentemente a Γ e Δ in punti distinti, risulta di fatto u n a c o r d a della H-calotta pocanzi definita.

Con ciò, tutte le affermazioni del teor. V rimangono stabilite, tranne l'ultima. Onde dimostrare anche quella, basta far vedere che, nell'ipotesi che q sia dispari e $\not\equiv 1 \pmod 3$, la scelta degli A^* nella definizione dell'insieme $\mathfrak{J}$ data inizialmente può venir fatta in modo — che per l'insieme $\mathfrak{J}$ risultante — si abbia
$$k \geqslant 1,$$
e cioè in guisa che vi sia in $S_{3,q}$ (almeno) un punto P' tale che p e r e s s o n o n p a s s i n e s s u n a c o r d a d i $\mathfrak{J}$.

A tale scopo, incominciamo con l'osservare che, poichè per ipotesi $q-1$ è primo con 3, così nel campo base di $S_{3,q}$ ogni elemento — e quindi in particolare anche l'unità — ammette una ed una sola radice cubica (cfr. ad esempio SEGRE [2], n. 79). Ne discende che, in tale campo, $x=1$ ed $x=-1$ sono l e s o l e radici delle equazioni $x^3=1$ ed $x^3=-1$, ossia in esso tanto la $x^2+x+1=0$ che la $x^2-x+1=0$ risultano *prive di radici*. Possiamo perciò introdurre in $S_{3,q}$ coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4) tali che P sia il punto $(1, 0, 0, 0)$ e che la $x_3=x_4=0$ sia una retta l per P *esterna* a Q, in modo che questa determini su Q la coppia P_1, P_2 — appartenente ad un'estensione quadratica del campo suddetto — data dall'equazione:

$$x_1^2-x_1x_2+x_2^2=0.$$

Vedremo allora come la determinazione dei punti A^* possa attualmente effettuarsi in guisa che il punto

$$P'(0, 1, 0, 0),$$

il quale giace sulla retta l testè considerata, venga a godere della voluta proprietà.

Osserviamo intanto a quel fine che, con le suddette notazioni, denotato con c il birapporto

$$c=(P_1P_2PP'),$$

risulta $c^2+c+1=0$ e quindi $c^3=1$, $c+1\neq 0$, $c^2+1\neq 0$. Ne discende che *nessuna potenza (ad esponente intero) di c può valere* -1, poichè altrimenti — in forza della $c^3=1$ — almeno una delle c^0, c^1, c^2 varrebbe -1, il che manifestamente non può essere.

Enunciamo poi un *lemma*, di cui lasciamo la facile dimostrazione al lettore.

In un piano proiettivo sopra un qualunque campo di caratteristica $\neq 2$ si consideri una conica irriducibile, Δ, ed una coppia di punti P, P', non situati su Δ, la cui congiungente seghi Δ nei punti P_1 e P_2 (eventualmente coincidenti, od appartenenti ad un'estensione quadratica del campo suddetto). Allora, dette v e v' le due involuzioni su Δ di poli P e P', l'omografia w ottenuta su Δ come loro prodotto:

$$w=vv'$$

(effettuato p. es. da destra a sinistra) ha sempre la propria caratteristica uguale al birapporto $c=(P_1P_2PP')$.

In virtù di questo lemma e dell'osservazione che lo precede, preso in $S_{3,q}$ un qualunque piano δ contenente la retta $l=PP'$ e che non tocchi Q, ossia che seghi Q secondo una conica Δ irriducibile, definite poi v, v' e w come nel lemma, si ha che *nè l'omografia w nè nessuna delle sue potenze può risultare un'involuzione.*

D'altro canto, se A', A'' sono due punti *distinti* di Q la cui congiungente passi per P, e quindi non contenga P', il piano $\delta=A'A''P'$ contiene l e *non tocca* Q, poichè altrimenti esso dovrebbe avere in comune con Q il solo punto di contatto. Detta ancora Δ la conica (irriducibile) sezione di Q con δ, chiamiamo C_1, C_2 od anche — cumulativamente — *punti* C, se esistono nel campo base di $S_{3,q}$, le due intersezioni di δ con Γ, ossia i punti di contatto delle rette condotte per P a toccare Δ; punti che risultano distinti, in quanto P non sta su Q e quindi neppure su Δ. Parimente — qualora esistano nel campo suddetto — consideriamo i due punti C' (distinti) di contatto delle tangenti a Δ uscenti da P'. È poi chiaro che un punto C non può mai anche essere un punto C', dato che la retta PP' non tocca Δ; e che la retta congiungente i due punti C non passa per P', in quanto P e P' non sono coniugati rispetto a Q.

Il nostro assunto verrà stabilito ove si mostri la possibilità di scegliere un punto A^* entro ogni coppia di punti A', A'' distinti di Δ, allineati con P, in guisa che nessuna retta che congiunga due distinti di tali punti A^*, od un punto A^* ed un punto C, venga a passare per P'. A tal uopo osserviamo che un qualunque punto $A = A_0$ di Δ, che non sia un punto C, definisce univocamente una catena di punti di Δ:

$$\begin{array}{llll} \ldots, & A_{-1} = v'v(A_0) = v'(A'_{-1}), & A'_{-1} = v(A_0), & A_0 = A, \\ A_0' = v'(A_0), & A_1 = v(A_0') = vv'(A_0), & A_1' = v'(A_1), & \ldots; \end{array}$$

questa risulta necessariamente ben determinata e finita, ove si convenga di prolungarla sia da una parte che dall'altra finchè si può, con la condizione che in essa non debbano comparire elementi ripetuti. Relativamente agli estremi di tale catena, possono *a priori* soltanto presentarsi i sei casi seguenti:

1) Se l'estremo sinistro è un punto A_i $(i < 0)$, allora l'estremo destro non può che essere il punto A_j' $(j > 0)$ tale che $A_i = v(A_j')$. Attualmente la catena consta di $2(j-i)$ punti, dei quali metà sono punti A e metà sono punti A', e fra essi si sceglieranno indifferentemente come punti A^* o gli $j-i$ punti A o gli $j-i$ punti A'.

2) In modo analogo si procederà se l'estremo sinistro fosse un punto A_i', bastando allora scambiare in ciò che precede le lettere accentate con quelle non accentate.

3) Se dei due estremi uno — ad esempio il sinistro — è un punto C e l'altro è un punto C', la catena è necessariamente del tipo

$$C,\ v'(C) = A_i',\ \ldots,\ v(C') = A_j',\ C';$$

essa quindi consta di $j-i+1$ punti A', e di $j-i$ punti A e sono questi ultimi che dovranno venir scelti quali punti A^*.

4) Allo stesso modo si tratta il caso in cui l'estremo sinistro sia un punto C' ed il destro sia un punto C.

5) Se gli estremi sono i due punti C, la catena risulta del tipo:

$$C_1,\ v'(C_1) = A_i',\ \ldots,\ v'(C_2) = A_j,\ C_2.$$

Ne consegue che la corrispondenza proiettiva $v'w^{j-i+1}$ muta C_1 in C_2. D'altro canto, in base alla $w = vv'$ ed al carattere involutorio delle v, v', si ha senz'altro che $v'w^{j-i+1}$ è necessariamente un'involuzione; sicchè questa dev'essere permutabile con la v, in quanto ne scambia gli elementi doppi C_1, C_2. Vale dunque la relazione

$$v(v'w^{j-i+1}) = (v'w^{j-i+1})v,$$

che manifestamente equivale alla

$$w^{2(j-i+2)} = 1 .$$

Notiamo ora che non può risultare $w^{j-i+2} = 1$, in quanto quest'uguaglianza equivarrebbe alla coincidenza delle involuzioni v e $v'w^{j-i+1}$, mentre invece la prima di esse ha C_1, C_2 come punti fissi e la seconda scambia questi punti fra loro. Dall'ultima equazione segue quindi che w^{j-i+2} è un' involuzione, in contrasto con un risultato precedente. Dunque il caso in questione nelle attuali ipotesi *non può presentarsi*, e lo stesso può dirsi similmente dell'eventualità che:

6) gli estremi della catena siano i due punti C'.

L'analisi precedente mostra come vanno scelti i punti A^* nei vari casi possibili; ed è subito visto che con ciò si soddisfa a tutte le condizioni volute.

OSSERVAZIONE. - Per opportuni valori di q, i due criteri dati alla fine del teor. V possono risultare applicabili entrambi. Ciò ha luogo ad esempio per $q = 11$, nel qual caso il teor. V fornisce per più valori di K l'esistenza di $K^*_{3,11}$ complete che non sono ovaloidi, e precisamente per $K = 68$ ed anche per un qualche K compreso fra 69 e 80.

Per brevità non ci occuperemo qui di ulteriori raffinamenti delle limitazioni fornite per K dal suddetto teorema, nè di altre costruzioni possibili di calotte complete, sebbene si tratti di questioni di indubbio interesse.

24. Un criterio di completezza ed alcune conseguenze. - Stabiliremo che:

Se q è dispari, affinchè una $K^*_{3,q}$ che non sia un ovaloide risulti completa, occorre che si abbia $K \leqslant q^2 - q + 18$.

Ciò discenderà, come corollario immediato, dal seguente

TEOREMA I. - *Se q è dispari, ma d'altronde qualunque, e $K \geqslant q^2 - q + 19$, ogni $K_{3,q}$ appartiene necessariamente ad una quadrica ellittica.*

Riferiamoci ad una qualunque K-calotta $K^*_{3,q}$ di $S_{3,q}$, che soddisfi alle condizioni enunciate nel teor. I. In virtù del teor. I del n. 22 si ha allora $K \leqslant q^2 + 1$, il che intanto fornisce $q \geqslant 18$ e quindi $q \geqslant 19$. Un piano π di $S_{3,q}$ incontra poi sempre $K^*_{3,q}$ secondo un k-arco (n. 19), e verrà detto di tipo I, II o III secondochè risulta

$$k = q + 1, \quad \text{o} \quad k = q, \quad \text{oppure} \quad k \leqslant q - 1;$$

si ricordi (n. 14) che nel primo caso il k-arco è necessariamente una conica (irriducibile) di π, mentre nel secondo esso si deduce da una tal conica sopprimendone un punto

Ciò premesso, presa una qualunque retta l di $S_{3,q}$ che incontri $K^*_{3,q}$ in due punti A, B distinti, denotiamo rispettivamente con a_l, b_l, c_l il numero dei piani per l dei tipi I, II, III. Risulta allora manifestamente

$$a_l + b_l + c_l = q + 1;$$

inoltre, tenuto conto dell'ipotesi fatta per K nel teor. I, si ha:

$$q^2 - q + 19 \leqslant K \leqslant 2 + a_l(q - 1) + b_l(q - 2) + c_l(q - 3) =$$
$$= 2 + (a_l + b_l + c_l)\,(q - 1) - b_l - 2c_l = q^2 + 1 - b_l - 2c_l,$$

e quindi

$$b_l + 2c_l \leqslant q - 18.$$

Ne consegue che è:

$$b_l + c_l \leqslant q - 18, \qquad 2c_l < q - 17,$$

eppertanto, per ogni corda l di $K^*_{3,q}$,

$$a_l = (q + 1) - (b_l + c_l) \geqslant 19, \qquad c_l < (q - 17)/2.$$

Siano π', π'' due piani distinti di tipo I passanti per l (l'esistenza dei quali discende senz'altro dalla $a_l \geqslant 19$), e C', C'' le due coniche per A, B da essi segate su $K^*_{3,q}$. Presi su C' due punti A', B' distinti fra loro e da A, B, denotiamo con O l'intersezione delle rette $l = AB$ ed $l' = A'B'$. Mostriamo intanto che è possibile di condurre in π'' una retta l'' che passi per O e che:

1) incontri C'' in due punti A'', B'' distinti fra loro e da A, B;

2) sia congiunta ad l' da un piano che risulti di tipo I o II.

Infatti, fra le rette l'' di π'' uscenti da O, quelle che soddisfano alla condizione 1) sono in numero non inferiore a $(q - 3)/2$, e quelle che soddisfano alla 2) sono in numero di

$$a_{l'} + b_{l'} = (q + 1) - c_{l'} > (q + 1) - (q - 17)/2;$$

poichè la somma di questi due numeri supera il numero $q + 1$ complessivo delle rette l'', ne consegue che — di fatto — taluna l'' deve soddisfare simultaneamente a quelle due condizioni.

Il k-insieme segato su $K^*_{3,q}$ dal piano $\pi = l'l''$ contiene per costruzione i punti A', B', A'', B''; poichè, in base alla 2), π è di tipo I o II, così quel

k-insieme è una conica C (passante per A', B', A'', B''), oppure lo si ottiene da una tale C omettendone un punto, che allora denoteremo con C_0. E siccome le coniche irriducibili C, C', C'' stanno in tre piani π, π', π'' distinti e si segano a due a due in tre coppie di punti tutti distinti, così deve esistere in $S_{3,q}$ una quadrica, Q, che le contenga tutte tre.

Vogliamo dimostrare che *questa* Q *contiene* $K^*_{3,q}$ *per intero*, per il che basterà far vedere che un qualunque punto P di $K^*_{3,q}$ che non stia su nessuna delle coniche C, C', C'', ossia che non appartenga a nessuno dei piani π, π', π'', giace di conseguenza su almeno una conica tracciata su Q. All'uopo consideriamo la retta $r = PA$, ed osserviamo che v'è al più una posizione, P_0, di P su $K^*_{3,q}$ tale che r passi per C_0. Potremo supporre che P non coicida con P_0, poichè è facile vedere che dalla $K^*_{3,q} - P_0 \subset Q$ segue la $K^*_{3,q} \subseteq Q$ (cfr. il lemma IV in SEGRE [13]). In tale ipotesi, incominciamo col provare che esiste qualche piano ρ passante per la retta r e soddisfacente alle seguenti tre condizioni:

1') ρ non tocchi in A nè C' nè C'', e non contenga nessuno dei punti B, A', B', A'', B'';

2') ρ seghi C in due punti distinti fra loro e dall'eventuale punto C_0 di cui sopra;

3') ρ risulti di tipo I o II.

I piani ρ per r soddisfacenti alla 2') sono in numero non inferiore a $(q-3)/2$; fra essi, al più 7 non soddisfanno alla condizione 1'): vi sono pertanto almeno $(q-3)/2 - 7 = (q-17)/2$ piani ρ soddisfacenti ad entrambe le 1'), 2'). Il numero dei piani ρ soddisfacenti alla 3') vale d'altronde

$$a_r + b_r = (q+1) - c_r > (q+1) - (q-17)/2\,;$$

e poichè la somma dei due numeri ultimamente considerati supera il numero $q+1$ complessivo dei piani ρ per la r, ne consegue l'esistenza di (almeno) un piano ρ soddisfacente simultaneamente alle 1'), 2'), 3').

In virtù della 3'), la sezione di ρ con $K^*_{3,q}$ è una conica (irriducibile), C^*, dalla quale eventualmente sia stato omesso un punto. Per costruzione, C^* passa per A e per P; inoltre, in forza della 1'), C^* si appoggia a C' in un punto distinto da A, B, A', B', ed a C'' in un punto distinto da A, B, A'', B''; infine, in base alla 2'), C^* si appoggia a C in due punti distinti fra loro e dai punti testè menzionati. Dunque la conica irriducibile C^* ha complessivamente cinque punti distinti a comune con C, C', C'', e quindi pure con la quadrica Q, ond'essa giace su Q.

Dal fatto, così stabilito, che $K^*_{3,q}$ è contenuta in Q, trarremo ora che Q è una quadrica ellittica. Ed invero, ove questa proprietà non valesse, in virtù del n. 20, b_1) sarebbe $K \leqslant 2(q+1)$; il raffronto con la $K \geqslant q^2 - q + 19$ (valida per ipotesi) porterebbe allora alla relazione $q(q-3) + 17 \leqslant 0$, manifestamente assurda.

Il teor. I è con ciò compiutamente dimostrato. Poggiando su esso, proveremo il

TEOREMA II. - *Per ogni* q *dispari*, *e per qualunque* K*-calotta di* $S_{4,q}$, *deve risultare*

$$K \leqslant q^3 - q^2 + 20q - 50.$$

Supponiamo per assurdo che in $S_{4,q}$ esista una $K^*_{4,q}$ per la quale si abbia invece

$$K \geqslant q^3 - q^2 + 20q - 49.$$

Diremo che un piano di $S_{4,q}$ è di tipo I, quando il k-arco da esso segato su $K^*_{4,q}$ consta di $k = q+1$ punti, e cioè è una conica; diremo poi che un iperpiano di $S_{4,q}$ è di tipo I, quando la $K'^*_{3,q}$ da esso segata su $K^*_{4,q}$ consta di $K' \geqslant q^2 - q + 19$ punti e sta quindi, in forza del teor. I, su di una quadrica ellittica. Incominciamo col far vedere che:

a) *Per ogni corda di* $K^*_{4,q}$ *passano almeno* $21q - 49$ *piani di tipo I.*

Invero, se per una corda l di $K^*_{4,q}$ passassero non più di $21q - 50$ piani di tipo I, valutando il numero dei punti $K^*_{4,q}$ situati su l e quelli ulteriori giacenti nei $q^2 + q + 1$ piani di $S_{4,q}$ passanti per l si avrebbe

$$K \leqslant 2 + (21q - 50)(q-1) + [(q^2 + q + 1) - (21q - 50)](q-2) = \\ = q^3 - q^2 + 20q - 50,$$

e ciò contraddirebbe l'ipotesi ammessa per K.

Mostriamo poi che:

b) *Per ogni piano di tipo I passano almeno cinque iperpiani di tipo I.*

Invero, se per un piano π di tipo I passassero al più quattro iperpiani di tipo I, valutando il numero dei punti di $K^*_{4,q}$ situati su π e quelli ulteriori che giacciono nei $q+1$ iperpiani di $S_{4,q}$ passanti per π si avrebbe

$$K \leqslant (q+1) + 4[(q^2+1) - (q+1)] + (q-3)[(q^2 - q + 18) - (q+1)] = \\ = q^3 - q^2 + 20q - 50,$$

in contrasto ancora con l'ipotesi relativa a K.

Notiamo che da a), b) si ha subito l'*esistenza di iperpiani di tipo I.* In virtù di quanto osservato nel primo capoverso della dimostrazione del teor. I, ne discende la limitazione $q \geqslant 19$, che così risulta conseguenza dell'ipotesi inizialmente fatta per K.

Ciò premesso, fissiamo un qualsiasi piano π di tipo I, certamente esistente in base ad a), e denotiamo con C la conica da esso segata su $K^*_{4,q}$. Scegliamo quindi due distinti iperpiani di tipo I passanti per π, l'esistenza dei quali resta assicurata da b); designeremo con S', S'' tali iperpiani, e con Q', Q'' le quadriche ellittiche che, a norma del teor. I, ne contengono le sezioni con $K^*_{4,q}$. È chiaro che Q' e Q'' dovranno entrambe segare π lungo C.

Preso un qualunque punto A di C ed un qualunque punto P di $K^*_{4,q}$ che non stia nè in S' nè in S'' (l'esistenza del quale si desume subito dalla disuguaglianza ammessa per K), al più $q+1$ fra i piani di tipo I passanti per la retta AP segano π lungo rette: dunque, a norma di a), almeno $(21q-49)-(q+1)=20q-50$ (>0) di quei piani di tipo I incontrano π nel s o l o punto A, e sia ρ uno comunque fissato di essi.

In virtù di b), vi sono almeno c i n q u e iperpiani di tipo I passanti per ρ; al più d u e di essi contengono l'uno o l'altro dei piani che toccano Q' e Q'' in A, in quanto ρ non può coincidere nè con l'uno nè con l'altro di tali piani, dato che ρ contiene il punto P che invece non giace nè in S' nè in S''. Vi saranno pertanto almeno t r e iperpiani di tipo I che passano per ρ e non toccano in A nè Q' nè Q''. Denotiamo con S uno qualsiasi di tali iperpiani e con Q la quadrica ellittica contenente la sezione di S con $K^*_{4,q}$. I piani $\pi'=SS'$, $\pi''=SS''$ passano per A, senza toccare Q', Q'' in questo punto; essi quindi segano rispettivamente Q', Q'' secondo due coniche irriducibili, C', C'', passanti per A.

Dei q^2+1 punti di Q', almeno q^2-q+19 appartengono a $K^*_{4,q}$; talchè non più di $q-18$ di essi possono non stare in $K^*_{4,q}$. Ma allora, *a fortiori*, non più di $q-18$ dei $q+1$ punti di C' possono non stare in $K^*_{4,q}$, ossia C' contiene almeno 19 punti di $K^*_{4,q}$. Poichè ciascuno di tali 19 punti giace di conseguenza su Q, così *la quadrica Q contiene la conica C'* per intero; e, del pari, *Q contiene C''*.

Poichè Q' e Q'' stanno in spazi S', S'' distinti, e segano il piano $\pi=S'S''$ lungo la stessa conica C, esiste in $S_{4,q}$ una ed una sola quadrica, V, che passi per Q', Q'' e contenga il punto P (non situato nè su S' nè su S''). Siccome poi Q viene — per costruzione — ad avere a comune con tale V le coniche distinte C', C'' ed il punto P (che non sta nè sull'una nè sull'altra di queste), ne discende che Q deve identificarsi con la sezione della V suddetta con l'iperpiano S. Si noti inoltre che, poichè le Q, Q', Q'' non sono singolari, così l'indice di specializzazione di V può soltanto valere 0 od 1.

Ci proponiamo di dimostrare che *la data $K^*_{4,q}$ deve giacere interamente su V*, per il che basta provare che un qualunque punto $\bar{P}$ di $S_{4,q}$ che stia in $K^*_{4,q}$, ma non su alcuno degli iperpiani S, S', S'', è di conseguenza contenuto in V. Consideriamo all'uopo uno qualunque, $\bar{\rho}$, dei piani di tipo I che passano per la retta $P\bar{P}$, e non si appoggiano a π lungo una retta; il piano $\bar{\rho}$ non starà nè in S' nè in S'', dato che questi spazi non contengono nè P nè $\bar{P}$. A norma di b), per $\bar{\rho}$ passano almeno c i n q u e iperpiani di tipo I; fra questi, al più d u e possono risultare tangenti a Q' ed al più d u e possono toccare Q''. Esisterà perciò certamente (almeno) un iperpiano $\bar{S}$ di tipo I passante per $\bar{\rho}$, e non tangente nè a Q' nè a Q''; esso inoltre non potrà contenere il piano π, in virtù dell'ipotesi ammessa che $\bar{\rho}$ e π non s'incontrino lungo una retta.

Sia $\bar{Q}$ la quadrica ellittica che contiene la sezione di $\bar{S}$ con $K^*_{4,q}$; essa passa manifestamente sia per P che per $\bar{P}$. Inoltre $\bar{S}$ sega Q' e Q'' secondo coniche (irriducibili), $\bar{C}'$ e $\bar{C}''$, le quali — in base ad una precedente argomentazione — debbono stare entrambe su $\bar{Q}$; nè l'una nè l'altra di esse può contenere il punto P (che non sta nè in S' nè in S''), e le $\bar{C}'$, $\bar{C}''$ risultano distinte fra loro, poichè altrimenti esse dovrebbero coincidere con la C, sicchè $\bar{S}$ conterrebbe π. Ma allora $\bar{Q}$, avendo a comune con V le coniche $\bar{C}'$, $\bar{C}''$ ed il punto P, non può che identificarsi con la sezione di V con $\bar{S}$; pertanto il punto $\bar{P}$, che giace su $\bar{Q}$, deve conseguentemente stare su V, onde l'asserto.

In virtù del n. 20, b_1), b_2), e b_3), il fatto — testè assodato — che $K^*_{4,q}$ stia sulla quadrica V implica in ogni caso la limitazione

$$K \leqslant 2(q^2+1).$$

Ma questa, essendo $q \geqslant 3$, risulta incompatibile con l'ipotesi ammessa

$$K \geqslant q^3 - q^2 + 20q - 49,$$

in quanto dalle due relazioni testè scritte discende la $(q+20)(q-3)+9 \leqslant 0$, manifestamente assurda. Tale ipotesi è dunque da rigettare, il che dimostra il teor. II.

Estenderemo infine il teor. II, provando il

TEOREMA III. - *Se q è d i s p a r i ed $r > 4$, per o g n i $K^*_{r,q}$ di $S_{r,q}$ deve risultare*

$$K < q^{r-1} - q^{r-2} + 20q^{r-3}.$$

Distinguiamo due casi, secondochè in $S_{r,q}$ esista o no qualche $S_{3,q}$ avente con $K^*_{r,q}$ a l m e n o q^2-q p u n t i d i s t i n t i a c o m u n e.

Nel primo caso, se si valuta (applicando il teor. II) il numero dei punti di $K^*_{r,q}$ situati in un siffatto $S_{3,q}$, ed il numero di quelli ulteriori contenuti nei $q^{r-4}+q^{r-5}+\dots+1$ $S_{4,q}$ di $S_{r,q}$ passanti per esso, si ottiene:

$$K \leqslant (q^2-q)+(q^{r-4}+q^{r-5}+\dots+1)[(q^3-q^2+20q-49)-(q^2-q)] < q^{r-1}-q^{r-2}+20q^{r-3},$$

onde l'asserto.

Nel secondo caso, e cioè se ogni $S_{3,q}$ di $S_{r,q}$ contiene m e n o di q^2-q punti di $K^*_{r,q}$, valutiamo in due modi diversi il numero delle coppie formate da un punto di $K^*_{r,q}$ e da un $S_{3,q}$ di $S_{r,q}$ che lo contenga. Tale numero è dato intanto dal prodotto di quello, K, dei punti di $K^*_{r,q}$ per quello degli $S_{2,q}$ di un $S_{r-1,q}$ (fornito per es. da SEGRE [2], n. 159), e vale quindi precisamente

$$K.(q^r-1)(q^{r-1}-1)(q^{r-2}-1)/[(q^3-1)(q^2-1)(q-1)].$$

D'altronde, in virtù dell'ipotesi ammessa, detto numero deve risultare i n f e r i o r e al prodotto di q^2-q per il numero degli $S_{3,q}$ di $S_{r,q}$, ossia esso è m i n o r e di

$$(q^2-q)\cdot(q^{r+1}-1)(q^r-1)(q^{r-1}-1)(q^{r-2}-1)/[(q^4-1)(q^3-1)(q^2-1)(q-1)].$$

Si ha pertanto

$$K < (q^2 - q)(q^{r+1} - 1)/(q^4 - 1) < q^{r-1} - q^{r-2} + 20q^{r-3},$$

onde l'asserto.

25. **Alcune proprietà asintotiche delle calotte.** - I risultati espressi dai teoremi II e III del n. 24 offrono senz'altro delle limitazioni superiori per i caratteri $[M]^*_{r,q}$ (definiti nel n. 17), nell'ipotesi che q sia dispari e si abbia $r \geqslant 4$. Detti risultati furono ivi ottenuti poggiando sul teor. I del n. 24, il quale — a sua volta — fu stabilito valendosi, in modo essenziale, delle proprietà dei $(q+1)_q$ e dei q_q (nel caso dispari) di cui al n. 14. Servendosi delle generalizzazioni di queste ultime proprietà che abbiamo dimostrate nel n. 14, e procedendo con metodo analogo a quello seguito nel n. 24, i risultati dei suddetti tre teoremi — e quindi pure le conseguenti limitazioni superiori per i caratteri M^* — potrebbero venire ampiamente migliorati. Senza soffermarci su ciò, faremo invece vedere come, basandosi sulle proprietà asintotiche dei k_q provate nel n. 16, si possono ottenere con quel metodo delle proprietà asintotiche delle $K^*_{r,q}$, relative al caso di q dispari ed a valori arbitrari ($\geqslant 3$) di r.

Per $r = 3$, dimostreremo anzitutto il

TEOREMA I. - *Dato comunque l'intero c non negativo e supposto*

$$K \geqslant q^2 - cq,$$

per ogni q dispari — sufficientemente grande rispetto a c — una qualunque $K^*_{3,q}$ risulta necessariamente contenuta in una quadrica ellittica.

A tal fine, assegnato arbitrariamente un numero reale θ compreso fra 0 ed 1, e fissato un qualunque intero a che soddisfi alla

$$a \geqslant (c + \theta + 1)/(1 - \theta),$$

stabiliamo intanto il

LEMMA. - *Supposto che a verifichi la precedente relazione, assunto comunque q dispari e non inferiore alla funzione A(a) definita nel n. 16, e presa una qualunque $K^*_{3,q}$ di $S_{3,q}$ che soddisfi alla limitazione del teor. I, in ogni fascio di piani di $S_{3,q}$ v'è un numero (intero) non inferiore a θq di piani, ciascuno dei quali sega $K^*_{3,q}$ secondo un k-arco totalmente contenuto in una conica.*

Supponiamo per assurdo che in un fascio di piani di $S_{3,q}$ vi siano meno di θq piani godenti della proprietà specificata nel lemma. Mentre ciascuno di tali piani incontra $K^*_{3,q}$ in al più $q+1$ punti, in oguno dei rimanenti dovranno esservi meno di $q-a$ punti (n. 16). Risulta quindi

$$K < \theta q(q+1) + (q + 1 - \theta q)(q - a) <$$
$$< q^2 - [a(1-\theta) - \theta - 1]q \leqslant q^2 - cq;$$

ne discende una contraddizione con la limitazione ammessa per K, onde il lemma. Questo, per semplicità, verrà in seguito soltanto applicato nel caso particolare in cui si assuma

$$\theta = 2/3 \qquad \text{e quindi} \qquad a \geqslant 3c + 5.$$

Dato comunque un $c \geqslant 0$, si fissi un $a \geqslant 3c+5$ e, supposto q dispari e

$$q \geqslant A(a), \qquad q \geqslant 18a + 78,$$

in guisa che si potrà applicare il lemma con $\theta = 2/3$, si consideri in un $S_{3,q}$ una qualunque $K^*_{3,q}$ per la quale risulti $K \geqslant q^2 - cq$. Il teor. I può ora venir meglio precisato col mostrare che *ogni siffatta $K^*_{3,q}$ giace per intero in una quadrica ellittica.*

A tal fine, introduciamo alcune comode locuzioni. Diremo che un piano π di $S_{3,q}$ è di tipo I, allorchè per il k-arco da esso segato su $K^*_{3,q}$ risulta $k \geqslant q - a$. In tal caso, a norma del n. 16, il suddetto k-arco starà in una conica (irriducibile), che verrà designata come conica relativa a π. In virtù del lemma, avremo allora che *il numero dei piani di tipo I esistenti in un qualunque fascio di piani di $S_{3,q}$ non è mai inferiore a $2q/3$.*

Presi due punti A, B distinti di $K^*_{3,q}$, siano π', π'' due diversi piani di tipo I passanti per la loro congiungente, e C', C'' le coniche ad essi relative. Ciascuna di queste dovrà manifestamente passare sia per A che per B, dovendo anzi C', C'' rispettivamente contenere le sezione k'_q, k''_q di $K^*_{3,q}$ con π', π''; e si avrà inoltre

$$k' \geqslant q - a, \qquad k'' \geqslant q - a,$$

in base alla definizione stessa del tipo I.

Prendiamo poi in k'_q due punti A', B' distinti fra loro e da A, B, e designamo con O l'intersezione delle rette $l = AB$, $l' = A'B'$. Vogliamo dimostrare che, fra le $q+1$ rette l'' del piano π'' uscenti da O, ve n'è qualcuna tale che:

1) l'' contenga due punti A'', B'' di k''_q, distinti fra loro e da A, B;

2) il piano $l'l''$ risulti di tipo I.

Diciamo n il numero delle rette l'' di π'' uscenti da O che soddisfano alla 1), ed m il numero dei punti di k''_q che non stanno nè sulla l nè su alcuna di tali l''. Risulta quindi

$$m + 2n + 2 = k'' \geqslant q - a;$$

inoltre, poichè ognuna delle rette che congiungono O ad uno degli m punti suddetti, se non tocca C'', incontra C'' ulteriormente in un punto che non sta in k''_q, così dev'essere:

$$m - 2 \leqslant q + 1 - k'' \leqslant a + 1.$$

Ne discende la limitazione:

$$n > q/2 - a - 3.$$

D'altro canto, il numero delle l'' soddisfacenti alla 2) è — per quanto sappiamo sui piani del fascio di asse l' — non inferiore a $2q/3$. Risulta pertanto $n + 2q/3 > q + 1$, essendo in virtù del supposto $q \geqslant 6a + 24$, sicchè è certo possibile di soddisfare simultaneamente alle 1), 2), come appunto si trattava di dimostrare.

Scegliamo ora in π'' una qualunque retta l'' per O che soddisfi alle 1), 2); il piano $\pi = l'l''$ sarà conseguentemente di tipo I, e la conica C ad esso relativa conterrà la sezione k_q di π con $K^*_{3,q}$ e quindi anche le due coppie di punti A', B' ed A'', B'' rispettivamente segate da l' ed l'' su k'_q e k''_q (ossia su $K^*_{3,q}$). Ma allora le tre coniche irriducibili C, C', C'', stando in tre piani distinti e segandosi a due a due in tre coppie di punti, pure tutti distinti, saranno congiunte da una quadrica Q irriducibile. Proveremo che $K^*_{3,q}$ *sta per intero su* Q, onde — tenuto conto del n. 20 — ne seguirà tosto che Q è una quadrica ellittica; all'uopo basterà mostrare che un qualunque punto P di $K^*_{3,q}$ che non stia su nessuna delle coniche C, C', C'', e cioè che sia esterno ai piani π, π', π'', appartiene di conseguenza a Q. È anzi sufficiente di stabilire questa proprietà per i punti P di $K^*_{3,q}$ non giacenti su C, C', C'' e tali che la retta AP non si appoggi a C. Invero, l'insieme $\mathcal{S}_0$ dei punti P di $K^*_{3,q}$ distinti da A, non giacenti su C e tali che AP incontri C sono al più in numero di $(q+1) - k \leqslant a + 1$, onde è facile dedurre la $K^*_{3,q} \subseteq Q$ dalla $K^*_{3,q} - \mathcal{S}_0 \subset Q$ (cfr. il lemma IV in SEGRE [13]).

Nelle ipotesi suddette, incominciamo col dimostrare che, fra i $q+1$ piani di $S_{3,q}$ passanti per la retta AP, ve n'è almeno uno, $\bar{\pi}$, per il quale le seguenti quattro condizioni siano soddisfatte:

$\bar{1}$) $\bar{\pi}$ contenga un punto di k'_q distinto dai punti A, B, A', B';

$\bar{2}$) $\bar{\pi}$ contenga un punto di k''_q distinto dai punti A, B, A'', B'';

$\bar{3}$) $\bar{\pi}$ contenga due punti distinti di k_q;

$\bar{4}$) $\bar{\pi}$ sia un piano di tipo I.

I numeri di piani $\bar{\pi}$ soddisfacenti separatamente alle $\bar{1}$), $\bar{2}$) sono $k' - 4$ e $k'' - 4$; fra quei $q + 1$ piani ve ne sono quindi almeno

$$(k' - 4) + (k'' - 4) - (q + 1) \geqslant q - 2a - 9$$

per i quali valgono simultaneamente le $\bar{1}$), $\bar{2}$).

La retta AP non giace in π (poichè nè A nè P stanno in π) e sega π in un punto che non appartiene a C, e quindi neppure a k_q, in virtù delle ipotesi ammesse. Diciamo $\bar{n}$ il numero dei piani $\bar{\pi}$ per la retta AP soddisfacenti alla $\bar{3}$), ed $\bar{m}$ il numero dei punti di k_q che non stanno su di un piano $\bar{\pi}$ siffatto. Mediante argomentazioni del tutto analoghe ad altre svolte precedentemente, si ottiene allora:

$$\bar{m} + 2\bar{n} = k \geqslant q - a, \qquad \bar{m} - 2 \leqslant q + 1 - k \leqslant a + 1$$

e quindi

$$\bar{n} > q/2 - a - 2.$$

Ne consegue che il numero di piani $\bar{\pi}$ soddisfacenti simultaneamente alle $\bar{1}$), $\bar{2}$), $\bar{3}$) è maggiore di

$$(q - 2a - 9) + (q/2 - a - 2) - (q + 1) = q/2 - 3a - 12.$$

Poichè il numero dei piani $\bar{\pi}$ soddisfacenti alla $\bar{4}$) non è — come sappiamo — inferiore a $2q/3$, così i piani $\bar{\pi}$ soddisfacenti a ciascuna delle condizioni $\bar{1}$), $\bar{2}$), $\bar{3}$), $\bar{4}$) risultano in numero maggiore di

$$(q/2 - 3a - 12) + 2q/3 - (q + 1) = q/6 - 3a - 13;$$

quel numero è dunque positivo in virtù dell'ipotesi che sia $q \geqslant 18a + 78$, sicchè esiste di fatto qualche piano $\bar{\pi}$ del tipo voluto.

Sia $\bar{C}$ la conica relativa ad un siffatto piano $\bar{\pi}$, l'esistenza della quale consegue dalla $\bar{4}$). Poichè, per costruzione, $\bar{\pi}$ passa per i punti A e P, così questi debbono di necessità stare sulla $\bar{C}$. In forza delle $\bar{1}$), $\bar{2}$) e $\bar{3}$), la conica $\bar{C}$ ha a comune con le C', C'' e C rispettivamente 1,1 e 2 punti, distinti fra loro e dal punto A; e poichè ciascuno dei cinque punti ultimamente menzionati giace su Q, così $\bar{C}$ deve essere tracciata su Q. Ma allora P, essendo un punto di $\bar{C}$, è conseguentemente contenuto in Q, il che completa la dimostrazione del teor. I.

Con procedimenti analoghi a quelli che nel n. 24 ci hanno permesso di far discendere dal teor. I di detto numero i teoremi II e III dello stesso n. 24, si può dedurre dal teorema testè stabilito la seguente proposizione, della quale omettiamo la ormai facile dimostrazione.

TEOREMA II. - *Assegnato un qualunque c positivo, e presi $r \geqslant 4$, e q dispari sufficientemente grande rispetto a c, per ogni $K^*_{r,q}$ risulta*

$$K < q^{r-1} - cq^{r-2}.$$

Ne consegue che:

I numeri $[M]^*_{r,q}$, definiti nel n. 17, sono tali che

$$\lim_{q \to \infty} \frac{[M]^*_{r,q} - q^{r-1}}{q^{r-2}} = -\infty.$$

26. Limitazioni inferiori per gli M^*. - Un problema interessante, ma piuttosto difficile, è quello di costruire delle $K^*_{r,q}$ non banali. Di esso ci siamo già occupati con una certa ampiezza per $r = 3$ nei nn. 21-23; i risultati ivi conseguiti, unitamente a quelli del n. 20, lasciano prevedere che il caso $r \geqslant 4$ abbia ad essere assai più arduo.

Il problema suddetto è in istretta relazione con quello di trovare delle limitazioni inferiori per i caratteri M^* introdotti nel n. 17; ed invero, dalla definizione stessa di questi ultimi, segue subito che l'esistenza di una K-calotta di $S_{r,q}$ implica la limitazione

$$[M]^*_{r,q} \geqslant K.$$

Ricordato che è (nn. 9, 17, 21, 22):

$$[M]^*_{1,q} = 2 \text{ (per ogni } q),$$

$$[M]^*_{2,q} = q+1 \text{ (per } q \text{ dispari)}, \qquad [M]^*_{2,q} = q+2 \text{ (per } q \text{ pari)},$$

$$[M]^*_{3,q} = q^2+1 \text{ (per ogni } q>2), \qquad [M]^*_{r,2} = 2^r,$$

ci proponiamo di dimostrare il

TEOREMA I. - *Per ogni $r \geqslant 4$ e q arbitrario (pari o dispari), sussiste la limitazione inferiore*

$$[M]^*_{r,q} \geqslant q^2[M]^*_{r-3,q} + 1.$$

In base ad una precedente osservazione, il teor. I si avrà quale conseguenza immediata del

TEOREMA II. - *Per ogni $r \geqslant 4$ e q arbitrario, si può definire una calotta di $S_{r,q}$ contenente*

$$K = q^2[M]^*_{r-3,q} + 1$$

punti.

In un dato $S_{r,q}$ consideriamo un piano π ed un $S_{r-3,q}$ sghembi fra loro, ed un qualunque punto P di π. Per definizione del carattere $[M]^*_{r-3,q}$, che indicheremo anche brevemente con M, esistono certamente delle M-calotte in $S_{r-3,q}$. Sceltane una, se ne proiettino i punti da π e, in ciascuno degli M $S_{3,q}$ così ottenuti, si costruisca una quadrica ellittica che tocchi π in P. Si vede allora facilmente che l'insieme dei punti situati sulle M quadriche suddette è un K-insieme, il quale è anzi una K-calotta di $S_{r,q}$, ove K venga definito come nel teor. II.

I teoremi I e II sono con ciò dimostrati. È probabile che la limitazione offerta dal teor. I possa venire ulteriormente affinata. Qui ci limiteremo a provare che così accade di fatto per $r = 4$, nel qual caso il teor. I fornisce la limitazione

$$[M]^*_{4,q} \geqslant 2q^2 + 1,$$

che viene parzialmente migliorata dal

TEOREMA III. - *Se q è una potenza ad esponente dispari di un numero primo $p \equiv 7$ (mod 8), talchè risulta $q \equiv 3$ (mod 4), esiste in $S_{4,q}$ qualche K-calotta per la quale:*

$$K = (5q^2 - 2q + 1)/2,$$

onde allora sussiste la limitazione

$$[M]^*_{4,q} \geqslant (5q^2 - 2q + 1)/2.$$

Per dimostrare questo teorema, incominciamo con l'osservare che, in forza della condizione $q \equiv 3 \pmod 4$, -1 non è un quadrato nel campo base di $S_{4,q}$, ossia in tale campo base l'equazione $x^2 + y^2 = 0$ ammette l'unica soluzione $x = y = 0$. È poi ben noto che, in virtù della condizione $p \equiv 7 \pmod 8$, il numero 2 risulta residuo quadratico di p, sicchè esso ammette due radici quadrate nel campo suddetto.

Introduciamo in $S_{4,q}$ coordinate proiettive omogenee (x, y, z, u, v), e consideriamo le tre quadriche

$$\begin{aligned} Q_1: &\quad x^2 + y^2 + u^2/2 - 2v^2 = 0, \quad z = 0, \\ Q_2: &\quad x^2 + y^2 - z^2 + 2v^2 = 0, \quad u = 0, \\ Q_3: &\quad x^2 + y^2 - 2z^2 + u^2 = 0, \quad v = 0. \end{aligned}$$

Poggiando sulle osservazioni del precedente capoverso, è subito visto che ciascuna delle Q_1, Q_2, Q_3 è una q u a d r i c a e l l i t t i c a (e quindi contiene $q^2 + 1$ punti); e che Q_1 e Q_2 segano il piano $z = u = 0$ comune ai loro iperpiani di appartenenza secondo due coniche irriducibili (contenenti quindi ognuna $q + 1$ punti), le quali non hanno punti comuni.

L'insieme costituito dai punti di Q_1, Q_2 che non stanno su nessuna delle due coniche suddette, e dai punti P_0 di Q_3 per i quali $2z^2 + u^2$ n o n è u n q u a d r a t o (sicchè per questi $zu \neq 0$), consta dunque di

$$K = 2(q^2 + 1) - 2(q + 1) + (q + 1)^2/2 = (5q^2 - 2q + 1)/2$$

punti distinti di $S_{4,q}$; ed ora mostreremo ch'esso è una K-calotta. All'uopo basta provare che:

Preso un q u a l u n q u e *punto P_0 di Q_3 del tipo suddetto, la quadrica Q_0 proiezione di Q_2 da P_0 sullo spazio $z = 0$ di Q_1 non ha alcun punto a comune colla Q_1 (nel campo base di $S_{4,q}$).*

Ora infatti, dette $(x_0, y_0, z_0, -1, 0)$ le coordinate di P_0, talchè risulterà $z_0 \neq 0$ ed inoltre

$$x_0^2 + y_0^2 - 2z_0^2 + 1 = 0,$$

un facile calcolo dimostra che su $z = 0$ la quadrica Q_0 ha l'equazione

$$(2x + x_0 u)^2 + (2y + y_0 u)^2 - 2(x^2 + y^2 + u^2/2 - 2v^2) = 0.$$

Quest'equazione, presa assieme con l'equazione di Q_1, implica ciascuna delle:

$$x^2 + y^2 + u^2/2 - 2v^2 = 0, \qquad 2x + x_0 u = 0, \qquad 2y + y_0 u = 0.$$

Eliminando le x, y fra queste, si ottiene la

$$(x_0^2 + y_0^2 + 2)u^2 - 8v^2 = 0$$

e quindi la

$$(2z_0^2 + 1)u^2 - 8v^2 = 0,$$

che — in virtù di quanto supposto per P_0 — ammette la sola soluzione banale $u=v=0$, conducente a valori tutti nulli delle x, y, z, u, v; e ciò dimostra l'asserto.

Affinamenti del teor. I, di natura analoga a quelli del teor. III, possono anche ottenersi per valori di q di altro tipo; ma omettiamo di darli per brevità. Rileviamo piuttosto che, come già appare dall'esempio fornito dalla K-calotta testè ottenuta, molte delle difficoltà inerenti ai problemi segnalati al principio del presente numero risultano di carattere essenzialmente aritmetico.

Aggiungeremo infine la c o s t r u z i o n e di qualche K-calotta, segnalando le l i m i t a z i o n i i n f e r i o r i che ne conseguono per i caratteri M^*, taluna delle quali potrebbe venire ulteriormente migliorata. Abbiamo intanto il

TEOREMA IV. - *Qualunque sia l'intero $h \geqslant 0$, risulta:*

$$[M]^*_{3h+1,q} \geqslant q^{2h} + (q^{2h+2} - 1)/(q^2 - 1) \qquad (per\ ogni\ q)$$

$$[M]^*_{3h+2,q} \geqslant (q^{2h+2} - 1)/(q - 1) - q(q^{2h} - 1)/(q^2 - 1) \qquad (per\ q\ dispari)$$

$$[M]^*_{3h+2,q} \geqslant q^{2h} + (q^{2h+2} - 1)/(q - 1) - q(q^{2h} - 1)/(q^2 - 1) \qquad (per\ q\ pari),$$

$$[M]^*_{3h+3,q} \geqslant (q^{2h+4} - 1)/(q^2 - 1) \qquad (per\ ogni\ q > 2),$$

potendosi nei singoli casi costruire delle K-calotte costituite da un numero K di punti uguale al secondo membro della rispettiva limitazione.

Invero, per $h = 0$ non v'è che da applicare quanto è stato richiamato nel terzo capoverso del presente numero. Se invece $h \geqslant 1$, basta procedere induttivamente rispetto ad h poggiando sui teoremi I e II, per potere concludere nel modo voluto. I risultati del teor. IV potrebbero poi venire variamente affinati, in conformità a cio ch'è stato detto precedentemente. Così ad esempio, usufruendo ancora dei teoremi I e II, unitamente però al teor. III, è subito visto che — se si suppone $h \geqslant 1$, $p \equiv 7 \pmod 8$, $q \equiv 3 \pmod 4$ — alla prima limitazione del teor. IV può venire sostituita la

$$[M]^*_{3h+1,q} \geqslant q^{2h-2}(5q^2 - 2q + 1)/2 + (q^{2h-2} - 1)/(q^2 - 1),$$

che è m i g l i o r e di quella in quanto attualmente risulta $q \geqslant 7$.

Dimostriamo ora il

TEOREMA V. - *Supposto $r \geqslant 3$ e q dispari, ed introdotte in $S_{r,q}$ coordinate omogenee $(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$, si considerino i $K = 2^r - 1$ punti P di $S_{r,q}$, distinti dal punto unità, che hanno le loro coordinate x uguali parte a $+1$, parte a -1.*

Tali punti costituiscono sempre una K-calotta; se poi $q=3$, aggregando a quest'ultima il punto unità si ottiene una $(K+1)$-calotta *c o m p l e t a*.

Scelti fra i suddetti punti P due punti $P'(x')$ e $P''(x'')$ distinti qualsiansi, siano a' ed a'' i numeri delle x' e x'' uguali all'unità, sicchè $r-a'+1$ delle x' ed $r-a''+1$ delle x'' varranno -1. Essendo lecito mutare simultaneamente di segno tutte le x' o tutte le x'', senza che con ciò P', P'' abbiano a cangiare, non è restrittivo supporre $a'\geqslant r-a'+1$, $a''\geqslant r-a''+1$, ossia

$$2a'\geqslant r+1, \qquad 2a''\geqslant r+1.$$

Detti poi b il numero degli indici l tali che $x'_l=x''_l=+1$, e c il numero di quelli per cui $x'_l=x''_l=-1$, risulta manifestamente

$$0\leqslant b\leqslant (a',\ a''), \qquad 0\leqslant c\leqslant (r-a'+1,\ r-a''+1),$$

ed inoltre

$$a'+a''-b+c=r+1;$$

ne discende che non può risultare $b=0$, poichè — in virtù di ciò che precede — dalla $b=0$ seguirebbe la $c=0$ e quindi la coincidenza di P' con P''.

Un qualunque punto A della retta $P'P''$, distinto da P' e P'', ha coordinate del tipo

$$x_l=x'_l+kx''_l \qquad (l=1,\ 2,\dots,\ r+1),$$

dove k denoti un qualsivoglia elemento non nullo del campo base di $S_{r,q}$. Ora — tenuto conto dei valori delle x' e delle x'' — è chiaro che le $r+1$ coordinate di A possono venire distribuite in *q u a t t r o* *g r u p p i* *d i s g i u n t i* di

$$b, \qquad c, \qquad a'-b, \qquad r-c-a'+1$$

elementi, gli elementi di ciascun gruppo essendo tutti uguali rispettivamente a:

$$(*) \qquad 1+k, \qquad -1-k, \qquad 1-k, \qquad -1+k.$$

Dei quattro gruppi suddetti il primo non è mai vuoto, in forza della $b\neq 0$; ed ora mostreremo che *a l* *p i ù* *u n o* degli altri tre può risultare privo di elementi. Invero, se fosse $c=a'-b=0$, oppure $r-c-a'+1=$ $=c=0$, ne discenderebbe rispettivamente $a''=r+1$ od $a'=r+1$; sicchè P'' o P' coinciderebbe col punto unità, contrariamente al supposto. Se poi si avesse $a'-b=r-c-a'+1=0$, ne seguirebbe $b+c=r+1$ onde P' e P'' non potrebbero essere distinti.

Notiamo che (poichè $k\neq 0$) i quattro valori $(*)$ risultano sempre distinti, eccettuato soltanto se $k=\pm 1$, nel qual caso però due di quei valori si annullano. Pertanto nessuno dei punti A suddetti può coincidere con un punto P, in quanto ogni punto A o ha qualche coordinata nulla, oppure ammette (almeno) tre coordinate con valori a due a due diversi; e ciò dimostra che i punti P costituiscono una K-calotta.

Se $q = 3$, ove nell'argomentazione precedente si aggreghi ai punti P il punto unità (sicchè non resta più escluso che a' od a'' valga $r + 1$) e si tenga presente che attualmente k può soltanto assumere i valori ± 1, ne risulta che ogni punto A ha qualche coordinata nulla, e non è quindi mai uno dei $K + 1$ punti P testè considerati. L'insieme di questi è pertanto una $(K + 1)$-calotta, della quale ora dimostreremo la completezza, facendo vedere che ogni punto di $S_{r,q}$ avente qualche coordinata nulla può venire identificato con uno dei suddetti punti A. Infatti, ad esempio, il punto che ha nulle le prime a (>0) coordinate, uguali a -1 le successive b, ed uguali a $+1$ le rimanenti c $(= r - a - b + 1)$ coordinate, risulta allineato coi due punti — manifestamente distinti — che hanno le prime a coordinate tutte uguali a $+1$ o tutte uguali a -1, le successive b uguali a $+1$, e le ultime c uguali a -1.

Il teor. V è così compiutamente stabilito. Esso fornisce fra l'altro *l'esistenza — per ogni $r \geqslant 3$ – di $(2^r)^*_{r,3}$ complete*; è tuttavia da rilevare che, in base al teor. IV, risulta sempre $[M]^*_{r,3} > 2^r$, sicchè *nessuna di quelle $(2^r)^*_{r,3}$ può essere un ovaloide.*

Proveremo da ultimo il

TEOREMA VI. - *Supposto $r \geqslant 3$ ed inoltre $q \geqslant 4$, ma d'altronde arbitrario (pari o dispari), si introducano in $S_{r,q}$ coordinate omogenee $(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$ e si fissi un qualunque elemento, i, del campo base di $S_{r,q}$ diverso dagli elementi 0, $+1$ e -1. Denotato quindi con n un intero variabile tenuto soltanto a soddisfare alle limitazioni*

$$1 \leqslant n \leqslant r,$$

si considerino i $K = 2^{r+1} - 2$ punti P di $S_{r,q}$ aventi n delle loro coordinate uguali all'unità e le rimanenti $r - n + 1$ uguali ad i. Ebbene, tali punti P costituiscono in ogni caso una K-calotta, la quale risulta completa se $q = 4$.

Scegliamo due qualsiansi, $P'(x')$ e $P''(x'')$, purchè distinti, di quei punti P; e siano rispettivamente n' ed n'' i numeri delle relattive coordinate uguali all'unità. Se allora designamo con a il numero degli indici l tali che $x'_l = x''_l = 1$, sarà manifestamente

$$0 \leqslant a \leqslant (n', n'');$$

è chiaro inoltre che non potrà essere $n' = n'' = a$, in virtù dell'ipotesi che P' e P'' siano distinti.

Un qualunque punto A della retta $P'P''$, distinto da P' e P'', ha coordinate del tipo

$$x_l = x'_l + kx''_l \qquad (l = 1, 2, \dots, r + 1),$$

dove k denoti un qualsivoglia elemento non nullo del campo base di $S_{r,q}$. Ora, avuto riguardo ai valori assunti dalle coordinate x' ed x'', è subito visto che le $r+1$ coordinate x di un siffatto punto A possono venire distribuite in quattro gruppi disgiunti di

$$n'-a, \qquad n''-a, \qquad a, \qquad r+a-n'-n''+1$$

elementi, gli elementi di ciascun gruppo essendo tutti uguali fra loro e valendo ordinatamente

$$(**) \qquad 1+ki \qquad i+k, \qquad 1+k, \qquad i+ki.$$

In virtù della definizione dei punti P data nel teorema, è ora chiaro che nessun punto A può risultare un punto P se almeno tre di quei gruppi non sono vuoti e se i quattro valori $(**)$ risultano distinti. Ci restano quindi al riguardo soltanto da esaminare i due casi seguenti.

1) Se due dei quattro gruppi suddetti sono vuoti, risultando $1 \leqslant n' \leqslant r$, $1 \leqslant n'' \leqslant r$ e non potendo essere $n' = n'' = a$, ciò implica che si abbia

$$a = r + a - n' - n'' + 1 = 0.$$

Allora le coordinate di P'' omonime a quelle di P' che assumono il valore 1 od i hanno rispettivamente il valore i od 1, onde è facile trarre che attualmente nessun punto A (distinto da P' e P'') della retta $P'P''$ può risultare un punto P.

2) Se due dei valori $(**)$ coincidono, è subito visto che (poichè $k \neq 0$, $i \neq 1$) ciò ha luogo soltanto se $k = \pm 1$. In quest'ipotesi i valori $(**)$ diventano $i+1$, 2, $2i$ oppure $1-i$, $i-1$, 0, sicchè il corrispondente punto A non è di certo un punto P.

Abbiamo così dimostrato che i punti P costituiscono in ogni caso una K-calotta; ci resta soltanto più da provare che questa è completa se si suppone $q=4$. In tale ipotesi, introduciamo l'elemento $j = 1/i$; i quattro elementi del campo base di $S_{r,q}$ sono allora 0, 1, i, j, e possiamo supporli legati fra loro dalle relazioni date esplicitamente nel n. 23.

Sia O un qualunque punto di $S_{r,q}$. Per i nostri fini possiamo permutarne le coordinate, e ridurci sempre al caso in cui le prime n_0 coordinate di O valgano 0 (ove $0 \leqslant n_0 \leqslant r$), le successive n_1 valgano 1, le successive n_2 siano uguali ad i e le ultime n_3 siano uguali ad j, ove naturalmente

$$n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = r + 1\,;$$

scriveremo allora le coordinate di O nella forma abbreviata $(0_{n_0}, 1_{n_1}, i_{n_2}, j_{n_3})$, e ci varremo anche nel seguito di notazioni analoghe in casi consimili. Supponiamo che O non sia un punto P, e distinguiamo due possibilità secondochè $n_0 = 0$ o $n_0 > 0$.

Se $n_0 = 0$, ciascuno dei tre numeri n_1, n_2, n_3 dev'essere positivo, in virtù dell'ipotesi che O non sia un punto P. Se invece $n_0 > 0$, uno almeno di quei tre numeri dev'essere positivo; e non è restrittivo supporre che si abbia $n_1 > 0$, potendosi sempre soddisfare a tale condizione mediante un'ulteriore permutazione delle coordinate e coll'alterare queste ultime per un opportuno fattore non nullo.

Sia nell'un caso che nell'altro, i punti

$$P'(1_{n_0},\ i_{n_1},\ 1_{n_2},\ i_{n_3}), \qquad P''(i_{n_0},\ 1_{n_1},\ 1_{n_2},\ i_{n_3})$$

risultano due distinti punti P. Poichè il punto O giace sulla retta $P'P''$, in quanto le coordinate di O si ottengono sommando alle coordinate omonime di P' quelle di P'' moltiplicate per j, ciò dimostra la completezza della $(2^{r+1}-2)^*_{r,4}$ formata dai punti P.

Va rilevato che, in base al teor. IV, per ogni $r \geqslant 3$ si ha $[M]^*_{r,4} > 2^{r+1}-2$, sicchè *nessuna delle suddette* $(2^{r+1}-2)^*_{r,4}$ *complete può essere un ovaloide.*

BIBLIOGRAFIA

BARLOTTI, A.:

[1] *Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo,* « Boll. Un. Mat. Ital. » (3) 10 (1955), 498-506.

DICKSON, L. E.:

[1] *Linear groups* (Leipzig, Teubner, 1901).

LOMBARDO-RADICE, L.:

[1] *Sul problema dei k-archi completi in* $S_{2,q}$, « Boll. Un. Mat. Ital. » (3) 11 (1956), 178-181.

LUNELLI, L. e M. SCE:

[1] *Sulla ricerca dei k-archi completi mediante calcolatrice elettronica,* Rend. Convegno Reticoli e geom. proi. (Palermo 1957), 81-86.

[2] *k-archi completi nei piani proiettivi desarguesiani di rango 8 e 16,* Centro Calcoli num. Polit. Milano, 1958.

SEGRE, B.:

[1] *Sui teoremi di Bézout, Jacobi e Reiss,* « Ann. di Mat. » (4) 26 (1947), 1-26.

[2] *Lezioni di geometria moderna,* Vol. I (Bologna, Zanichelli, 1948).

[3] *Sulle ovali dei piani lineari finiti,* « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8) 17 (1954), 141-142.

[4] *Ovals in a finite projective plane,* « Canadian Journ. of Math. » 7 (1955), 414-416.

[5] *Curve razionali normali e k-archi negli spazi finiti,* « Ann. di Mat. » (4) 39 (1955), 357-379.

[6] *Intorno alla geometria sopra un campo di caratteristica due,* « Revue Fac. Sc. Univ. Istanbul » (A) 21 (1956), 97-123.

[7] *Sui k-archi nei piani finiti di caratteristica due,* « Revue de Math. pures et appl. » 2 (1957), 283-294.

[8] *Sulle geometrie proiettive finite,* Rend. Convegno Reticoli e geom. proi. (Palermo 1957), 46-61.

[9] *Appunti litogr. di Geometria superiore, per l'anno accademico 1957-58* (Univ. di Roma, 1958).

[10] *Elementi di geometria non lineare sopra un corpo sghembo,* «Rend. Circ. Mat. Palermo» (2) 7 (1958), 81-122.

[11] *On Galois geometries* (in corso di stampa nei « Proc. of the Internat. Congress of Math. » 1958).

[12] *Intorno alla geometria di certi spazi aventi un numero finito di punti,* « Archimede » 9 (1959). 1-15.

[13] *On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two* (in corso di stampa negli « Acta Arithmetica »).

TALLINI, G.:

[1] *Sui q-archi di un piano lineare finito di caratteristica* $p = 2$, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8) 23 (1957), 242-245.