Sur la theorie des propagateurs.

Y. BRUHAT (Paris, France)

Introduction.

1. La théorie des propagateurs sur une variété riemannienne a été introduite et développée depuis 1958 par A. LICHTNEROWICZ en vue de la construction de commutateurs et d'anticommutateurs des champs sur un espace-temps courbe. Il généralisent le propagateur de JORDAN-PAULI qui joue un rôle fondamental dans la théorie quantique des champs sur un espace-temps de MINKOVSKI. En fait, ces propagateurs associés à des champs tensoriels, et les solutions élémentaires à support compact respectivement vers le passé et vers le futur, jouent aussi un rôle essentiel dans la théorie classique des champs sur une variété riemannienne: la composition au sens de VOLTERRA de la «source» du champ avec l'une ou l'autre de ces solutions élémentaires donne les potentiels retardés, ou avancés, généralisant les potentiels correspondants sur l'espace-temps de MINKOVSKI. Du fait de la diffusion des ondes, un problème de convergence se pose, dépendant du comportement asymptotique des propagateurs, même pour une source à support limité dans l'espace.

Une autre application de l'étude asymptotique des propagateurs est le problème de la radiation: les conditions de SOMMERFELD qui caractérisent les potentiels retardés, ou avancés, sur l'espace-temps de MINKOVSKI ont donné lieu ces dernières années à de nombreuses tentatives de généralisation, en particulier aux potentiels de gravitation, dont l'origine remonte à FOCK [6]. Les conclusions ne peuvent reposer que sur une étude mathématique des propriétés asymptotique des solutions des équations d'ondes, pour un champ libre sur une variété riemannienne, ou des équations d'EINSTEIN elles mêmes si on veut étudier le problème véritable de la radiation gravitationnelle.

Enfin l'étude asymptotique du propagateur G , et du noyau G_1 permettant la définition des opérateurs de création et d'annihilation, sera certainement nécessaire pour déduire des résultats concrets de la théorie quantique des champs sur une variété riemannienne qui est en train de s'élaborer (A. LICHTNEROWICZ, congrès de Varsovie 1962).

(4) Pour une discussion sur ce sujet cf. Y. BRUHAT [9].

Le plan du présent travail est le suivant:

Dans I je rappelle la définition des propagateurs tensoriels de LICHNEROWICZ et leur construction explicite à l'aide d'une méthode initialement donnée par SOBOLEV pour résoudre le problème de CAUCHY pour une équation linéaire hyperbolique du second ordre. Je montre que les propagateurs (et les solutions élémentaires dont il sont la différence) sont la somme d'une mesure portée par le cône caractéristique et d'une fonction usuelle de support l'intérieur de ce cône qu'on appelle «terme de diffusion». Cette fonction est donnée sous forme d'une série convergente de fonctions dont chaque terme est donné par une relation intégrale portant sur le précédent. Le $n^{\text{ème}}$ terme contient en facteur m^n si la métrique dépend (de façon p fois différentiable) d'un paramètre m et est identique à la métrique de MINKOVSKI pour $m = 0$: en ce sens on peut dire que le développement précédent donne un calcul par approximations successives du terme de diffusion.

J'étudie ensuite le comportement asymptotique du terme de diffusion et montre que, sous des hypothèses d'hyperbolicité uniforme de la métrique, et sous des hypothèses voisines de celles que l'on qualifie habituellement de «comportement asymptotique Minkovskien», la première approximation du terme de diffusion tend vers zéro sur toute ligne uniformément temporelle, et est sommable sur une telle ligne. Aucun résultat analogue ne semble être valable pour les termes suivants, si la métrique ne vérifie pas des identités particulières.

Dans II j'applique les résultats précédents au potentiel électromagnétique retardé créé par une particule chargée. Une telle étude est à rapprocher des importants travaux de B. DEWITT et R. BREHME [7] et C. DEWITT [8] sur le freinage radiationnel par l'étude du potentiel au voisinage de la trajectoire (où il est infini à cause du modèle ponctuel envisagé). Je ne considère pas ici un tel problème, mais me borne à écrire le potentiel sous une forme rigoureuse et explicite qui se prête directement aux calculs d'approximation. Je constate que le potentiel ne pourra en général être borné (et ceci en dehors de la trajectoire) que si la variété est minkovshienne en dehors de l'émission d'un point 0, ou si la trajectoire de la particule est limitée dans le passé.

Dans III je donne un exemple de la méthode exposée en I en déterminant le propagateur scalaire et le propagateur vectoriel pour l'espace-temps de de SITTER: des études récentes dues à J. COLLEAU [10] montrent que les propagateurs tensoriels d'ordre quelconque se calculent aisément à l'aide de ceux-ci et du bitenseur de transport de DEWITT.

I

Propagateurs-comportement asymptotique.**2. - Propagateurs tensoriels d'ordre p .**

Les propagateurs tensoriels d'ordre p , $G^{(p)}(x', x)$, sur une variété riemannienne V_n de métrique hyperbolique normale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta; \quad \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n-1$$

sont (cf. LICHNEROWICZ [1]) la différence des deux solutions élémentaires ⁽²⁾

$$E_+^{(p)}(x', x) \text{ et } E_-^{(p)}(x', x)$$

à support compact respectivement vers le passé et vers le futur, relatives aux opérateurs $\Delta^{(p)} + c$ où c est une constante et $\Delta^{(p)}$ le laplacien pour les tenseurs d'ordre p , $u(u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_p})$

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (\Delta^{(p)} u)_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = & - \nabla_p \nabla^p u_{\alpha_1 \dots \alpha_p} + \sum_k R_{\alpha_k \mu} u_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \\ & - \sum_{k \neq 1} R_{\alpha_k \beta} u_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \dots \end{aligned}$$

$E_+^{(p)}(x', x)$ et $E_-^{(p)}(x', x)$ sont des bi-tenseurs distributions ⁽³⁾.

L'existence globale de ces solutions élémentaires, sous certaines conditions globales sur la variété (l'ensemble des lignes de temps joignant deux points de la variété doit être compact ou vide) a été démontrée par J. LERAY [2]. Nous allons rappeler ici leur construction en utilisant la méthode initialement donnée par SOBOLEFF pour résoudre le problème de CAUCHY pour une équation linéaire hyperbolique du second ordre. (SOBOLEFF [4], Y. BRUHAT [5].

3. - Conoïde caractéristique de sommet x' .

Ce conoïde est engendré par les bicaractéristiques issues de x' (géodésiques de longueur nulle) solutions du système différentiel

$$(3.1) \quad \frac{dx^0}{g^{00} + p_i g^{i0}} = \frac{dx^i}{g^{ii} p_i + g^{i0}} = \frac{-dp_i}{\frac{\partial F}{\partial x^i} - p_i \frac{\partial F}{\partial x^0}} = d\lambda$$

⁽²⁾ Au sens de SCHWARTZ [3], x et x' désignent deux points de V_n .

⁽³⁾ cf. LICHNEROWICZ [1].

avec

$$F \equiv g^{ij} p_i p_j + 2g^{i0} p_i + g^{00}, \quad dx^0 + p_i dx^i = 0$$

il a pour équations paramétriques

$$(3.2) \quad x^\alpha = x^\alpha(x'^\alpha, \lambda, p_i^0)$$

$$p_i = p_i(x'^\alpha, \lambda, p_i^0)$$

où les p_i^0 sont trois quantités, fixes sur une géodésique donnée, satisfaisant à la relation.

$$g^{ij} p_j^0 + 2g^{i0} p_i^0 + g^{00} = 0 \quad \text{pour } x = x'.$$

Si on normalise, par un changement de coordonnées, les valeurs de $g^{\lambda\mu}$ au point x' par

$$g^{00} = 1, \quad g^{i0} = 0, \quad g^{ij} = -\delta_i^j$$

on peut prendre pour p_i^0 :

$$(3.3) \quad p_1^0 = \sin \theta \sin \varphi, \quad p_2^0 = \sin \theta \cos \varphi, \quad p_3^0 = \cos \theta.$$

Les $1/2$ conoïdes $\Gamma_{x'}^+$ et $\Gamma_{x'}^-$ sont définis respectivement par $x^0 - x'^0 > 0$ et $x^0 - x'^0 < 0$.

Nous supposons dans la suite que ces variétés sont sans singularité autre que le sommet x' ; il en est toujours ainsi dans un voisinage de x' . Si les géodésiques de longueur nulle issues de x' se recoupaient, les calculs qui suivent ne seraient valables que dans un ouvert borné où cette singularité ne se produit pas.

4. Solutions élémentaires.

On peut écrire le opérateurs [2.1] sous la forme

$$(4.1) \quad (-\Delta^{(p)} u)_s \equiv g^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu}^2 u_s + B_s^t \partial_\lambda u_t + C_s^t u_t, \quad \lambda, \mu = 0, 1, \dots, n-1$$

(r, s, t désigne une suite d'indices $\alpha_1 \dots \alpha_p$) ou, sous forme matricielle,

$$(4.1) \quad g^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu}^2 u + B^\lambda \partial_\lambda u + cu.$$

Ce sont des opérateurs hyperboliques du second ordre dont les termes

principaux sont les mêmes pour toutes les équations ⁽⁴⁾. Pour $n = 4$ la solution élémentaire $E_-(x', x)$ (respectivement $E_+(x', x)$) est l'opération linéaire continue sur les tenseurs indéfiniment différentiables à support compact f définie par la résolution d'une équation intégrale ⁽⁵⁾ prise sur $\Gamma_{x'}^-$, demi-conoïde caractéristique rétrograde (respectivement $\Gamma_{x'}^+$ direct) qui s'écrit en prenant pour paramètres, sur $\Gamma_{x'}^-$, x_0, θ, φ :

$$(4.2) \quad 4\pi u(x') = \int_{-\infty}^{x_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{K[u] + \Sigma[f]\} dx^0 d\theta d\varphi$$

où $[f]$ désigne la valeur sur $\Gamma_{x'}^-$ d'une fonction $f(x)$. Σ est une matrice, fonction connue sur le cône $\Gamma_{x'}$

$$(4.3) \quad \Sigma = P\Delta(g^{00} + g^{i0}p_i)^{-1}$$

où Δ est le jacobien de la transformation $(x^i), (\lambda, \theta, \varphi)$ sur le cône $\Gamma_{x'}$ ⁽⁶⁾:

$$(4.4) \quad \Delta = \frac{D(x^i)}{D(\lambda, \theta, \varphi)}$$

où $P = \sigma\omega$, σ étant la fonction infinie d'ordre $1/\lambda$ au sommet $x = x'$

$$(4.5) \quad \sigma = \left| \frac{\sin \theta}{\Delta} \right|^{1/2}$$

et ω la matrice, fonction continue et bornée, solution du système différentiel:

$$(4.6) \quad \frac{d\omega}{d\lambda} = Q\omega$$

où Q est la matrice (fonction sur $\Gamma_{x'}$)

$$(4.7) \quad Q = \frac{1}{2}([B^0] + [B^i]p_i) - \frac{1}{2} \left(p_j \frac{\partial}{\partial x^j} [g^{ij}] + \frac{\partial}{\partial x^j} [g^{j0}] \right) I$$

I , matrice unité. Pour $x = x'$, la matrice ω se réduit à I .

⁽⁴⁾ La résolution explicite de tels systèmes figure dans [5].

⁽⁵⁾ Equation tensorielle.

⁽⁶⁾ Nous supposons que $\frac{\Delta}{\sin \theta}$ ne s'annule pas en dehors du sommet x' du conoïde $\Gamma_{x'}$.

K est la matrice continue et bornée sur tout compact

$$(4.8) \quad K = -M \Delta (g^{00} + g^{i0} p_i)^{-1}$$

$$(4.9) \quad M = \frac{\partial^2 ([g^{ij}] P)}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^i} (B^i P) + CP$$

L'équation 4.2 est une équation intégrale de VOLTERRA dont la solution, unique, à support limité dans le passé, s'obtient par approximations successives sous forme d'une série convergente:

$$(4.10) \quad u = u^{(0)} + u^{(1)} + \dots + u^{(n)} + \dots$$

avec:

$$(4.11) \quad u^{(0)}(x') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{x'^0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Sigma[f] dx^0 d\theta d\varphi$$

$$(4.12) \quad u^{(n)}(x') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{x'^0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} K[u^{(n-1)}] dx^0 d\theta d\varphi$$

l'intégrale (4.11) définit une distribution, dont le support est le $1/2$ cône caractéristique $\Gamma_-(x')$, que nous noterons $E_-^{(0)}(x', x)^{(7)}$: on a, $< >$ désignant le produit scalaire au sens des distributions,

$$(4.13) \quad u^{(0)}(x') = < E_-^{(0)}(x', x), f(x) >.$$

Désignons par $E_-^{(n)}(x', x)$ les distributions, de support l'émission rétrograde de x' ⁽⁸⁾ ($\Gamma_{x'}^-$ et son intérieur); telles que

$$(4.14) \quad u^{(n)}(x') = < E_-^{(n)}(x', x), f(x) >.$$

La solution élémentaire $E_-(x', x)$ (ou noyau élémentaire) est la série convergente de distribution

$$(4.15) \quad E_-(x', x) = \sum_{n=0}^{\infty} E_-^{(n)}(x', x)$$

⁽⁷⁾ $u^{(0)}(x')$ étant une fonction continue $E_-^{(0)}(x', x)$ est bien une distribution en x et x' (noyau distribution). De même $E_-^{(n)}(x', x)$.

⁽⁸⁾ cf. LERAY [2].

5. - Termes de diffusion.

$E_{-}^{(0)}(x', x)$ est, pour x' fixé, une mesure de support $\Gamma_{x'}^{-}$, identifiable sur $\Gamma_{x'}^{-}$ à une fonction localement sommable. Montrons que les distributions $E_{-}^{(n)}(x', x)$ sont identifiables à des fonctions localement sommables dans V_4 , dont le support, pour x' donné, est l'émission rétrograde de x' .

Premier terme de diffusion.

Ecrivons explicitement $u^{(1)}$

$$(5.1) \quad u^{(1)}(x') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{x'^0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} K[u^{(0)}] dx^0 d\theta d\varphi$$

où $[u^{(0)}]$ est la valeur de $u^{(0)}$ sur le conoïde $\Gamma_{x'}^{-}$; soit $x(x', x^0, \theta, \varphi)$ un point de ce conoïde :

$$(5.2) \quad [u^{(0)}] = u^{(0)}(x(x', x^0, \theta, \varphi)) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{x^0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Sigma[f] d\bar{x}^0 d\bar{\theta} d\bar{\varphi}$$

où $[f]$ est la valeur de f sur le conoïde Γ_x^{-} ; $\bar{x}(x, \bar{x}^0, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$ désignant un point de ce conoïde :

$$(5.3) \quad [f] = f(\bar{x}(x, \bar{x}^0, \bar{\theta}, \bar{\varphi}))$$

$u^{(1)}$ peut donc s'écrire sous la forme d'une intégrale d'ordre six (où x désigne le point $x(x', x^0, \theta, \varphi)$).

$$(5.4) \quad u^{(1)}(x') = \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{x'^0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{x^0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} K(x', x^0, \theta, \varphi) \Sigma(x, x^0, \theta, \varphi) \\ f(\bar{x}(x, \bar{x}^0, \bar{\theta}, \bar{\varphi})) dx^0 d\theta d\varphi d\bar{x}^0 d\bar{\theta} d\bar{\varphi}.$$

Prenons pour nouvelles variables les quatre coordonnées

$$(5.5) \quad \bar{x}^x = \bar{x}^x(x(x', x^0, \theta, \varphi), \bar{x}^0, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$$

et conservons les variables θ, φ .

Pour θ et φ fixés, le domaine d'intégration des variables $\bar{x}^z$; coordonnés du point $\bar{x}$ est l'émission $E_{\bar{x}}^-$, en effet, pour θ et φ fixes, $x(x', x^0, \theta, \varphi)$ décrit une bicaractéristique de $\Gamma_{x'}^-$, sous des hypothèses de régularité sur les conoïdes caractéristiques (toujours réalisées dans un domaine suffisamment

petit pour une métrique régulière, cf. M. RIESZ ([6]), la correspondance entre le domaine $x^0 < x'^0$, $\bar{x}^0 < x^0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ des variables x^0 , $\bar{x}^0$, θ , φ et le domaine $E_{\bar{x}}^-$ des variables $\bar{x}^z$ est biunivoque (sauf pour la bicaractéristique envisagée, de paramètres θ , φ , de $\Gamma_{x'}^-$).

On pourra donc écrire

$$(5.6) \quad u^{(1)}(x') = \int_{E_{x'}^-} E_{-}^{(1)}(x', \bar{x}) f(\bar{x}) d\bar{x}$$

où $E_{-}^{(1)}(x', \bar{x})$ est la fonction de support (pour x' fixé) $E_{\bar{x}}^-$, premier terme de diffusion de la solution élémentaire:

$$(5.7) \quad E_{-}^{(1)}(x', \bar{x}) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} K(x', x^0, \theta, \varphi) \Sigma(x, \bar{x}^0, \bar{\theta}, \bar{\varphi}) |\mathfrak{D}^{-1}| d\theta d\varphi$$

où $\mathfrak{D}$ est le jacobien de la transformation $\bar{x}^z \rightarrow \bar{x}^z(x^0, \bar{\theta}, \bar{\varphi}, \bar{x}^0)$.

Dans l'intégrale x^0 , $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}$ sont à exprimer à l'aide de $\bar{x}^z$, θ , φ , par les

équations 5.5 x étant à remplacer par $x(x', x^0, \theta, \varphi)$: le point x décrit l'intersection des conoïdes $\Gamma_{x'}^-$ et Γ_x^+ .

Pour $x' \neq \bar{x}$, $E^{(1)}(x', \bar{x})$ est une fonction continue et bornée de support $E_{x'}$; en effet:

$$(5.8) \quad \mathfrak{D} = \frac{D(\bar{x}^0)}{D(x^0, \bar{\theta}, \bar{\varphi}, x^0)} = \frac{D(\bar{x}^i)}{D(x^0, \bar{\theta}, \bar{\varphi})}.$$

Pour un espace-temps statique, les fonctions $\bar{x}^i$ ne dépendent de x^0 et $\bar{x}^0$ que par l'intermédiaire de $x^0 - \bar{x}^0$ et on a:

$$(5.9) \quad \mathfrak{D} = \bar{\Delta} = (x^0 - \bar{x}^0)^2 \sin \bar{\theta} \bar{D}$$

où D est sur V_4 , continu, borné, et $D > a > 0$. Nous supposons (hypothèse sur la régularité des conoïdes toujours réalisée dans un domaine assez petit), qu'il existe des nombres a et A tels que:

$$(5.10) \quad A > \frac{\mathfrak{D}}{(x^0 - \bar{x}^0)^2 \sin \bar{\theta}} > a > 0$$

soit:

$$A > \frac{\mathfrak{D}}{\Delta} > a > 0.$$

Rappelons que les fonctions Σ et K sont ici:

$$(5.11) \quad \Sigma = P\bar{\Delta}(g^{00} + g^{i0}\bar{p}_i)_{\Gamma_x}^{-1}$$

$$(5.12) \quad K = M\Delta(g^{00} + g^{i0}p_i)_{\Gamma_{x'}}^{-1}$$

d'où:

$$K \Sigma \mathfrak{D}^{-1} = M\bar{P}(T^0)_{\Gamma_x}^{-1}(T^0)_{\Gamma_{x'}}^{-1} \frac{\Delta}{\mathfrak{D}}$$

$$|K \Sigma \mathfrak{D}^{-1}| \leq |M\bar{P}T^0_{\Gamma_x}^{-1}T^0_{\Gamma_{x'}}^{-1}| \frac{\Delta}{a}$$

or

$$\Delta = (x^0 - \bar{x}^0)^2 \sin \theta D$$

$$P = \left| \frac{\sin \theta}{\Delta} \right|^{1/2} = \frac{1}{(x^0 - \bar{x}^0)D}$$

où D et $M(x^0 - \bar{x}^0)^2$ sont continus et bornés.

Il existe donc un nombre m tel que:

$$|K \Sigma \mathfrak{D}^{-1}| \leq \frac{m \sin \theta}{x^0 - \bar{x}^0}.$$

On en déduit que $E^{(1)}(x', \bar{x})$ est borné si $\bar{x} \notin \Gamma_{x'}$ puisque $x \in \Gamma_{x'} \cap \Gamma_{\bar{x}}$ $x - \bar{x}^0$ ne s'annule pas).

On montre que $E^{(1)}(x', x)$ est encore borné si $\bar{x} \in E_{x'}$ et $\bar{x} \rightarrow \Gamma_{x'}$ (mais $\bar{x} \neq x'$) plus précisément on obtient une majoration de la forme ⁽⁹⁾

$$|E^{(1)}(x', \bar{x})| \leq \frac{n}{x'^0 - \bar{x}^0}$$

⁽⁹⁾ Étant donnés les 2 conoïdes $\Gamma_{x'}$, $\Gamma_{\bar{x}}(\bar{x} \in E_{x'})$ on peut par un changement de coordonnées régulier, les transformer simultanément en 2 cônes isotropes de l'espace de MINKOVSKI. Pour ces cônes on trouve que:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \Gamma_{x'}} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{x^0 - x'^0} d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{x'^0 - \bar{x}^0}$$

6. Termes de diffusion successifs:

On montre, par des raisonnements analogues, que:

$$u^{(2)}(x') = \int_{E_{x'}} E^{(2)}(x', x) f(x) dx$$

où

$$(6.1) \quad E^{(2)}(x', \bar{x}) = \iiint_{(Vx', \bar{x})} K(x', x^0, \theta, \varphi) E^{(1)}(x, \bar{x}) dx^0 d\theta d\varphi$$

où $x = x(x', x^0, \theta, \varphi)$ et $V(x', \bar{x})$ est le domaine des paramètres x^0, θ, φ

correspondant à la portion du conoïde $\Gamma_{x'}^-$ limité par son sommet et son intersection avec $\Gamma_{x'}^+$.

Il résulte de la majoration obtenue pour $E^{(1)}(x', x)$ que $E_{(x', \bar{x})}^{(2)}$ est une fonction continue et bornée ⁽¹⁰⁾ de support $E_{x'}^-$.

⁽¹⁰⁾ $E^{(2)}(x', \bar{x})$ vérifie une majoration de la forme

$$|E^{(2)}(x', \bar{x})| \leq 2\pi m \int_0^\pi \int_{x'^0}^{X_0} \frac{\sin \Theta}{x^0 - \bar{x}^0} dx^0 d\Theta$$

où X_0 est le point d'intersection de la bicaractéristique $(\Theta, 0)$ de $\Gamma_{x'}$ avec $\mathbb{I}_{\bar{x}}$; $E^{(2)}(x', \bar{x})$ est donc borné (cf. Note précédente).

Les termes de diffusion successifs sont alors tous des fonctions continues et bornées de support $E_{x'}^-$ données par:

$$(6.2) \quad E^{(n+1)}(x'; \bar{x} = \iiint_{V(x', \bar{x})} K(x', x^0, \theta, \varphi) E^{(n)}(x, \bar{x}) dx^0 d\theta d\varphi$$

7. - Comportement asymptotique des termes de diffusion.

Les variétés considérées seront toujours globalement hyperboliques au sens de J. LERAY.

1°) Supposons que V_4 soit, en dehors de l'émission $\varepsilon_{x_0}^+$ d'un point x_0 , identique à l'extérieur d'un demi cône élémentaire $\Gamma_{x_0}^+$ de l'espace de Minkowski. Quelle que soit la ligne de temps décrite par x' quand x' sera assez loin dans le passé il sera dans la partie minkovskienne de V_4 si cette ligne est alors uniformément temporelle (tangente intérieure à un cône fixe intérieur au cône minkovskien, c'est-à-dire la vitesse de la particule représentée par x' ne tend pas vers la vitesse de la lumière) x' sera dans $E_{x_0}^-$ quand il sera assez loin dans le passé; $\Gamma_{x'}^+$ ne rencontrant pas $E_{x_0}^+$ sera alors le cône minkovskien et la solution élémentaire $E_+(x', x)$ coïncidera avec la solution élémentaire de l'équation des ondes, de support $\Gamma_{x'}^+$. Les termes de diffusion s'annuleront donc sur une trajectoire temporelle dès qu'elle sera suffisamment éloignée dans le passé.

2°) Variété homéomorphe à R_4 uniformément hyperbolique

La condition d'hyperbolicité globale de J. LERAY est que les cônes $g_{\alpha\beta}(x)X^\alpha X^\beta \geq 0$, considérés comme ayant un même sommet, sont intérieurs à un même cône Γ_A .

Nous supposerons de plus que ces cônes ont une intersection non vide Γ_B , nous pourrons toujours prendre pour équations de ces cônes (de sommet 0)

$$(7.1) \quad \Gamma_A: \{ \Sigma (x^i)^2 \}^{1/2} \leq A \mid x^0 \mid$$

$$(7.2) \quad \Gamma_B: \{ \Sigma (x^i)^2 \}^{1/2} \leq B \mid x^0 \mid$$

A et B étant 2 constantes positives ($A > B$).

Les coordonnées x^0, x^i sont respectivement (et globalement) temporelles et spatiales.

Nous dirons que V_4 est alors «uniformément hyperbolique». Le conoïde caractéristique de sommet x' d'une telle variété est compris entre les deux cônes $\Gamma_{x'}^A$ et $\Gamma_{x'}^B(B)$ donc vérifie les inégalités

$$(7.3) \quad B \mid x^0 - x'^0 \mid \leq \{ \Sigma (x^i - x'^i)^2 \}^{1/2} \leq A \mid x^0 - x'^0 \mid$$

les cosinus directeurs p_i vérifiant le inégalités

$$(7.4) \quad \frac{1}{A} \leq \Sigma (p_i)^2 \leq \frac{1}{B}$$

8. - Etude différentielle du conoïde caractéristique d'une variété à comportement asymptotique minkovskien.

Nous supposerons que, outre l'hypothèse d'uniforme hyperbolicité faite au paragraphe précédent, la métrique vérifie les hypothèses de comportement asymptotique suivantes:

1) Il existe une fonction positive bornée décroissante et sommable telle que sur V_4

$$(8.1) \quad \mid \partial_\lambda g_{\alpha\beta} \mid \leq f(r) \quad r = \{ \Sigma (x^i)^2 \}^{1/2}$$

où

$$(8.2) \quad r f(r) \leq m \quad \text{dès que } r \geq R$$

$$(8.3) \quad \int_0^\infty f(r) dr \leq \mu$$

m et μ étant des constantes > 0 , μ sera pris dans la suite suffisamment petit (dépendant des bornes A et B).

Les inégalités (8.1), (8.2) résultent des hypothèses classiques de comportement asymptotique minkovskien avec ou sans radiation, l'inégalité (8.3) de ces hypothèses en excluant la présence de radiation, (mais est un peu moins restrictive que l'hypothèse classique ⁽¹¹⁾)

$$|\partial_\lambda g_{\alpha\beta}| \leq M/r^2 \text{ pour } r \geq R.$$

On déduit de 8.1, 8.2, 8.3 que pour tout x' il existe une fonction $F_{x'}(\rho)$ positive, bornée et sommable telle que, si:

$$(8.4) \quad \rho = \{ \Sigma (x^i - x'^i)^2 \}^{1/2} \quad |\partial_\lambda g_{\alpha\beta}| \leq F_{x'}(\rho)$$

$$(8.5) \quad \int_0^\infty F_{x'}(\rho) d\rho \leq 2\mu$$

$$(8.6) \quad \rho F_{x'}(\rho) \leq 2m \quad \text{si} \quad \rho \geq R_{x'}$$

il suffit en effet de prendre

$$F_{x'}(\rho) = f(|\rho - \{ \Sigma (x'^i)^2 \}^{1/2}|)$$

pour que les inégalités 8.4, 8.5, 8.6 soient vérifiées, puisque, pour tout couple de points x et x'

$$r \geq |\rho - \{ \Sigma (x'^i)^2 \}^{1/2}|$$

donc, f étant décroissante

$$f(r) \leq F_{x'}(\rho)$$

d'autre part

$$\int_0^\infty F_{x'}(\rho) d\rho \leq \int_0^\infty f(u) du \leq 2\mu$$

et enfin, pour $\rho \geq 2 \{ \Sigma (x'^i)^2 \}^{1/2}$

$$\rho F_{x'}(\rho) \leq \rho f\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

$$(8.6) \quad \rho F_{x'}(\rho) \leq 2m \quad \text{pour} \quad \rho \geq \text{Max} \{ 2R, 2[\Sigma (x'^i)^2]^{1/2} \}.$$

⁽¹¹⁾ cf. LICHNEROWICZ - Problèmes globaux en Mécanique Relativiste, Hermann 1939.

Si x' est contenu dans un domaine «compact dans l'espace» de la forme $\{\Sigma(x'^i)^2\} \leq R$, on aura l'inégalité (8.6) uniformément en x' .

Nous supposerons de même, pour les dérivées secondes;

$$(8.7) \quad |\partial^2_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta}| \leq g(r)$$

où $g(r)$ est une fonction positive, bornée, décroissante

$$(8.8) \quad |g(r)| \leq n$$

et dont le produit par r est sommable, soit:

$$(8.9) \quad \int_0^\infty r g(r) dr \leq m.$$

On montre alors comme précédemment que, quel que soit le point x

$$g(r) \leq g(|\rho - \Sigma(x'^i)|)$$

et si x' est dans un domaine compact dans l'espace $K_R \{ \Sigma(x'^i)^2 \leq R \}$

$$\int_0^\infty \rho g(|\rho - \Sigma(x'^i)^2|) d\rho \leq \int_0^{2R} \rho n d\rho + \int_{2R}^\infty \rho g\left(\frac{\rho}{2}\right) d\rho \leq n \frac{R^2}{2} + 2m$$

Les dérivées $|\partial^2_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta}|$ vérifient donc, pour tout x' dans K_R

$$|\partial^2_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta}| \leq G(\rho)$$

où $G(\rho)$ vérifie des inégalités analogues à (8.8) et (8.9).

9. - On déduit alors des inégalités (7.3) que, sur tout bicaractéristique issue d'un point x' de K_R les quantités $|x'^0 - x^0| |\partial_\lambda g_{\alpha\beta}|$ sont uniformément bornées, $|\partial_\lambda g_{\alpha\beta}|$ et $|x'^0 - x^0| |\partial^2_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta}|$ étant uniformément sommables: ces propriétés vont nous permettre de montrer que sur tout conoïde $\Gamma_{x'}$ de sommet $x' \in K_R$ les dérivées partielles de x^i et p^i par rapport aux variables surabondantes p_i^0 vérifient des inégalités de la forme

$$(9.1) \quad \left| \frac{\partial x^i}{\partial p_j^0} \right| \leq A' |x'^0 - x^0|, \quad \left| \frac{\partial p_i}{\partial p_j^0} \right| \leq B'$$

si les intégrales sur les bicaractéristiques issues du point x'

$$\int_{x'^0}^{+\infty} |\partial_\alpha g_{\beta\gamma}| dx^0 \quad \text{et} \quad \int_{x'}^{+\infty} |x'^0 - x^0| |\partial^2_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}| dx^0$$

sont suffisamment petites.

En effet:

$$y^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial p^0_j} \quad \text{et} \quad z^i_j = \frac{\partial p^i}{\partial p^0_j}$$

vérifient les relations différentielles déduites des équations vérifiées par x^i et p_i (cf. § 3), sur $\Gamma_{x'}$:

$$\frac{dy^i_j}{dx^0} = \frac{\partial X^i}{\partial x^h} y_j^h + \frac{\partial X_i}{\partial p_h} z_j^h$$

(9.2)

$$\frac{dz^i_j}{dx^0} = \frac{\partial P_i}{\partial x^h} y_j^h + \frac{\partial P_i}{\partial p_h} z_j^h.$$

En se reportant aux expressions de X_i et P_i on voit que, d'après les hypothèses du § 7, $\frac{\partial X_i}{\partial p_h}$ est borné sur V_4 : $\left| \frac{\partial X_i}{\partial p_h} \right| < M$ et que, d'après les hypothèses du 8, il existe un nombre $N > 0$ tel que, sur $\Gamma_{x'}$

$$(9.3) \quad |x'^0 - x^0| \left| \frac{\partial X_i}{\partial x^h} \right| \leq N, \quad \int_{x'^0}^{+\infty} \left| \frac{\partial X_i}{\partial x^h} \right| dx^0 \leq N, \quad \int_{x'^0}^{+\infty} \left| \frac{\partial P_i}{\partial p_h} \right| dx^0 \leq N,$$

$$\int_{x'^0}^{+\infty} |x'^0 - x^0| \left| \frac{\partial P_i}{\partial x^h} \right| dx^0 \leq N.$$

Le système 9.2 admet une solution unique correspondant aux valeurs initiales

$$(y^i_j)_{x^0=x'^0} = 0, \quad (z^i_j)_{x^0=x'^0} = \delta^i_j$$

qu'on obtient par approximations successives.

La 1^{re} approximation (valeurs initiales) vérifie (9.1) si $B' \geq 1$, montrons que si la n^e approximation vérifie ces inégalités (9.1) il en est de même de la $(n+1)^{eme}$ (quel que soit n) moyennant un choix convenable des bornes

A et B' si N est assez petit par rapport à M qui ne dépend que des bornes de la métrique et non de ses dérivées

$$(9.4) \quad \left| \frac{dy_j^{i(n+1)}}{dx^0} \right| \leq A'N + MB'$$

$$\left| \frac{dz_j^{i(n+1)}}{dx^0} \right| \leq A' |x^0 - x^0| \left| \frac{\partial P_i}{\partial x^h} \right| + B' \left| \frac{\partial P_i}{\partial p_h} \right|.$$

On en déduit les inégalités (9.1) pour la $(n+1)^{\text{ème}}$ approximation si:

$$(9.5) \quad \begin{aligned} A'N + MB' &\leq A' \\ 1 + A'N + B'N &\leq B' \end{aligned}$$

M et N étant des nombres > 0 donnés (et $N < 1$ pour que les inégalités puissent être réalisées), on voit que l'on pourra trouver A' et $B' \geq 1$ satisfaisant à (9.5); si le point d'insertion des droites

$$A'N + MB' = A'$$

$$1 + A'N + B'N = B'$$

dans le plan (A', B') est dans le premier quadrant; c'est-à-dire si:

$$(9.6) \quad (N-1)^2 - MN > 0.$$

Les solutions (A', B') seront alors représentées par un point de l'angle L'inégalité (9.6) avec $N < 1$ est équivalente à

$$N < \frac{M+2 - \sqrt{(M+2)^2 - 4}}{2}.$$

Il suffira en particulier que:

$$N < \frac{1}{M+2}$$

pour que les inégalités (9.5) aient des solutions > 0 , avec $B' \geq 1$ et que (9.1) soit vérifié avec de telles bornes A', B' .

c) On montre de même que, moyennant des inégalités convenables pour les dérivées 3^{ème} et 4^{ème} de la métrique (dont les bornes n'ont d'ailleurs pas besoin ici, d'être supposées petites), il existe des nombres > 0 , A'' et B'' tel que:

$$\left| \frac{\partial^2 x^i}{\partial p_h^0 \partial p_k^0} \right| \leq A'' |x'^0 - x^0|, \quad \left| \frac{\partial^2 p_i}{\partial p_h^0 \partial p_k^0} \right| \leq B$$

$$\left| \frac{\partial^3 x^i}{\partial p_h^0 \partial p_k^0 \partial p_j^0} \right| \leq A'' |x'^0 - x^0|, \quad \left| \frac{\partial^3 p_i}{\partial p_h^0 \partial p_k^0 \partial p_j^0} \right| \leq B''$$

10. - Comportement de la paramétrix.

1) Il résulte des inégalités (9.1) que le déterminant

$$D = \frac{D(x^i)}{D(\mu_j)} \quad (\mu_j = \lambda p_j^0, \Delta = D \sin \theta)$$

déjà supposé non nul sur $\Gamma_{x'}$, est borné, et des inégalités (9.7) que

$$|x'^0 - x^0| \frac{\partial D}{\partial x^h} \quad \text{et} \quad |x'^0 - x^0|^2 \frac{\partial^2}{\partial x^h \partial x^k}$$

sont bornés ⁽¹²⁾ sur $\Gamma_{x'}$.

⁽¹²⁾ cf. les raisonnements faits dans [5] pour le calcul des dérivés partielles de D en particulier le fait que

$$\frac{\partial \lambda_u}{\partial x^h} = \frac{\Delta_h}{\Delta}, \quad \lambda_u = \Theta \quad \text{ou} \quad \varphi,$$

Δ_h^u mineur de Δ relativement à $\partial x^h / \partial \lambda_u$.

On a posé

$$\sigma = \frac{1}{\lambda D^{1/2}}$$

$$|x'^0 - x^0| \sigma, \quad |x'^0 - x^0|^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad |x'^0 - x^0|^3 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j}$$

sont donc bornés sur $\Gamma_{x'}$.

2) La matrice ω est solution du système différentiel linéaire

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = Q\omega.$$

Sous les hypothèses précédentes faites sur la métrique, les éléments de la matrice Q sont des fonctions sommables de λ sur $\Gamma_{x'}$, ω est donc borné sur $\Gamma_{x'}$. De même

$$|x'^0 - x^0| \frac{\partial \omega}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad |x'^0 - x^0|^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^j}$$

sont bornés sur $\Gamma_{x'}$.

On déduit alors des expressions (4.9) de P et M que:

$$|x'^0 - x^0| P \quad \text{et} \quad |x'^0 - x^0|^3 M$$

sont continus et bornés sur $\Gamma_{x'}$, uniformément pour $x' \in K_R$

11. - Etude du premier terme de diffusion.

Sous les hypothèses du § 5 il existe $\alpha > 0$ tel que sur $\Gamma_{x'}$

$$|K \Sigma \mathfrak{D}^{-1}| \leq \alpha |MP\Delta|,$$

d'où, d'après les majorations précédentes l'existence de B tel que

$$|K \Sigma \mathfrak{D}^{-1}| \leq \frac{\beta \sin \theta}{|x'^0 - x^0| |x^0 - \bar{x}^0|}$$

Sous les hypothèses de régularité faites sur les conoïdes caractéri-

stiques, on voit d'autre part que pour x fixé, x' assez loin dans le passé

sur une ligne temporelle uniformément intérieure au cône $\Gamma_{B,x}$ ⁽¹³⁾, il existe des nombre > 0 : α et α' tels que $(x \in \Gamma_{x'}^+ \cap \Gamma_{\bar{x}}^-)$

$$|x'^0 - x^0| \geq \alpha |x'^0|, \quad |\bar{x}^0 - x^0| \geq \alpha' |x'^0|.$$

On déduit alors de l'expression (5.7) que, sur une ligne temporelle, pour $\bar{x}$ fixé, il existe un nombre $\gamma > 0$ tel que

$$|E_+^{(1)}(x', \bar{x})| \leq \frac{\gamma}{(x'^0)^2} \quad \text{si} \quad |x'^0| > X$$

(et si x' ne s'éloigne pas à l'infini dans l'espace; $x' \in K_R$ a été supposé pour obtenir les bornes α, β, γ).

⁽¹³⁾ Le résultat est alors immédiat en écrivant l'intersection de cônes $\Gamma_{c+}^{x'} \cap \Gamma_{A-}^{\bar{x}}$ et $\Gamma_{c-}^{\bar{x}} \cap \Gamma_A$.

$E^{(1)}(x', \bar{x})$ étant d'autre part continu et borné sauf pour $x' = \bar{x}$ on voit que $E^{(1)}(x', \bar{x})$ sera une fonction sommable de x' pour $\bar{x}$ fixé.

12. - Etude des autres termes de diffusion.

Les majorations établies ne permettent pas de montrer la sommabilité des termes de diffusion suivants sur une ligne temporelle même avec les restrictions précédentes, les intégrales qui les donnent sont prises en effet sur toute la portion du cône Γ_x comprise entre son sommet et son intersection avec Γ_x^- : la majoration donnée pour $E^{(1)}(x, \bar{x})$ au § précédent n'est pas valable pour x voisin de Γ_x^- .

On pourrait cependant conclure à la sommabilité de $E_{(2)}$ et des termes de diffusion successifs si K était une fonction sommable de x^0 , mais il n'en est pas en général ainsi, même sous les hypothèses de comportement asymptotique minkovskien faites sur la variété, ni même si la variété est minkovskienne en dehors d'un compact uniformément sur les sections d'espace.

I

Potentiel électromagnétique sur un espace temps riemannien.

13. - Potentiel créé par une particule chargée.

Soit $\gamma, x = a(s)$, une courbe de V_4 continuellement différentiable, partout orientée dans le temps, trajectoire d'une particule ponctuelle de charge constante e . Soit J le courant correspondant ⁽¹⁴⁾:

$$(13.1) \quad J(x) = e\delta(x - a(s))\dot{a}(s)$$

$\delta(x - a(s))$ est la densité de DIRAC sur γ définie par ($\varphi \in \mathfrak{D}$)

$$\langle \delta(x - a(s)), \varphi(x) \rangle = \int_{\gamma} \varphi(a(s)) ds$$

J est conservatif dans tout ouvert où γ a une frontière nulle

$$\nabla_a J^a = 0,$$

⁽¹⁴⁾ DE WITT and BREHME [7] $\dot{a}(s)$ désigne la dérivée $\frac{da(s)}{ds}$.

en effet ⁽¹⁵⁾

$$\begin{aligned} \langle \nabla_a J^a, \varphi \rangle &= - \langle J^a, \partial_a \varphi \rangle = - e \langle \delta(x - a(s)) \dot{a}^a(s), \partial_a \varphi \rangle \\ &= - e \int_{\gamma} \partial_a \varphi(a(s)) \dot{a}^a(s) ds = - e \int_{\gamma} d\varphi \end{aligned}$$

J est conservatif sur V_4 si γ est fermé où tend vers l'infini ⁽¹⁶⁾.

Si on veut définir le potentiel retardé normalisé correspondant Φ comme en relativité restreinte, on prendra pour Φ le produit de composition de VOLTERRA

$$\Phi(x) = \int E^+(x', x) J(x') dx'$$

dont la signification est la suivante: si φ est un vecteur appartenant à $\mathfrak{D}$

$$\langle \Phi(x), \varphi(x) \rangle = \langle J(x'), \Theta \rangle$$

où

$$\Theta(x') = \int E^+(x', x) \varphi(x) dx$$

$\Theta(x')$ est une fonction vectorielle continue, mais qui n'est pas à support compact (elle est seulement à support compact vers le futur) dans le cas d'un espace temps courbe où le support de $E^+(x', x)$ est non seulement $\Gamma_{x'}^+$ mais aussi son intérieur. Si J n'est pas à support compact vers le passé, Φ n'est donc en général pas défini ⁽¹⁷⁾: il le sera cependant si la métrique de V_4 est minkovskienne en dehors de l'émission d'un point X , $\Theta(x')$ étant alors à support compact puisque pour x' assez loin dans le passé, le support de $E^+(x', x)$ est $\Gamma_{x'}^+$ et $\Gamma_{x'}$ ne rencontre pas le support de φ .

14. - Condition de normalisation:

Si Φ est défini, il satisfait à l'équation tensorielle de MAXWELL (vérification immédiate en utilisant les définitions) ⁽¹⁸⁾ pour un potentiel normalisé

$$\Delta \Phi = J.$$

⁽¹⁵⁾ Pour la dérivation covariante des tenseurs distributions sur une variété différentiable cf. LICHNEROWICZ [1].

⁽¹⁶⁾ Au sens de la structure différentiable.

⁽¹⁷⁾ Nous reviendrons sur cette question au § 16.

⁽¹⁸⁾ Δ est le Laplacien du § 1, ici sur les 1 tenseurs.

Montrons que, sous certaines conditions de convergence, Φ est effectivement normalisé, c'est-à-dire que :

$$\delta\Phi \equiv -\nabla_a \Phi^a = 0$$

désignant par $d\varphi$ le vecteur de composantes $\partial_a \varphi$, on a, pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}$

$$(14.1) \quad \langle \delta\Phi, \varphi \rangle = \langle \Phi, d\varphi \rangle = \langle J, \psi \rangle$$

où

$$\psi(x) = \langle E^+(x', x), d\varphi(x) \rangle = \langle \delta_x E^+(x', x), \varphi(x) \rangle$$

Les solutions élémentaires $E^+(x', x)$ et $E_{(0)}^+(x', x)$ relatives aux Laplaceiens sur les tenseur d'ordre 1 et sur les scalaires vérifiant les relations ⁽¹⁹⁾

$$\delta_x E^+(x', x) = d_{x'} E_{(0)}^+(x', x)$$

on a :

$$\psi(x') = d_{x'} \Theta(x')$$

où $\Theta(x')$ est la fonction à support compact vers le futur

$$\Theta(x') = \langle E_{(0)}^+(x', x), \varphi(x) \rangle$$

d'où finalement, d'après 14.1 et 13.1

$$\begin{aligned} \langle \delta\Phi, \varphi \rangle &= \langle J, d_{x'} \Theta(x') \rangle = e \int_{\gamma} \dot{a}^a(s) (\partial_a \Theta) ds \\ &= e \int_{\gamma} d\Theta. \end{aligned}$$

D'où $\delta\Phi = 0$ si γ est fermé ou si Θ s'annule sur la frontière de γ : il n'en sera pas ainsi en général si γ tend vers l'infini. Cependant Θ sera à support compact vers le passé, donc à support compact, si V_4 est Minkowski dans le complémentaire de l'émission d'un point x : Φ sera alors normalisé pour γ s'éloignant à l'infini.

15. - Terme principal du potentiel.

On a vu que $E^+(x', x)$ était la somme d'une série convergente de distributions

$$E^+(x', x) = E_0^+(x', x) + E_1^+(x', x) + \dots + E_n^+(x', x) + \dots$$

⁽¹⁹⁾ cf. LICHNEROWICZ [1].

où $E_o^+(x', x)$ est une mesure portée par le cône $\Gamma_{x'}^+$, telle que, si le vecteur $f \in \mathfrak{D}$

$$u_o(x') = \langle E_o^+(x', x), f(x) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{x^0}^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Sigma(x', x^0, \theta, \varphi) [f] dx^0 d\theta d\varphi.$$

Le potentiel correspondant est:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_o(x), f(x) \rangle &= \langle J(x'), u_o(x') \rangle = \\ &= \frac{e}{4\pi} \int_\gamma \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{x^0}^\infty \Sigma(a(s), x^0, \theta, \varphi) [f] dx^0 d\theta d\varphi ds \end{aligned}$$

où $[f]$ est la valeur de f en un point x du cône $\Gamma_{x'}^+$ de sommet $x' = a(s)$

$$(15.1) \quad x = x(a(s), x^0, \theta, \varphi).$$

Prenons pour nouvelles variables d'intégration les quatre coordonnées x^x au lieu de x^0, θ, φ, s : un tel changement de variables est régulier (au moins localement) en dehors de γ . Posons:

$$\frac{D(x^x)}{D(x^0, \theta, \varphi, s)} = \frac{D(x^i)}{D(\theta, \varphi, s)} = \Delta_s.$$

Sous une hypothèse de régularité globale sur les cônes Γ^+ de sommet décrivant γ on trouve ainsi pour Φ_o la fonction continue et bornée en dehors de γ

$$\Phi_o(x) = e \frac{\Sigma \dot{a}(s)}{\Delta_o}$$

où s, x^0, θ, φ sont donnés en fonction de x par la transformation inverse de (15.1) (en particulier le point $a(s)$ est l'intersection de Γ_x^- avec γ).

Pour un espace temps de MINKOVSKI on retrouve ainsi le potentiel de LIÉNARD-WIECHERT

$$\Phi_o(x) = e \frac{a(s)}{\dot{a}(s) \cdot (x - a(s))}$$

16. - Termes de diffusion.

Nous avons vu que les termes suivants $E_1^+(x', x), \dots, E_n^+(x', x)$ de la série (4.15) sont des fonctions continues et bornées (sauf peut-être $E_1(x', x)$ pour $x' = x$).

Les potentiels correspondants seront donnés par les intégrales usuelles

$$\Phi_n(x) = e \int_{\gamma} E_{(n)}^+(a(s), x) \dot{a}(s) ds.$$

Si $\gamma \rightarrow \infty$ l'intégrale ne sera en général pas bornée pour $n > 1$ (cf. § 11-12). Si γ est à support limité dans le passé

$$\Phi_{(1)}(x) = e \int_{\gamma} E_{(1)}^+(a(s), x) \dot{a}(s) ds$$

est effectivement une première approximation du potentiel diffusé.

III

Espaces à courbure constante.

17. - Prenons la métrique de de Sitter sous la forme :

$$(17.1) \quad ds^2 = dt^2 - e^{\Lambda t} \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2$$

avec $\Lambda > 0$ (les ds^2 avec $\Lambda < 0$ s'en déduisent par changement de t en $-t$).

L'espace temps de SITTER est un espace à courbure constante. Son tenseur de RIEMANN vérifie

$$R_{\alpha\beta, \lambda\mu} = -\frac{\Lambda^2}{4} (g_{\alpha\beta} g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu} g_{\beta\lambda})$$

d'où pour le tenseur de RICCI et la courbure riemannienne

$$(17.2) \quad R_{\alpha\lambda} = -\frac{3\Lambda^2}{4} \quad R = -3\Lambda^2.$$

On trouve par ailleurs, pour la forme choisie de la métrique, que tous

les symboles de CHRISTOFFEL sont nuls sauf

$$(17.3) \quad \Gamma_{ii}^0 = + \frac{\Lambda}{2} e^{\Lambda t}, \quad \Gamma_{\alpha i}^i = \frac{\Lambda}{2}.$$

Les équations aux dérivées partielles satisfaites par les différents propagateurs ont en commun les termes du second ordre, qui sont:

$$(17.4) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} - e^{-\Lambda t} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$$

18. - Conoïde caractéristique Γ :

Le système (3.1) s'écrit ici:

$$(18.1) \quad \frac{dx_i}{-2e^{-\Lambda t} p_i} = \frac{dt}{2} = \frac{dp_i}{\Lambda p_i}$$

avec $dt + p_i dx^i = 0$

$$(18.2) \quad F = 1 - e^{-\Lambda t} \sum_{i=1}^3 (p_i)^2 = 0$$

le conoïde $\Gamma_{x'}$, de sommet $x'^i t'$ a donc pour équations paramétriques

$$(18.3) \quad p_i = k_i e^{\frac{\Lambda}{2}}, \text{ avec } \sum_{i=1}^3 k_i^2 = 1$$

$$x^i = x'^i + \frac{2}{\Lambda} k_i \left(e^{-\frac{\Lambda}{2} t} - e^{-\frac{\Lambda}{2} t'} \right).$$

On posera

$$(18.4) \quad k_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad k_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad k_3 = \cos \theta.$$

On pourra aussi poser, sur $\Gamma_{x'}$

$$(18.5) \quad \frac{2}{\Lambda} \left(e^{-\frac{\Lambda}{2} t} - e^{-\frac{\Lambda}{2} t'} \right) = r = \left\{ \sum_{i=1}^3 (x^i - x'^i)^2 \right\}^{1/2}.$$

On aura alors sur $\Gamma_{x'}(t < t')$

$$(18.6) \quad t = -\frac{2}{\Lambda} \log \left(e^{-\frac{\Lambda}{2} t'} + \frac{\Lambda}{2} r \right)$$

et sur

$$(18.7) \quad \begin{aligned} & \Gamma_{x'}^+(t > t') \\ & t = -\frac{2}{\Lambda} \log \left(e^{-\frac{\Lambda}{2} t'} - \frac{\Lambda}{2} r \right) \end{aligned}$$

19. - Paramétrix, première approximation.

Désignons par Δ le déterminant fonctionnel, sur $\Gamma_{x'}$.

$$(19.1) \quad \Delta = \frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(t, \theta, \varphi)}$$

on trouve

$$(19.2) \quad \Delta = \frac{4}{\Lambda^2} \left(e^{-\frac{\Lambda}{2} t} - e^{-\frac{\Lambda}{2} t'} \right)^2 e^{-\frac{\Lambda}{2} t} \sin \theta$$

La première approximation de la paramétrix est alors

$$(19.3) \quad \sigma = \left| \frac{\sin \theta}{\Delta} \right|^{1/2} = \frac{\Lambda}{2} \frac{e^{\frac{\Lambda}{4} t}}{\left| e^{-\frac{\Lambda}{2} t} - e^{-\frac{\Lambda}{2} t'} \right|}$$

A - PROPAGATEUR SCALAIRE

L'opérateur différentiel correspondant au propagateur scalaire est le usuel de la métrique riemannienne $\nabla_a \nabla^a$; on trouve ici:

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - e^{-\Lambda t} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} + \frac{3\Lambda}{2} \frac{\partial}{\partial t}$$

20. - Paramétrix.

La paramétrix P relative au point x^0 , est une fonction sur $\Gamma_{x'}$ de la forme:

$$(20.1) \quad P = \sigma \omega$$

où ω est solution de l'équation différentielle

$$(20.2) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{5\Lambda}{4} \omega.$$

Prenant $\omega = 1$ pour $t = t'$, on a :

$$(20.3) \quad \omega = e^{\frac{5\Lambda}{4}(t-t')}$$

d'où pour $t < t'$ ($\Gamma_{x'}$)

$$(20.4) \quad P = \frac{\Lambda}{2} e^{\frac{5\Lambda}{4}t'} \frac{e^{\frac{3\Lambda}{2}t}}{\left| e^{-\frac{\Lambda}{2}t} - e^{-\frac{\Lambda}{2}t'} \right|}$$

et pour $t > t'$ ($\Gamma_{x'}^+$)

$$(20.5) \quad P_+ = \frac{\Lambda}{2} e^{-\frac{5\Lambda}{4}t'} \frac{e^{\frac{3\Lambda}{2}t}}{e^{-\frac{\Lambda}{2}t'} - e^{-\frac{\Lambda}{2}t}}.$$

Toute fonction u deux fois différentiable, solution de :

$$(20.6) \quad Lu = f$$

vérifie, sur $\Gamma_{x'}$, l'équation ⁽²⁰⁾

$$(20.7) \quad P[Lu] \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} E^i + [u]M = P[f]$$

où, ici :

$$(20.8) \quad M = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 ([e^{-\Lambda t}] P)}{\partial x^{i^2}}$$

d'où, avec la définition (18.5) de r , sur $\Gamma_{x'}^-$

$$(20.9) \quad M = - e^{-\frac{5\Lambda}{4}t} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{e^{-\frac{\Lambda}{2}t'} + \frac{\Lambda}{2}r} \right)$$

21. - Relations intégrales sur $\Gamma_{x'}^-$:

Intégrons les relations (20.7) sur la partie $V_{x'}$ de $\Gamma_{x'}^-$ limitée à son sommet et à une variété d'espace S (par exemple $t = T < t'$) ; on trouve, par application de la formule de STOKES et passage à la limite

$$(21.1) \quad 4\pi e^{-\frac{3\Lambda}{4}t} u(x') = \iiint_{V_{x'}} \{ -M[u] + P[f] \} dx^1 dx^2 dx^3 + \iint_{S_{x'}} E^i n_i dS$$

où $S_{x'}$ désigne l'intersection de $\Gamma_{x'}^-$ et S , n_i et dS les cosinus directeurs et l'élément d'aire de $S_{x'}$ dans l'espace des variables x^i . On trouve, en passant

(⁹) Notations du § 4 et de [5].

aux variables t, θ, φ

$$(21.2) \quad 4\pi e^{-\frac{3\Lambda}{4}t} u(x') = \int_T^{t_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\Lambda}{2} [u] + [f] \right) P \Delta dt d\theta d\varphi - \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ [u] \frac{\Lambda}{2} e^{-\frac{5\Lambda}{4}t'} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{\frac{\Lambda}{2}t}}{e^{-\frac{\Lambda}{2}t} - e^{-\frac{\Lambda}{2}t'}} \right) - \frac{\partial [u]}{\partial x^i} e^{-\Lambda t} P \right\}_{t=T} \Delta d\theta d\varphi.$$

Si l'on prend $T = -\infty$, et $[u]$ et $\frac{\partial [u]}{\partial x^i}$ nuls pour $|T| > A$, A fixé, le deuxième membre se réduit à l'intégrale triple: on obtient ainsi, en prenant une fonction f à support compact, l'équation intégrale de VOLTERRA du § 4 (4.2).

$$(21.3) \quad u(x') = \frac{e^{\frac{3\Lambda}{2}t'}}{4\pi} \int_{-\infty}^{t'} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\Lambda^2}{2} [u] + [f] \right) P \Delta dt d\theta d\varphi$$

c'est-à-dire

$$(21.4) \quad u(x') = \frac{1}{2\pi\Lambda} \int_{-\infty}^{t'} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\Lambda^2}{2} [u] + [f] \right) \left(e^{\frac{\Lambda}{2}(t-t')} - e^{\Lambda(t-t')} \right) \sin \theta dt d\theta d\varphi$$

où, pour une fonction $f(x^i, t)$ quelconque

$$(21.5) \quad [f] = f \left(x^i + \frac{2}{\Lambda} k_i \left(e^{\frac{\Lambda}{2}t} - e^{-\frac{\Lambda}{2}t'} \right), t \right)$$

dont la résolution par approximations successives (cf. § 4) donne les produits scalaires

$$u^{(n)}(x') = \langle E^{(n)}(x', x), f(x) \rangle$$

déterminant les termes du développement en série de $E^-(x', x)$.

Pour obtenir $E^+(x', x)$ il faut considérer l'équation intégrale

$$(21.7) \quad u(x') = \frac{1}{2\pi\Lambda} \int_{t'}^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\Lambda^2}{2} [u] + [f] \right) \left(e^{\Lambda(t-t')} - e^{\frac{\Lambda}{2}(t-t')} \right) \sin \theta dt d\theta d\varphi$$

Remarque:

Le changement de variable et de fonction

$$(21.8) \quad u = e^{-\frac{\Lambda}{2}t} v, \quad \tau = \frac{2}{\Lambda} - \frac{\Lambda}{2} t$$

transforme l'équation $Lu = f$ en l'équation

$$(21.9) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^{i2}} = e^{\frac{3}{2}\Lambda t} \left(\frac{\Lambda^2}{2} u + f \right)$$

dont le premier membre est l'opérateur des ondes, appliqué à la fonction v .

Si au lieu de l'opérateur Δ nous associons à la métrique de de SITTER l'opérateur $\Delta - \frac{\Lambda^2}{2}$, les solutions élémentaires, dont aussi le propagateur, ont pour support le cône $\Gamma_{x'}$, et non son intérieur, le principe de HUYGHENS est vérifié l'opérateur, $\Delta - \frac{\Lambda^2}{2}$ se transforme en l'opérateur usuel des ondes par le changement de variables et de fonction indiqués).

Si on introduit le terme de masse $\frac{\Lambda^2}{2}$ dans l'équation du propagateur (on sait par ailleurs que Λ^2 est proportionnel à la constante cosmologique) on retrouve pour le champ scalaire les lois de propagation de l'espace de Minkovski.

B. - PROPAGATEURS TENSORIELS D'ORDRE UN

22. - Le LAPLACIEN de de RHAM-LICHTNEROWICZ pour les vecteurs (tenseurs d'ordre un) s'écrit :

$$(22.1) \quad (\Delta \varphi)_\beta = (d\delta\varphi + \delta d\varphi)_\beta = -\nabla^\rho \nabla_\rho \varphi_\beta + R_\beta^\nu \varphi_\nu.$$

Pour la métrique de de SITTER, ⁽²¹⁾ on obtient ainsi les composantes suivantes du Laplacien d'un vecteur φ

$$(22.2) \quad -(\Delta \varphi)_0 = \partial_{00}^2 \varphi_0 - e^{-\Lambda t} \sum_i \partial_{ii}^2 \varphi_0 + \frac{3\Lambda}{2} \partial_0 \varphi_0 + \Lambda e^{-\Lambda t} \sum_i \partial_i \varphi_i$$

et

$$(22.3) \quad -(\Delta \varphi)_i = \partial_{00}^2 \varphi_i - e^{-\Lambda t} \sum_j \partial_{jj}^2 \varphi_i + \frac{\Lambda}{2} \partial_0 \varphi_i + \Lambda \partial_i \varphi_0.$$

⁽²¹⁾ L'espace de de SITTER est conforme à l'espace de MINKOVSKI, mais le propagateur d'ordre 1, G_1 n'est pas invariant par transformation conforme, bien qu'il en soit ainsi des équations de MAXWELL: on déduit seulement de cette invariance que $d_x d_{x'}$, $G_1(x, x')$ est invariant par transformation conforme

L'effet de diffusion ne sera nul que sur un champ créé par un courant conservatif. Il ne disparaîtrait pas par exemple, pour le champ vectoriel C de la théorie de la création continue de BONDI, GOLD et HOYLE.

23. - Paramétrie.

La paramétrie $P_-(x', x)$ (respectivement $P_+(x', x)$), est une matrice dont les éléments sont en un point x' des fonctions sur le conoïde $\Gamma_{x'}$ (respectivement $\Gamma_{x'}^+$):

$$P = \sigma \omega$$

où σ est, sur $\Gamma_{x'}$, la fonction déjà trouvée

$$\sigma = \frac{\Lambda}{2} \frac{e^{\frac{\Lambda}{4}t}}{e^{-\frac{\Lambda}{2}t} - e^{-\frac{\Lambda}{2}t'}}$$

et ω une matrice 4×4 dont les éléments ω_α^β sont des fonctions continues et bornées sur Γ_x^- , solutions du système différentiel

$$(23.1) \quad \begin{aligned} \frac{d\omega_0^0}{dt} &= \frac{5\Lambda}{4} \omega_0^0 + \frac{\Lambda}{2} k_i e^{\frac{\Lambda}{2}t} \omega_0^i \\ \frac{d\omega_0^i}{dt} &= \frac{3\Lambda}{4} \omega_0^i + \frac{\Lambda}{2} k_i e^{-\frac{\Lambda}{2}t} \omega_0^0 \\ \frac{d\omega_0^i}{dt} &= \frac{5\Lambda}{4} \omega_0^i + \frac{\Lambda}{2} k_j e^{\frac{\Lambda}{2}t} \omega_0^j \\ \frac{d\omega_i^j}{dt} &= \frac{3\Lambda}{4} \omega_i^j + \frac{\Lambda}{2} k_j e^{-\frac{\Lambda}{2}t} \omega_i^0 \end{aligned}$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle

$$(23.2) \quad \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{A}(t)\omega$$

où $\mathcal{A}(t)$ est la matrice.

$$(23.3) \quad \mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} 5\frac{\Lambda}{4} & \frac{\Lambda}{2} k_1 e^{\frac{\Lambda}{2}t} & \frac{\Lambda}{2} k_2 e^{\frac{\Lambda}{2}t} & \frac{\Lambda}{2} k_3 e^{\frac{\Lambda}{2}t} \\ \frac{\Lambda}{2} k_1 e^{-\frac{\Lambda}{2}t} & \frac{3\Lambda}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\Lambda}{2} k_2 e^{-\frac{\Lambda}{2}t} & 0 & 3\frac{\Lambda}{4} & 0 \\ \frac{\Lambda}{2} k_3 e^{-\frac{\Lambda}{2}t} & 0 & 0 & 3\frac{\Lambda}{4} \end{pmatrix}$$

qu'on peut écrire sous la forme d'un produit

$$(23.4) \quad \mathcal{A}(t) = B(t) A B^{-1}(t)$$

où $B(t)$ est la matrice diagonale

$$(23.5) \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\Lambda}{2}t} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

et A la matrice symétrique, indépendante de t , invariante par rotation spatiale

$$(23.) \quad A = \frac{\Lambda}{2} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & \frac{3}{2} & & 0 \\ k_2 & & \frac{3}{2} & \\ k_3 & 0 & & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Posons, pour nouvelle inconnue, la matrice

$$(23.7) \quad \Omega = B^{-1}(t)\omega.$$

On déduit de (6.5) qu'elle vérifie l'équation différentielle à coefficients constants

$$(23.8) \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Lambda}{2} C \Omega$$

où C est la matrice symétrique indépendante de t :

$$(23.9) \quad C = \frac{\Lambda}{2} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

la solution Ω égale à Ω_0 pour $t = t'$ est:

$$(23.10) \quad \Omega = e^{\frac{\Lambda}{2} C(t-t')} \Omega_0$$

la matrice ω , qui pour $t = t'$ se réduit à la matrice unité, est donc:

$$(23.11) \quad \omega = B(t) e^{\frac{\Lambda}{2} C(t-t')} B^{-1}(t').$$

On montre que ω est proportionnelle au bitenseur de transport

$$(23.12) \quad \omega = e^{\frac{5\Lambda}{2} (t-t')} T$$

24. - Bitenseur de transport:

Le bitenseur de transport de composantes $t_{\alpha}^{\lambda'}(x, x')$ cf. de WITT [7]) vérifie les équations différentielles

$$(24.1) \quad u^{\mu} \nabla_{\mu} t_{\alpha'}^{\lambda} = 0$$

et la condition initiale

$$(24.2) \quad t_{\alpha'}^{\lambda}(y, x' = x) = \delta_{\alpha}^{\lambda}$$

où u^{μ} est le vecteur tangent à une géodésique d'origine x' . Pour une géodésique de longueur nulle (cf. § 8)

$$(24.3) \quad u^0 = 1, \quad u^i = -k_i e^{-\frac{\Lambda}{2} t}$$

et en prenant t pour paramètre sur cette géodésique

$$(24.4) \quad u^{\mu} \nabla_{\mu} t_{\alpha'}^{\lambda} = \frac{d}{dt} t_{\alpha'}^{\lambda} + u^{\mu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} t_{\alpha'}^{\nu} = 0$$

qui s'écrit sous forme matricielle

$$(24.5) \quad \frac{dT}{dt} = \mathcal{A}T$$

où $\mathcal{A}$ est la matrice

$$(24.6) \quad \mathcal{A} = \frac{\Lambda}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{\Lambda}{2}t} k_1 & e^{\frac{\Lambda}{2}t} k_2 & e^{\frac{\Lambda}{2}t} k_3 \\ e^{-\frac{\Lambda}{2}t} k_1 & -1 & 0 & 0 \\ e^{-\frac{\Lambda}{2}t} k_3 & 0 & -1 & 0 \\ e^{-\frac{\Lambda}{2}t} k_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Un raisonnement analogue à celui du § (6) donne pour T , compte tenu de la condition initiale

$$(24.7) \quad T = B(t) e^{\frac{\Lambda}{2} \bar{C}(t-t')} B^{-1}(t')$$

où $\bar{C}$ est la matrice

$$(24.8) \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} -1 & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & -1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & -1 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C - \frac{5}{2} I$$

On obtient une expression simple de $e^{\frac{\Lambda}{2} C(t-t')}$ en utilisant la formule de DUNCAN (les valeurs propres de C sont $3/2$, $3/2$, $5/2$, $1/2$; C admet un système complet de vecteurs propres)

$$(24.9) \quad e^{\frac{\Lambda}{2} C(t-t')} = \sum_{i=1}^3 C_i e^{\lambda_i L(t-t')}$$

$$\lambda_1 = \frac{\Lambda}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{3\Lambda}{4}, \quad \lambda_3 = \frac{5\Lambda}{4}$$

C_1, C_2, C_3 sont les matrices symétriques

$$(24.10) \quad C_1 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & k_1 & k_2 & k_3 \\ & -k_1^2 & -k_1k_2 & -k_1k_3 \\ & & -k_2^2 & -k_2k_3 \\ & & & -k_3^2 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1+k_1^2 & k_1k_2 & k_1k_3 \\ & & -1+k_2^2 & k_2k_3 \\ & & & -1+k_3^2 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_2 & k_3 \\ & k_1^2 & k_1k_2 & k_1k_3 \\ & & k_2^2 & k_2k_3 \\ & & & k_3^2 \end{pmatrix}$$

avec

$$(24.11) \quad C_1 + C_2 + C_3 = I.$$

On obtient les relations intégrales vérifiées par toute solution à support compact vers le passé de l'équation $Lu = f$

$$(24.12) \quad 4\pi e^{-\frac{3\Lambda}{4}t'} u(x') = \int_{-\infty}^{t'} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (M[u] + P[f]) \Delta dt d\Theta d\varphi$$

où ⁽²²⁾

$$(24.13) \quad P = \sigma \Omega = \frac{e^{\frac{\Lambda}{4}}}{r} B(t) e^{\frac{\Lambda}{2} \alpha(t-t')} B^{-1}(t')$$

$$M = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 (e^{-\Lambda t} P)}{\partial x^{i2}} - \frac{\partial}{\partial x^i} (B^i P).$$

On trouve en effectuant

$$M = - \frac{e^{\frac{\Lambda}{4} t}}{r} \sum_{i=1}^3 M_i e^{\lambda_i (t-t')}$$

où les M_i sont des matrices ayant l'expression suivante:

$$(24.14) \quad M_i = \left\{ B(t) \left(D_i C_i + \frac{e^{-\Lambda t}}{r} F_i \right) + \frac{B^j B(t)}{r} C_{j,i} - k_j e^{\frac{\Lambda}{2} t} \Gamma_{j,i} \right\} B^{-1}(t')$$

les matrices D_i , F_i , $C_{j,i}$, $\Gamma_{j,i}$ sont bornées au voisinage de $r=0$. Elles ont pour expression

$$(24.15) \quad D_i = \frac{\Lambda^2}{4} (D^2 + 1) + \lambda_i \Lambda (2I - D) + \lambda_i I$$

où D est la matrice diagonale d'éléments $1/2, 3/2, 3/2, 3/2$.

$$(24.16) \quad F_i = r^2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^{j2}}$$

les F_i sont des matrices symétriques, indépendantes de t , invariantes par rotation spatiale, et vérifient (cf. 7.11).

$$(24.17) \quad F_1 + F_2 + F_3 = 0.$$

Les $C_{i,j}$ sont les matrices indépendantes de t

$$(24.18) \quad C_{j,i} = r \frac{\partial C_i}{\partial x^j} - C_i k_j$$

⁽²²⁾ B^i est la matrice ainsi désigné au I , formules 4.1.

et

$$(24.19) \quad \Gamma_{i,i} = \left(\frac{\Lambda}{4} + \lambda_i \right) B^i B(t) + B'^i B(t) + B^i B'(t).$$

On vérifie que, compte tenu de :

$$(24.20) \quad \lim_{r=0} r^3 M = \lim_{\substack{t=t' \\ r=0}} \left(-e^{\frac{\Lambda}{4} r^2} \sum_{i=1}^3 M_i \right) = 0$$

l'intégrale (24.12) est convergente au voisinage de $t = t'$.

On pourra alors déterminer les termes de diffusion successifs $E^{(1)}, \dots, E^{(n)}, \dots$ par les formules (5.7) et (6.2) après avoir remarqué qu'ici

$$(24.21) \quad \mathfrak{D} = \frac{D(\bar{x}^i)}{D(x^0, \bar{\theta}, \varphi)} = e^{\frac{\Lambda}{2}(t-t')\bar{\Delta}}$$

où $\bar{\Delta}$ désigne le déterminant Δ (3.2) relatif au conoïde de sommet $\bar{x}$, calculé au point x .

25. - Potentiels retardés ($\Lambda > 0$).

$$(25.1) \quad \Phi(x) = \int E^+(x', x) J(x') dx'$$

le terme principal Φ_0 étant

$$(25.2) \quad \Phi_0(x) = e^{\frac{\Sigma \dot{a}(s)}{\Delta_s}}$$

($a(s)$ intersection de Γ_x^- et γ).

On trouve ici

$$(25.3) \quad \Delta_s = \frac{D(x^i)}{D(\bar{\theta}, \varphi, s)} = (\dot{a}^0 e^{-\frac{\Lambda}{2} a^0} - k_i \dot{a}^i) r^2 \sin \theta$$

$$(25.4) \quad \Sigma = P\Delta = e^{-\frac{\Lambda}{4} t} B(t) e^{\frac{\Lambda}{2} C(t-a^0)} B^{-1}(a^0) r \sin \theta$$

remarquant que $e^{-\frac{\Lambda}{2} a^0}$, $-k_i$ sont les composantes covariantes d'un vecteur de longueur nulle tangent à la géodésique d'origine a passant par x et

désignant par v ce vecteur, on trouve pour Φ_0 une expression bornée, sauf sur la trajectoire γ , se réduisant pour $\Lambda = 0$ à l'expression minkovskienne (dans le cas minkovskien $vr = x - a$)

$$\Phi_0(x) = e^{\frac{\Lambda}{4}t} \frac{B(t) e^{\frac{\Lambda}{2}C(t-a^0)} B^{-1}(a^0)}{r} \frac{\dot{a}}{(v, \dot{a})}$$

Un exemple de calcul du premier terme de diffusion sera en prenant pour γ une ligne de temps. Alors

$$\Phi_1(x) = e \int_{\gamma} E_+^{(1)}(a(s), x) \dot{a}(s) ds$$

où

$$a(s) = \{s, 0, 0, 0\}, \quad \dot{a}(s) = \{1, 0, 0, 0\}.$$

Les expressions explicites obtenues étant très complexes seul un calcul numérique approché les rendraient utilisables pratiquement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. LICHNEROWICZ, *Propagateurs et commutateurs en Relativité Générale*, publications de l'I.H.E.S. n° 10, 1960.
- [2] J. LERAY, *Hyperbolic differential equations*, Institute for Advances Study Princeton 1951-1952.
- [3] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann 1951.
- [4] S. SOBOLEV, *Math. Sbornik* 1936.
- [5] Y. BRUHAT, *Acta Mathematica* 1952.
- [6] V. FOCK, *Theory of space-time and gravitation*, Pergamon press 1955.
- [7] B. de WITT et R. BREHME, *Reviews of Modern Physics* 1960.
- [8] C. de WITT, Séminaire Janet 1961 et 1962, Notes miméographiées et C.R. Acad. Sc. 1962 et 1963.
- [9] Y. BRUHAT, *Propagateurs. Comportement asymptotique*, Séminaire Lichnerowicz 1963.
- [10] J. COLLEAU, C.R. Acad. Sciences 1963.