Numero cromatico, omomorfismi e colorazioni d'un grafo.

FRANCESCO SPERANZA (*) (**)

A BENIAMINO SEGRE per il suo 70° compleanno

Sunto. — *Si studia la possibilità di considerare un dato grafo non orientato come immagine omomorfa o antiimmagine omomorfa d'un opportuno grafo di numero cromatico prefissato. Si definiscono poi, per un grafo colorato, gli omomorfismi semi-colorati e quelli colorati, studiando alcune proprietà delle relative categorie e costruendo un grafo colorato per il quale il gruppo degli automorfismi semi-colorati e quello degli automorfismi colorati sono isomorfi a un gruppo finito prefissato.*

1. — In questo lavoro si analizzano congiuntamente proprietà di colorazione e di rappresentazione di grafi non orientati. Nel n. 2 si studia il comportamento del numero cromatico d'un grafo per effetto d'un omomorfismo, provando che, dato un grafo di numero cromatico finito, lo si può trasformare con un opportuno omomorfismo in uno di numero cromatico finito arbitrario, e si può trovare un grafo di numero cromatico arbitrario di cui quello è immagine omomorfa. Si può anzi richiedere, salvo alcuni casi, che l'omomorfismo sia iniettivo o che sia suriettivo (le dimostrazioni sono tutte costruttive).

Nel n. 3 si considera la specie di strutture di grafo colorato, definendo gli omomorfismi semi-colorati e quelli colorati, ed evidenziando alcune categorie collegate.

Si studiano poi nel n. 4 alcune relazioni fra il gruppo degli automorfismi, quello degli automorfismi semi-colorati e quello degli automorfismi colorati (che è invariante nel precedente). Si assegna una condizione necessaria e sufficiente affinché un dato grafo non orientato si possa colorare in modo che essi siano isomorfi, e si dà una costruzione d'un grafo colorato che ammette gruppi degli automorfismi semi-colorati e colorati isomorfi a un gruppo assegnato, finito o numerabile.

2. — I grafi qui considerati sono grafi non orientati semplici (cioè privi di spigoli in parallelo e di lacci). In questo numero ci limiteremo a grafi di numero cromatico finito: non si chiederà invece che il grafo sia finito, salvo esplicito avviso contrario. *Ordine* di un grafo è la cardinalità dell'insieme dei vertici.

(*) Entrata in Redazione il 25 gennaio 1974.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

Sia G un grafo non orientato e siano rispettivamente $V(G)$, $S(G)$ (o più semplicemente V e S) l'insieme dei suoi vertici e quello dei suoi spigoli: poniamo poi $\tilde{V} = \{\{u, v\}: u, v \in V\}$. Sia $\varphi(G): S \rightarrow \tilde{V}$ l'applicazione che a ogni spigolo associa l'insieme dei suoi vertici. Definiamo l'applicazione $\psi(G)$ (o più semplicemente ψ) di $V \cup S$ in $\tilde{V}$ tale che $\psi(x) = \varphi(G)(x)$ se $x \in S$, $\psi(x) = \{x\}$ se $x \in V$.

Sia poi G' un altro grafo (scriveremo anche V' , S' , $\tilde{V}'$, ψ' in luogo di $V(G')$, $S(G')$, $\tilde{V}(G')$, $\psi(G')$ rispettivamente). Un *omomorfismo* di G in G' è un'applicazione $f: V \cup S \rightarrow V' \cup S'$ tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} V \cup S & \xrightarrow{f} & V' \cup S' \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi' \\ \tilde{V} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{V}' \end{array}$$

essendo $\tilde{f}$ l'estensione a $\tilde{V}$ della restrizione di f a V .

In altri termini, un omomorfismo f trasforma uno spigolo s di estremi a e b in uno spigolo di vertici $f(a)$ e $f(b)$, o in un vertice $a' = f(a) = f(b)$ ([4], [5]).

Un'applicazione $g: V(G) \rightarrow V(G')$ è la restrizione a $V(G)$ d'un omomorfismo f se e solo se due vertici adiacenti in G hanno per immagine due vertici adiacenti o coincidenti in G' . Se G' è semplice, f è determinata dalla sua restrizione a $V(G)$ (si dirà che questa definisce f) e inoltre

$$\varphi(s) = \{a, b\} \wedge f(a) = f(b) \Rightarrow f(s) = f(a) = f(b).$$

Vediamo brevemente il comportamento del numero cromatico d'un grafo per effetto d'un omomorfismo. Possiamo dare un grafo G di numero cromatico k e chiederci di costruire un grafo di numero cromatico prefissato che ne sia immagine (oppure antiimmagine) omomorfa: anzi, a questo omomorfismo possiamo chiedere inoltre di essere suriettivo o iniettivo. (Se esiste un omomorfismo suriettivo di G su G' , diciamo che G è antiimmagine suriettiva omomorfa di G' , e analogamente in casi analoghi.)

Sia G un grafo di numero cromatico k finito. Risolviamo i seguenti problemi.

- 1) Se $k > 2$ trovare un grafo G_1 di numero cromatico $h < k$ tale che esiste un omomorfismo suriettivo di G_1 su G .

È sufficiente risolvere il problema per $h = k - 1$: l'applicazione ripetuta del metodo conduce a risolvere il problema generale.

Consideriamo una colorazione K di G con k colori, e siano A , B , C tre colori. Se x_i sono i vertici di colore A e y_j quelli di colore B , per ogni spigolo s_{ij} di estremi x_i e y_j introduciamo un nuovo vertice z_{ij} e allo spigolo s_{ij} sostituiamo due spigoli, p_{ij} di estremi x_i e z_{ij} e q_{ij} di estremi y_j e z_{ij} . Il grafo G_1 così ottenuto risolve il problema. Infatti:

a) L'applicazione $g: V(G_1) \rightarrow V(G)$ tale che $g(z_{ij}) = x_i$, $g(u) = u$ per ogni $u \in V(G)$ definisce un omomorfismo di G_1 su G : esso è suriettivo poichè s_{ij} è immagine di q_{ij} , mentre ogni altro spigolo o vertice di G è immagine di se stesso.

b) Il numero cromatico di G_1 è $k-1$. Infatti, una colorazione di G_1 si ottiene dando a ogni vertice x_i o y_j il colore B , a tutti i vertici z_{ij} il colore C e a ogni altro vertice di G_1 il colore che a esso compete in K . Non è possibile dare, d'altra parte, a G_1 una colorazione K' con $k-2$ (o meno) colori, $L, M, \dots, P$. Infatti, se così fosse, K' darebbe a ogni vertice di G un colore, e si avrebbe una sua colorazione, con l'eccezione di qualche vertice x_i e di qualche vertice y_j , i quali, essendo adiacenti, avrebbero in K' il medesimo colore. Basterebbe allora dare ai vertici y_j , che a due a due non sono adiacenti, un nuovo colore Q , e in tal modo si sarebbe ottenuta una colorazione di G con (al più) $k-1$ colori, il che è contro l'ipotesi.

Se $k=2$ non si può, manifestamente, trovare un grafo di numero cromatico 1 che ne sia antiimmagine omomorfa suriettiva: in tal caso, la costruzione precedente conduce ad un grafo G_1 di numero cromatico non inferiore a 2.

2) *Trovare un grafo G_2 , di numero cromatico $h < k$, tale che esista un omomorfismo iniettivo di G_2 in G .*

Ovviamente il problema ha senso solo se $k \geq 2$: inoltre, basta risolverlo per $h = k-1$ (cfr. il prob. 1)).

Consideriamo una colorazione K di G con k colori, e fissiamo l'attenzione su due colori A e B , e sui vertici (x_i) di colore A e quelli (y_j) di colore B . Aboliamo tutti gli spigoli aventi per estremi un vertice x_i e un vertice y_j : si ottiene così un grafo parziale (cfr. [1]) di G , diciamo G_2 . Esso risolve il problema.

a) L'immersione di G_2 in G è un omomorfismo iniettivo.

b) G_2 ha numero cromatico $k-1$. Infatti, assegnando ai vertici x_i e y_j il colore B , e agli altri il colore che a ciascuno compete in K , si ha una colorazione di G_2 con $k-1$ colori. Non è d'altra parte possibile colorare con meno di $k-1$ colori G_2 : se esistesse una tale colorazione, diciamo K' , consideriamo la colorazione di G nella quale ai vertici y_j si dà un nuovo colore, mentre tutti gli altri hanno il colore che loro compete in K' : in tal modo si otterrebbe una colorazione di G con meno di k colori, contro l'ipotesi.

3) *Trovare un grafo G_3 di numero cromatico $h > k$, tale che esista un omomorfismo suriettivo di G_3 su G .*

Sia G^* un grafo connesso di numero cromatico h , avente un vertice a (e nessun altro elemento) comune a G . Allora il grafo G_3 , tale che

$$\begin{aligned} V(G_3) &= V(G) \cup V(G^*), & S(G_3) &= S(G) \cup S(G^*), \\ \varphi(G_3)(s) &= \varphi(G)(s) \text{ per } s \in S(G), & \varphi(G_3)(s) &= \varphi(G^*)(s) \text{ per } s \in S(G^*), \end{aligned}$$

risolve il problema.

a) L'applicazione $g: V(G_3) \rightarrow V(G)$ tale che $g(x) = x$ per $x \in V(G)$, $g(x) = a$ per $x \in V(G^*)$ definisce un omomorfismo suriettivo di G_3 su G .

b) G_3 ha numero cromatico h . Esso infatti, contenendo un sottografo di numero cromatico $h > k$, non può avere numero cromatico $\leq k$. D'altra parte, fissata una colorazione K di G^* , possiamo colorare G con k dei colori di K (rispettando ovviamente il colore di a), e quindi G_3 è colorabile effettivamente con h colori.

4) *Trovare un grafo G_4 di numero cromatico $h < k$ e un omomorfismo suriettivo di G su G_4 .*

Il problema ha senso solo se $k \geq 2$: risolviamolo allorchè $h = k - 1$ (cfr. il problema 1)).

Consideriamo una colorazione K di G con k colori, e fissiamo l'attenzione su due colori A e B : sia b un vertice di colore B . Consideriamo il seguente grafo G_4 : i suoi vertici sono i vertici di G , esclusi quelli che in K hanno colore A ; gli spigoli di G che non hanno estremi di colore A sono pure spigoli di G_4 , e inoltre, se in G v'è uno spigolo di estremi x_i e y , dove x_i ha colore A e y ha colore diverso da A e da B , in G_4 v'è uno spigolo di estremi b e y (ovviamente, se in G per un certo y vi sono due vertici x_i adiacenti, lo spigolo di G_4 di estremi b e y è unico). Il grafo G_4 risolve il problema:

a) l'applicazione g di $V(G)$ in $V(G_4)$ tale che $g(x) = x$ se, in K , x non ha colore A , mentre $g(x) = b$ se il colore di x è A definisce un omomorfismo di G in G_4 : esso è suriettivo, poichè ogni vertice di G_4 è immagine d'un vertice di G , mentre uno spigolo di G_4 è immagine di se stesso, oppure — se uno dei suoi estremi è b — è immagine di se stesso o d'uno spigolo un cui estremo ha colore A .

b) G_4 ha numero cromatico $k - 1$. Infatti, K dà una sua colorazione con $k - 1$ colori. D'altra parte, non esiste una colorazione di G_4 con meno di $k - 1$ colori: se K' fosse una tale colorazione, dando a ogni vertice di G che appartiene anche a G_4 il suo colore in K' e ai vertici x_i (che a due a due non sono adiacenti) un nuovo colore, si avrebbe una colorazione di G con meno di k colori, contro l'ipotesi.

5) *Trovare un grafo G_5 di numero cromatico $h > k$ e un omomorfismo iniettivo di G in G_5 .*

Il grafo G_3 , e l'immersione di G in G_3 , risolvono manifestamente il problema.

Notiamo infine che non esiste un grafo di numero cromatico maggiore di k di cui G sia immagine omomorfa iniettiva, nè uno di numero cromatico inferiore a k che sia immagine iniettiva omomorfa di G . Infatti, se f è un omomorfismo iniettivo di G' in G'' , $f(G')$ è un sottografo di G'' , isomorfo a G' : il suo numero cromatico, che è quello di G' , non può superare quello di G'' .

Inoltre, non esiste una regola che associ a ogni grafo uno di numero cromatico superiore, che ne sia immagine omomorfa suriettiva. Infatti, se esistesse una tale

regola, applicandola successivamente a un grafo finito, il numero cromatico aumenterebbe, mentre il numero dei vertici non aumenterebbe. Perciò, dopo un numero finito di passaggi, si otterrebbe un grafo il cui numero cromatico è superiore al numero dei vertici, il che è assurdo.

In casi particolari, tuttavia, è possibile, dato un grafo, trovarne un'immagine suriettiva omomorfa di numero cromatico superiore. Ad esempio, dato il grafo G tale che $V(G) = \{a, b, c, d\}$, $S(G) = \{q, r, s\}$, con $\varphi(q) = \{a, b\}$, $\varphi(r) = \{b, c\}$, $\varphi(s) = \{c, d\}$, che ha numero cromatico 2, e il grafo completo G' (senza lacci) costruito sui vertici a', b', c' , di numero cromatico 3, l'applicazione di $V(G)$ su $V(G')$ tale che $g(a) = g(d) = a'$, $g(b) = b$, $g(c) = c'$ definisce un omomorfismo suriettivo di G su G' .

Si osservi che gli omomorfismi che risolvono i vari problemi sono tutti connessi (cioè le antiimmagini d'un vertice sono grafi connessi), salvo al più quello del problema 4). Gli omomorfismi suriettivi sono forti (cioè, ogni coppia di vertici adiacenti nel codominio è immagine d'almeno una coppia di vertici adiacenti). Si osservi che con le costruzioni precedenti si sono risolti i problemi seguenti: dato un grafo G di numero cromatico finito e un numero $h \in \mathbb{N}$, trovare un grafo di numero cromatico h che ne sia immagine omomorfa, e uno di cui G sia immagine omomorfa.

3. — Finora ci siamo riferiti a proprietà relative al numero cromatico d'un grafo: ora ci occuperemo di *grafi colorati*, cioè di terne (G, H, K) , dove G è un grafo non orientato, H è un insieme (i cui elementi si diranno *colori*) e K è un'applicazione di $V(G)$ in H (detta *colorazione*: K potrebbe non essere suriettiva, contrariamente a quanto si suppone solitamente) tale che l'antiimmagine di ogni $A \in H$ sia un insieme stabile di vertici. In questo numero, H può essere finito o infinito.

Siano $C = (G, H, K)$ e $C' = (G', H', K')$ grafi colorati e sia $h: H \rightarrow H'$ un'applicazione. Un *omomorfismo semi-colorato relativo a h* è un omomorfismo f di G in G' tale che il diagramma seguente commuti:

$$\begin{array}{ccc} V(G) & \xrightarrow{K} & H \\ f_{V(G)} \downarrow & & \downarrow h \\ V(G') & \xrightarrow{K'} & H' \end{array},$$

vale a dire, $K' \circ f_{V(G)} = h \circ K$ [$f_{V(G)}: V(G) \rightarrow V(G')$ è la restrizione di f a $V(G)$]. Se $H = H'$ e h è l'identità 1_H , f si dirà un *omomorfismo colorato* (in esso, vertici associati hanno il medesimo colore).

Fissiamo un insieme H , e un monoide (con elemento neutro) $(\Omega, \circ)$ subordinato al monoide $(\mathcal{F}(H, H), \circ)$ delle applicazioni di H in sè. Proviamo che:

Esiste una categoria $\mathbf{Col}_\Omega^H$ che ha come oggetti i grafi colorati con colori di H e come morfismi le quaterne (C, C', f, h) , dove f è un omomorfismo semi-colorato di C in C' relativo a h . Associando al morfismo (C, C', f, h) l'applicazione h si ha un funtore F di $\mathbf{Col}_\Omega^H$ sul monoide $(\mathcal{F}(H, H), \circ)$.

Siano $C = (G, H, K)$, $C' = (G', H, K')$, $C'' = (G'', H, K'')$ grafi colorati, e sia $h, h' \in \Omega$. Siano $f(h), f(h')$ omomorfismi semi-colorati di C in C' e di C' in C'' rispettivamente, relativi a h e a h' rispettivamente. Dalle uguaglianze

$$\begin{aligned} K' \circ f(h)_{V(G)} &= h \circ K, \\ K'' \circ f(h')_{V(G')} &= h' \circ K', \end{aligned}$$

componendo la seconda a destra con $f(h)_{V(G)}$ si ottiene

$$K'' \circ f(h')_{V(G')} \circ f(h)_{V(G)} = h' \circ K' \circ f(h)_{V(G)} = h' \circ h \circ K.$$

Questa si può anche scrivere

$$K'' \circ (f(h') \circ f(h))_{V(G)} = (h' \circ h) \circ K,$$

che ci dice che il prodotto di $f(h)$ e di $f(h')$ è l'omomorfismo semi-colorato $f(h' \circ h)$, dove $h' \circ h \in \Omega$. Per ogni C , si ha poi che $(C, C, 1_G, 1_H)$ è un omomorfismo semi-colorato (anzi, colorato): dunque si ha una categoria, con la composizione

$$(C', C'', f(h'), h') * (C, C', f(h), h) = (C, C'', f(h' \circ h), h' \circ h).$$

Si è pure visto che $f(h') \circ f(h)$ è relativo a $h' \circ h$, mentre l'elemento neutro $(C, C, 1_G, 1_H)$ è relativo all'elemento neutro 1_H di Ω . Si ha dunque un funtore della categoria $\mathbf{Col}_{\mathcal{F}(H, H)}^H$ in $(\mathcal{F}(H, H), \circ)$. Tale funtore è suriettivo. Infatti, per ogni applicazione $h: H \rightarrow H$, consideriamo i grafi completi (senza lacci) G, G' tali che $V(G) = H$, $V(G') = h(H)$, con le colorazioni 1_H e $j_{h(H)}$ (quest'ultima è l'iniezione canonica di $h(H)$ in H): l'applicazione h definisce un omomorfismo semi-colorato del primo sul secondo, relativo a h .

In modo analogo, per ogni $\Omega \subseteq \mathcal{F}(H, H)$, si ha un funtore, subordinato a F , di $\mathbf{Col}_{\Omega}^H$ su $(\Omega, \circ)$.

Sia ancora f un omomorfismo semi-colorato di $C = (G, H, K)$ in $C' = (G', H', K')$, relativo a un'applicazione h . Se f è biiettivo, allora anche f^{-1} è un omomorfismo di G' su G (ed f è un isomorfismo di G su G') [4]. Se anche h è biiettiva, f^{-1} è un omomorfismo semi-colorato di C' su C , relativo a h^{-1} , poichè da

$$K' \circ f_{V(G)} = h \circ K$$

segue in tal caso

$$h^{-1} \circ K' = K \circ f_{V(G)}^{-1}.$$

In tal caso si dirà che f è un isomorfismo semi-colorato di C su C' . Se f è un omomorfismo colorato biiettivo di C su C' , anche f^{-1} è un omomorfismo colorato, e f si dirà un isomorfismo colorato.

Al solito, un automorfismo è un isomorfismo di una struttura su se stessa.

Gli automorfismi semi-colorati di un grafo colorato C formano un gruppo $\Delta(C)$, e gli automorfismi colorati formano un gruppo $\Phi(C)$: sia poi $\Gamma(C)$ il gruppo degli automorfismi del grafo G tale che $C = (G, H, K)$ (se non v'è pericolo di confusione, i tre gruppi si indicheranno rispettivamente con Δ , Φ , Γ). Ovviamente

$$\Phi \subseteq \Delta \subseteq \Gamma.$$

Sia poi $(S, \circ)$ un gruppo di biiezioni di H in sè. Gli automorfismi semi-colorati relativi a una $h \in S$ formano un gruppo $\Delta_S(C)$ (o semplicemente Δ_S). Manifestamente

$$S' \subseteq S \Rightarrow \Delta_{S'} \subseteq \Delta_S.$$

Fissato un grafo colorato C , applichiamo il funtore F ai morfismi invertibili di $\text{Hom}(C, C)$: abbiamo un omomorfismo di $\Delta(C)$ sul gruppo $(\mathfrak{G}_H, \circ)$ delle biiezioni di H in sè. Quindi, se $(S, \circ)$ è un sottogruppo invariante di $(\mathfrak{G}_H, \circ)$, $\Delta_S(C)$ è sottogruppo invariante di $\Delta(C)$: in particolare, $\Phi(C)$ è *sottogruppo invariante* di $\Delta(C)$.

4. – In questo numero ci occuperemo prevalentemente della determinazione di grafi colorati i cui gruppi Γ , Δ , Φ soddisfano particolari condizioni.

Si noti che, in un grafo completo G , in ogni colorazione due vertici debbono avere colori differenti, e quindi (se l'ordine è > 1)

$$(1) \quad \Gamma(C) = \Delta(C) \neq \Phi(C) = \{1_G\}.$$

La (1) è tuttavia valida anche per il grafo della figura 1 (qui e nelle figure successive le lettere maiuscole indicano i colori attribuiti ai vertici, mentre le eventuali lettere minuscole sono i nomi dei vertici).

Nel grafo colorato della figura 2 si ha $\Gamma \neq \Delta = \Phi$, mentre in quello della figura 3 abbiamo $\Gamma \neq \Delta \neq \Phi$: infatti, in quest'ultimo, la biiezione

$$\begin{pmatrix} a & b & c & h & k & l \\ h & k & l & a & b & c \end{pmatrix}$$

definisce un omomorfismo che non appartiene a Δ , mentre la biiezione

$$\begin{pmatrix} a & b & c & h & k & l \\ b & c & a & k & l & h \end{pmatrix}$$

definisce un omomorfismo che appartiene a Δ ma non a Φ .

Per un « ciclo » o per una « catena » d'ordine $2n$, colorati con il minimo numero di colori (cioè con 2 colori), si ha $\Gamma = \Delta \neq \Phi$ (nel primo caso, $\Gamma = \Delta$ e Φ sono iso-

Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

morfi rispettivamente a D_{2n} e a D_n , nel secondo Γ e Δ sono isomorfi a $(\mathbb{Z}_2, +)$ mentre Φ s'annulla). Nel caso d'una catena d'ordine dispari $\Gamma = \Delta = \Phi$ (sono tutti isomorfi a $(\mathbb{Z}_2, +)$).

A questo proposito, possiamo esprimere una condizione caratteristica affinché un dato grafo G si possa colorare in modo tale che i suoi gruppi Γ e Φ (e quindi anche Δ) coincidano. Diciamo *insiemi di transitività* i sottoinsiemi di $V(G)$ che danno luogo alla partizione associata alla relazione d'equivalenza

$$\langle \text{esiste una } f \in \Gamma \text{ tale che } y = f(x) \rangle.$$

Ciascuno di essi descrive, con gli spigoli che in G congiungono i suoi vertici, un sottografo di G . Ebbene:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo G si possa colorare in modo che $\Gamma = \Delta = \Phi$ è che i suoi insiemi di transitività siano stabili.

Infatti, se esiste una colorazione di G tale che $\Gamma = \Phi$, ogni $f \in \Gamma$ è un omomorfismo colorato, perciò due vertici a, b tali che $b = f(a)$ hanno il medesimo colore e quindi non sono adiacenti. Viceversa, sia G un grafo tale che i vertici di uno stesso insieme di transitività siano a due a due non adiacenti: essi si possono colorare con il medesimo colore, perciò ogni automorfismo è un automorfismo colorato per una colorazione siffatta: dunque $\Gamma = \Phi$ e anche $\Delta = \Gamma$.

Si osservi che, dato un grafo, si può sempre colorarlo in modo che $\Gamma = \Delta$: basta assegnare colori distinti a vertici distinti. Invece, vi sono dei grafi che non si possono colorare in modo che $\Delta = \Phi$ (si pensi ad esempio a un grafo completo di ordine ≥ 2).

Si possono porre i problemi seguenti: dato un gruppo γ , determinare un grafo colorato C tale che $\Delta(C) = \gamma$, oppure tale che $\Phi(C) = \gamma$. La costruzione seguente risolve entrambi i problemi nel caso in cui γ sia finito o numerabile.

Ricordiamo la costruzione di FRUCHT ([2], [3]) d'un grafo non orientato $F(\gamma)$ il cui gruppo degli automorfismi è isomorfo al gruppo dato γ (di cardinalità $\leq \aleph_0$). Numeriamo gli elementi di γ , $x_1, x_2, \dots$, e, per ogni coppia (x_j, x_k) , sia p_{jk} il numero tale che $x_{p_{jk}} = x_j^{-1}x_k$. Consideriamo il grafo orientato completo (ma senza lacci) di vertici $x_1, x_2, \dots$, e sostituiamo allo spigolo di primo estremo x_j e secondo estremo x_k il grafo non orientato rappresentato nella figura 4: si ottiene così un grafo non orientato F , il cui gruppo degli automorfismi è isomorfo a γ .

Osserviamo che il grafo F soddisfa la condizione necessaria e sufficiente affinché lo si possa colorare in modo che $\Gamma = \Phi$. Infatti, in un automorfismo di F un vertice del tipo x_j si trasforma in uno dello stesso tipo, e così pure per quelli del tipo y_{jk}^α e anche per quelli del tipo z_{jk}^α (che si distinguono dai precedenti in quanto appartengono a una « catena » di lunghezza dispari). Inoltre, due vertici x_j non sono mai adiacenti, e così pure due vertici y_{jk}^α trasformati l'uno nell'altro da un automorfismo di F , in quanto corrispondono a valori differenti di j o di k (altrettanto dicasi per i vertici z_{jk}^α). Ciascun insieme di transitività è dunque stabile.

Se γ ha più di due elementi, il grafo F non è bicromatico. In ogni caso possiamo però dare la seguente colorazione (con 3 colori), per la quale $\Gamma = \Phi$. Ai vertici x_j attribuiamo il colore A ; ai vertici $y_{jk}^{2\beta}$ e $z_{jk}^{2\beta+1}$ il colore B ; ai vertici $y_{jk}^{2\beta+1}$ e $z_{jk}^{2\beta}$ il colore C . Ogni automorfismo del grafo F è un automorfismo del grafo colorato così ottenuto, e il gruppo degli automorfismi semi-colorati e quello degli automorfismi colorati coincidono, e sono isomorfi a γ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
- [2] H. FRUCHT, *Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe*, Compositio Math., **6** (1938), pp. 239-250.
- [3] O. ORE, *Theory of graphs*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Providence, 1962.
- [4] F. SPERANZA, *Omomorfismi fra grafi e grafi moltiplicativi*, Ann. di Mat., (4), **71** (1966), pp. 281-294.
- [5] F. SPERANZA, *Sur les sections des hypergraphes et sur leurs automorphismes*, Coll. Math., **27** (1973), pp. 269-274.