Sopra gli spazi proiettivi e lenticolari

di G. VRANCEANU

Alla memoria di Guido Castelnuovo, nel primo centenario della nascita.

Sunto. - *Si dànno qualche propietà degli spazi lenticolari. Si mostra così che essi possono essere immersi in spazi euclidei mediante formule analoghe a quelle che dànno l'immersione degli spazi proiettivi.*

1. - È ben noto che lo spazio proiettivo reale P_m si può ottenere dallâ sfera S_m identificando i punti diametralmente opposti. Altrimenti detto, se nello spazio euclideo E_{m+1} $(x_0, \dots, x_m)$ si considera la sfera S_m

$$x^2_0 + ,\dots, + x^2_m = 1, \tag{1}$$

lo spazio proiettivo P_m si ottiene identificando i punti di S_m che sono equivalenti per il gruppo discreto definito dalla involuzione

$$x^i = - x^i \ (i = 0, \dots, m). \tag{2}$$

Ora, se m è un numero dispari, diciamo $2n + 1$, esistono anche altri spazi che si possono ottenere dalla sfera S_{2n+1} identificando i punti equivalenti rispetto ad un gruppo discreto, un esempio essendo dato dagli spazi lenticolari.

Per definire questi spazi, supponiamo che le variabili x_0, $x_1, \dots, x_{2n+1}$ siano raggruppate a due a due, ponendo per esempio

$$Z_0 = x_0 + ix_1, \dots Z_n = x_{2n} + ix_{2n+1} \quad (i = \sqrt{-1}); \tag{2'}$$

allora l'equazione della sfera S_{2n+1} si scrive

$$Z_0 \bar{Z}_0 + ,\dots, + Z_n \bar{Z}_n = 1, \tag{3}$$

dove $\bar{Z}_h$ denota la quantità coniugata di Z_h.

Se ora consideriamo la rotazione

$$Z'_h = Z_h \, e^{\frac{2\pi i p_h}{p}}, \tag{4}$$

dove $p_0, \dots, p_n$, p sono numeri interi con p_h, p primi fra loro, a partire da essa si ottiene un gruppo discreto ciclico. Identificando i punti equivalenti per tale gruppo si ottiene lo spazio lenticolare $L_{2n+1}[p\,;\,p_0,\dots,p_n]$.

Nel caso particolare in cui $p_0 = \dots = p_n = 1$, $p = 2$ si ha lo spazio proiettivo P_{2n+1}.

Gli spazi lenticolari potendo così essere considerati come una generalizzazione degli spazi proiettivi, ci si può domandare se si possono estendere agli spazi L_{2n+1} risultati noti per gli spazi P_{2n+1}. Un risultato di questo genere è stato ottenuto da GANEA e da me [1], relativamente all'immersione degli spazi lenticolari L_{2n+1} negli spazi euclidei E_{4n+1}. Si sa che, nel caso degli spazi proiettivi reali, complessi o quaternionali v'è un grande numero di risultati riguardanti la loro immersione negli spazi euclidei; in particolare, il fatto che uno spazio proiettivo reale P_m, di dimensione dispari $2n+1$, si può immergere in uno spazio euclideo E_{2m-1} con le formule di HOPF-JAMES [2]:

$$
\begin{gathered}
v_0 = Z_0^2,\ v_1 = Z_0 Z_1, \\
v_r = \Sigma\, Z_s Z_t \quad [r = 2,\dots,2n], \\
s + t = r,\ 0 \leq s \leq t \leq n\,.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Infatti, tenendo conto che le Z sono coordinate complesse, le formule (5) ci forniscono una immersione nello spazio E_{4n+2} $(v_0,\dots,v_{2n})$. Siccome le coordinate $v_0,\dots,v_{2n}$ non possono essere tutte nulle, a causa della (3) si può considerare l'immersione (5) sulla sfera unitaria dello spazio E_{4n+2}; dunque, per proiezione stereografica, possiamo avere un'immersione nello spazio E_{4n+1}, il che dimostra che uno spazio P_m, con $m = 2n+1$, si può immergere in uno spazio E_{2m-1}.

Poichè i secondi membri delle (5) sono dei polinomi nelle variabili $Z_0,\dots,Z_n$, ne risulta che-per eliminazione-si ottiene lo spazio P_m come una varietà algebrica nello spazio E_{2m-1}.

Per dimostrare che-nel caso di uno spazio L_{2n+1}-abbiamo delle formule analoghe alle (5), GANEA ed io abbiamo osservato che tutte le quantità

$$
Z^2_h,\ Z_k\, Z_l \quad (l \neq k)
\tag{6}
$$

sono, nel caso di uno spazio proiettivo, degli invarianti rispetto al gruppo (2). Si trattava dunque di trovare, nel caso di uno spazio lenticolare degli invarianti analoghi a quelli dati dalle formule (6) per P_{2n+1}, Come invarianti Z_h^2 s'imponevano le quantità Z_h^p. Per quanto riguarda gli invarianti misti, si può osservare che, essendo i numeri $p_0,\dots,p_n$ primi con p, esistono numeri interi

[1] G. VRANCEANU and T. GANEA, *Topological embedings of lens space* Proc. Cambridge, Phil. Soc., 57 (1961), 688-690.

[2] I. M. JAMES, *Some embedings of projective spaces*, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 55 294 (1959),

r_s, q_s soddisfacenti alle

$$pq_s - r_s p_s = 1 \qquad (s = 0, \ldots, n). \tag{7}$$

Questo ci permette di dimostrare che, essendo date due variabili Z_h, Z_k ed un numero intero n_h definito soltanto mod p, esiste un altro numero n_k tale che

$$u = Z_h^{n_k} Z_k^{n_h}$$

sia un invariante del gruppo ciclico (4).

Basta infatti che siano verificate le formule

$$p_h n_k + p_k n_h = 0 \quad (\text{mod } p).$$

In particolare, esistono degli invarianti di primo grado in una delle variabile; precisamente, le quantità

$$u = Z_h^{p_{r'}r_k} Z_k$$

(dove p_k, r_h sono determinanti soltanto mod p) sono degli invarianti, se i numeri r_h sono definiti dalle formule (7).

Infatti, per il gruppo (4) abbiamo:

$$u' = u \; e^{\frac{2\pi i}{p} p_k (r_h p_h + 1)} = u.$$

Ciò premesso, abbiamo il seguente teorema:

Le formule

$$\begin{gathered} v_0 = Z_0^p, \; v_1 = Z_0^{p_1 r_0} Z_1, \; v_2 = Z_0^{p_2 r_0} Z_2 + Z_1^p \\ v_r = \Sigma \, Z_s^{p_t r_s} Z_t + \varepsilon Z_{r/2}^p \; (r = 3, \ldots, 2n) \\ s + t = r, \; 0 \leq s \leq t \leq n \end{gathered} \tag{8}$$

dove $\varepsilon = 1$ *se* r *è pari ed* $\varepsilon = 0$ *se* r *è dispari, realizziano un'immersione topologica di* L_{2n+1} *nello spazio* E_{4n+1}.

Questo significa che le formule (8) realizzano una corrispondenza biunivoca tra L_{2n+1} e il luogo geometrico (8) di E_{4n+1} $(v_0, \ldots, v_{2n})$. Infatti è chiaro che, ad un punto di L_{2n+1}, cioè ai p punti $P(x_0, \ldots, x_{2n+1})$, $P'(x'_0, \ldots, x'_{2n+1}), \ldots$, $P^{(p-1)}(x_0^{(p-1)}, \ldots, x_{2n+1}^{(p-1)})$, dove $P', \ldots, P^{(p-1)}$ sono punti che si ottengono da P mediante la trasformazione (4) e le sue p-1 potenze, corrisponde un solo punto del luogo geometrioo (8), dato il fatto che qualunque termine del secondo membro di (8) è invariante rispetto al gruppo (4).

Inversamente, supponiamo che sia dato un punto del luogo (8) avente dunque coordinate $v_o, .., v_{2n}$ tali che le (8) abbiano delle soluzioni–Supponiamo dapprima che per questo punto sia $v_o \neq 0$; si deve conseguentemente avere $Z_o \neq 0$, e le equazioni (8) determinano le incognite $Z_1, Z_2, .., Z_n$ univocamente in funzione di v e di Z_o, ossia abbiamo solamente p soluzioni per cui $Z_o = \sqrt[p]{v_o}$, ossia un solo punto di L_{2n+1}.

Se poi Z_o è zero esiste un $Z_h \neq 0$, data la condizione (3). Supponiamo che risulti $Z_o = Z_1 = ... Z_{h-1} = 0$, $Z_h \neq 0$. In questo caso abbiamo per le (8);

$$v_o = ... = v_{2h-1} = 0, \; v_{2h} = Z_h^2, \; v_{2h+1} = Z_h^{p_{h+1} r_h} Z_{h+1}, ...$$

e si ottiene lo stesso risultato, con sola la differenza che in luogo di z_o interviene Z_h, dunque l'immersione è topologica.

2. – Si può adesso osservare che l'immersione (8) non è in generale regolare, ossia differenziale in tutti i punti; questo vuol dire che possono esistere punti in cui non sono definiti i differenziali delle Z. Infatti differenziando le formule (8) si ottiene

$$dv_o = pZ_0^{p-1} \, dZ_o$$
$$dv_1 = p_1 r_o Z_0^{p_1 r_0 - 1} Z_1 \, dZ_o + Z_0^{p_1 r_0} dZ_1, ..., .$$

Ora, se $Z_1 \neq 0$, ma tutte le altre Z sono nulle e se $p_1 r_0 \neq 1 \pmod p$, il differenziale dZ_o non risulta definito in un tal punto.

Possiamo osservare che si può sempre supporre che p_o sia l'unità prendendo una potenza conveniente della trasformazione (4). Ora, se $p_o = 1 \pmod p$, possiamo prendere $r_o = p$-1, cosicchè

$$p_1 r_0 = 1 \pmod p$$

significa che p_1 deve essere uguale a p-1 · Ne risulta così che l'invariante misto lineare in Z_1 formato con Z_o è lineare anche in Z_o per $p_o = 1$, solamente se abbiamo $p_1 = p - 1$.

Si ha pertanto il teorema:

Per $n = 1$ e $p_o = 1$, *l'immersione* (8) *risulta regolare solamente per gli spazi* L_3 $[p; 1 \; p$-1], *nel qualcaso può venir definita dalle formule*

$$v_o = Z_0^p, \; v_1 = Z_0 Z_1, \; v_2 = Z_1^p.$$

Ne discende altresì il teorema:

Lo spazio lenticolare $L_3(p; 1, p$-1) *può venir considerato come la varietà algebrica dello spazio complesso* C_2 (v_o, v_1, v_2) *data dall'equazione*

$$v_1^p = v_o v_2.$$

Per $n > 1$ ne risulta facilmente che l'immersione (8) non può essere regolare in qualunque punto, ove si eccetui soltanto lo spazio proiettivo.

Possiamo ottenere un'immersione regolare in qualunque punto, aggiungendo nuove coordinate in modo da far apparire degli invarianti misti che contengono linearmente qualunque variabile. Per esempio, nel caso in cui $p_1 r_0 \neq 1 \pmod{p}$, se aggiungiamo come nuova variabile $U = Z_0 Z_1^{p_0 r_1}$, abbiamo

$$dU = dZ_0 Z_1^{p_0 r_1} + P_0 Z_1 \, Z_0 Z_1^{p_0 r_1 - 1} dZ_1 ;$$

dunque si può definire dZ_0 in un puato per cui $Z_1 \neq 0$, $Z_2 = 0$ $(h \neq 1)$.

Si ha quindi il teorema:

Si può ottenere un'immersione regolare di L_{2n+1} nello spazio euclideo ad $(n+1)^2$ dimensioni mediante le:

$$v_h = Z_h^p, \quad v_{hk} = Z_h^{p_k r_h} Z_k \quad (h, k = 0, 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Naturalmente, si possono ottenere delle immersioni regolari in spazi euclidei ad un numero più piccolo di dimensioni. Osserviamo infatti che le formule (8) hanno una simmetria nelle variabili $Z_0, Z_n, Z_1, Z_{n-1}, \ldots$ e che le ultime formule (8) si scrivono

$$v_{2n-2} = Z_{p-2}^{p_n r_{n-2}} Z_n + Z_{n-1}^p ,$$

$$v_{2n-1} = Z_{n-1}^{p_n r_{n-1}} Z_n \, , \quad v_{2n} = Z_n^p \, .$$

Scriviamo ora le formule (8) cominciando con Z_n, dunque considerando le formule

$$v'_0 = Z_n^p, \quad v'_1 = Z_0^{p_{n-1} r_n} Z_{n-1}, \quad V'_2 = Z^{p_{n-2} r_n} Z_{n-2} + Z_{n-1}^p, \ldots\ldots$$

Aggregando alle variabili $v_0, \ldots, v_{2n}$ le $v'_1, \ldots\ldots, v'_{2n-1}$, si ottiene un'immersione che impegna tutti gli invarianti che appaiono nelle (10) dunque quest'immersione è topologica e regolare.

Poichè quest'immersione è anche intera, data cioè da polinomi, ne risulta che eliminando le variabili Z si ha una varietà algebrica dello spazio complesso C_{4n} $(v_p, \ldots, v_{2n}, v'_1, \ldots, v'_{2n-1})$, onde il teorema:

Esiste sempre un'immersione topologica regolare dello spazio lenticolare L_{2n+1} in uno spazio euclideo E_{8n} $(v_0, \ldots, v_{2n}, v'_1, \ldots v'_{2n-1})$, che definisce lo spazio L_{2n+1} come una varietà algebrica.

3. - Ritorniamo all'immersione (10), e supponiamo di essere nel caso dello spazio proiettivo. Gli invarianti misti sono ora $Z_h Z_k$, dunque risultano simmetrici in h, k, cosicchè basta supporre $h < k$ e gli invarianti (10) sono in numero di $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, talchè lo spazio euclideo è ad $(n+1)(n+2)$ dimensioni. In questo caso, se prendiamo come coordinate

$$v_h = Z_h^2, \; v_{hk} = \sqrt{2}\, Z_h Z_k \; (h < k), \tag{11}$$

si ha, in virtù della (3),

$$\Sigma (v_h \bar{v}_h + v_{hk} \bar{v}_{hk}) = (Z_h \bar{Z}_h)^2 + 2 Z_h \bar{Z}_h Z_k \bar{Z}_k = 1 ,$$

cosicchè l'immersione (11) ha luogo sulla sfera con centro l'origine e raggio unità dello spazio $E_{(n+1)(n+2)}$.

L'immersione (11) si chiama di MANNOURY [1]; essa ha certe proprietà importanti, per esempio quella di condurre nel caso di coordinate reali alla metrica naturale dello spazio proiettivo. Infatti, se consideriamo le formule (11) in variabili reali relative allo spazio P_m

$$y_h = x_h^2, \; y_{hk} = \sqrt{2}\, x_h x_k, \; (h < k = 0, \ldots, m), \tag{11'}$$

la metrica associata si scrive

$$ds^2 = dy_h^2 + dy_{hk}^2 = 2 x_h^2 dx_h^2 + 2 (x_h dx_k + x_k dx_h)^2$$

e si ottiene facilmente

$$ds^2 = 2 \; (dx_0^2 + \ldots + dx_m^2), \tag{12}$$

tenendo conto che abbiamo in coordinate reali:

$$x_0^2 + \ldots + x_m^2 + 1 . \tag{12'}$$

Ne risulta che la metrica del luogo geometrico (11') coincide, a meno del fattore 2, con quella della sfera unitaria data dalla (12'). Si ha dunque che la metrica (12), (12') dello spazio P_m è a curvatura costante, uguale da 1, e possiede un gruppo ad $m(m + 1/2)$ parametri, ond'è la metrica naturale di P_m. In particolare, nel caso di uno spazio proiettivo P_{2n+1}, la metrica naturale

(1) G. MANNOURY, Niew Archief voor Wiskunde, 2, 4, 12 (1898).

possiede un gruppo a $(2n+1)\ n+1)$ parametri. Se partiamo dalle formule (11) colle Z_h complesse, come nel nostro caso, la metrica diventa

$$ds^2 = dv_h\, d\bar{v}_h + dv_{hk}\, d\bar{v}_{hk} =$$

$$4\, Z_h\, dZ_h\, \bar{Z}_k\, d\bar{Z}_k + 2\,(Z_h\, dZ_k + Z_k\, dZ_h)\,(\bar{Z}_h\, d\bar{Z}_k + \bar{Z}_k\, d\bar{Z}_h)\,.$$

Possiamo dunque anche scrivere

$$ds^2 = 2(Z_k \bar{Z}_k \cdot dZ_h\, d\bar{Z}_h + Z_h\, d\bar{Z}_h\, \bar{Z}_h\, dZ_h) \tag{13}$$

e per conseguenza, tenendo conto della (3), otteniamo

$$ds^2 = 2d\bar{Z}_h\, dZ_h + 2Z_h\, d\bar{Z}_h\, \bar{Z}_k\, dZ_k\,.$$

È facile vedere che, in coordinate reali, questa metrica si scrive

$$ds^2 = 2(dx_0^2 + \ldots + dx_{2n+1}^2 + w^2)\,, \tag{13'}$$

dove w è definita da

$$w = x_0\, dx_1 - x_1\, dx_0 + \ldots\ldots + x_{2n}\, dx_{2n+1} - x_{2n+1}\, dx_{2n}\,.$$

Ne risulta ch'essa possiede come gruppo di movimenti il gruppo ortogonale simpletico, cioè il gruppo ortogonale che conserva la forma di PFAFF w, e si sa che questo gruppo è ad $(n+1)^2$ parametri (¹). Abbiamo dunque il teorema:

L'immersione (11) *dello spazio proiettivo* P_{2n+1} *conduce alla metrica* (13') *che possiede come gruppo di movimenti il gruppo simplettico ad* $(n+1)^2$ *parametri.*

Ne discende che:

Uno spazio proiettivo P_{2n+1} *si può dotare con due metriche importanti diverse, ciascuna avente un gruppo transitivo di movimenti, la metrica naturale che è a curvatura costante e la metrica simplettica* (13').

Nel primo caso, la metrica si ottiene come metrica indotta per l'immersione (11') con $m = 2n+1$, ossia dalle formule

$$y_h = y_h^2,\ y_{hk} = \sqrt{2}\, x_h x_k\ (h, k < 0, \ldots, 2n+1)\,, \tag{14}$$

(¹) G. VRANCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*, vol. II, p. 155, Bucarest, 1957.

è lo spazio euclideo $E(y_h, y_{hk})$ è a $(2n+3)(n+1)$ dimensioni. Nel secondo caso, la metrica simplettica è definita dalle formule (13) e dunque lo spazio euclideo d'immersione $F(v_h, v_{hk})$ è ad $(n+1)(n+2)$ dimensioni, dunque con $(n+1)^2$ dimensioni di meno che lo spazio E.

D'altronde, tenendo conto dalle (14), le formule (11) si scrivono

$$\begin{aligned} v_h &= y_{2h-2} - y_{2h-1} + \frac{i}{\sqrt{2}} y_{2h\,h-2\,2\,h-1} \\ v_{hk} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [y_{2h-2\,2k-2} - y_{2h-1\,2k-1} + \\ &\qquad + i\,[y_{2h-2\,2k-1} + y_{2h-1}\,y_{2k-2}]\,]\,; \end{aligned} \tag{14}$$

v_h, v_{hk} si esprimono pertanto linearmente mediante le y, ma non reciprocamente. Si può osservare che se accanto alle (11) consideriamo le

$$v'_h = Z_h \bar{Z}_h, \quad v_{hk} = \sqrt{2}\, Z_h \bar{Z}_k\,, \tag{14'}$$

ossia se consideriamo lo spazio euclideo $F'(v, v')$, si trova che questo è equivalente allo spazio E.

Le (11) utilizzano solamente le quantità complesse $Z_0,..,Z_n$, mentre le (14') utilizzano, come l'equazione (3) della sfera unitaria, sia le Z che le $\bar{Z}$; più precisamente, esse utilizzano tanto le variabili complesse Z quanto i moduli $|Z|$, essendo $\bar{Z} = |Z|^2/Z$. Dunque lo spazio proiettivo P_{2n+1} si può considerare come una varietà algebrica nel campo complesso definita dalle formule (11), dove $Z_0,..,Z_n$ sono coordinate omogenee e in questo caso esso può essere munito della metrica simplettica: pertanto, se vogliamo avere la metrica naturale di P_{2n+1}, dobbiamo utilizzare non solamente le coordinate $Z_0,..,Z_n$, ma anche i moduli di queste coordinate.

4. - Si tratta ora di far vedere in quale misura questi risultati si possono estendere agli spazi lenticolori. Per questo, osserviamo in primo luogo che gli invarianti v_{hk}, dati dalle formule (10), sono in generale per uno spazio L_{2n+1} di grado complessivo minore di p; ma possiamo ottenere degli invarianti di grado p, utilizzando i moduli $|Z_t|$ che sono evidentemente invarianti rispetto al gruppo (4). Dunque le quantità

$$|Z_0|^{t_0} \ldots\ldots |Z_n|^{t_n} Z_h^{p_h r_k} Z_k \quad (t_0 + \ldots. + t_n + p_k r_h + 1 = p), \tag{15}$$

dove $t_0,..,t_n$ sono numeri positivi, costituiscono invarianti di grado complessivo p e di grado $1 + t_k$ nella variabile Z_k. Ora t_k può variare da 1 a $p - t_0 - .. - t_{k-1} - t_{k+1} - \ldots - t_n - p_k r_h - 1$; dunque abbiamo in generale diverse possibilità di formare una invariante di dato grado in diverse variabili. Ne risulta che, considerando la potenza di grado p della (3), dunque l'equazione

$$(15') \qquad (Z_0 \bar{Z}_0 + \dots + Z_n \bar{Z}_n)^p = \Sigma \frac{p!}{s_0! \dots s_n!} (Z_0 \bar{Z}_0)^{s_0} \dots (Z_n \bar{Z}_n)^{s_n} = 1 ,$$

dove $s_0 + \dots + s_n = p$, e considerando degli invarianti $Y_{s_0 \dots s_n}$ che siano in grado s_0 in Z_0, di grado s_1 in Z_1, ecc., e prendendo

$$v_{s_0 \dots s_n} = \sqrt{\frac{p!}{s_0! \dots s_n!}} \, Y_{s_0 \dots s_n} ,$$

si ottiene un'immersione sulla sfera unitaria avendosi evidentemente

$$\Sigma \, v_{s_0 \dots s_n} \bar{v}_{s_0 \dots s_n} = 1 .$$

Se abbiamo più in varianti $I_{s_0 \dots s_n}$, per esempio m invarianti, si possono considerare in luogo di $v_{s_0 \dots s_n}$ le m coordinate

$$v^{\alpha}_{s_0 \dots s_n} = \sqrt{\frac{p!}{s_0! \dots s_n!}} \, a_{\alpha} \, T^{\alpha}_{s_0 \dots s_n} ,$$

e si giunge allo stesso risultato imponendo alle costanti a_{α} la condizione

$$a_1^2 + \dots a_m^2 = 1 .$$

Le formule (11) sono ottenibili mediante questo procedimento dagli invarianti $Z_h Z_k$, $Z_k Z_h$, con $a_1 = a_2 = 1/\sqrt{2}$.

Abbiamo dunque il teorema:

Esiste un' infinità di modi di scrivere un' immersione di grado p dello spazio L_{2n+1} che sia situata sulla sfera unitaria.

Vogliamo adesso considerare una classe speciale di spazi L_{2n+1}: quelli per i quali tutti i numeri $p_0, \dots, p_n$ sono uguali. Possiamo allora supporre che essi siano uguali ad uno. Ne risulta dunque che qualunque espressione

$$Z_0^{s_0} \dots Z_n^{s_n} \quad (s_0 + \dots + s_n = p)$$

è un invariante di grado p, dunque non è più necessario di utilizzare dei moduli per ottenere degli invarianti di grado p.

Supponiamo di essere nel caso $n = 1$, dunque di avere due sole variabili Z_0, Z_1. In questo caso, per lo spazio L_3 $(p; 1,1)$ si ha un'immersione sulla sfera unitaria prendendo

$$v_r = \sqrt{C_p^r} Z_0^{p-r} Z_1^r \; (r = 0, \dots, n) ,$$

dove abbiamo

$$C_p^r = \frac{p(p-1)\dots(p-r+1)}{1\,2\dots r}\,, \quad C_p^0 = 1\,;$$

e si ha evidentemente

$$\sum_{r=0}^{n} \bar{v}_r\, v_r = 1\,,$$

in virtù della condizione $z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 = 1$.

Se consideriamo la metrica

$$ds^2 = \sum_{n=0}^{n} d\bar{v}_r\, dv_r\,,$$

si trova facilmente la

$$ds^2 = p\, dZ_h\, d\bar{Z}_h + p(p-1)\, Z_h\, d\bar{Z}_h\, \bar{Z}_k\, dZ_k\,, \tag{16}$$

dove h e k assumono i valori 0,1 .

Se n è più grande dell'unità e prendiamo come variabili le:

$$v_{r_0 \dots r_n} = \sqrt{\frac{p!}{r_0!\dots r_n!}}\, Z_0^{r_0}\dots Z_n^{r_n}\,, \; (r_0 + \dots + r_n = p)\,, \tag{16'}$$

si trova come metrica la stessa formula (14), con h e k variabili da 0 ad n.

Abbiamo dunque il teorema:

Dato lo spazio lenticolare $L_{2n+1}\,(p;\,1,\dots 1)$, *possiamo considerare questo spazio come una varietà algebrica definita dalle formule* (16′) *e come sua metrica quella definita dalla* (16), *dove h e k variano da* 0 *ad n*.

Si può osservare che la metrica (14) contiene come caso particolare la metrica (13) per $p = 2$. Ne risulta altresì che il gruppo dei movimenti della metrica (16) continua a essere il gruppo ortogonale simplettico; dunque lo spazio V_n con la metrica (16) è uno spazio omogeneo, avente un gruppo di movimenti ad $(n+1)^2$ parametri.

5. - Tenendo conto del fatto che una almeno delle coordinate $Z_0,\dots,Z_n$ non può essere nulla, ne risulta che lo spazio L_{2n+1} può essere coperto da $n+1$ celle.

Prendendo delle coordinate polari

$$Z_h = \rho_h\, e^{i\theta h}\; (h = 0,\dots,n)$$

la metrica (16) si può scrivere

$$ds^2 = p\,[d\rho_h^2 + \rho_h^2 d\theta_h^2] + p(p-1)\,[\rho_h^2\, d\theta_h]^2\,, \tag{17}$$

dove h varia da 0 ad n e dove $\rho_0,\ldots,\rho_n$ soddisfano alla condizione

$$\rho_0^2 + \ldots + \rho_n^2 = 1 .$$

Supponendo $Z_0 \neq 0$, dunque $\rho_0 \neq 0$, ponendo

$$y_k = \frac{Z_k}{Z_0} = \frac{\rho_k}{\rho_0} e^{i(\theta_k - \theta_0)} = \lambda_k e^{i\varphi_k} \quad (k = 1,\ldots, n)$$

e prendendo

$$\rho_0 = \rho, \ \theta_0 = \varphi, \ \rho_k = \lambda_k \rho, \ \theta_k = \varphi_k + \varphi,$$

la metrica (17) si scrive

$$(17') \qquad ds^2 = p\,[d\rho^2 (1 + \lambda_k^2] + \rho^2 [d\lambda_k^2 + \lambda_k^2 d\varphi_k^2] + 2\rho d\rho \lambda_k d\lambda_k - \rho^4 (\lambda_k^2 d\varphi_k)^2] + \\ + p^2 [d\varphi + \rho^2 \lambda_k^2 d\phi_k]^2 ,$$

dove k varia da 1 ad n e dove ρ e λ_k soddisfano alla

$$(17'') \qquad \rho^2 [1 + \lambda_k^2] = 1 .$$

Tenendo conto che dalla (17″) segue la

$$\rho d\rho = - \frac{\lambda_k \, d\lambda_k}{[1 + \lambda_k^2]^2} ,$$

ne discende la formula

$$(18) \qquad ds^2 = p \left[\frac{d\lambda_k^2 + \lambda_k^2 d\varphi_k^2}{1 + \lambda_k^2} - \frac{(\lambda_k d\lambda_k)^2 + (\lambda_k^2 d\varphi_k)^2}{[1 + \lambda_k^2]^2} \right] + p^2 \left[d\varphi + \frac{\lambda_k^2 d\varphi_k}{1 + \lambda_k^2} \right]^2 .$$

Ponendo

$$(18') \qquad y_k = \lambda_k \, e^{i\varphi_k} = x_{2k-1} + i x_{2k} \quad (k = 1,\ldots, n) ,$$

ne risulta:

$$(19) \qquad ds^2 = p \left[\frac{dx_i^2}{1 + x_i^2} - \frac{(x_i dx_i)^2 + w^2}{[1 + x_i^2)^2} \right] + p^2 \left[d\varphi + \frac{w}{1 + x_i^2} \right]^2 ,$$

dove i varia da 1 a $2n$ e dove w è la forma simplettica nelle variabili x_i.

$$(19') \qquad w = x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + \ldots + x_{2n-1} \, dx_{2n} - x_{2n} dx_{2n-1} .$$

Abbiamo dunque il teorema:

La metrica (16) *di* L_{2n+1} $[p;\ 1,..,1]$ *nell'intorno* $Z_0 \neq 0$ *si può scrivere sotto la forma* (19).

Evidentemente, la metrica di L_{2n+1} conserva la forma canonica (19) per un altro intorno, diciamo $V'\ (x'_1,..,x'_{2n},\ \varphi')$, per cui $Z_1 \neq 0$. Basta considerare delle variabili y' date dalle formule

$$y'_1 = \frac{Z_0}{Z_1}\,,\ y'_k = \frac{Z_k}{Z_1}\,, \tag{19''}$$

ossia considerare la trasformazione proiettiva nelle y e nelle λ e lineare nelle φ:

$$y'_1 = \frac{1}{y_1}\,, y'_k = \frac{y_k}{y_1}\,; \lambda'_1 = \frac{1}{\lambda_1}\,, \lambda'_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\,, \varphi'_1, = -\varphi_1,\ \varphi'_k = \varphi_k - \varphi_1\ (k>1), \tag{20}$$

la quale, nelle variabili reali x e φ, si scrive

$$\begin{gathered} x'_1 + ix'_2 = \frac{1}{x_1 + ix_2}\,,\ x'_{2s-1} + ix'_{2s} = \frac{x_{2s-1} + ix_{2s}}{x_1 + ix_2}\,, \\ \varphi' = \varphi + ar\,ctg\,\frac{x_2}{x_1}\,,\ \left[\frac{\lambda'^2_k\, d\,\varphi'_k}{1 + \lambda'^2_k} = -\varphi_1 + \frac{\varphi^2_k\, d\,\varphi_k}{1 + \lambda^2_k}\right]. \end{gathered} \tag{20'}$$

Si ha allora

$$1 + x'^2_i = \frac{1 + x^2_1}{x^2_1 + x^2_2}\,,\ d\varphi' + \frac{w'}{1 + x'^2_i} = d\varphi + \frac{w}{1 + x^2_i}\,; \tag{20''}$$

dunque il coefficiente di p^2 conserva la sua forma, e lo stesso vale per il coefficiente di p.

Ne risulta il teorema:

La metrica (19) *di* L_{2n+1} *conserva la sua forma per un cambiamento di variabili* (20').

Dunque la trasformazione (20') e quelle che si ottengono da essa utilizzando al posto di x_1, x_2 due altre variabili $x_3, x_4; \ldots; x_{2n-1}\ x_{2n}$, constituiscono una carta dello spazio $L_{2n+1}\ (p;1,..,1)$ considerato come varietà differenziabile. È interessante osservare che il coefficiente di p nella formula (19) coincide con la metrica naturale dello spazio proiettivo complesso C_n [1]. Dunque la metrica di C_n si ottiene dalla metrica di L_{2n+1} supponendo verificata l'equazione di PFFAF

$$d\varphi + \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + \ldots\ldots + x_{2n-1} dx_{2n} - x_{2n} dx_{2n-1}}{1 + x^2_1 + \ldots\ldots + x^2_{2n}} = 0\,. \tag{20'''}$$

---

[1] G. VRANCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*, vol. II 1957, p. 411, Bucarest.

In altri termini, lo spazio proiettivo complesso appare come la varietà anolonoma V^{2n}_{2n-1} definita in L_{2n+1} dall'equazione (20″).

6. - Si possono estendere i risultati testè ottenuti anche agli spazi di MINKOWSKI. Consideriamo infatti, nello spazio di MINKOWSKI M_{n+1} $(x_0,..,x_n)$ di metrica

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + ... + dx_n^2, \tag{21}$$

la pseudo sfera

$$-x_0^2 + x_1^1 + ... + x_n^2 = 1; \tag{21'}$$

questa costituisce evidentemente una varietà differenziabile V_n, che possiede come gruppo di movimenti il gruppo quasi-ortogonale della pseudosfera (21′). Per $n = 4$, questa pseudo sfera è una spazio relativistico di DE SITTER (¹).

Prendiamo in considerazione lo spazio D_n che si ottiene da V_n identificando i punti equivalenti rispetto al gruppo

$$x'_0 = x_0, \; x'_i = -x_i \; (i = 1,..,n). \tag{22}$$

L'equazione (21′) ci dice infatti che le variabili $x_1,..x_n$ non possono essere tutte nulle, onde le (22) definiscono un gruppo discreto. Lo spazio così ottenuto si chiama uno spazio isocronale ellittico, tenendo conto del fatto che, nel caso della relatività, x_0 si interpreta come il tempo ed il gruppo (22) lascia x_0 invariante. Utilizzando l'immersione che possiamo chiamare di MANNOURY:

$$v_0 = F(x_0), \quad v_h = \frac{x_h^2}{\sqrt{1 + x_0^2}}, \; v_{hk} = \frac{\sqrt{2}\, x_h x_k}{\sqrt{1 + x_0^2}}, \tag{23}$$

dove F è una funzione della variabile x_0, e considerando la metrica

$$ds^2 = dv_0^2 + dv_h^2 + dv_{hk}^2,$$

si trova ch'essa coincide col doppio della metrica naturale (21) se f è definito dall'integrale ellittico

$$\frac{dF}{dx_0} = \sqrt{\frac{2 + x_0^2}{1 + x_0^2}}. \tag{23'}$$

(¹) L. MARKUS, *The perfect cosmological principle and non conservation af parity*, Comunicazione al Colloquio di geometria differenziale globale, Bucarest, Luglio 1964, «Rev. Roum. de Math. Pures et Appl.», 1955.

Abbiamo dunque il teorema:

L'immersione (23), (23') *dello spazio ellittico* D_n *conduce alla metrica naturale di questo spazio.*

Supponiamo adesso che n sia un numero pari $2q$. Possiamo allora introdurre delle quantità complesse

$$Z_1 = x_1 + ix_2, \ldots, Z_q = x_{2q-1} + ix_{2q},$$

e considerare l'immersione data dalle formule

$$v_0 = F(x_0),\ v_h = \rho Z_h^2,\ v_{hk} = \rho\sqrt{2}\, Z_h Z_k,\ (\rho = \rho(x_0);$$

questa conduce ad una metrica analoga alla (12'), che si scrive

$$ds^2 = -f'^2 dx_0^2 + 2\rho^2 [Z_h \bar{Z}_h dZ_k d\bar{Z}_k + \bar{Z}_h dZ_h \quad Z_k d\bar{Z}_k]$$
$$2\rho\rho' dx_0 Z_h \bar{Z}_h [\bar{Z}_k dZ_k + Z_k d\bar{Z}_k] + \rho'^2 dx_0^2 (Z_h \bar{Z}_h)^2.$$

Tenendo conto che in questo caso abbiamo

$$Z_h \bar{Z}_h = 1 + x_0^2,\ \bar{Z}_h dZ_h \quad Z_k d\bar{Z}_k = (x_i d_{x_i})^2 + w^2,$$
$$\bar{Z}_k dZ_k + Z_k d\bar{Z}_k = 2x_i dx_i = 2x_0 dx_0,$$

dove w è dato dalla

$$w = x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + \ldots + x_{2q-1}\, dx_{2q} - x_{2q}\, dx_{2q-1};$$

ne risulta, supponendo f definito dalla (23') e ρ dato da

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 + x_0^2}},$$

che abbiamo la metrica

$$ds^2 = 2\left[- dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_{2p}^2 + \frac{w^2}{1 + x_0^2}\right].$$

Anche in questo caso otteniamo dunque una metrica simplettica.

Considerazioni analoghe valgono nel caso di uno spazio isocronale lenticolare con tutte le quantità p_i $(i = 1,..,q)$ uguali, dunque nel caso $n = 4$, definito dal gruppo discreto

$$x'_0 = x_0,\ Z'_1 = Z_1\ e^{\frac{2\pi i}{p}},\ Z'_2 = Z_2\ e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

dove p è un numero intero qualsiasi.