Contributo allo studio degli sviluppi in serie di polinomî di Laguerre.

Memoria di UGO BROGGI (Roquebrune-Cap Martin-France A. M.).

Sunto. - La condizione $c_0^2 + (c_0 + c_1)^2 + \dots < \infty$ è posta a fondamento dello studio degli sviluppi $c_0 L_0(t) + c_1 L_1(t) + \dots$ in serie di polinomî di Laguerre.

È nota l'importanza della condizione $c_0^2 + c_1^2 + \dots < \infty$ per lo studio degli sviluppi $c_0 \varphi_0(t) + c_1 \varphi_1(t) + \dots$ in serie di funzioni ortogonali $\varphi_n(t)$.

Se è $\varphi_n(t) = e^{-t/2} L_n(t)$, e $L_n(t) = \frac{e^t}{n!} D^n(e^{-t} t^n)$ è il polinomio di LAGUERRE di ordine n , ne assume una forse non minore la condizione più restrittiva $c_0^2 + (c_0 + c_1)^2 + \dots < \infty$, sufficiente per la convergenza della serie $\sum c_n L_n(t)$, ($t \geq 0$), per la convergenza uniforme dell'altra $\sum (c_0 + c_1 + \dots + c_n) \{L_n(t) - L_{n+1}(t)\}$, ($0 \leq \alpha \leq t \leq \beta$), perchè, se $\varphi(t) \propto \sum c_n L_n(t)$, sia $\varphi(t) = \sum c_n L_n(t) = \sum (c_0 + c_1 + \dots + c_n) \{L_n(t) - L_{n+1}(t)\}$ in ogni punto dell'intervallo $(0, \infty)$, necessaria e

sufficiente per l'esistenza della derivata $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ di $\varphi(t) = \int_0^t \frac{d\varphi(t)}{dt} dt$, qualunque sia $t > 0$.

Questi risultati, oggetto dei primi tre paragrafi, sono suscettibili di una facile generalizzazione. Essi consentono inoltre di dare condizioni sufficienti di convergenza della serie $c_0^2 + (c_0 + c_1)^2 + \dots$, dove $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$, e, se queste sono soddisfatte, di dedurre dalla somma delle serie $\sum a_n L_n(t)$, $\sum b_n L_n(t)$, quella di $\sum c_n L_n(t)$.

La relazione ⁽¹⁾

$$(1) \quad \int_0^\infty e^{-ts} L_n(t) dt = \frac{1}{s} \left(\frac{s-1}{s} \right)^n \quad (R(s) > 0)$$

che come si è dimostrato altrove ⁽²⁾, consente di dedurre nel modo più im-

⁽¹⁾ Cfr. F. TRICOMI, *Trasf. di Laplace e polinomî di Laguerre*, « Rend. Lincei », XXI, (1935), pp. 232-239.

⁽²⁾ U. BROGGI, *Sui polinomî di Laguerre e una limitazione di Szegő*, « Bollettino Un. Mat. It. », II, 1, (1939), pp. 213-217.

mediato le proprietà fondamentali dei polinomi $L_n(t)$, fa corrispondere allo sviluppo della funzione

$$sf(s) = s \int_0^{\infty} e^{-ts} \varphi(t) dt,$$

supposta regolare nel semipiano $R(s) > \frac{1}{2}$, in serie di potenze di $\frac{s-1}{s}$

$$sf(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{s-1}{s} \right)^n, \quad \left(R(s) > \frac{1}{2} \right)$$

lo sviluppo formale della funzione $\varphi(t)$ in serie di polinomi di LAGUERRE

$$\varphi(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t).$$

Il suo intervento nella deduzione dei risultati annunciati appare senz'altro chiarito da ciò che, se

$$sf(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} \psi(t) dt, \quad \left(R(s) > \frac{1}{2} \right)$$

è anche

$$\psi(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt},$$

$$s^2 f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_0 + c_1 + \dots + c_n) \left(\frac{s-1}{s} \right)^n.$$

1. Poichè, come è noto, il sistema $\{e^{-t/2} L_n(t)\}$ è ortogonale e normalizzato in $(0, \infty)$:

a) $e^{-t/2} \sum \Gamma_n L_n(t)$ è, se $\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots < \infty$, lo sviluppo formale di una funzione di quadrato sommabile, (teorema di FISCHER-RIESZ), e

b) se $\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots < \infty$, la serie $\sum \Gamma_n \int_0^t e^{-u/2} L_n(u) du$ converge uniformemente in ogni intervallo chiuso $< 0, T >$ ⁽³⁾.

Ma è anche, come è ugualmente noto e come la (1) permette di vedere senz'altro

$$L_n(t) = L'_n(t) - L'_{n+1}(t).$$

(3) Cfr. ad es. KACZMARZ-STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen*, (1935), p. 60.

E quindi

$$\int_0^t e^{-u/2} L_n(u) du = 2e^{-t/2} [L_n(t) - L_{n+1}(t)] - \int_0^t e^{-u/2} L_{n+1}(u) du$$

e poichè la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n \int_0^t e^{-u/2} [L_n(u) + L_{n+1}(u)] du,$$

somma di due serie uniformemente convergenti, converge uniformemente, converge uniformemente l'altra

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n [L_n(t) - L_{n+1}(t)].$$

La convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t)$$

($c_n = \Gamma_n - \Gamma_{n-1}$), in corrispondenza di ogni $t \geq 0$, è una conseguenza di quanto precede e del teorema secondo il quale $\sum a_n b_n$ converge, se

- $\alpha)$ $\sum (a_0 + a_1 + \dots + a_n)(b_n - b_{n+1})$ converge;
- $\beta)$ se $\lim_{p \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + \dots + a_p) b_{p+1}$ esiste ⁽⁴⁾.

È infatti, se $t \geq 0$

$$|L_n(t)| \leq e^{t/2} \quad (5)$$

e quindi, poichè $\lim_{p \rightarrow \infty} (c_0 + c_1 + \dots + c_p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_p = 0$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (c_0 + c_1 + \dots + c_p) L_{p+1}(t) = 0.$$

Si ha dunque anche, per la formola di sommazione di BRUNACCI-ABEL

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^p c_n L_n(t) &= \sum_{n=1}^p \Gamma_n [L_n(t) - L_{n+1}(t)] - \Gamma_0 L_1(t) + \Gamma_{n+p} L_{n+p+1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n [L_n(t) - L_{n+1}(t)]. \end{aligned}$$

Si è cioè dimostrato che

$$I) \ll \text{Sia } \Gamma_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n, \Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots < \infty.$$

⁽⁴⁾ Cfr. ad es, O. KNOPP, *Th. und Anwendung der unendl. Reihen*, (1922), pag. 305.

⁽⁵⁾ Cfr. G. SZEGÖ, « Math. Zeitschrift », vol. 1, (1918), pagg. 341-352, § 2.

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t)$$

converge se $t \geq 0$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n [L_n(t) - L_{n+1}(t)]$$

converge uniformemente in ogni intervallo $0 \leq \alpha \leq t \leq \beta$, ed è

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n [L_n(t) - L_{n+1}(t)] \gg.$$

2. II) « Sia $\Gamma_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n$; $\varphi(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t)$.

La condizione

$$\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots < \infty$$

è necessaria e sufficiente perchè in $(0, \infty)$:

α) $\varphi(t)$ sia assolutamente continua, e si abbia

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{d\varphi(u)}{du} du;$$

β) $e^{-t/2}\varphi(t)$, $e^{-t/2} \frac{d\varphi(t)}{dt}$ siano di quadrato sommabile ».

La condizione è necessaria.

Se $e^{-t/2}\varphi(t)$ è di quadrato sommabile e $\varphi(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t)$ è pure, poichè il sistema $\{e^{-t/2}L_n(t)\}$ è completo,

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \varphi^2(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2.$$

Si tratta di dimostrare che se $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ esiste, e $e^{-t/2} \frac{d\varphi(t)}{dt}$ è di quadrato sommabile, è

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n L_n(t), \quad (\Gamma_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n^2.$$

Le ascisse di convergenza delle trasformate di LAPLACE

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} \varphi(t) dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} \frac{d\varphi(t)}{dt} dt$$

non sono maggiori di $1/2$.

Si ha infatti, per la disuguaglianza di SCHWARZ

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-t(s-1/2)} e^{t/2} |\psi(t)| dt \right)^2 \leq \int_0^{\infty} e^{-t(2s-1)} dt \cdot \int_0^{\infty} e^{-t} \psi^2(t) dt.$$

$sf(s)$, regolare nel semipiano $Rs > \frac{1}{2}$, vi ammette lo sviluppo $\sum c'_n \left(\frac{s-1}{s}\right)^n$, mentre, poichè, come si vede integrando per parti,

$$sf(s) = F(s),$$

può scriversi

$$\begin{aligned} sF(s) &= s^2 f(s) = s \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{s-1}{s}\right)^v \sum_{\mu=0}^{\infty} c'_{\mu} \left(\frac{s-1}{s}\right)^{\mu} \\ &= s \sum_{n=0}^{\infty} (c'_0 + c'_1 + \dots + c'_n) \left(\frac{s-1}{s}\right)^n. \end{aligned}$$

Risulta finalmente da

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} \varphi(t) dt = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n \left(\frac{s-1}{s}\right)^n$$

$$\varphi(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c'_n L_n(t)$$

$$c'_n = c_n, \quad c'_0 + c'_1 + \dots + c'_n = \Gamma_n,$$

e, poichè $e^{-t/2} \frac{d\varphi(t)}{dt}$ è di quadrato sommabile,

$$\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots < \infty.$$

La condizione è sufficiente.

Il teorema di FISCHER-RIESZ permette di scrivere, poichè

$$\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots < \infty,$$

$$F(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n \left(\frac{s-1}{s}\right)^n = \int_0^{\infty} e^{-ts} \psi(t) dt, \quad \left(Rs > \frac{1}{2}\right)$$

dove, ($n = 0, 1, \dots$)

$$\Gamma_n = \int_0^\infty e^{-t} \psi(t) L_n(t) dt.$$

Dalla convergenza di $\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots$ segue quella di $\Gamma_0 \Gamma_1 + \Gamma_1 \Gamma_2 + \dots$ e pertanto anche di $(\Gamma_0 - \Gamma_1)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2 + \dots = c_0^2 + c_1^2 + \dots$, mentre

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} F(s) &= \frac{1}{s} \left(1 - \frac{s-1}{s} \right) \sum_{n=0}^\infty \Gamma_n \left(\frac{s-1}{s} \right)^n \\ &= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^\infty c_n \left(\frac{s-1}{s} \right)^n = f(s) = \int_0^\infty e^{-ts} \int_0^t \psi(u) du dt. \end{aligned}$$

È dunque, quasi dappertutto ⁽⁶⁾

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t \psi(u) du \\ \psi(t) &= \frac{d\varphi(t)}{dt}. \end{aligned}$$

3. III) « Se è

$$c_n = \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) \varphi(t) dt \quad (n = 0, 1, \dots)$$

è pure $c_0 + c_1 + \dots + c_n = \Gamma_n$; $\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots < \infty$

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^\infty c_n L_n(t), \quad (t \geq 0) \gg.$$

È per ipotesi, $\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots < \infty$. La serie

$$\sum_{n=0}^\infty \Gamma_n \{ L_n(t) - L_{n+1}(t) \}$$

converge uniformemente in ogni intervallo chiuso finito $0 \leq \alpha \leq t \leq \beta$. Poichè

$$\int_0^\infty |e^{-t} L_m(t)| dt$$

converge, è lecito s'integri

$$\int_0^\infty e^{-t} L_m(t) \sum_{n=0}^\infty \Gamma_n [L_n(t) - L_{n+1}(t)] dt$$

⁽⁶⁾ Cfr. M. LERCH, « Acta Math. », 27, (1903), pagg. 339-351, 345; BROGGI ⁽²⁾.

termine a termine ⁽⁷⁾, e s'ottenga così come valore dell'integrale, e qualunque sia m , c_m .

Se $\varphi(t)$ è una qualsiasi funzione tale che

$$\int_0^\infty e^{-t} L_m(t) \varphi(t) dt = c_m \quad (m = 0, 1, \dots)$$

e $\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots$ converge, essa è, come $\sum \Gamma_n [L_n(t) - L_{n+1}(t)]$, assolutamente continua in $(0, \infty)$: continua pertanto in corrispondenza di ogni t positivo e finito.

Dalla chiusura del sistema $\{e^{-t/2} L_n(t)\}$ ⁽⁸⁾ e da

$$\sum_{n=0}^\infty \Gamma_n [L_n(t) - L_{n+1}(t)] = \sum_{n=0}^\infty c_n L_n(t)$$

si deduce, qualunque sia $t \geq 0$,

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^\infty c_n L_n(t),$$

come si affermò.

4. Se è $\Delta^r a_n = a_{n+r} - \binom{r}{1} a_{n+r-1} + \dots + (-1)^r a_n$; $a_{-r} = a_{-r+1} = \dots = a_{-1} = 0$; è pure

$$(-1)^r \sum_{n=0}^\infty a_n \Delta^r b_n \propto \sum_{n=0}^\infty b_n \Delta^r a_{n-r}.$$

Si ha dunque da (2) e dai precedenti teoremi

IV) « Sia

$$\Gamma_{-h} = \Gamma_{-h+1} = \dots = \Gamma_{-1} = 0$$

$$\varphi(t) = \sum_{n=-h}^\infty \Delta^h \Gamma_n \cdot L_{n+h}(t).$$

La condizione

$$\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots < \infty$$

è necessaria e sufficiente perchè

1. esistano quasi dappertutto in $(0, \infty)$ le prime h derivate di $\varphi(t)$ rispetto a t ;

⁽⁷⁾ Cfr. T. J. J'. BROMWICH, *An introduction to the Theory of infinite Series*, (1926), pag. 499.

⁽⁸⁾ Cfr. ad es. G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, Vol. II, pagg. 208-210; BROGGI ⁽²⁾.

2. sia $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(h-1)}(0) = 0$;
3. $e^{-t/2} \frac{d^s \varphi(t)}{dt^s}$ sia di quadrato sommabile ($s = 0, 1, \dots, h$);
4. perchè sia in corrispondenza di ogni $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\varphi^{(s)}(t) &= \sum_{n=-h+s}^{\infty} \Delta^{h-s} \Gamma_n \cdot L_{n+h-s}(t) \\ &= (-1)^{h-s} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n \cdot \Delta^{h-s} L_n(t). \quad (s=0, 1, \dots, h-1)\end{aligned}$$

La serie al secondo membro converge in ogni punto finito dell'intervallo $(0, \infty)$, la serie al terzo membro converge uniformemente in ogni intervallo $0 \leq \alpha \leq t \leq \beta$.

5. V) « Sia

$$\begin{aligned}A_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n; \quad B_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n; \\ c_n &= a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n; \quad \Gamma_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n;\end{aligned}$$

e convergano

$$A_0^2 + A_1^2 + \dots; \quad B_0^2 + B_1^2 + \dots; \quad c_0^2 + c_1^2 + \dots$$

Può affermarsi che

1. converge parimenti $\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots$;
2. se è

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t); \quad \varphi_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n L_n(t),$$

è pure

$$\int_0^t \frac{d\varphi_1(t-u)}{dt} \varphi_2(u) du$$

la comune somma delle due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t); \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n [L_n(t) - L_{n+1}(t)],$$

di cui la prima converge qualunque sia $t \geq 0$, la seconda converge uniformemente in ogni intervallo $0 \leq \alpha \leq t \leq \beta$.

Si dimostra V) osservando che, per la supposta convergenza di $A_0^2 + A_1^2 + \dots$; $B_0^2 + B_1^2 + \dots$, convergono le serie sviluppo di $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, esistono in $(0, \infty)$ le derivate prime di $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ed $e^{-t/2} \varphi_1(t)$, $e^{-t/2} \frac{d\varphi_1(t)}{dt}$, $e^{-t/2} \varphi_2(t)$, $e^{-t/2} \frac{d\varphi_2(t)}{dt}$ sono

di quadrato sommabile; le loro trasformate di LAPLACE $f_1(s)$, $sf_1(s)$, $f_2(s)$, $sf_2(s)$ convergono nel semipiano $R(s) > \frac{1}{2}$.

Può dunque scriversi

$$f_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} \varphi_1(t) dt = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{s-1}{s} \right)^n,$$

$$f_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} \varphi_2(t) dt = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{s-1}{s} \right)^n.$$

Che sia poi anche

$$f_1(s) \cdot f_2(s) = \frac{1}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n) \left(\frac{s-1}{s} \right)^n = \frac{1}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{s-1}{s} \right)^n$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-ts} \left(\int_0^t \varphi_1(t-u) \varphi_2(u) du \right) dt \quad \left(R(s) > \frac{1}{2} \right)$$

è una conseguenza del convergere di $sf_1(s)$, $sf_2(s)$ in $R(s) > \frac{1}{2}$: convergono assolutamente ⁽⁹⁾ in $R(s) > \frac{1}{2}$ $f_1(s)$, $f_2(s)$ e sussiste pertanto il teorema della « Faltung » ⁽¹⁰⁾.

Poichè, per ipotesi, $c_0^2 + c_1^2 + \dots$ converge, converge parimenti in $R(s) > \frac{1}{2}$ l'integrale di LAPLACE

$$\int_0^{\infty} e^{-ts} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t \varphi_1(t-u) \varphi_2(u) du \right) dt$$

e vi è uguale a

$$sf_1(s)f_2(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{s-1}{s} \right)^n:$$

la funzione assolutamente continua $\int_0^t \varphi_1(t-u) \varphi_2(u) du$ ha infatti quasi dappertutto una derivata in $t > 0$ ed il limite 0 per $t \rightarrow +0$ ⁽¹¹⁾.

⁽⁹⁾ G. DÖTSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, (1937), pag. 149. La dimostrazione vale invariata se gl'integrali esprimenti $sf_1(s)$, $sf_2(s)$ sono integrali secondo LEBESGUE.

⁽¹⁰⁾ G. DÖTSCH, loc. cit., pag. 161, teorema IV_b.

⁽¹¹⁾ G. DÖTSCH, loc. cit., pag. 152, teorema I.

Per il teorema II) $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ sono assolutamente continue in $(0, \infty)$ e limitate in ogni intervallo $(0, T)$.

$\frac{d\varphi_1(t)}{dt}$ esiste quasi dappertutto in $(0, \infty)$ ed è $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$. È cioè

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t \varphi_1(t-u) \varphi_2(u) du &= \varphi_1(0) \varphi_2(t) + \int_0^t \frac{d\varphi_1(t-u)}{dt} \varphi_2(u) du \\ &= \int_0^t \frac{d\varphi_1(t-u)}{dt} \varphi_2(u) du \\ sf_1(s)f_2(s) &= \int_0^\infty e^{-ts} \left(\int_0^t \frac{d\varphi_1(t-u)}{dt} \varphi_2(u) du \right) dt. \end{aligned}$$

$\int_0^t \frac{d\varphi_1(t-u)}{dt} \varphi_2(u) du$ è una funzione integrale, nulla se $t=0$, e tale che $e^{-t/2} \int_0^t \frac{d\varphi_1(t-u)}{dt} \varphi_2(u) du$ è di quadrato sommabile: per il teorema II)

$$\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \dots < \infty \quad (1^2),$$

così come convergono, con somma

$$\int_0^t \frac{d\varphi_1(t-u)}{du} \varphi_2(u) du$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t), \text{ qualunque sia } t \geq 0;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n[L_n(t) - L_{n+1}(t)], \text{ uniformemente in ogni intervallo } 0 \leq \alpha \leq t \leq \beta.$$

(12) Per il teorema II è in $R(s) > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} s^2 f_1(s) f_2(s) &= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n \left(\frac{s-1}{s} \right)^n \\ &= \int_0^\infty e^{-ts} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{d\varphi_1(t-u)}{dt} \varphi_2(u) du \right) dt = \int_0^\infty e^{-ts} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t \varphi_1'(u) \varphi_2(t-u) du \right) dt. \end{aligned}$$