Sui gruppi di corrispondenze $(2, 2)$ sopra una curva algebrica.

Memoria di GUIDO ASCOLI (a Torino).

Il concetto di gruppo di operazioni nella sua forma ordinaria può estendersi alle operazioni non aventi risultato unico, e in particolare alle corrispondenze non univoche tra i punti di una curva algebrica. Ma tale estensione non sembra di grande interesse, principalmente perchè in un gruppo così costruito debbono trovarsi corrispondenze con indice (numero dei corrispondenti di un elemento) grande a piacere.

Nella presente Memoria mostrerò come, per le corrispondenze su una curva algebrica, si possa, in modo assai semplice, modificare il concetto di gruppo, conservando di questo le note essenziali, ma rendendo possibile di evitare l'accrescimento indefinito degli indici. Della nuova definizione darò poi subito un'applicazione trattando il problema che primo si presenta nel nuovo ordine di idee e cioè la costruzione dei gruppi di corrispondenze aventi indici non superiore a 2 (e che risultano composti solo di corrispondenze $(1, 1)$ e $(2, 2)$). Mi sembra notevole il risultato cui giungo in questa parte del lavoro: e cioè la possibilità di ottenere sempre siffatti gruppi trasformando mediante una corrispondenza $(1, 2)$ o una $(2, 1)$, esistente tra una certa curva W e la curva data C , un gruppo di corrispondenze birazionali tra i punti della W .

Le ultime pagine della Memoria sono dedicate principalmente al caso delle curve razionali, sulle quali si determinano immediatamente i gruppi di corrispondenze $(2, 2)$ ricorrendo a una W razionale od ellittica. Donde, nel secondo caso, che è il più interessante, un prevedibile legame con la teoria delle funzioni ellittiche; esso si manifesta nella forma più semplice in quanto i gruppi di $(2, 2)$ propriamente discontinui risultano finiti, ed ammettono come funzioni invarianti fondamentali (le analoghe delle ordinarie funzioni poliedriche) le funzioni razionali con cui si opera la trasformazione dei periodi nella $\mathcal{P}(n)$ ellittica.

Risulta così che questi nuovi gruppi non conducono ad un ampliamento essenziale della teoria delle funzioni automorfe; ciò che vale probabilmente anche nei casi più elevati.

Il metodo usato per i gruppi di (2, 2) è suscettibile di parziale estensione anche ai casi superiori; ma presenta allora difficoltà che non sono sinora riuscito a superare. Si ottengono bensì facilmente gruppi di struttura analoga a quella dei gruppi di (2, 2) qui determinati; però non sembra che essi possano esaurire tutti i casi possibili.

L'argomento della presente Memoria non risulta aver formato oggetto di precedenti ricerche; qualche raffronto può farsi però tra alcuni particolari della trattazione e risultati di vari Autori; si veda su ciò la Nota bibliografica in fine del lavoro.

I. Gruppi di corrispondenze su una curva algebrica.

1. Poniamo a base delle nostre considerazioni una varietà algebrica irriducibile $\approx^1$, ad esempio una curva algebrica C , e le trasformazioni algebriche della varietà in sè, o, ciò che è sostanzialmente lo stesso, le corrispondenze algebriche tra gli elementi della varietà. Riteniamo noto tutto ciò che riguarda le operazioni di *somma* e *prodotto* di corrispondenze, come pure la nozione di *riducibilità* delle corrispondenze (¹).

Come di consueto, diremo (*primo*) *indice* di una corrispondenza il numero dei punti che essa, operando in senso diretto, fa corrispondere a un punto generico della curva. *Secondo indice* potrà dirsi l'indice della corrispondenza inversa.

2. Un aggregato G di corrispondenze in una curva C si dirà un *gruppo*, se, prese due corrispondenze S e T nell'aggregato, ogni parte irriducibile del prodotto ST è anche parte (irriducibile) di una corrispondenza U dell'aggregato.

Questa definizione conserva evidentemente ciò che si considera come il carattere essenziale della nozione ordinaria di *gruppo*. Se infatti l'elemento P è mutato da S in P' e questo da T in P'' , esiste una parte irriducibile di ST che muta P in P'' , e quindi una certa corrispondenza U di G che muta

(¹) Si veggia per questo il recente trattato di P. SEVERI: *Trattato di Geometria Algebrica* (vol. I, parte 1^a, Zanichelli, Bologna, 1926) di cui seguiamo la nomenclatura e le notazioni: in particolare il cap. IV, § 2, ove i concetti suindicati vengono ricondotti ai concetti generali della teoria delle varietà algebriche, in quanto le corrispondenze vengono identificate a varietà subordinate alla varietà delle coppie dell'ente algebrico. Il Capitolo contiene anche un'ampia bibliografia.

pure P in P'' . In altri termini, introdotta anche per questi gruppi la nozione di elementi *equivalenti* rispetto ad un gruppo, si può ancora affermare che la relazione di equivalenza è *transitiva*.

Alla definizione di gruppo si può dare anche la seguente forma, indipendente dal concetto di *parte irriducibile*: G è un gruppo se il prodotto di due corrispondenze di G è contenuto in una somma di corrispondenze (distinte o no) di G . Si verifica infatti facilmente l'equivalenza delle due definizioni.

3. Dall'una o dall'altra delle precedenti definizioni segue che se due aggregati G e G' di corrispondenze tra i punti di C sono tali che ogni parte irriducibile di una corrispondenza di G è parte (irriducibile) di una corrispondenza di G' , e viceversa, e G è un gruppo, anche G' è un gruppo.

Considereremo due gruppi siffatti come non essenzialmente distinti. In particolare, un gruppo potrà sempre ridursi a contenere solo corrispondenze irriducibili, e ciò in un modo solo. In quest'ultimo caso la proprietà grupitale prende la forma seguente: il prodotto di due corrispondenze di G è somma di corrispondenze, distinte o no, di G .

4. **Gruppi finiti.** — Come facile esemplificazione, non priva tuttavia di un certo interesse, tratteremo brevemente dei gruppi contenenti corrispondenze $S_1, S_2, \dots, S_n$, in numero finito.

Le S_i potranno suppersi irriducibili; si indicherà con s_i l'indice di S_i .

Sussisteranno allora formule del tipo

$$S_i S_j = \sum_k \gamma_{ijk} S_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

dove i γ_{ijk} saranno interi positivi o nulli ⁽¹⁾.

Sia P un punto generico di C , $Q_1, Q_2, \dots, Q_h$ i suoi equivalenti rispetto a G ($h=s_1+s_2+\dots+s_n$); essendo le S_i distinte e irriducibili, essi saranno tutti distinti. Lo stesso potrà dirsi per gli equivalenti di uno dei Q_i , i quali perciò, dovendo essere in numero di h ed equivalenti anche a P , coincideranno con i Q_i stessi. Sicchè i Q_i sono tra loro equivalenti, cioè l'equivalenza è anche proprietà *riflessiva* e *simmetrica*: *un gruppo finito contiene sempre l'identità e l'inversa di ogni sua corrispondenza*.

⁽¹⁾ Notiamo di passaggio che ad ogni gruppo finito di corrispondenze viene così ad associarsi una particolare *algebra*, costituita dagli elementi della forma $\sum c_i S_i$, ove i c_i possono suppersi elementi del corpo razionale o di altro corpo più ampio.

Segue anche che uno dei punti Q_i determina l'intero gruppo, sicchè i punti equivalenti rispetto a un gruppo finito descrivono un'involuzione ⁽¹⁾.

Sia I quest'involuzione, $H = \Sigma S_i$ la corrispondenza che ad un punto di C associa il gruppo di I che passa per esso.

Si ha subito, per una data S_r :

$$S_r H = s_r H;$$

infatti ad un punto P di C corrispondono in S_r certi s_r punti, appartenenti al gruppo di I che passa per P , e a questi, in H , il gruppo stesso, contato s_r volte.

Prendendo le inverse dei due membri, e detta S_t l'inversa di S_r , che appartiene anch'essa al gruppo G , otteniamo:

$$H S_t = s_r H;$$

dovranno allora essere uguali gli indici dei due membri, cioè $h s_t = s_r h$, $s_t = s_r$: le corrispondenze di un gruppo finito sono tutte ad indici uguali, ossia del tipo (m, m) .

Segue anche $H S_t = s_t H$. Le relazioni trovate, che possono scriversi anche

$$\sum_i S_r S_i = s_r \Sigma S_i, \quad \sum_i S_i S_r = s_r \Sigma S_i$$

e l'altra che se ne deduce sommando rispetto ad r :

$$\sum_{i,r} S_i S_r = \sum_i s_i \Sigma S_r$$

costituiscono altrettante proprietà interessanti del quadro di moltiplicazione del gruppo G .

5. Inversamente, sia ora I un'involuzione semplicemente infinita di punti di C , di ordine h , e H la corrispondenza (h, h) che associa ad ogni punto di C il gruppo di I che lo contiene. Le parti irriducibili di H costituiscono un gruppo.

Ciò risulta nel modo più completo osservando che si ha evidentemente

$$H^2 = hH$$

⁽¹⁾ La conclusione è immediatamente estendibile ad ogni gruppo infinito contenente l'identità e l'inversa di ogni sua corrispondenza, nel senso che un punto di C determina tutti i suoi equivalenti. Nel caso di un gruppo discontinuo si potrà parlare allora di un'involuzione (trascendente), di ordine infinito, i cui gruppi saranno costituiti da un'infinità discreta di punti distinti.

ossia, essendo $S_1, S_2, \dots, S_n$ le parti irriducibili di H :

$$\sum_{i,j} S_i S_j = h \sum_k S_k.$$

Da ciò risulta che ciascuno dei prodotti $S_i S_j$ è somma di alcune S_k , ossia che le S_i formano un gruppo.

In tal modo ad ogni gruppo finito di corrispondenze viene associata una involuzione semplicemente infinita, e viceversa. Ciò non sembra però di grande utilità per lo studio dei gruppi finiti; generalmente infatti la H si spezzerà nell'identità e in una $(h-1, h-1)$ S , irriducibile, caso di nessun interesse. Non sembra facile indagare direttamente quando la S presenti casi di riducibilità.

Si può ad ogni modo osservare che, oltre che nel caso della involuzione costituita dai cicli di un gruppo di trasformazioni birazionali di C in sè, si ottiene una S riducibile quando l'involuzione I sia composta con un'altra involuzione I' . In tal caso la H contiene la H' corrispondente alla I' , la quale H' è a sua volta riducibile; sicchè il gruppo contiene allora almeno tre corrispondenze. E si potrebbe proseguire su questa via.

Giova però avvertire, per l'interesse da attribuire alle presenti ricerche, che tali casi sono ben lontani da esaurire tutte le possibilità, come potrà vedersi dallo studio dei gruppi di corrispondenze (2, 2) a cui è dedicata la parte principale della Memoria.

Il legame dei gruppi finiti con le involuzioni prende forma particolarmente semplice nel caso di una curva C razionale. L'involuzione I è in tal caso una serie lineare g_h^1 formata dai gruppi di livello di una funzione razionale

$$F(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

e l'equazione della corrispondenza H prende la forma $F(x) = F(y)$ cioè

$$\alpha(x)\beta(y) - \alpha(y)\beta(x) = 0.$$

La costruzione dei gruppi finiti viene così ridotta alla decomposizione in fattori irriducibili di un polinomio della forma $\alpha(x)\beta(y) - \alpha(y)\beta(x)$. La funzione razionale $F(x)$ assume l'ufficio di *funzione invariante* fondamentale per il gruppo ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ In particolare, la determinazione dei gruppi finiti di sostituzioni lineari viene ridotta alla ricerca dei polinomi del tipo indicato decomponibili in fattori bilineari: formulazione più curiosa certo che utile che non trovo notata dai vari Autori.

6. Gruppi con indici limitati. — Tra i gruppi di corrispondenze, sembrano dotati di maggior interesse quelli nei quali i due indici di ogni corrispondenza non superano mai un certo intero N . I gruppi finiti ne sono l'esempio più semplice.

Si può assegnare una semplice proprietà di questi gruppi, già verificata per i gruppi finiti: *In un gruppo con indici limitati ogni corrispondenza è ad indici uguali.*

In un tale gruppo esista una corrispondenza (p, q) , e sia S , ove è $p \neq q$. Se N è l'indice massimo del gruppo, le potenze S^r per r abbastanza grande, dovranno essere riducibili, e precisamente spezzarsi in termini T_i di indici α_i, β_i non superiori ad N . Sia

$$S^r = T_1 + T_2 + \dots + T_k$$

e quindi

$$p^r = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k, \quad q^r = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k.$$

Poichè $1 \leq \alpha_i \leq N, 1 \leq \beta_i \leq N$, risulta:

$$k \leq p^r \leq kN, \quad k \leq q^r \leq kN$$

e quindi

$$\frac{1}{N} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^r \leq N.$$

Ora ciò non può valere per ogni r , nell'ipotesi posta $p \neq q$: chè può scegliersi un r tale che sia $(p/q)^r > N$ se $p > q$; $(p/q)^r < 1/N$ se $p < q$. È dunque $p = q$ come si era asserito.

II. Gruppi di corrispondenze (2, 2) sopra una curva algebrica.

7. Per l'ultimo teorema dimostrato (n.º 6) i gruppi di corrispondenze tra punti di una curva algebrica, aventi indici (primo e secondo) non superiore a 2, potranno contenere soltanto corrispondenze (1, 1) e corrispondenze (2, 2). Escludendo naturalmente che un gruppo contenga solo corrispondenze biunivoche, useremo brevemente la locuzione « gruppi di corrispondenze (2, 2) » per indicare un gruppo che contenga (2, 2) irriducibili, ed eventualmente delle (1, 1).

In un simile gruppo, il prodotto di una (1, 1) per una (2, 2), o viceversa, è ancora una (2, 2) del gruppo; invece il prodotto di due (2, 2) del gruppo, essendo una (4, 4), non sarà contenuto nel gruppo, ma vi saranno contenute le sue parti irriducibili; queste dovranno dunque essere delle (1, 1) o delle (2, 2).

Si riconosce dunque la necessità di uno studio accurato dei casi di riducibilità del prodotto di due corrispondenze (2, 2); il problema presentando per sé un certo interesse, cercheremo di darne una trattazione esauriente, ferdando anche su qualche particolare che non sarebbe necessario ai fini del presente lavoro.

Premettiamo una distinzione nel campo delle (2, 2), semplice applicazione di un concetto generale, già noto per corrispondenze di indici qualunque ⁽¹⁾. Diremo che una corrispondenza (2, 2) tra due curve C, C' distinte oppur no, è *composta* se essa può essere generata da una corrispondenza biunivoca tra le coppie di un' involuzione di 2° ordine γ su C e quelle di un' involuzione di 2° ordine γ' su C' ; in altre parole, se ai punti di C corrispondono su C' coppie di γ' e ai punti di C' corrispondono su C coppie di γ . Si prova facilmente che una di queste condizioni porta di conseguenza l'altra; se infatti la (2, 2) S fa corrispondere al punto P di C la coppia $Q_1 Q_2$ di γ' , considerando il punto P' che insieme con P corrisponde a Q_1 nella S^{-1} e cercando i corrispondenti di P' in S , si troverà una coppia di γ' contenente Q_1 , e cioè la $Q_1 Q_2$. Sicchè P' è anche corrispondente di Q_2 in S^{-1} . Dopo ciò è chiaro che P determina razionalmente e in modo simmetrico P' , ossia le coppie PP' descrivono un' involuzione.

Resta anche così provato implicitamente che S è composta se per ogni elemento P esiste un elemento P' tale che P e P' hanno in S gli stessi corrispondenti.

Chiameremo talvolta *prima* e *seconda* involuzione di una (2, 2) composta le due involuzioni di 2° ordine tra le quali opera la S .

8. Riducibilità del prodotto di due corrispondenze (2, 2). — Si considerino tre curve algebriche C, C', C'' e due corrispondenze (2, 2) irriducibili, una, S , tra C e C' , l'altra, T , tra C' e C'' . Ci proponiamo di determinare i casi in cui la (4, 4) ST è riducibile. Proveremo anzitutto che:

Il prodotto ST può spezzarsi solo in uno dei modi seguenti:

- a) $ST = U + V$,
- b) $ST = 2\lambda + V$,
- c) $ST = 2U$,
- d) $ST = 2\lambda + 2\mu$,

dove U, V sono (2, 2) irriducibili distinte, λ, μ sono (1, 1) distinte.

⁽¹⁾ SEVERI, loc. cit., n. 68, pag. 215.

Sia infatti P un punto generico di C , Q_1, Q_2 i suoi corrispondenti in S , $R_{11}, R_{12}; R_{21}, R_{22}$ i corrispondenti di Q_1 e Q_2 in T . Ciò può rappresentarsi schematicamente nel modo seguente:

$$ST; P \begin{cases} Q_1 \rightarrow (R_{11}, R_{12}) \\ Q_2 \rightarrow (R_{21}, R_{22}). \end{cases}$$

Cominceremo a provare che ST non può contenere delle $(r, 1)$ o delle $(1, r)$ che non siano $(1, 1)$. Contenga infatti ST la $(r, 1)$ λ , la quale muti P , per esempio, in R_{11} . Considerando la λT^{-1} , essa muterà P in una coppia di elementi, uno dei quali è Q_1 ; ma anche S muta P in Q_1 (e Q_2) ed è irriducibile; dunque λT^{-1} contiene S . Ora λT^{-1} è una $(2r, 2)$ e S una $(2, 2)$; quindi è $r = 1$ (e $\lambda T^{-1} = S$).

Contenga invece ST una $(1, r)$; $T^{-1}S^{-1}$ conterrà una $(r, 1)$, e sarà ancora $r = 1$.

Segue di qui che ST non può contenere che $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(3, 3)$ irriducibili. Escluderemo l'ultimo caso, e cioè la decomponibilità di ST in una $(3, 3)$ irriducibile e in una $(1, 1)$ provando che se ST contiene una $(1, 1)$ contiene il suo doppio. Dopo ciò il teorema potrà dirsi completamente dimostrato.

Contenga ST la $(1, 1)$ λ la quale muti P in R_{11} ; come si è già visto, sarà $\lambda T^{-1} = S$ da cui $T\lambda^{-1} = S^{-1}$. Operando con i due membri su Q_2 , risulterà che uno degli elementi R_{21}, R_{22} , è mutato da λ^{-1} in P . Sia esso R_{21} ; allora λ muta P in R_{21} , ed è quindi $R_{21} = R_{11}$. Il prodotto ST contiene per ciò λ due volte, e la $(2, 2)$ residua non potrà più contenere λ , dovendo per questo essere $R_{12} = R_{11} \circ R_{22} = R_{21}$, contro l'ipotesi della irriducibilità di T . Dovrà quindi, se è riducibile, contenere un'altra $(1, 1)$ μ , anzi ridursi al suo doppio.

9. Mantenendo le precedenti notazioni, proponiamoci di vedere come gli elementi R_{ik} , corrispondenti di P in ST , si ripartiscano tra le varie componenti di ST , nei vari casi di riducibilità di questo prodotto.

Ciò è immediato nei casi *b), c), d)* e i risultati possono simboleggiarsi nel modo seguente:

$$\begin{aligned} b) \quad ST &= 2\lambda + V; \quad \lambda; P \rightarrow R_{11}(=R_{21}); \quad V; P \begin{cases} R_{12} \\ R_{22} \end{cases}; \\ c) \quad ST &= 2U; \quad U; P \begin{cases} R_{11}(=R_{21}) \\ R_{12}(=R_{22}) \end{cases}; \\ d) \quad ST &= 2\lambda + 2\mu; \quad \lambda; P \rightarrow R_{11}(=R_{21}); \quad \mu; P \rightarrow R_{12}(=R_{22}). \end{aligned}$$

Vedremo che nel caso *a*) la ripartizione è la seguente :

$$a) \quad ST = U + V; \quad U; P \begin{matrix} \nearrow R_{11} \\ \searrow R_{21} \end{matrix}; \quad V; P \begin{matrix} \nearrow R_{12} \\ \searrow R_{22} \end{matrix}$$

dove, come del resto negli altri casi, si è scritta una sola delle ripartizioni possibili, le altre essendo sostanzialmente identiche. Basterà che escludiamo l'altra ripartizione :

$$U; P \begin{matrix} \nearrow R_{11} \\ \searrow R_{12} \end{matrix}; \quad V; P \begin{matrix} \nearrow R_{21} \\ \searrow R_{22} \end{matrix}$$

dove gli R_{ik} , essendo U e V distinte e irriducibili, sono tutti distinti.

Consideriamo infatti la UT^{-1} ; in essa tra i corrispondenti di P compare due volte Q_1 , mentre in S , che è irriducibile, P ha per corrispondenti Q_1 e Q_2 . Ne segue $UT^{-1} = 2S$ e $TU^{-1} = 2S'$. Applicando i due membri a Q_2 , risulta che P corrisponde in U^{-1} sia a R_{21} che a R_{22} , cioè che U muta P in R_{21} , R_{22} . È allora $U = V$ contro l'ipotesi.

La ripartizione esclusa è invece caratteristica del caso *c*).

10. Ci sarà utile ora la considerazione della *curva* (o, in generale, *varietà*) di corrispondenza relativa ad una data corrispondenza S tra due curve C , C' . Come è noto ⁽¹⁾, si dà tale nome alla curva $[S]$, determinata a meno di trasformazioni birazionali, nei punti della quale si rappresentano biunivocamente le coppie costituite da un punto P di C e da un punto Q di C' , corrispondenti in S . Se S è irriducibile, tale è anche $[S]$; e se S è una $(2, 2)$, tra i punti di C e di $[S]$, come pure tra i punti di C' e di $[S]$, intercedono due corrispondenze $(1, 2)$ poichè un punto di C (o di C') ha due corrispondenti su C' (o su C) e dà quindi luogo a due punti di $[S]$. Queste due corrispondenze potranno opportunamente indicarsi con i simboli α_S , $\alpha_{S^{-1}}$, e si ha subito

$$S = \alpha_S \alpha_{S^{-1}}.$$

Se, come si è supposto nelle considerazioni precedenti, si hanno due corrispondenze $(2, 2)$, una S tra C e C' , una T tra C' e C'' , nascerà tra le curve

⁽¹⁾ Cfr. SEVERI, loc. cit., n. 61, ove, come si è avvertito, il concetto è posto a base della definizione stessa di corrispondenza. È da avvertire che la considerazione delle varietà di corrispondenza risale al SEGRE (*Introduzione alla Geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*. « Ann. di Mat. », (2), t. 22, 1894) che la diede in forma astratta, mentre se ne deve al BERTINI un semplice modello proiettivo.

di corrispondenza $[S]$, $[T]$ la corrispondenza (2, 2) espressa da $\alpha_{S-1}^{-1}\alpha_T$. Il suo significato è chiaro: se P è un punto di C , Q un suo corrispondente in S , R' , R'' i corrispondenti di Q in T , la (2, 2) considerata fa corrispondere al punto (PQ) di $[S]$ i punti (QR') , (QR'') di $[T]$. Diremo brevemente che essa è la (2, 2) *subordinata* dalla coppia di corrispondenze S , T tra le rispettive curve di corrispondenza.

Se, dopo ciò, riprendiamo a considerare il caso *a)* di riducibilità, schematicamente rappresentato da:

$$ST = U + V,$$

$$ST; P \begin{cases} Q_1 \rightarrow (R_{11}, R_{12}) \\ Q_2 \rightarrow (R_{21}, R_{22}) \end{cases}, \quad U; P \begin{cases} R_{11} \\ R_{21} \end{cases}, \quad V; P \begin{cases} R_{12} \\ R_{22} \end{cases}$$

vediamo che, noti P e Q_1 , è determinato razionalmente R_{11} , come *unico* elemento di C'' che è insieme corrispondente di P in U e di Q_1 in T ; e così R_{12} . Sicchè il punto (PQ_1) di $[S]$ determina razionalmente i punti (Q_1R_{11}) , (Q_1R_{12}) di $[T]$ e la (2, 2) subordinata da S e T tra le rispettive curve di corrispondenza risulta riducibile.

Come subito si riconosce, lo stesso può dirsi nei casi *b)* e *d)*.

Il risultato può invertirsi: se la detta (2, 2) tra $[S]$ e $[T]$ è riducibile, e si ha cioè

$$\alpha_{S-1}^{-1}\alpha_T = \beta + \gamma$$

dove β e γ sono (1, 1), sarà

$$ST = (\alpha_S \alpha_{S-1}^{-1})(\alpha_T \alpha_{T-1}^{-1}) = \alpha_S(\beta + \gamma)\alpha_{T-1}^{-1} = \alpha_S\beta\alpha_{T-1}^{-1} + \alpha_S\gamma\alpha_{T-1}^{-1},$$

e ST si spezzerà in due (2, 2).

La deduzione precedente non vale per la riducibilità di tipo *c)*, per la quale infatti il fatto stesso non sussiste. Se però si osserva il relativo schema:

$$ST = 2U,$$

$$ST; P \begin{cases} Q_1 \rightarrow (A, B) \\ Q_2 \rightarrow (A, B) \end{cases}, \quad U; P \begin{cases} A \\ B \end{cases}$$

si riconoscerà subito che S e T sono composte e che la seconda involuzione di S coincide con la prima di T . Ed infatti T è composta perchè in essa Q_1 e Q_2 hanno gli stessi corrispondenti (n.° 7), e $(Q_1, Q_2)(A, B)$ descrivono la sua prima e seconda involuzione; e S è allora composta perchè i corrispondenti di P descrivono un'involuzione, che è la seconda di S e la prima di T . La deduzione è applicabile anche al caso *d)*.

Viceversa, se si hanno su C, C', C'' le involuzioni di 2° ordine $\gamma, \gamma', \gamma''$ e S è composta con γ e γ' , T con γ' e γ'' , si vedrà subito che ST risulta il doppio di una corrispondenza U , composta con γ e γ'' , ed eventualmente riducibile.

Si presentano dunque come possibili due soli tipi di riducibilità: uno (α), caratteristico dei casi $a)$ e $b)$, uno (β) che avviene invece nel caso $c)$; nel caso $d)$ i due tipi si verificano insieme.

Concludiamo: se S e T sono corrispondenze (2, 2) irriducibili, la prima tra C e C' , la seconda tra C' e C'' , condizione necessaria e sufficiente affinché il prodotto ST sia riducibile è che avvenga uno almeno dei due fatti seguenti:

α) la corrispondenza (2, 2) che S e T subordinano tra le rispettive curve di corrispondenza $[S], [T]$ sia riducibile;

β) S e T siano composte, e la seconda involuzione di S coincida con la prima di T .

Se avviene il caso α) e non il β), ST si scinde in due (2, 2) distinte, una delle quali può ridursi al doppio di una (1, 1); se avviene il caso β) e non quello α), ST è il doppio di una (2, 2) irriducibile; se avvengono insieme i casi α) e β), ST si spezza nel doppio di una (1, 1) e nel doppio di un'altra (1, 1), distinta dalla prima.

11. In particolare, una (2, 2) irriducibile S tra i punti di una curva C avrà quadrato riducibile quando avvenga uno dei fatti seguenti:

α) la corrispondenza (2, 2) tra i punti di $[S]$, che si ottiene associando i punti del tipo $(PQ)(QR)$ è riducibile;

β) S è composta, ed opera tra le coppie di una involuzione di 2° ordine esistente su C .

Nel primo caso si può dare di S una notevole caratterizzazione. Si consideri lo schema di trasformazione relativo ad S^2 :

$$S^2; P \begin{cases} P_1 \searrow Q_1 \rightarrow (M_{11}, M_{12}) \\ P_1 \swarrow Q_2 \rightarrow (M_{21}, M_{22}) \end{cases}$$

nel quale abbiamo indicato anche l'elemento P_1 che insieme a P corrisponde a Q_1 in S^{-1} . Esiste una corrispondenza biunivoca σ tra i punti di $[S]$ che muta (PQ_1) in (Q_1M_{11}) ; essa muterà (P_1Q_1) in uno dei punti $(Q_1M_{11}), (Q_1M_{12})$, quindi necessariamente nel secondo. Ne segue subito, con le notazioni adottate:

$$\alpha_{S^{-1}} = \alpha_S \sigma^{-1}$$

come si vede operando coi i due membri su Q_1 . E poichè $S = \alpha_S \alpha_{S^{-1}}$, risulta

$$S = \alpha_S \sigma \alpha_S^{-1}.$$

Ponendo $\alpha_S^{-1} = \omega$, risulta

$$S = \omega^{-1} \sigma \omega$$

cioè S è trasformata di σ mediante la $(2, 1)$ ω operante tra $[S]$ ed S .

Viceversa, se σ è una $(1, 1)$ tra i punti di una curva W , ω una corrispondenza $(2, 1)$ tra W e la curva data C , ed S ha la forma indicata, S^2 è riducibile. Si ha infatti $\omega \omega^{-1} = 1 + \mu$, dove μ è la $(1, 1)$ sussistente su W tra i due corrispondenti di un punto di S , e quindi:

$$S^2 = \omega^{-1} \sigma \omega \omega^{-1} \sigma \omega = \omega^{-1} \sigma^2 \omega + \omega^{-1} \sigma \mu \sigma \omega.$$

Ma anche nel caso β) sussiste un fatto analogo. Si consideri infatti la curva W_1 in cui si rappresentano biunivocamente le coppie dell'involuzione γ con cui è composta la S ; tra W_1 e C intercederà una corrispondenza $(1, 2)$, e sia essa ω_1 . La S , d'altronde, come corrispondenza $(2, 2)$ composta con γ , induce su W_1 una corrispondenza biunivoca σ_1 , e si ha subito:

$$S = \omega_1^{-1} \sigma_1 \omega_1$$

e cioè S è la trasformata di σ_1 mediante ω_1 .

Viceversa, se sussiste una corrispondenza $(1, 2)$ ω_1 tra una certa curva W_1 e la data C , e σ_1 è una $(1, 1)$ tra i punti di W_1 , ed è $S = \omega_1^{-1} \sigma_1 \omega_1$, sarà:

$$S^2 = \omega_1^{-1} \sigma_1 \omega_1 \omega_1^{-1} \sigma_1 \omega_1 = 2(\omega_1^{-1} \sigma_1^2 \omega_1)$$

verificandosi subito che $\omega_1 \omega_1^{-1} = 2$.

Concludendo: *le corrispondenze (2, 2) irriducibili tra i punti di una curva C, a quadrato riducibile, sono, tutte e sole, quelle che possono ottenersi trasformando una corrispondenza biunivoca esistente su una curva W mediante una corrispondenza (1, 2) oppure una (2, 1) avente luogo tra la W e la curva data C.*

12. Costituzione dei gruppi di corrispondenze (2, 2). Studieremo anzitutto quei gruppi di corrispondenze $(2, 2)$ nei quali il prodotto di due $(2, 2)$ del gruppo presenta sempre il caso (α) di riducibilità, ciò che non esclude il contemporaneo verificarsi del caso (β) .

Si formi per il prodotto ST di due corrispondenze (2, 2) del gruppo il solito schema:

$$\begin{array}{c} P_1 \searrow \\ P \begin{cases} \nearrow Q_1 \rightarrow (R_{11}, R_{12}) \\ \searrow Q_2 \rightarrow (R_{21}, R_{22}) \end{cases} \end{array}$$

dove anche qui P_1 indica l'elemento che insieme a P corrisponde a Q_1 in S^{-1} . Come nel n.° 11, si vedrà che la corrispondenza biunivoca β che lega il punto (PQ_1) di $[S]$ col punto (Q_1R_{11}) di $[T]$ lega anche il punto (P_1Q_1) di $[S]$ col punto (Q_1R_{12}) di $[T]$. Ne segue

$$\alpha_T = \alpha_{S^{-1}}\beta$$

come si vede operando con i due membri su Q_1 .

In modo analogo, la supposta riducibilità di tipo (α) del prodotto TS porta a scrivere:

$$\alpha_S = \alpha_{T^{-1}}\gamma$$

dove γ è pure una (1, 1) tra $[T]$ e $[S]$, mentre per quella di S^2 si ha, come si è visto:

$$\alpha_{S^{-1}} = \alpha_S\sigma$$

dove σ è una (1, 1) tra i punti di $[S]$.

Ne segue:

$$T = \alpha_T\alpha_{T^{-1}}^{-1} = \alpha_{S^{-1}}\beta\gamma\alpha_S^{-1} = \alpha_S\sigma\beta\gamma\alpha_S^{-1}$$

cioè, posto $\alpha_S^{-1} = \omega$, $\sigma\beta\gamma = \sigma_T$:

$$T = \omega^{-1}\sigma_T\omega.$$

Tutte le (2, 2) del gruppo appaiono così come trasformate di corrispondenze biunivoche esistenti su una medesima curva $[S] = W$ mediante la (2, 1) ω esistente tra W e C . La precedente rappresentazione non è però unica: se ad una data σ_T corrisponde una determinata T , ogni T determina invece *quattro* σ_T , come può vedersi anche dalla deduzione esposta. In modo più diretto, si osservi che se si indica con μ la $\omega\omega^{-1} - 1$, cioè la (1, 1) involutoria che associa i due corrispondenti in ω di uno stesso elemento di C , si ha $\omega\mu = \omega$ e quindi da $T = \omega^{-1}\sigma_T\omega$ segue anche:

$$T = \omega^{-1}(\mu\sigma_T)\omega = \omega^{-1}(\sigma_T\mu)\omega = \omega^{-1}(\mu\sigma_T\mu)\omega$$

onde la T è rappresentata, oltre che da σ_T , anche da $\mu\sigma_T$, $\sigma_T\mu$, $\mu\sigma_T\mu$. E si verifica facilmente che sono queste le uniche rappresentazioni che ammette la T .

Vediamo ora se un'analogia rappresentazione ammettono le (1, 1) che eventualmente fossero contenute nel gruppo. Premettiamo un'osservazione. Se λ è una (1, 1) su W , la $\omega^{-1}\lambda\omega$ non può spezzarsi altrimenti che come doppio di una (1, 1). Se infatti si pone

$$\omega^{-1}\lambda\omega = \xi + \eta$$

dove ξ e η sono (1, 1) tra i punti di C , sarà

$$\xi^{-1}\omega^{-1}\lambda\omega = 1 + \xi^{-1}\eta,$$

cioè il prodotto della (1, 2) $\xi^{-1}\omega^{-1}$ per la (2, 1) $\lambda\omega$, ambedue irriducibili deve contenere l'identità. Si vedrà subito che ciò può avvenire solo se esse sono inverse, e in tal caso il loro prodotto vale 2. Ne viene $\xi^{-1}\eta = 1$, $\xi = \eta$.

Sia ora L una (1, 1) appartenente al nostro gruppo G : se S è la (2, 2) del gruppo, già considerata, anche $U = LS$ dovrà essere una (2, 2) irriducibile del gruppo. E si avrà perciò

$$S = \omega^{-1}\sigma_S\omega, \quad U = \omega^{-1}\sigma_U\omega$$

dove σ_U è una (1, 1) tra i punti di W . Ora si ha:

$$US^{-1} = LSS^{-1} = L(2 + X) = 2L + LX$$

dove X è una (2, 2), quindi sostituendo:

$$\omega^{-1}\sigma_U\omega\omega^{-1}\sigma_S^{-1}\omega = 2L + LX$$

ossia

$$\omega^{-1}(\sigma_U\sigma_S^{-1})\omega + \omega^{-1}(\sigma_U\mu\sigma_S^{-1})\omega = 2L + LX.$$

Ed allora, per quanto si è prima osservato, si può affermare che una delle (2, 2) del primo membro vale $2L$. Sicchè sostituendo nel gruppo (1, 1) L con il suo doppio, può dirsi che anche questa speciale (2, 2) è trasformata di una (1, 1) di W mediante la ω .

Siamo ora in grado di dedurre il risultato finale di questa parte della nostra ricerca. Si ha anzitutto: *Sulla W , le corrispondenze biunivoche corrispondenti alle (2, 2) del gruppo G (quattro per ogni (2, 2)) costituiscono un gruppo.* Ed infatti se U, V sono corrispondenze di G , e si ha:

$$UV = X + Y$$

dove X e Y sono elementi di G , ed eventualmente doppi di (1, 1), si ha:

$$X + Y = (\omega^{-1}\sigma_U\omega)(\omega^{-1}\sigma_V\omega) = \omega^{-1}(\sigma_U\sigma_V)\omega + \omega^{-1}(\sigma_U\mu\sigma_V)\omega.$$

I due termini del primo membro coincideranno, in un certo ordine, con quelli del secondo; e se, per esempio, sarà

$$X = \omega^{-1}(\sigma_U \sigma_V) \omega$$

e d'altra parte, X appartenendo a G :

$$X = \omega^{-1} \sigma_X \omega$$

avremo

$$\sigma_U \sigma_V = \sigma_X, \text{ oppure } = \mu \sigma_X, \text{ oppure } \sigma_X \mu, \text{ oppure } = \dot{\mu} \sigma_X \mu$$

e cioè $\sigma_U \sigma_V$ sarà uguale a una delle quattro (1, 1) corrispondenti ad X .

Viceversa, se si ha su W un gruppo Γ di corrispondenze biunivoche tale che, λ appartenendo a Γ , vi appartengano anche $\lambda\mu$, $\mu\lambda$, $\mu\lambda\mu$, l'aggregato

$$G = \omega^{-1} \Gamma \omega$$

di corrispondenze (2, 2) sulla C è ancora un gruppo. La verifica è immediata.

Se ci limitiamo, come si fa ordinariamente, ai gruppi contenenti l'identità e l'inversa di ogni loro corrispondenza, l'enunciato precedente si semplifica, bastando ammettere che Γ contenga μ , come è evidente.

Possiamo così ritenere completamente caratterizzati i gruppi di corrispondenze (2, 2) esistenti su una curva algebrica C e tali che il prodotto di due (2, 2) del gruppo presenti sempre il caso (α) di riducibilità: *il più generale gruppo di questa specie si ottiene trasformando mediante una corrispondenza (2, 1), ω , esistente tra una curva W e la C un arbitrario gruppo di corrispondenze birazionali tra i punti di W , vincolato soltanto a contenere quella involuzione che lega i due corrispondenti di uno stesso punto di C nella citata ω .*

13. Quasi immediata è la costruzione dei gruppi di (2, 2) nei quali i prodotti presentano il caso (β) di riducibilità. Ed infatti le (2, 2) del gruppo dovranno essere composte, ed anzi ridursi a corrispondenze (1, 1) tra le coppie di un'involuzione; e questa involuzione dovrà essere la stessa per tutte le (2, 2) del gruppo.

Se, come al n.° 11, introduciamo la curva W_1 , immagine dell'involuzione, sicchè tra questa e la C si abbia una corrispondenza (1, 2), ω_1 , ogni (2, 2) del gruppo potrà scriversi sotto la forma

$$S = \omega_1^{-1} \tau_S \omega_1$$

dove τ_S è una ben determinata (1, 1) tra i punti di W_1 . La rappresentazione è qui unica.

Vediamo anche qui se una forma analoga può darsi alle (1, 1) eventualmente esistenti nel gruppo. Se L è una siffatta (1, 1) e S una (2, 2) del gruppo, anche SL deve appartenere al gruppo. Ne segue subito che L deve mutare in sé l'involuzione. Se quindi M è la (1, 1) generata dall'involuzione, deve essere :

$$LM = ML.$$

Dopo ciò si vedrà che l'aggiunta eventuale della LM al gruppo non altera la proprietà gruppale; ed infatti è

$$S(LM) = (SM)L = SL, \quad (LM)S = L(MS) = LS,$$

e i prodotti, per ipotesi, appartengono al gruppo.

Formando allora la $U = L + LM$, essa muta in sé l'involuzione, determinando quindi tra le coppie di essa una τ_U biunivoca che permette di scrivere

$$L + LM = \omega_1^{-1} \tau_U \omega_1^{-1}.$$

Ottenuto in tal modo l'aggregato delle τ_U corrispondenti ad un dato gruppo, si verifica subito che esse costituiscono pure un gruppo (nel senso ordinario), giacchè se U, V, X sono (2, 2) di G , e si ha

$$UV = 2X,$$

segue :

$$\omega_1^{-1} \tau_U \omega_1 \cdot \omega_1^{-1} \tau_V \omega_1 = 2X,$$

ed essendo $\omega_1 \omega_1^{-1} = 2$,

$$X = \omega_1^{-1} (\tau_U \tau_V) \omega_1$$

e $\tau_X = \tau_U \tau_V$. Viceversa un gruppo di trasformazioni biunivoche su W_1 genera su C un gruppo di (2, 2) composte.

Si può osservare anche qui che se il gruppo G contiene l'identità e l'inversa di ogni sua corrispondenza, esisterà nel gruppo la M , avendosi facilmente $SS^{-1} = S^{-1}S = 2 + 2M$, sicchè non si renderà necessario alcun ampliamento del gruppo, ma soltanto l'associazione di ogni (1, 1), L , con ML , operazione che fu inteso di considerare sempre lecita.

Dopo ciò rimangono caratterizzati anche i gruppi di (2, 2) esistenti sulla curva C , e tali che i prodotti delle sue (2, 2) presentino sempre il tipo (β) di riducibilità: *il più generale gruppo di questa specie si ottiene trasformando mediante una corrispondenza (1, 2), ω_1 , esistente tra una curva W_1 e C , un arbitrario gruppo di corrispondenze birazionali tra i punti di W_1 .*

14. Potrebbero *a priori* pensarsi gruppi di (2, 2) per i quali la riducibilità del prodotto di due corrispondenze avvenga talvolta secondo lo schema (α), tal altra secondo lo schema (β); dimostrando l'impossibilità di gruppi così fatti la nostra ricerca potrà dirsi esaurita.

Introduciamo per un momento una comoda locuzione, dicendo *prodotti* (α) e *prodotti* (β) quei prodotti di due corrispondenze (2, 2) che sono riducibili secondo il tipo (α) o il tipo (β), rispettivamente. Si ha allora:

a) Se ST è in pari tempo (α) e (β), è $ST = 2\lambda + 2\mu$, dove λ e μ sono (1, 1) distinte (n.° 10).

b) Se SX , SY sono prodotti (α) oppure (β), anche $X^{-1}Y$, $Y^{-1}X$ sono prodotti (α) oppure (β).

I prodotti SX , SY siano (α); sia P un punto di C , Q un suo corrispondente in S , M_1 , M_2 i corrispondenti di Q in X , N_1 , N_2 i corrispondenti di Q in Y . Vi è allora corrispondenza biunivoca tra il punto (PQ) di $[S]$ e il punto (QM_1) di $[X]$, come pure tra lo stesso (PQ) di S e (QN_1) di Y ; vi è dunque corrispondenza biunivoca tra (QM_1) di $[X]$ e (QN_1) di $[Y]$, o, ciò che è lo stesso, tra (M_1Q) di $[X^{-1}]$ e (QN_1) di $[Y]$. Ciò prova che $X^{-1}Y$ è un prodotto (α); lo stesso vale per il suo inverso $Y^{-1}X$.

Se invece SX , SY sono (β), X , Y , S sono composte, e la seconda involuzione di S coincide con la prima di X e di Y . Onde la seconda involuzione di X^{-1} coincide con la prima di Y ; e $X^{-1}Y$ è un prodotto (β). E lo stesso può dirsi di $Y^{-1}X$.

c) Analogamente: Se XS , YS sono prodotti (α), oppure (β), anche XY^{-1} , YX^{-1} sono prodotti (α), oppure (β).

d) Se S , T sono (2, 2) irriducibili di un gruppo di (2, 2), i prodotti S^2 , ST , TS sono insieme (α) o insieme (β).

Considerati i prodotti S^2 e ST , ammettiamo che potesse essere

S^2 un prodotto (α), e non (β),

ST un prodotto (β), e non (α).

Ne verrà

$$ST = 2X$$

dove X è irriducibile, e appartiene al gruppo. Perciò SX deve essere riducibile. Se SX è (α), S^2 essendo (α), sarà (α) anche $S^{-1}X$. Ora $S^{-1}X = 2T$, come facilmente si verifica ⁽¹⁾, quindi T deve essere riducibile, contro l'ipotesi. Se SX è (β), $S^{-1}X$ essendo pure (β), risulta S^2 essere (β), contro l'ipotesi.

⁽¹⁾ Lo si deduce considerando le (2, 2) come (1, 1) tra coppie di involuzioni.

Sia invece

S^2 un prodotto (β) , e non (α)

ST un prodotto (α) , e non (β) .

Sarà

$$S^2 = 2Y$$

dove Y è irriducibile e appartiene al gruppo. Perciò YT deve essere riducibile. Se YT è (α) , ST essendo (α) , risulta che YS^{-1} è (α) ; ma $YS^{-1} = 2S$, cioè YS^{-1} è un prodotto (β) ; deve perciò essere S riducibile, contro l'ipotesi. Se YT è (β) , YS^{-1} essendo (β) , risulta ST un prodotto (β) , contro l'ipotesi.

La dimostrazione è analoga per il prodotto TS , e può anche evitarsi, ricorrendo al gruppo inverso del dato.

Da quest'ultimo lemma risulta ora senz'altro che la specie del quadrato S^2 determina quella di ogni prodotto ST , TS ; questa quella di ogni quadrato T^2 , e poi di ogni prodotto TU di due qualunque corrispondenze del gruppo; e viceversa. E così, se S^2 è un prodotto (α) , oppure (β) , tutti i prodotti delle $(2, 2)$ del gruppo saranno ancora (α) oppure (β) , e ad essi saranno applicabili le rappresentazioni dei numeri precedenti. Nè è escluso (e si hanno anche facili esempi) che esistano gruppi nei quali tutti i prodotti sono insieme (α) e (β) .

III. Applicazioni.

15. Gruppi di corrispondenze (2, 2) sopra una curva razionale. — Applichiamo i risultati precedenti al caso di una curva C razionale, sempre limitandoci ai gruppi contenenti l'inversa di ogni loro corrispondenza, e con particolare riguardo ai *gruppi propriamente discontinui*, e ai *gruppi continui*.

Per costruire i gruppi di tipo (α) , dovremo determinare una curva W che possa porsi in corrispondenza $(2, 1)$ con una curva razionale, e i gruppi di corrispondenze birazionali esistenti su di essa. Una tal curva, possedendo una g_2^1 , non può essere che razionale, ellittica o iperellittica. L'ultimo caso è però da escludere, poichè le trasformazioni birazionali di una curva iperellittica in sè mutano in sè la sua g_2^1 e danno quindi luogo sulla C , come subito si vede, a doppi di proieività ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Si può del resto osservare che la W deve essere birazionalmente equivalente alle curve di corrispondenza delle $(2, 2)$ del gruppo, le quali sono qui rappresentate da equazioni doppiamente quadratiche nelle variabili. Esse sono quindi quartiche piane con due punti doppi (almeno) e quindi curve di genere 0 o 1.

Sia W razionale; ogni gruppo ordinario di proiettività su W dà luogo a un gruppo di (2, 2) su C . Volendo dare alla dipendenza tra i due gruppi un'espressiva forma analitica, si chiamino x e t le coordinate correnti su C e W e si supponga, come è lecito, che la corrispondenza (2, 1) tra W e C sia data da $t^2 = x$. Ad ogni proiettività:

$$t' = \frac{at + b}{ct + d}$$

corrisponderà su C la (2, 2)

$$\sqrt{x'} = \frac{a \sqrt{x} + b}{c \sqrt{x} + d}.$$

Un semplice modello proiettivo si avrà poi assumendo come ente W una conica, come ente C un fascio di rette ad essa complanare, e il cui centro non appartenga alla conica; la corrispondenza (2, 1) risultando dalla condizione di appartenenza di due elementi corrispondenti.

I gruppi propriamente discontinui di (2, 2) su C si otterranno dai gruppi propriamente discontinui di proiettività su W . Poichè questi debbono contenere l'involuzione $t' = -t$, una funzione automorfa corrispondente avrà la forma $F(t^2)$; la $F(x)$ sarà funzione automorfa per il gruppo delle (2, 2) su C .

In modo analogo i gruppi continui di proiettività su W , che sono tutti noti, determineranno i gruppi continui di corrispondenze (2, 2) su C , del tipo (α) .

16. Un caso più interessante si ha dall'ipotesi di una W ellittica: noi potremo riferirci per semplicità alla cubica di WEIERSTRASS

$$Y^2 = X^3 - g_2 X - g_3.$$

Le g_2^4 sulla curva sono allora segnate dai fasci che hanno per centri i punti della curva e sono tutte equivalenti rispetto alle trasformazioni birazionali della curva in sè. Potremo perciò assumere per il nostro scopo la g_2^4 segnata dalle rette $X = \text{cost.}$ e come curva C conviene allora assumere l'asse delle X . Ciò posto, un gruppo di corrispondenze biunivoche sulla cubica, contenente la simmetria ($X' = X$, $Y' = -Y$), subordinerà tra le ascisse X un gruppo di (2, 2) del tipo più generale nel campo che stiamo studiando.

La determinazione dei possibili gruppi di corrispondenze biunivoche tra i punti di una cubica piana non offre difficoltà, ricollegandosi ai risultati

classici di WEYL e SEGRE ⁽¹⁾; tanto più se con l'introduzione del parametro ellittico u per il quale si ha

$$X = \wp(u|\omega, \omega'), \quad Y = \wp'(u|\omega, \omega')$$

la si trasforma nella ricerca di particolari gruppi di movimenti. Vogliamo perciò soltanto indicare sommariamente qualche carattere dei gruppi che si ottengono, e in modo speciale dei gruppi continui e propriamente discontinui.

Nel caso di una cubica a moduli generali, esistono due soli tipi di corrispondenze, rappresentate, nel piano della u , rispettivamente da *traslazioni* e *simmetrie*. L'identità per la X corrispondendo al complesso $v = \pm u + 2m\omega + 2n\omega'$ contenente ambedue le specie di trasformazioni, lo stesso avviene in ogni gruppo. Il gruppo più generale risulta subito generato da quante si vogliono traslazioni e dalla simmetria $v = -u$. Sulla X , coordinata su C , quest'ultima non ha effetto, e rimangono così (2, 2) della forma

$$S = \begin{pmatrix} \wp(u \pm \alpha) \\ \wp' u \end{pmatrix}$$

e che sono quindi *simmetriche*. Esse si interpretano facilmente sulla cubica di WEIERSTRASS; ma sarà anche da ricordare che esse si connettono direttamente alla costruzione dei poligoni di PONCELET (JACOBI, HALPHEN) ⁽²⁾. Precisamente, assumendo come curva C una conica γ , la S si ottiene facendo corrispondere due punti di C quando la loro congiungente è tangente a una seconda conica γ_α , complanare con γ . Al variare di α , la γ_α descrive un fascio a cui appartiene γ .

I gruppi propriamente discontinui si ottengono limitando a tre il numero delle trasformazioni generatrici: due traslazioni indipendenti $v = u + 2\xi$, $v = u + 2\eta$, e la simmetria $v = -u$. Al gruppo debbono appartenere le traslazioni $v = u + 2\omega$, $v = u + 2\omega'$, sicchè tra ξ , η , ω , ω' dovranno sussistere relazioni lineari:

$$a\xi + b\eta = \omega, \quad c\xi + d\eta = \omega'$$

a coefficienti interi e a determinante $ad - bc = N$ non nullo. Dopo ciò si vedrà facilmente che la più generale trasformazione del gruppo in u :

$$v = \pm u + 2m\xi + 2n\eta$$

⁽¹⁾ SEGRE: *Le corrispondenze univoche nelle curve ellittiche*. « Atti Acc. Sc. Torino », 24, pag. 734, (1889). V. anche SEVERI, loc. cit., n.º 54 e 59.

⁽²⁾ Cfr. per una estesa trattazione dell'argomento, HALPHEN: *Traité des fonctions elliptiques*. 2^e partie. Chap. X, pag. 367 (Paris, Gauthier-Villars, 1888).

dà luogo, al variare di m e di n , a un numero finito di trasformati di $X = \wp u$. Cioè i gruppi propriamente discontinui di questa specie sono tutti *finiti*.

Dalla teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche risulta ⁽¹⁾ che la funzione $\wp(u|\xi, \eta)$ è funzione razionale di $\wp(u|\omega, \omega')$ (di grado N). Posto allora:

$$\wp(u|\xi, \eta) = R[\wp(u|\omega, \omega')]$$

sarà $R(X)$ funzione invariante fondamentale per il gruppo delle (2, 2).

Se una delle quantità $2\xi, 2\eta$ è un periodo, per esempio $2\eta = 2\omega'$, si può supporre che sia $N\xi = \omega$, e le (2, 2) del gruppo hanno la forma:

$$S_r = \left(\begin{array}{c} \wp\left(u \pm \frac{2r\omega}{N}\right) \\ \wp u \end{array} \right)$$

con la legge di composizione:

$$S_r S_{r'} = S_{r+r'} + S_{r-r'}.$$

Nella citata rappresentazione di JACOBI i punti equivalenti rispetto al gruppo sono in tal caso i vertici di un poligono di PONCELET, cioè di un poligono inscritto in γ e circoscritto a una certa conica γ' . Si interpretano allora facilmente le singole (2, 2) del gruppo.

Nel caso generale si hanno configurazioni analoghe, ma più complesse.

Quanto ai gruppi continui di questo tipo, è chiaro che essi si ottengono facendo variare il parametro α nella espressione di S

$$S = \left(\begin{array}{c} \wp(u \pm \alpha) \\ \wp u \end{array} \right);$$

nella rappresentazione jacobiana essi saranno perciò generati da una conica γ_x che descrive un fascio contenente la conica fondamentale γ .

17. Un particolare esame richiedono i casi in cui la cubica W sia armonica o equianarmonica, potendo allora intervenire nel gruppo di corrispondenze biunivoche da considerare su W le corrispondenze singolari. Una facile discussione dà i seguenti risultati:

a) Se W è armonica, nel piano della u si ottengono nuovi gruppi ampliando i precedenti mediante una rotazione del tipo $v = iu + \alpha$. Ad essi

⁽¹⁾ Cfr. p. es. BIANCHI: *Funzioni di variabile complessa e funzioni ellittiche*, pag. 423. (Pisa, Spoerri, 1901).

corrispondono gruppi di (2, 2) ove compariscono anche corrispondenze dissimmetriche.

I gruppi propriamente discontinui richiedono anzitutto

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{i - a}{b}$$

ove a e b sono interi e $a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{b}$. Essi si ottengono ampliando quelli del numero precedente mediante la $v = iu$ oppure la $v = iu + \xi$ (in quest'ultimo caso essendo a dispari, b pari). I corrispondenti gruppi di (2, 2) sono ancora finiti; nel primo caso è funzione invariante la $R^2(X)$, quadrato della $R(x)$ già considerata; nel secondo la $R_1^2(X)$, essendo $R_1(X)$ la funzione lineare fratta di $R(X)$ definita da

$$\mathcal{P}(u + \xi | \xi, \eta) = R_1[\mathcal{P}(u | \omega, \omega')].$$

I gruppi continui si ottengono aggiungendo alla schiera S del caso generale una nuova schiera T definita da

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(iu \pm \alpha) \\ \mathcal{P}u \end{pmatrix}$$

che deriva dalla prima mediante l'involuzione $\begin{pmatrix} \mathcal{P}(iu) \\ \mathcal{P}u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X \\ X \end{pmatrix}$.

b) Se W è equianarmonica, i nuovi gruppi risultano dall'aggiunta di una rotazione del tipo $v = \varepsilon u + \alpha$ (ε radice cubica primitiva dell'unità) ai gruppi del caso generale. Si ottengono anche qui (2, 2) dissimmetriche.

I gruppi propriamente discontinui richiedono che sia

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\varepsilon - a}{b}$$

con a , b interi e $a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{b}$. La rotazione da aggiungere è la $v = \varepsilon u$ o la $v = \varepsilon u + \xi$. I corrispondenti gruppi di (2, 2) sono finiti; funzioni invarianti sono, nei due casi la $R^3(X)$ o la $R_1^3(X)$, R e R_1 avendo i significati già noti.

I nuovi gruppi continui si ottengono aggiungendo al gruppo delle S del caso generale due schiere T , U che derivano dalla prima moltiplicandola per la proiettività ciclica di 3° ordine

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}(\varepsilon u) \\ \mathcal{P}u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon X \\ X \end{pmatrix}$$

e per il suo quadrato.

18. Per la costruzione dei gruppi di tipo (β) su una curva C razionale si osserverà che le involuzioni di 2° ordine su C essendo lineari, W_1 sarà pure razionale e che quindi tutto si riduce a costruire su W_1 gruppi ordinari di proiettività. Se x è la coordinata su C , t quella su W_1 , possiamo supporre che la corrispondenza $(1, 2)$ tra W e C sia espressa da $t = x^2$; alla proiettività

$$t' = \frac{at + b}{ct + d},$$

su W_1 , corrisponderà la $(2, 2)$

$$x'^2 = \frac{ax^2 + b}{cx^2 + d}$$

su C ; ecc.

Si ha un'evidente reciprocità tra questa costruzione e quella dei gruppi di tipo (α) per W razionale (n.° 15). Essa è generale: posta una corrispondenza $(1, 2)$ tra due curve C_1, C_2 , i gruppi di corrispondenze birazionali su C_1 (o C_2) generano gruppi di corrispondenze $(2, 2)$ su C_2 (o C_1); su C_1 i gruppi sono di tipo (α) , su C_2 di tipo (β) .

19. Gruppi continui di corrispondenze $(2, 2)$ su una curva algebrica. —

Abbiamo già incontrato nella precedente ricerca vari esempi di gruppi continui di $(2, 2)$ e cioè quelli che possono esistere su una curva razionale; pochi complementi ci permettono di esaurire la questione per le curve algebriche di genere qualunque. Ed infatti, si tratti di gruppi di tipo (α) o (β) , essi corrisponderanno a gruppi continui di corrispondenze birazionali sulla W o W_1 ; e questi possono esistere solo se questa W o W_1 è razionale o ellittica. Converrà perciò che, allargando leggermente la questione, ci diamo a ricercare tutti i gruppi, continui o no, corrispondenti a queste due ipotesi. Distinguiamo allora quattro casi:

a) Tipo (α) , W razionale. — La curva C , immagine di una involuzione su W , è pure razionale, onde ricadiamo nelle ipotesi del n.° 15.

b) Tipo (α) , W ellittica. — La curva C è razionale o ellittica; ricercando infatti le involuzioni di 2° ordine su una curva ellittica, che sono date dalle corrispondenze biunivoche involutorie sulla curva, si trovano le g_2^4 , aventi $u + v = \text{cost.}$ come relazione corrispondente tra i valori del parametro ellittico, e tre involuzioni irrazionali, date da $v - u = \text{semiperiodo}$. Esse sono ellittiche, poichè, per esempio, a una coppia del tipo $u, u + \omega$ corrisponde biunivoca-

mente il punto u della cubica definita da

$$x = \wp\left(u \middle| \frac{\omega}{2}, \omega'\right), \quad y = \wp'\left(u \middle| \frac{\omega}{2}, \omega'\right).$$

Se C è razionale, si ricade nel caso considerato ai n.° 16 e 17. Se C è ellittica e coincide con la citata cubica, non si hanno in generale effettivi gruppi di (2, 2) perchè le corrispondenze a valenza su W ($v = \pm u + \alpha$) mutano in sé le involuzioni irrazionali e quindi danno origine su C a (2, 2) riducibili. Ciò non avviene invece per le corrispondenze singolari, quando esistono, le quali danno perciò il modo di formare gruppi di (2, 2) non tutti riducibili. Tali gruppi esistono dunque su C se, W essendo armonica o equianarmonica, il rapporto dei periodi della $\wp u$ corrispondente a C ha uno dei valori $2i$, $-1 + i\sqrt{3}$, o un valore equivalente. La costruzione dei gruppi propriamente discontinui non offre difficoltà; essi sono naturalmente finiti.

Quanto ai gruppi continui, non si ha che un gruppo per ogni caso: il gruppo totale, trasformato del gruppo di tutte le corrispondenze biunivoche esistenti su W , a valenza o singolari.

c) Tipo (β), W_1 razionale. — La C , possedendo una g_2^1 sarà razionale, ellittica o iperellittica. Il primo caso fu trattato al n.° 18; ugualmente semplici — e di scarso interesse — sono gli altri due. A tutti i casi si applica la seguente rappresentazione algebrica.

L'equazione della C sia posta sotto la forma $y^2 = P(x)$; la g_2^1 essendo data da $x = \text{cost.}$; alla proiettività

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}$$

corrisponde su C la trasformazione (2, 2) che muta ciascun punto della coppia $(x, \pm \sqrt{P(x)})$ nella coppia $(x', \pm \sqrt{P(x')})$. Si formano subito i gruppi propriamente discontinui e i gruppi continui.

d) Tipo (β), W_1 ellittica. — La C dovrà possedere un'involuzione ellittica di 2° ordine, e al solito i gruppi di corrispondenze biunivoche tra le coppie di essa daranno i gruppi di (2, 2) cercati su C .

Nota bibliografica. N.° 4 e 5. — Ha qualche legame con lo studio dei gruppi finiti una ricerca del sig. A. B. COBLE ⁽¹⁾. In essa si parte da un'equa-

(1) *Multiple binary Forms with the closure Property*. « American Journal of Math. ». XLIII. 1921. pagg. 1-17).

zione $f(t, \tau) = 0$ di grado k in t e κ in τ , e, assegnato a t un valore t_0 , si immaginano determinati i κ valori di τ ad esso corrispondenti, poi i valori di t corrispondenti ai valori trovati, e così via. Se con un numero finito di operazioni si giunge a gruppi di n valori di t e di v valori di τ tali che le ulteriori operazioni diano valori contenuti in questi gruppi, si dice che la corrispondenza definita dalla data equazione ammette una configurazione $\Delta_{n,v}^{k,\kappa}$. Se ciò avviene per ogni valore di t_0 , la corrispondenza è detta *poristica*.

Il sig. COBLE dà una condizione perchè l'esistenza di una configurazione porti seco il carattere poristico della corrispondenza, e trova la condizione affinchè l'equazione $f(t, \tau) = 0$ definisca una corrispondenza poristica: la funzione $f(t, \tau)$ deve essere un divisore di una funzione del tipo $\alpha(t)\beta(\tau) - \gamma(t)\delta(\tau)$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ essendo simboli di funzioni razionali intere. Seguono svariate applicazioni e casi particolari.

Dal nostro punto di vista la ricerca può presentarsi nel modo seguente. Essendo S la corrispondenza tra gli enti (t) e (τ) definita da $f(t, \tau) = 0$, si costruiscono le corrispondenze SS^{-1} , $SS^{-1}S$, $SS^{-1}SS^{-1}$, ... cioè le $(SS^{-1})^r$ operanti su (t) e le $(SS^{-1})^r S$ operanti tra (t) e (τ) . Se le prime, che costituiscono un gruppo, danno per ogni valore di t un numero finito di corrispondenti, esse potranno formarsi con un numero finito di corrispondenze irriducibili $T_1, T_2, \dots, T_s$, che costituiranno pure un gruppo (n.º 2). I punti equivalenti daranno i gruppi di una g_n^1 ; una analoga g_v^1 si avrà su (τ) e le due serie saranno proiettive. Fra le rispettive funzioni invarianti si avrà perciò una relazione bilineare, riducibile alla forma $R(t) = R_1(\tau)$. Onde il risultato del sig. COBLE.

La cosa è estendibile a curve algebriche qualunque e consente qualche interessante sviluppo.

N.º 8-11. — Le condizioni per la riducibilità del prodotto di due corrispondenze (2, 2), nel caso razionale, hanno formato oggetto di studio da parte di FOUCHÉ ⁽¹⁾. Il risultato ottenuto da questo Autore può enunciarsi: Condizione necessaria affinchè la risultante rispetto a y delle relazioni doppiamente quadratiche, irriducibili:

$$f(x, y) = 0, \quad g(y, z) = 0,$$

si scinda in due fattori distinti, è che i valori critici di y (radici semplici o triple del discriminante rispetto all'altra variabile) siano i medesimi per le due equazioni.

⁽¹⁾ *Sur la transformation doublement quadratique, les polygones de Poncelet et l'involution multiple.* (« Bull. Soc. Math. de France », XLIV, 1916, pagg. 120-160).

Il teorema del sig. FOUCHÉ si può facilmente estendere al caso generale mediante semplici considerazioni topologiche. Si consideri, come al n.° 12, il prodotto di due (2, 2) irriducibili S , T e il relativo schema

$$ST; \begin{array}{l} P' \\ P \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} Q_1 \rightarrow (R_{11}, R_{12}), \\ \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} Q_2 \rightarrow (R_{21}, R_{22}),$$

dove P' rappresenta ancora il punto che insieme a P corrisponde a Q_1 in S^{-1} . Si considerino i vari punti come appartenenti, invece che alle curve algebriche C , C' , C'' , alle loro riemanniane Σ , Σ' , Σ'' , e si segnino su Σ' i punti di diramazione della S^{-1} e della T , cioè i punti tali che un ciclo che avvolga uno di essi, descritto da Q , scambi su Σ , o Σ'' , le due determinazioni di P , o di R , rispettivamente.

Se P descrive un ciclo su Σ , tale da portare Q_1 in Q_2 , il punto R_{11} di Σ'' andrà in R_{21} o R_{22} , sicchè, se ST è riducibile, R_{11} e R_{21} oppure R_{11} e R_{22} corrispondono certamente a P in una *stessa* parte irriducibile di ST . Ne segue che due casi essenzialmente distinti sono solo possibili:

a) I cicli descritti da P portano R_{11} in sè o in R_{21} ; si hanno allora le due corrispondenze:

$$U; P \begin{array}{l} \searrow R_{11} \\ \nearrow R_{21} \end{array}, \quad V; P \begin{array}{l} \searrow R_{12} \\ \nearrow R_{22} \end{array},$$

eventualmente riducibili a doppi di (1, 1);

b) È $R_{11} = R_{21}$ e $R_{12} = R_{22}$, potendo o no i cicli di P condurre R_{11} in R_{12} .

Il caso b) fu già discusso nel testo e porta all'ipotesi β) dell'enunciato dato al n.° 10. Nel caso a), si è visto (n.° 12) che la U che muta P in R_{11} muta anche P' in R_{12} .

Ne viene che se Q_1 descrive su Σ' un ciclo che su Σ porti P in P' , su Σ'' andrà R_{11} in R_{12} . La considerazione della $T^{-1}S^{-1}$ porta ugualmente a concludere che un ciclo di Q_1 che su Σ'' porti R_{11} in R_{12} porterà, su Σ , P in P' .

Da ciò risulta subito che i punti di diramazione di S^{-1} e di T su Σ' coincidono; chè se un punto di diramazione di una delle corrispondenze non fosse tale per l'altra, esisterebbe un ciclo di Q_1 intorno a tal punto tale da dar luogo allo scambio delle determinazioni su una delle superficie Σ , Σ'' e non sull'altra.

Questo risultato dà nel caso razionale il teorema del sig. FOUCHÉ, teorema

di cui egli stesso, e prima di lui il sig. FONTENÉ ⁽¹⁾, dimostrano facilmente l'inverso. Si ha però ragione di ritenere che l'inversione non possa farsi nel caso generale. Occorrerebbe infatti provare che ogni ciclo descritto da P , che porta P in sé, porta in sé anche R , e ciò come conseguenza dell'identità dei punti di diramazione. Ora ciò può dimostrarsi facilmente per i cicli riducibili a zero (cioè riducibili a più cicli elementari — *cappi* — intorno ai punti di diramazione); ma non è escluso che per i cicli non riducibili a zero, certamente esistenti se C' non è razionale, il comportamento di P e di R su Σ e Σ'' possa essere diverso. In altre parole, immaginando Σ' resa semplicemente connessa con una serie di opportuni tagli, non è escluso che ai tagli S^{-1} e T si comportino diversamente (cioè per una e non per l'altra vi sia scambio di determinazioni).

N.° 15-16. — I gruppi di corrispondenze algebriche su una variabile, cioè nel caso razionale, sono stati studiati sotto l'aspetto della teoria dei gruppi di LIE, dal sig. K. CARDA ⁽²⁾. Non sembra che questa ricerca abbia legami immediati con la nostra perchè, scegliendosi per le trasformazioni una speciale determinazione, non entra in questione la loro non univocità nel campo totale. Precisamente, sia

$$f(x, y, c_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

l'equazione di un gruppo ad n parametri (che per brevità supponiamo ad una sola schiera) del tipo indicato. Poste le equazioni

$$f(x, y, c_i) = 0, \quad f(y, z, c'_i) = 0$$

dovrà, almeno per una coppia di determinazioni di y e z , esistere un sistema c''_i di costanti tali che si abbia:

$$f(x, z, c''_i) = 0;$$

in altre parole, dovrà la risultante delle due prime equazioni rispetto ad y contenere un fattore di questa forma.

Ciò equivale alla seguente formulazione geometrica del concetto di gruppo, applicabile anche a curve algebriche qualunque e a gruppi discontinui: un aggregato G di corrispondenze è un gruppo se il prodotto di due corrispon-

⁽¹⁾ « Bull. de la Soc. Math. de France », XXI, 1897.

⁽²⁾ *Zur Theorie der algebraischen Gruppen der Gerade und der Ebene.* (« Monatsh. für Math. u. Physik », XI, 1900, S. 31-58).

denze di G *contiene* una corrispondenza di G . Essa è dunque ben più larga di quella che ha formato oggetto del presente lavoro. Così, una corrispondenza S simmetrica ($S^{-1} = S$) e l'identità formano un gruppo nel senso ora indicato, non in generale nel nostro.

Ad ogni modo, la Nota del sig. CARDA si presta a qualche confronto interessante, in quanto può dar luce su ciò che potrà risultare per il caso razionale nello studio dei gruppi continui più generali, nel senso da noi adottato.