Sugli invarianti differenziali di una forma bilineare mista.

Memoria di V. HLAVATY (a Praga).

In questa Memoria vogliamo studiare la teoria degli invarianti algebrici e differenziali di un affinore misto P_{λ}^{ν} i cui elementi siano funzioni assegnate di n variabili indipendenti $\xi^1, \ldots, \xi^n$ $(n > 1)$, limitandoci al caso in cui l'equazione caratteristica $\| P_{\lambda}^{\nu} - \omega \delta_{\lambda}^{\nu} \| = 0$ ci fornisce n radici distinte, diverse da zero $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. In tale supposizione l'affinore P_{λ}^{ν} individua in ogni punto dello spazio rappresentativo degli argomenti ξ una omografia vettoriale e n direzioni *unite*, linearmente indipendenti, cosicchè nello stesso spazio rimangono univocamente definite n congruenze $C_1, \ldots, C_n$ di curve.

Partendo soltanto dai dati della questione, (cioè dall'affinore P_{λ}^{ν}), i vettori tangenti di tali curve risultano definiti ognuno *a meno* di un fattore *a priori* arbitrario risp. $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ (§ 1, 2). Ad ogni scelta di tali moltiplicatori corrisponderà una connessione riemanniana ben determinata $V_n^{(\rho)}$, nella quale le congruenze risultano ortogonali (§ 3). Fra tali connessioni ce n'è una (definita a meno di condizioni iniziali) per la quale le congruenze C_a sono *solenoidali* (§ 5).

D'altra parte, supponendo lo spazio delle ξ dotato di una connessione lineare generale, saremo ancora in grado di fissare le funzioni ρ basandoci unicamente alle proprietà delle congruenze C_a, (senza far intervenire — come nei casi precedenti — le connessioni ausiliarie) (§ 6, 7).

Riassumendo i risultati più importanti, vediamo che gli invarianti algebrici dell'affinore P_{λ}^{ν} si riducono alle n radici $\omega_1, \ldots, \omega_n$, nonchè alle direzioni unite, spiccate da ogni punto dello spazio ambiente, mentre la connessione $V_n^{(\rho)}$, nella quale le congruenze ortogonali C_a risultano *solenoidali* può essere riguardata come sintesi di tutti gli invarianti differenziali (nel senso di RICCI) dell'affinore P_{λ}^{ν}.

Rimane con ciò, come sarà specificato nel § 8), risolto il problema della determinazione di tutti gli invarianti algebrici e differenziali spettanti all'affinore misto doppio P_{λ}^{ν}, problema che, se certo non ne ha l'importanza, è forse il più vicino a quello classico, concernente l'invarianti assoluti di un ds^2 riemanniano, ossia di un *tensore covariante doppio* $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$. Un tale problema, per quanto mi è consta, non era ancora stato preso in considerazione, mentre oltre alle ricerche pure classiche, concernenti invarianti o tensori associati ad un ds^2, sono stati istituiti studi recenti su altre teorie invariantive, suggerite dai problemi della geometria del trasporto [1].

I.

1. Immaginiamo dato uno spazio a n dimensioni, dotato di una connessione lineare generale coi coefficienti $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ [2]. Tale spazio chiameremo *varietà* L_n. Ad ogni vettore generico controvariante $\boldsymbol{v}$ risp. covariante $\overline{\boldsymbol{w}}$ [3] può associarsi in modo intrinseco un affinore $\nabla_\mu v^\nu$ risp. $\nabla_\mu w_\lambda$ mediante le formule

$$\nabla_\mu v^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial \xi^\mu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} v^\lambda, \quad \nabla_\mu w_\lambda = \frac{\partial w_\lambda}{\partial \xi^\mu} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} w_\nu,$$

dove ξ^ν designano le coordinate della varietà L_n.

Se i coefficienti $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ si riducono ai simboli di CHRISTOFFEL (spettanti ad un tensore $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$ assegnato di rango n)

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = 1/2\, g^{\alpha\nu}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^\mu} g_{\alpha\lambda} + \frac{\partial}{\partial \xi^\lambda} g_{\alpha\mu} - \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} g_{\lambda\mu}\right),$$

ogni spazio dotato di tale connessione dicesi *varietà riemanniana* e si designa con V_n.

2. Sia P^{ν}_{λ} un affinore assegnato in un campo a n dimensioni, il che significa che in ogni punto di tale campo sono date le n^2 sue componenti, funzioni del posto $P^1_1(\xi), \ldots, P^n_n(\xi)$.

Consideriamo dapprima l'intorno infinitesimale del punto generico P del campo. Ove si immagini un sistema di incrementi $d\xi^\nu$ attribuiti alle coordinate, questi definiscono notoriamente una direzione spiccata da P, anzi, in modo più preciso, possono interpretarsi come componenti di un vettore infinitesimo contravariante, spiccato da P.

---

[1] T. Y. THOMAS-ARISTOTLE D. MICHEL: *Differential invariants of affinely connected manifolds.* (« Annals of Matematics », vol. 28, n. 2, pp. 196-236). Cfr. anche O. VEBLEN: *Invariants of quadratic differentialforms.* (« Cambridge University Press », London, 1927).

[2] Gli indici greci percorrono i valori 1, 2,...., n. Al solito sottointendiamo il segno di somma (da 1,.... a n) rispetto all'indice *muto* greco.

[3] Adopereremo di regola il criterio uniforme di designare gli affinori con lettere latine munite di indici greci (tanti quanto è il rango dell'affinore). Solo per i vettori useremo anche lettere grassette designando, per esempio, i vettori contravarianti con $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{E}$ nonchè i vettori covarianti con $\overline{\boldsymbol{w}}$, $\overline{\boldsymbol{p}}$, $\overline{\boldsymbol{r}}$,.....

L'affinore P_λ^ν consente di far corrispondere invariantivamente al vettore $d\xi^\nu$ un nuovo vettore contravariante (egualmente infinitesimo) $\delta\xi^\nu$, definito dalle formule

$$\delta\xi^\nu = P_\lambda^\nu d\xi^\lambda.$$

Se (come vogliamo supporre) il determinante $\|P_\lambda^\nu\| \neq 0$, la corrispondenza fra $\delta\xi^\nu$ e $d\xi^\nu$ è biunivoca.

La interpretazione geometrica di vettore (spiccato da P) si può astrattamente estendere dal campo infinitesimale al campo finito, attribuendola ad un generico sistema contravariante $\boldsymbol{v}$ i cui elementi siano funzioni delle ξ. L'affinore P_λ^ν ci consente di associare ad ogni vettore generico contravariante $\boldsymbol{v}$ un vettore contravariante $^*\boldsymbol{v}$ (associato di $\boldsymbol{v}$)

$$ {}^*v^\nu = P_\lambda^\nu v^\lambda. \tag{1}$$

Moltiplicando entrambi i membri di questa equazione per una funzione qualsiasi del posto ρ, si ha

$$(\rho\, {}^*v^\nu) = P_\lambda^\nu (\rho v^\lambda).$$

Vediamo così che alla direzione, individuata dai vettori $\rho\, v$, cioè dai rapporti

$$v^1 : v^2 : v^3 : \dots : v^n,$$

rimane associata univocamente una direzione individuata da uno qualunque dei vettori $\rho\, {}^*v$, cioè dai rapporti

$$P_\lambda^1 v^\lambda : P_\lambda^2 v^\lambda : \dots : P_\lambda^n v^\lambda.$$

È naturale di domandarsi se fra tali direzioni associate ne esistono di unite, tali cioè che sussistono le relazioni

$$\omega(\rho e^\nu) = P_\lambda^\nu \rho e^\lambda, \tag{2}$$

essendo ω un moltiplicatore *a priori* arbitrario (funzione del posto al pari dei dati della questione).

Per risolvere il sistema omogeneo (2) con valori non nulli, è necessario e sufficiente che si annulli il determinante Π

$$\Pi = \begin{vmatrix} P_1^1 - \omega, & P_2^1 & \dots & P_n^1 \\ P_1^2 & P_2^2 - \omega & \dots & P_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1^n & \dots & \dots & P_n^n - \omega \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

In seguito supporremo sempre che l'equazione (3) (di grado n in ω) presenti il caso generale, cioè abbia le n radici $\omega_a (a = 1, ..., n)$ distinte; per l'ipotesi che $\| P^{\nu}_{\lambda} \| \neq 0$, esse risultano altresì diverse da zero. Tale supposizione ci consente di assegnare n direzioni *unite*, linearmente indipendenti, individuate da n vettori contravarianti e_a, i quali sono definiti — a meno di un fattore scalare (che rimane indeterminato) — dalle equazioni

$$\omega_a e_{a|}{}^{\nu} = P^{\nu}_{\lambda} e_{a|}{}^{\lambda}. \tag{4}$$

Scegliendo (con criterio arbitrario quanto al fattore moltiplicativo ρ) siffatti vettori e_a, ogni altra soluzione della (2) può scriversi

$$E_a = \rho_a e_a, \tag{5}$$

dove le ρ sono funzioni arbitrarie del posto.

Ogni vettore e_a individua — nello spazio rappresentativo delle ξ — una congruenza di curve C_a mediante le equazioni differenziali

$$\frac{d\xi^1}{e_{a|}{}^1} = \frac{d\xi^2}{e_{a|}{}^2} = \dots = \frac{d\xi^n}{e_{a|}{}^n}. \tag{6}$$

Giova definire queste curve in rappresentazione parametrica, pensandone le coordinate ξ funzioni di una variabile ausiliaria s_a, il che può farsi, naturalmente, in infiniti modi. Noi converremo di assumere ds_a eguale al valore comune degli n membri della (6) ponendo complessivamente

$$\frac{d\xi^1}{e_{a|}{}^1} = \frac{d\xi^2}{e_{a|}{}^2} = \dots = \frac{d\xi^n}{e_{a|}{}^n} = \frac{ds_a}{1}. \tag{6'}$$

Scegliendo un altro parametro S_a, le curve della C_a possono essere definite anche mediante le posizioni

$$\frac{d\xi^1}{E_{a|}{}^1} = \frac{d\xi^2}{E_{a|}{}^2} = \dots = \frac{d\xi^n}{E_{a|}{}^n} = \frac{dS_a}{1}. \tag{6''}$$

Una direzione tangente ad una curva qualsiasi della congruenza C_a risulta, in base alle (6), direzione unita, donde segue che la congruenza C_a rimane invariantivamente associata all'affinore P^{ν}_{λ}.

Ci serviremo di tali congruenze invarianti per individuare nello spazio delle ξ delle connessioni riemanniane, pur esse invarianti.

3. A tal uopo introdurremo accanto ai vettori contravarianti $\boldsymbol{e}_a$, $\boldsymbol{E}_a$ i vettori covarianti $\bar{\boldsymbol{e}}_a$, $\overline{\boldsymbol{E}}_a$ le cui componenti, attesa la indipendenza degli n, $\boldsymbol{e}_a$ e quindi anche degli $\boldsymbol{E}_a$, rimangono univocamente definite dalle equazioni

$$\boldsymbol{e}_a \times \bar{\boldsymbol{e}}_b = \delta_{ab}, \quad \boldsymbol{E}_a \times \overline{\boldsymbol{E}}_b = \delta_{ab} \text{ [1]},$$

col solito significato di δ_{ab} ($=0$ per $a \neq b$, $=1$ per $a=b$). Ne segue

$$\bar{\boldsymbol{e}}_a = \rho_a \overline{\boldsymbol{E}}_a. \tag{5'}$$

I vettori $\boldsymbol{e}_a$ ci consentono di costruire i tensori

$$g_{\lambda\mu} = \sum_1^n {}_a\, e_{a|\lambda}\, e_{a|\mu}, \quad g^{\lambda\mu} = \sum_1^n {}_a\, e_{a|}{}^{\lambda}\, e_{a|}{}^{\mu}, \tag{7}$$

(i quali risultano reciproci, nel senso che si attribuisce a tale designazione nella teoria dei determinanti) mentre i vettori $\boldsymbol{E}_a$ danno luogo ai tensori analoghi

$$G_{\lambda\mu} = \sum_1^n {}_a\, E_{a|\lambda}\, E_{a|\mu}, \quad G^{\lambda\mu} = \sum_1^n {}_a\, E_{a|}{}^{\lambda}\, E_{a|}{}^{\mu}. \tag{7'}$$

I tensori $g_{\lambda\mu}$, $g^{\lambda\mu}$ possono essere riguardati come assegnati, mentre $G_{\lambda\mu}$, $G^{\lambda\mu}$ dipendono, oltre che dai vettori $\boldsymbol{e}$, $\bar{\boldsymbol{e}}$, anche delle funzioni arbitrarie ρ, risultando dalle (7′), per le (5) e (5′):

$$G_{\lambda\mu} = \sum_1^n {}_a \frac{1}{\rho_a^2}\, e_{a|\lambda}\, e_{a|\mu}, \quad G^{\lambda\mu} = \sum_1^n {}_a\, \rho_a^2\, e_{a|}{}^{\lambda}\, e_{a|}{}^{\mu}. \tag{7''}$$

Possiamo costruirne i simboli di CHRISTOFFEL

$$\overset{o}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} = 1/2\, g^{\alpha\nu}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} g_{\alpha\lambda} + \frac{\partial}{\partial\xi^{\lambda}} g_{\alpha\mu} - \frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}} g_{\lambda\mu}\right), \tag{8}$$

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = 1/2\, G^{\alpha\nu}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} G_{\alpha\lambda} + \frac{\partial}{\partial\xi^{\lambda}} G_{\alpha\mu} - \frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}} G_{\lambda\mu}\right), \tag{8'}$$

i quali sono legati dalle relazioni

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \overset{o}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} + T^{\nu}_{\lambda\mu}, \tag{9}$$

dove l'affinore $T^{\nu}_{\lambda\mu}$ dipende dalle funzioni ρ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} T^{\nu}_{\lambda\mu} = &-\sum_1^n {}_i\left(e_{i|}{}^{\nu} e_{i|\lambda} \frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} \log\rho_i + e_{i|}{}^{\nu} e_{i|\mu} \frac{\partial}{\partial\xi^{\lambda}} \log\rho_i\right) - 1/2 \sum_1^n {}_{i,j}\, e_{i|}{}^{\nu} e_{i|}{}^{\alpha} e_{j|\mu} e_{j|\lambda}\, \rho_i^2 \frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}} \frac{1}{\rho_j^2} \\ &+ 1/2 \sum_1^n {}_{k \neq l}\left(\frac{\rho_k^2}{\rho_l^2} - 1\right) e_{k|}{}^{\nu} e_{k|}{}^{\alpha}\left(e_{l|\lambda} \frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} e_{l|\alpha} + e_{l|\mu} \frac{\partial}{\partial\xi^{\lambda}} e_{l|\alpha} - \frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}} e_{l|\lambda} e_{l|\mu}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

---

[1] Con $v \times \bar{w}$ designeremo l'invariante $v^{\lambda} w_{\lambda}$.

Vediamo così che:

Un generico affinore P_{λ}^{ν} *dà luogo ad infinite connessioni riemanniane definite mediante* (8'), (9), (10).

Designeremo con $V_n^{(\rho)}$ il nostro spazio, in quanto dotato della connessione riemanniana (8') (la quale — ricordiamolo — dipende dalle indeterminate ρ), ed analogamente scriveremo V_n per designare la varietà riemanniana individuata dai coefficienti (8) (che sono ben determinati).

Osservazione I. I vettori e_a possono essere riguardati come versori (cioè vettori di lunghezza 1) ortogonali fra loro *nella* V_n, rispetto al tensore metrico $g_{\lambda\mu}$. Infatti si ha

$$g_{\lambda\mu} e_{a|}^{\lambda} e_{b|}^{\mu} = \Sigma_j e_{j|\lambda} e_{j|\mu} e_{a|}^{\lambda} e_{b|}^{\mu} = \delta_{ab}.$$

D'altra parte si deduce (sempre nella V_n)

$$g_{\lambda\mu} e_{a|}^{\lambda} = \sum_1^n{}_j e_{j|\lambda} e_{j|\mu} e_{a|}^{\lambda} = e_{a|\mu}; \quad g^{\lambda\mu} e_{a|\lambda} = \sum_1^n{}_j e_{j|}^{\lambda} e_{j|}^{\mu} e_{a|\lambda} = e_{a|}^{\mu},$$

donde segue che $e_{a|}^{\nu}$, $e_{a|\lambda}$ sono le componenti contravarianti risp. covarianti dello stesso versore $e_a = \overline{e}_a$ di V_n. Tutto ciò vale naturalmente anche per i vettori E_a nella varietà $V_n^{(\rho)}$.

Osservazione II. Anche se i moltiplicatori ρ sono tutti costanti, le connessioni sono in generale distinte, ciò che risulta dalla (10). Infatti, la parte dell'affinore $T_{\lambda\mu}^{\nu}$, la quale dipende soltanto algebricamente dalle funzioni ρ

$$1/2 \sum_1^n{}_{k \neq l} \left(\frac{\rho_k^2}{\rho_l^2} - 1 \right) e_{k|}^{\nu} e_{k|}^{\alpha} \left(e_{l|\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}} e_{l|\alpha} + e_{l|\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^{\lambda}} e_{l|\alpha} - \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} e_{l|\lambda} e_{l|\mu} \right)$$

può scriversi anche

$$1/2 \sum_1^n{}_{k \neq l} \left(\frac{\rho_k^2}{\rho_l^2} - 1 \right) e_{k|}^{\nu} e_{k|}^{\alpha} \left[e_{l|\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}} e_{l|\alpha} - \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} e_{l|\mu} \right) + e_{l|\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{\lambda}} e_{l|\alpha} - \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} e_{l|\lambda} \right) \right],$$

donde segue che, essendo le ρ costanti e distinte, le connessioni V_n, $V_n^{(\rho)}$ coincidono soltanto se i vettori e_a sono gradienti.

4. Ogni scelta delle funzioni ρ ci conduce ad una connessione particolare. Vogliamo intanto indicarne qualche esempio, limitandoci a scelte, le quali posseggono una interpretazione geometrica espressiva.

Un primo modo semplice, per quanto particolare, di vincolare le ρ, è il seguente: Supponiamo che fra tutte le trasformazioni possibili delle coordinate ξ siano ammesse sollanto quelle, il cui jacobiano è costante. Sotto tale restrizione le espressioni $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}$, $\overset{o}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\alpha\mu}$ si comportano come componenti di vettori covarianti, i quali designeremo con $\overline{G}$, $\overline{g}$, ponendo

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} = G_{\mu}, \quad \overset{o}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\alpha\mu} = \overset{o}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\alpha} = g_{\mu}.$$

Ci proponiamo di trovare tutte le varietà $V_n^{(\rho)}$ per cui il vettore $\overline{G}$ risulta zero. Badando alle (9), (10), otteniamo

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} = G_{\mu} = g_{\mu} + T^{\alpha}_{\alpha\mu} = g_{\mu} - \frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} \log \rho_1 \dots \rho_n .$$

D'altra parte, in base alle (10), si ha

$$\overset{o}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\alpha\mu} = g_{\mu} = 1/2 \frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} \log g \qquad (g = \|g_{\lambda\mu}\|),$$

donde apparisce che è lecito porre

$$g_{\mu} = \frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} \log \rho_1 \dots \rho_n$$

o, il che è lo stesso,

$$\boxed{\sqrt{g} = \rho_1 \dots \rho_n}$$

e con tale scelta soddisfaciamo le condizioni che ogni G_{μ} si annulli.

5. Le condizioni prescritte nel numero precedente non ci forniscono le equazioni per *tutte* le funzioni ρ, cosicchè dovremo scegliere $n-1$ funzioni ρ in modo arbitrario.

Qui vogliamo indicare un procedimento intrinseco il quale ci fornirà tutti i moltiplicatori ρ, basandoci sulla nozione della divergenza vettoriale.

A tal uopo ricordiamo anzitutto il significato geometrico della divergenza vettoriale del versore tangente a una curva di una congruenza assegnata [1]. Essendo data una congruenza C di curve in una varietà riemanniana, ne scegliamo una generica c e su tale curva fissiamo due punti vicinissimi P, P', nonchè le giaciture π, π' [$(n-1)$-dimensionali] ortogonali a c nei punti P, P'. Per ogni punto Q vicinissimo a P nella giacitura π passa una delle curve

---

[1] Questa interpretazione geometrica della divergenza vettoriale è dovuta al sig. DUBOURDIER. Cfr.: *Sur les congruences des courbes.* « Rend. Acc. Lincei », vol. V, fasc. 4 (20 febbraio 1927) pp. 265-271.

della C la quale incontra la giacitura π' in un punto Q'. La congruenza C ci consente di stabilire così una corrispondenza fra π e π' la quale può essere riguardata come una deformazione infinitesimale H. Ora, designando con τ il volume di un elemento infinitesimale a $n-1$ dimensioni della π intorno al punto P, tale volume subisce per H una variazione $d\tau$, definita dall'equazione

$$\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{ds} = \operatorname{div} \boldsymbol{u},$$

essendo s l'arco metrico della c e $\boldsymbol{u}$ il suo versore tangente. Ne segue in particolare che per $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ la variazione è zero. Noi chiameremo, secondo CISOTTI [1], le congruenze, le cui curve soddisfano a tale equazione « congruenze solenoidali ».

Ciò posto, sceglieremo le funzioni ρ in tal modo che ognuna delle congruenze C_a $(a = 1,..., n)$ risulti *solenoidale*. In tal caso devono sussistere le equazioni

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\mu} E_{a|}{}^{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} E_{a|}{}^{\mu} = 0 \qquad (a = b,..., n)$$

le quali, in base alla (9), possono scriversi anche

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi^\mu} e_{a|}{}^{\mu} + \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\alpha\mu} e_{a|}{}^{\mu}\right) + e_{a|}{}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \log \rho_a - e_{a|}{}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \log \rho_1 \dots \rho_n = 0 \quad (a = 1,..., n). \tag{11}$$

Ora, designando con η_a la divergenza

$$\eta_a = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} e_{a|}{}^{\mu} + \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\alpha\mu} e_{a|}{}^{\mu},$$

(la quale può essere riguardata come assegnata) si ha per (11)

$$\eta_a = e_{a|}{}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \log \rho_1 \dots \rho_{a-1} \rho_{a+1} \dots \rho_n .$$

Per risolvere questa equazione ci occorre risolvere il sistema

$$\frac{d\xi^1}{e_{a|}{}^1} = \frac{d\xi^2}{e_{a|}{}^2} = \dots = \frac{d\xi^n}{e_{a|}{}^n} = \frac{d \log \rho_1 \dots \rho_{a-1} \rho_{a+1} \dots \rho_n}{\eta_a}. \tag{12}$$

D'altra parte, sappiamo che la congruenza C_a è definita dalle (6')

$$\frac{d\xi^1}{e_{a|}{}^1} = \frac{d\xi^2}{e_{a|}{}^2} = \dots = \frac{d\xi^n}{e_{a|}{}^n} = \frac{ds_a}{1}. \tag{6'}$$

---

[1] CISOTTI: *Sopra le congruenze rettilinee solenoidali.* « Rend. Acc. Lincei », vol. XIX, (20 marzo 1910) pp. 325-329.

Confrontando (6') con (12), risulta

$$d \log \rho_1 \cdots \rho_{a-1} \rho_{a+1} \cdots \rho_n = \eta_a ds_a. \tag{13}$$

Se si suppongono assegnate le ρ nei punti di una varietà σ a $n-1$ dimensioni che tagli tutte le C_a (che cioè non sia costituita da linee delle stesse C_a) basta una quadratura per ottenere dalla (13)

$$\frac{\rho_1 \cdots \rho_{a-1} \rho_{a+1} \cdots \rho_n}{\rho_1^{(\sigma)} \cdots \rho_{a-1}^{(\sigma)} \rho_{a+1}^{(\sigma)} \cdots \rho_n^{(\sigma)}} = e^{\int_0^{s_a} \eta_a ds_a}$$

dove l'integrale del secondo membro è calcolato lungo la C_a' (che passa per il punto generico che si vuol considerare), a partire dalla intersezione della stessa C_a colla σ.

Allora, ponendo

$$\varphi_a = \frac{1}{n-1}\left(-(n-2)\int_0^{s_a} \eta_a ds_a + \Sigma_{f \neq a} \int_0^{s_f} \eta_f ds_f\right),$$

si deduce dalle (13')

$$\boxed{\rho_a = \rho_a^{(\sigma)} e^{\varphi_a}}.$$

Vediamo così che con questo procedimento possiamo fissare in modo intrinseco tutte le funzioni ρ a meno di condizioni iniziali (o di portata equivalente) che rimangono tuttora arbitrarie, e che (nei casi singoli) si dovrebbero esaminare ulteriormente, per esaurire la discussione.

Ad ogni affinore P_λ^ν *il quale dà luogo a* n *congruenze invarianti* C_a *può associarsi univocamente (a meno di condizioni iniziali) una connessione riemanniana, nella quale ognuna delle congruenze* C_a *risulta solenoidale.*

II.

6. Nei numeri precedenti abbiamo indicato criteri differenziali per scegliere le ρ nell'ipotesi che sia dato soltanto l'affinore P_λ^ν.

Qui vogliamo supporre che oltre a questo affinore P_λ^ν, sia data una connessione lineare generale non-metrica, cosicchè l'affinore P_λ^ν possa essere riguardato come assegnato *nella varietà* L_n (vedi § 1). Ne segue che in tal caso sarebbe artificiale di fare intervenire le ausiliare connessioni riemanniane $V_n^{(\rho)}$; ma è preferibile attenersi unicamente alla assegnata connessione lineare, ed unicamente in base ad essa, individuare le ρ mediante proprietà delle congruenze invarianti.

Designando con ∇_μ il simbolo della derivazione covariante nella L_n (vedi § 1) introdurremo i simboli

$$\Theta_a = E_{a|}{}^{\mu}\nabla_\mu, \quad \vartheta_a = e_{a|}{}^{\mu}\nabla_\mu, \tag{14}$$

con che

$$\Theta_a = \rho_a \vartheta_a. \tag{15}$$

Il vettore $\vartheta_a \boldsymbol{e}_b$ può essere messo sotto la forma

$$\vartheta_a \boldsymbol{e}_b = \sum_{1}^{n}{}_c \overset{o}{\Lambda}{}^c_{ba} \boldsymbol{e}_c, \tag{16}$$

essendo $\overset{o}{\Lambda}{}^c_{ba}$ i coefficienti, definiti dalle relazioni

$$\Lambda^c_{ba} = \left(e_{a|}{}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} e_{b|}{}^{\nu} + \overset{o}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} e_{a|}{}^{\mu} e_{b|}{}^{\lambda}\right) e_{c.}{}^{\nu} \text{ (1)}.$$

Dall'ennupla e si deduce l'ennupla generale mediante (5), (5'). Portando tali valori nella (16) e badando alla (15) si ricava

$$\frac{1}{\rho_a}\Theta_a \frac{1}{\rho_b} \boldsymbol{E}_b = \sum_{1}^{n}{}_c \overset{o}{\Lambda}{}^c_{ba} \frac{1}{\rho_c} \boldsymbol{E}_c,$$

donde segue l'equazione

$$\Theta_a \boldsymbol{E}_b = \rho_a \rho_b \sum_{1}^{n}{}_c \left(\overset{o}{\Lambda}{}^c_{ba} \frac{1}{\rho_c} - \delta_{bc} \vartheta_a \frac{1}{\rho_c}\right) \boldsymbol{E}_c, \tag{17}$$

la quale può scriversi anche (per $f \neq b$)

$$\Theta_a \boldsymbol{E}_b = \rho_a(\overset{o}{\Lambda}{}^b_{ba} + \vartheta_a \log \rho_b) \boldsymbol{E}_b + \rho_a \rho_b \Sigma_{f \neq b} \overset{o}{\Lambda}{}^f_{ba} \frac{1}{\rho_f} \boldsymbol{E}_f. \tag{17'}$$

Ora fisseremo i coefficienti in tal modo che per ogni $a = b$ il vettore $\Theta_a \boldsymbol{E}_a$ sia contenuto nella giacitura dei vettori $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \ldots \boldsymbol{E}_{a-1}, \boldsymbol{E}_{a+1}, \ldots \boldsymbol{E}_n$ ciò che rappresenta una condizione intrinseca. Ponendo $a = b$ nella (17) si ottiene (per $f \neq a$)

$$\Theta_a \boldsymbol{E}_a = \rho_a(\overset{o}{\Lambda}{}^a_{aa} + \vartheta_a \log \rho_a) \boldsymbol{E}_a + \rho_a^2 \Sigma_{f \neq a} \overset{o}{\Lambda}{}^f_{aa} \frac{1}{\rho_f} \boldsymbol{E}_f.$$

(1) Questa equazione segue subito dalla posizione

$$\vartheta_a e_{b.}{}^{\nu} = \sum_{1}^{n}{}_c \overset{o}{\Lambda}{}^c_{ba} e_{c.}{}^{\nu} = e_{a|}{}^{\mu} \nabla_\mu e_{b|}{}^{\nu}.$$

Allora, per soddisfare la nostra condizione, basta porre

$$-\overset{o}{\Lambda}{}^{a}_{aa} = \vartheta_a \log \rho_a$$

o, il che è lo stesso

$$-\overset{o}{\Lambda}{}^{a}_{aa} = e_{a}{}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}} \log \rho_a .$$

Per risolvere questa equazione, ci occorre risolvere in primo luogo il sistema

$$\frac{d\xi^1}{e_{a|}{}^1} = \frac{d\xi^2}{e_{a|}{}^2} = \ldots = \frac{d\xi^n}{e_{a|}{}^n} = -\frac{d \log \rho_a}{\overset{o}{\Lambda}{}^{a}_{aa}} .$$

D'altra parte, si ha il sistema (6'), il quale definisce la congruenza C_a. Confrontando entrambi i sistemi si ricava

$$d \log \rho_a = -\overset{o}{\Lambda}{}^{a}_{aa} ds_a ,$$

donde segue, introducendo, come al numero precedente, una superficie σ che seghi tutte le C_a, ed i valori $\rho_a^{(\sigma)}$ delle ρ su tale superficie:

$$\boxed{\rho_a = \rho_a^{(\sigma)} e^{-\int_0^{s_a} \overset{o}{\Lambda}{}^{a}_{aa} ds_a}}$$

e tale scelta risolve il nostro problema.

7. Un'altra scelta delle funzioni ρ si presenta nella ricerca degli « archi affini » di curve delle congruenze $C_1, \ldots, C_n$. Ho già avuto occasione di mostrare l'esistenza di tal arco, studiando le proprietà differenziali delle curve in una varietà L_n (¹).

Essendo data una curva qualsiasi C in una L_n mediante le equazioni parametriche $\xi^\nu = \xi^\nu(t)$, si introduce in primo luogo il vettore tangente $u_{1|}{}^{\nu} = \frac{d\xi^\nu}{dt}$ nonchè i vettori derivati

$$u_{1|}{}^{\mu} \nabla_{\mu} u_{x-1|}{}^{\nu} = u_{x|}{}^{\nu}, \qquad (x = 2, \ldots, n).$$

(¹) Cfr. HLAVATY: *Proprietà differenziali delle curve in uno spazio a connessione lineare generale.* (« Rendiconti Palermo », in corso di stampa) nonchè: *Ancora sulle proprietà differenziali....* (« Rendiconti Palermo », in corso di stampa).

Se i vettori $u_1, \dots, u_n$ risultano linearmente indipendenti, designeremo con $\Omega \neq 0$ il determinante dell'ennupla $u_1, \dots, u_n$. L'arco affine s è definito mediante la posizione

$$s = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\Omega}{(\Omega)_0} e^{\int_{t_0}^{t} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} u_1{}^{\mu} dt} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} dt, \qquad (\Omega)_0 = (\Omega)_{t=t_0}$$

o, il che è lo stesso,

$$\frac{ds}{dt} = \left(\frac{\Omega}{(\Omega)_0} e^{\int_{t_0}^{t} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} u_1{}^{\mu} dt} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

Ora, designando con Ω_a il determinante dei vettori

$$e_a, \quad \vartheta_a e_a, \quad \vartheta_a^2 e_a, \dots, \quad \vartheta_a^{n-1} e_a,$$

(da supporsi linearmente indipendenti) associati alle curve della congruenza C_a, l'arco affine $S_{(a)}$ delle curve di tale congruenza è definito dalla relazione

$$\frac{dS_{(a)}}{ds_a} = \left(\frac{\Omega_a}{(\Omega_a)_0} e^{\int_{(s_a)_0}^{s_a} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} e_1{}^{\mu} ds_a} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

Ciò posto, prendiamo in considerazione le equazioni (6'), (6''). Da esse risulta che i parametri s_a e S_a sono legati dall'equazione

$$\frac{dS_a}{ds_a} = \frac{1}{\rho_a}$$

È naturale di scegliere ρ_a in tal modo che il parametro S_a risulti come arco affine: per ciò basta porre

$$\boxed{\rho_a = \left(\frac{\Omega_a}{(\Omega_a)_0} e^{\int_{(s_a)_0}^{s_a} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} e_1{}^{\mu} ds_a} \right)^{-\frac{2}{n(n+1)}}}.$$

I coefficienti ρ risultano così definiti intrinsecamente. Come nel caso precedente, anche qui il vettore $\Theta_a E_a$ è combinazione lineare dei vettori $E_1, \dots, E_{a-1}, E_{a+1}, \dots, E_n$.

Osservazione. Questo criterio fornisce per i moltiplicatori una espressione formalmente analoga a quella indicata nel numero precedente. Vale la pena di rilevare che, mentre la prima fa intervenire soltanto elementi differenziali del primo ordine, spettanti alle congruenze C_a, quest'ultima implica invece elementi differenziali fino all'ordine n.

8. Illustriamo infine i nostri risultati dal punto di vista della teoria degli invarianti. Da quanto abbiamo visto, si può desumere il sistema completo degli invarianti algebrici e differenziali spettanti al nostro affinore P^{ν}_{λ}. I primi si riducono alle n radici distinte $\omega_a \neq 0$ $(a = 1, \ldots, n)$ dell'equazione caratteristica, nonchè alle n direzioni *unite*, linearmente indipendenti, spiccate da ogni punto dello spazio ambiente.

Fra gli invarianti differenziali vanno annoverati sia quelli che si deducono dalle ω, sia quelli che esprimono proprietà intrinseche delle n congruenze C_a di curve, definite dalle direzioni unite. I vettori tangenti e_a di tali curve sono determinati a meno dei fattori a priori arbitrari ρ_a, il che ci consente di associare al nostro affinore una infinità di connessioni riemanniane $V^{(\rho)}_n$, tali cioè che le congruenze aventi $\rho_a e_a$ per *versori* tangenti, risultano ortogonali in ciascuna delle $V^{(\rho)}_n$. Le connessioni $V^{(\rho)}_n$ non possono ancora essere riguardate come invarianti differenziali (nel senso di RICCI) dell'affinore P^{ν}_{λ}, perchè intervengono n funzioni ρ_a del posto (a priori arbitrarie) che non figurano tra i dati della questione. Tuttavia è possibile fare di queste ρ_a una scelta con criteri intrinsechi.

In particolare, per esempio, si può convenire di assumere le ρ_a in modo (ben definito a meno di condizioni iniziali) che nella connessione $V^{(\rho)}_n$ corrispondente, le n congruenze ortogonali C_a risultino *solenoidali* (¹).

Di qua risulta che per l'affinore P^{ν}_{λ} il sistema completo di invarianti (algebrici e differenziali) fino ad un assegnato ordine m è costituito:

1°) dagli invarianti differenziali (fino all'ordine m incluso) spettanti in $V^{(\rho)}_n$ all'ennupla di congruenze *solenoidali*.

2°) dalle derivate delle ω_a (fino all'ordine m incluso) secondo gli archi metrici delle stesse C_a.

(¹) Confrontando tali risultati coi risultati classici di RICCI, vediamo che (per $n > 1$) l'affinore P^{ν}_{λ} di rango n dà luogo ad un numero maggiore di invarianti differenziali che non il classico tensore $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$ (dello stesso rango), ciò che si spiega con il fatto che l'affinore P^{ν}_{λ} ha n^2 elementi, mentre il tensore $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$ ne ha soltanto $n\frac{n+1}{2}$, e si ha per $n > 1$, $n^2 > n\frac{n+1}{2}$.

Che se, già inizialmente si suppone l'affinore P^{ν}_{λ} associato ad una connessione lineare generale di coefficienti $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$, allora la impostazione della ricerca completa degli invarianti potrebbe utilmente riattaccarsi a quanto precede, tenendo conto dei risultati esaurienti, precedentemente ottenuti dai sigg. T. Y. THOMAS e A. D. MICHEL a proposito delle connessioni lineari (1).

Mi riservo di approfondire questo argomento in una prossima occasione.

---

(1) T. Y. THOMAS-ARISTOTLE D. MICHEL : *Differential invariants of affinely connected manifolds.* (« Annals of Mathematics, vol. 28, n. 2, pp. 196-236). Cfr. anche O. VEBLEN : *Invariants of quadratic differentialforms.* (« Cambridge University Press », London, 1927).