El problema de la extension.

Memoria de BALTASAR R. - SALINAS (a Zaragoza, España)

En homenaje póstumo a mi querido maestro Julio Rey Pastor.

Summary. - *This is a study of the abstract problem of the extension function (or content function) in the aspects treated by Banach for R_2 and by Hausdorff for R_3 . The results of these authors are given in precision by means of a function ω and a new inequality for the integral.*

§ 1. INTRODUCCION

Comenzaremos dando unas definiciones imprescindibles para la lectura de este trabajo.

Una *extensión* es una función real de conjunto μ , finita y definida sobre una clase $\mathcal{S}$ de partes de un conjunto no vacío E , que satisface:

1. $\mathcal{S}$ es un anillo de Boole de subconjuntos de E ⁽¹⁾.
2. $\mu \geq 0$, es decir, $\mu(S) \geq 0$ para todo $S \in \mathcal{S}$.
3. Si (S_1, S_2) es un par de conjuntos disjuntos pertenecientes a $\mathcal{S}$, se tiene

$$(1.1) \quad \mu(S_1 \cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2).$$

En particular, la función real de conjunto

$$\mu: \mu(\emptyset) = 0 \text{ y } \mu(E) = 1$$

es una extensión definida sobre $\mathcal{S} = \{\emptyset, E\}$.

Una extensión μ , definida sobre una clase $\mathcal{S}$ de partes de un conjunto E , se dice *normal* o *normalizada* si $E \in \mathcal{S}$ y $\mu(E) = 1$. De manera general, si μ es una extensión y se escribe $\mu(E) = 1$ se sobreentenderá automáticamente que $\mu(E)$ está definida.

⁽¹⁾ A estos anillos de BOOLE se les suele llamar también *cuerpos* y *clases finitamente aditivas* de conjuntos. El nombre de anillo de BOOLE se debe a que $\mathcal{S}$ es efectivamente un anillo respecto de las leyes de composición internas:

$$S_1 + S_2 = (S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_1) \text{ y } S_1 S_2 = S_1 \cap S_2,$$

y que además $SS = S \cap S = S$.

Si μ_0 es una extensión definida sobre una clase $\mathcal{S}_0$ de partes de E , se llama *prolongación ultracompleta* o *ultracomplexión* de μ_0 , y se designa por $\bar{\mu}_0$ a toda extensión μ , definida sobre la clase $\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}}_0$ de las partes de los conjuntos $S_0 \in \mathcal{S}_0$, que sea una prolongación de μ_0 . Si $\bar{\mu}_0 = \mu_0$ se dice que μ_0 es una *extensión ultracompleta*. Evidentemente, esto equivale a que toda parte S de cada conjunto $S_0 \in \mathcal{S}_0$ pertenezca también a $\mathcal{S}_0$. Por tanto, toda ultracomplexión μ de μ_0 es una extensión ultracompleta.

Si G es un grupo de permutaciones de un conjunto E , se dice que una extensión μ , definida sobre un anillo de BOOLE $\mathcal{S}$ de subconjuntos de E , es *compatible* con G cuando:

1. $\mathcal{S}$ es invariante por G , o sea, $\alpha S \in \mathcal{S}$ siempre que $\alpha \in G$ y $S \in \mathcal{S}$.
2. Existe una función real k , definida sobre G , tal que

$$(1.2) \quad \mu(\alpha S) = k(\alpha)\mu(S)$$

para todo $\alpha \in G$ y $S \in \mathcal{S}$.

En el caso que $\mu \neq 0$ esta función k está unívocamente determinada por μ y se verifica

$$(1.3) \quad k > 0$$

y

$$(1.4) \quad k(\alpha\beta) = k(\alpha)k(\beta)$$

para todo par (α, β) de elementos de G .

Cuando se quiera precisar más se dirá también que μ es *k-compatible* con G . En particular, si $k = 1$ se dirá que μ es *invariante* por G .

Podemos formular ahora de manera general el llamado *problema de la extensión* (o *del contenido*):

PROBLEMA 1. - *Dado un grupo G de permutaciones de un conjunto E y una extensión $\mu_0 (\neq 0)$, definida sobre una clase $\mathcal{S}_0$ de subconjuntos de E y compatible con G , ¿existe una prolongación ultracompleta μ de μ_0 compatible también con G ?*

Cuando E es el espacio euclídeo R_n , G el grupo de las congruencias de R_n y μ_0 es la extensión de JORDAN o la restricción de la medida de LEBESGUE sobre la clase de los conjuntos medibles y acotados de R_n se han dado soluciones opuestas. En efecto, para $n = 1$ y $n = 2$, BANACH ha demostrado en [1] que existe una prolongación ultracompleta μ de μ_0 invariante por G . Por el contrario para $n \geq 3$, como consecuencia de los resultados obtenidos por HAUSDORFF en [5] y [6] y por BANACH y TARSKY en [3], se puede afirmar que no existe ninguna prolongación ultracompleta de μ_0 , invariante por G .

En un trabajo reciente [9] hemos dado una condición que permite dar una respuesta afirmativa al problema de la extensión en algunos casos, entre ellos el citado antes y resuelto por BANACH para R_1 y R_2 . Como en esta condición interviene solamente el grupo G , es natural proponer este otro:

PROBLEMA 2. - *Dar una condición necesaria y suficiente que deba cumplir un grupo G^* para que cualquiera que sea la extensión μ_0 , definida sobre una clase de partes de un conjunto E y compatible con un grupo G de permutaciones de E isomorfo a G^* , exista una prolongación ultracompleta μ de μ_0 compatible con G .*

Este problema queda resuelto en este trabajo mediante una propiedad importante de G^* o G , la de ser *extensible* o *medible* según von NEUMANN:

Un grupo G se dice *extensible* si existe una extensión μ , definida sobre la clase de las partes de G con $\mu(G) = 1$ e invariante por el grupo G_γ de traslaciones a la izquierda de G ⁽²⁾.

De manera explícita una de las condiciones pedidas en el problema 2 viene dada como consecuencia del teorema 17 así:

TEOREMA. - *Con las notaciones del problema 2, para que exista siempre tal prolongación ultracompleta μ de μ_0 invariante por G , es necesario y suficiente que G^* sea extensible.*

Exponemos a continuación algunos ejemplos de grupos extensibles:

I. *Todo grupo finito G es extensible.* En efecto, si n es el orden de G , basta definir μ tomando $n\mu(S)$ igual al número de elementos de $S \subset G$.

II. *Todo grupo cíclico G es extensible.* Efectivamente, si

$$G = \{\alpha^n \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

y μ_0 es la extensión definida poniendo

$$\mu_0(S) = 1 \text{ o } \mu_0(S) = 0$$

según que el elemento $\varepsilon = \alpha^0$ pertenezca o no a $S \subset G$, se deduce fácilmente que

$$\mu: \mu(S) = \lim_n \mu_0(\alpha^n S),$$

donde $\lim_n a_n$ es un límite generalizado de BANACH, es una extensión ultracompleta invariante por el grupo G_γ de traslaciones a la izquierda de G .

⁽²⁾ $G_\gamma = \{\gamma_\alpha \mid \gamma_\alpha(x) = x\alpha \forall x, \alpha \in G\}$.

Tanto los grupos finitos como los cíclicos son grupos perfectos:

Un grupo G se dice *perfecto* si para todo subconjunto finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i_0}; \beta_1, \dots, \beta_{j_0}\}$ de G se puede encontrar otro $\{\xi_1, \dots, \xi_{h_0}; \eta_1, \dots, \eta_{k_0}\} \subset G$ de modo que se pueda establecer una correspondencia biunívoca φ entre los conjuntos $\{(h, i) \mid 1 \leq h \leq h_0 \wedge 1 \leq i \leq i_0\}$ y $\{(k, j) \mid 1 \leq k \leq k_0 \wedge 1 \leq j \leq j_0\}$ de forma que sea $\xi_h \alpha_i = \eta_k \beta_j$ siempre que $(k, j) = \varphi(h, i)$.

Entonces las proposiciones I y II quedan contenidas en la siguiente:

III. - *Todo grupo perfecto es extensible.* Este resultado se sigue del corolario 12 de [9] y de la definición de grupo accesible ⁽³⁾.

Debemos hacer notar que en la definición de grupo extensible se puede sustituir de manera equivalente G_γ por el grupo G_δ de las traslaciones a la derecha de G o bien por $G_\gamma G_\delta$ según resulta de los corolarios 7 y 17.

Será también útil generalizar el concepto de extensibilidad así:

Si G es un grupo de permutaciones de un conjunto E , se dice que (E, G) es *extensible* cuando exista una extensión ultracompleta μ con $\mu(E) = 1$ e invariante por G . En caso contrario se dirá que (E, G) es *no extensible*.

En particular, si E es un espacio homogéneo G/g (a la izquierda) y G_a es el grupo de permutaciones asociado, formado por las permutaciones

$$\alpha_a: x \rightarrow \alpha x$$

de E , diremos que E es extensible cuando lo sea (E, G_a) .

Análogamente, si $E = (G/g)'$ es un espacio homogéneo a la derecha y si G_a es el grupo asociado, formado por las permutaciones

$$\alpha_a: x \rightarrow x\alpha$$

de E , diremos que E es extensible cuando lo sea (E, G_a) .

Es evidente que según estas definiciones ser G un grupo extensible equivale a que el espacio homogéneo $G/\{\varepsilon\}$ lo sea, siendo ε el elemento unidad de G ⁽⁴⁾.

El teorema expuesto antes da, evidentemente, una condición suficiente para asegurar la existencia de una prolongación ultracompleta μ de μ_0 , compatible con G , en el problema 1. En este trabajo nos hemos preocupado también de dar condiciones que permitan asegurar la no existencia de tales

⁽³⁾ Véase la definición 17 de [9], reproducida en este trabajo, pag. 158. Es obvio que del mismo corolario 12 de [9] resulta que todo *grupo accesible es extensible* pero preferimos aquí deducir esta proposición basándonos en III. Para más detalles sobre los grupos perfectos y accesibles véase [8].

⁽⁴⁾ En este trabajo siempre designaremos por ε al elemento unidad de G .

prolongaciones ultracompletas, confirmando por un camino distinto al seguido por HAUSDORFF que no existen en $R_n (n \geq 3)$ prolongaciones ultracompletas de la extensión de JORDAN que sean invariantes por el grupo de las congruencias. Este método permite probar además que en un plano no euclídeo E , elíptico o hiperbólico, o en el plano afín E no existen prolongaciones ultracompletas del área definida en E que sean invariantes por el grupo de las congruencias o afinidades equivalentes de E .

Otro resultado que obtenemos, relativo al problema 1, es el siguiente:

TEOREMA. - Con las notaciones del problema 1, si μ_0 es k -compatible con G y existe una prolongación ultracompleta μ_1 de μ_0 que es invariante por el grupo

$$G_1 = \{ \alpha \mid \alpha \in G \wedge k(\alpha) = 1 \},$$

se puede asegurar que existe también una prolongación ultracompleta μ de μ_0 que es k -compatible con G .

Los métodos que seguimos permiten ir más lejos. Por ejemplo, como consecuencia de § 5, III y de la definición de la función ω , que introducimos en § 2, resulta:

Si μ es una extensión ultracompleta sobre la superficie esférica $E = \{ x \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$ con $\mu(E) = 1$, cualquiera que sea el número $\eta > 0$, existen un conjunto $S \subset E$ y una rotación α , cuyo eje pasa por el origen, con la propiedad de que

$$\mu(S) < \eta \quad \text{y} \quad \mu(\alpha S) > 1 - \eta.$$

Finalmente, como complemento de estas investigaciones, en § 6 hacemos un ligero estudio sobre el problema de la medida.

Recientemente, en 1960 y 1961, W. SPECHT y H. M. SCHAEFER han publicado dos trabajos, [11] y [10], sobre la cuestión que tratamos en éste. SPECHT ha hecho un estudio muy detenido sobre los grupos extensibles probando, entre otras cosas, que *la propiedad de ser extensible un grupo es una propiedad de Sylow* y que *todo grupo perfecto es extensible*. El primero de estos resultados se sigue, en particular, de los corolarios 8 y 11 y del teorema 14 de este trabajo si se tienen en cuenta el teorema 9 y el corolario 4. El otro resultado de SPECHT, que coincide con III, se puede obtener también del corolario 12 de [9] como ya hemos dicho. En relación con el problema 1, el mejor resultado que se puede deducir del teorema 2 de [10] es el siguiente: *Si G es un grupo extensible, toda extensión μ_0 , acotada e invariante por G tiene una prolongación ultracompleta μ invariante por G* . Esta proposición está, evidentemente, contenida en el teorema 17.

§ 2. Extensiones ultracompletas normalizadas.

Dado un conjunto no vacío E y un conjunto $H \neq \emptyset$ de permutaciones de E , asignamos a cada extensión ultracompleta μ con $\mu(E) = 1$ un número real:

$$(2.1) \quad \omega(\mu, H) = \sup \{ \mu(\alpha S) - \mu(S) \mid \alpha \in H \wedge S \subset E \},$$

que llamaremos *oscilación de μ respecto de H* .

Si $H = \emptyset$ pondremos $\omega(\mu, H) = 0$.

Evidentemente,

$$(2.2) \quad 0 \leq \omega(\mu, H) \leq 1$$

y

$$(2.3) \quad \omega(\mu, H_1) \leq \omega(\mu, H_2)$$

cuando $H_1 \subset H_2$.

TEOREMA 1. - Si μ es una extensión ultracompleta con $\mu(E) = 1$, se puede definir una integral

$$\int f d\mu = \int_E f d\mu$$

para toda función real y acotada f sobre E con las propiedades:

I_1 - Cualquiera que sea el par (f, g) de funciones reales y acotadas sobre E y los números reales a y b se verifica

$$(2.4) \quad \int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

I_2 - Si f_S es la función característica del conjunto $S \subset E$,

$$(2.5) \quad \int f_S d\mu = \mu(S).$$

I_3 - Si $f \geq 0$ se tiene

$$(2.6) \quad \int f d\mu \geq 0.$$

I_4 - Si f es una función real acotada cuya oscilación es $\omega(f)$ y si α es una permutación de E perteneciente a H resulta

$$(2.7) \quad \int (f_\alpha - f) d\mu \leq \omega(f) \omega(\mu, H) \quad (^5)$$

para

$$f_\alpha: \quad f_\alpha(x) \equiv f(\alpha^{-1}x).$$

Esta integral está unívocamente determinada por las propiedades I_1 , I_2 e I_3 .

DEMONSTRACION. - De igual forma que en la integral de RIEMANN pongamos para cada partición finita $\pi = \{S_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ de E ,

$$s'(\pi) = \sum_{i=1}^n m'_i \mu(S_i) \quad (s'(\pi) = s'(\pi, f))$$

y

$$s''(\pi) = \sum_{i=1}^n m''_i \mu(S_i) \quad (s''(\pi) = s''(\pi, f))$$

con

$$m'_i = \inf \{f(x) \mid x \in S_i\}$$

y

$$m''_i = \sup \{f(x) \mid x \in S_i\}.$$

Entonces, cualesquiera que sean las particiones finitas π_1 y π_2 de E , considerando una partición π más fina que π_1 y π_2 resulta

$$s'(\pi_1) \leq s''(\pi_2)$$

y, por tanto,

$$\sup s'(\pi) \leq \inf s''(\pi).$$

Debido a esta desigualdad, para demostrar que

$$\sup s'(\pi) = \inf s''(\pi),$$

será suficiente probar que para cada $\eta > 0$ existe una partición finita π de E tal que

$$\sum_1^n (m''_i - m'_i) \mu(S_i) < \eta.$$

(⁵) Si a y b son los extremos inferior y superior de f en E , $\omega(f) = b - a$.

En efecto, si a y b son los extremos inferior y superior de f en E y se pone

$$m_i = a + \frac{b-a}{n-1} i \quad (0 \leq i \leq n)$$

y

$$S_i = \{x \mid m_{i-1} \leq f(x) < m_i\},$$

$\pi = \{S_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ es una partición finita de E que satisface

$$\begin{aligned} & \sum_1^n (m'_i - m'_i) \mu(S_i) \\ & \leq \frac{b-a}{n-1} \sum_1^n \mu(S_i) = \frac{b-a}{n-1} < \eta \end{aligned}$$

para $n-1 > (b-a)/\eta$.

Si se define ahora

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \sup s'(\pi) \\ &= \inf s''(\pi) \end{aligned}$$

se demuestra por un proceso muy conocido que

$$\int f d\mu = \int_E f d\mu$$

cumple las condiciones I_1 , I_2 e I_3 . Para probar que esta integral cumple también I_4 basta tener presente que si $\pi = \{S_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ es una partición de E y

$$s''(\pi, f) = \sum_1^n m'_i \mu(S_i),$$

$\pi_\alpha = \{\alpha S_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ es otra partición de E y

$$s''(\pi_\alpha, f_\alpha) = \sum_1^n m'_i \mu(\alpha S_i)$$

y, por consiguiente, que

$$\begin{aligned} & \int f_\alpha d\mu - s''(\pi, f) \\ & \leq \sum_1^n (m'_i - a) [\mu(\alpha S_i) - \mu(S_i)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (b-a) \sum_1^n [\mu(\alpha S_i) - \mu(S_i)]^+ \quad (6) \\
&= (b-a) [\mu(\alpha S) - \mu(S)] \\
&\leq \omega(f)\omega(\mu, H)
\end{aligned}$$

en donde

$$a = \inf \{f(x) \mid x \in E\} \quad \text{y} \quad b = \sup \{f(x) \mid x \in E\}$$

y S es la reunión de los conjuntos S_i de π tales que $\mu(\alpha S_i) \geq \mu(S_i)$. De esta desigualdad y de

$$\int f d\mu = \inf s''(\pi, f)$$

se obtiene (2.7).

Finalmente, como para toda funcional real $\int f d\mu$ definida sobre el espacio lineal de funciones reales acotadas sobre E , que posea las propiedades I_1 , I_2 e I_3 se verifica

$$s'(\pi, f) \leq \int f d\mu \leq s''(\pi, f)$$

cualquiera que sea la partición finita π de E , resulta

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \sup s'(\pi, f) \\
&= \inf s''(\pi, f).
\end{aligned}$$

COROLARIO 1. - Si f es una función real acotada cuya oscilación es $\omega(f)$, para todo par (α, β) de permutaciones de E pertenecientes a un grupo G resulta

$$(2.8) \quad \int (f_\alpha - f_\beta) d\mu \leq \omega(f)\omega(\mu, G) \quad (f_\alpha(x) \equiv f(\alpha^{-1}x))$$

De manera semejante a como hemos definido antes la oscilación $\omega(\mu, H)$ de μ respecto de H , si M es el conjunto de las extensiones ultracompletas con $\mu(E) = 1$, llamamos *oscilación de $E \neq \emptyset$ respecto de H* al número real:

$$(2.9) \quad \omega(E, H) = \inf \{ \omega(\mu, H) \mid \mu \in M \}.$$

(6) $a^+ = \max \{a, 0\}$.

OBSERVACIÓN 1. - *El conjunto M de las extensiones ultracompletas μ con $\mu(E) = 1$ es no vacío.* Efectivamente, por ser $E \neq \emptyset$ existe un punto $x_0 \in E$ y entonces si se define μ poniendo

$$\mu(S) = 0 \quad \text{o} \quad \mu(S) = 1$$

para cada conjunto $S \subset E$ según que $x_0 \notin S$ o $x_0 \in S$, resulta $\mu \in M$ y, por tanto, $M \neq \emptyset$.

PROPOSICIÓN 1. - *Si H_1 y H_2 son dos conjuntos de permutaciones de E y $H_1 \subset H_2$, se verifica*

$$(2.10) \quad 0 \leq \omega(E, H_1) \leq \omega(E, H_2) \leq 1.$$

DEMOSTRACIÓN. - Se deduce de (2.2) y (2.3).

PROPOSICIÓN 2. - *Si $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de extensiones ultracompletas con $\mu_n(E) = 1$ y*

$$\lim_n \omega(\mu_n, H) = \omega(E, H);$$

para todo límite generalizado de Banach: $\lim_n a_n$, la función real de conjunto

$$\mu: \quad \mu(S) = \lim_n \mu_n(S) \quad (S \subset E)$$

es una extensión ultracompleta con $\mu(E) = 1$ y $\omega(\mu, H) = \omega(E, H)$.

DEMOSTRACIÓN. - De las propiedades,

1. $\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$,
2. $\lim_n a_n \geq 0$ si $a_n \geq 0$ para todo n ,
3. $\lim_n a_n = 1$ si $a_n = 1$ para todo n ,

resulta que μ es una extensión ultracompleta con $\mu(E) = 1$.

Para probar que $\omega(\mu, H) = \omega(E, H)$ basta tener presente además:

4. $\lim_n (-a_n) = -\lim_n a_n$,
5. $\lim_n a_n = a$ si $\lim_n a_n = a$,

puesto que entonces,

$$\begin{aligned}\mu(\alpha S) - \mu(S) &= \lim_n [\mu_n(\alpha S) - \mu_n(S)] \\ &\leq \lim_n \omega(\mu_n, H) \\ &= \omega(E, H)\end{aligned}$$

para toda permutación $\alpha \in H$ y todo conjunto $S \subset E$ y, por consiguiente,

$$\begin{aligned}\omega(\mu, H) &= \sup \{ \mu(\alpha S) - \mu(S) \mid \alpha \in H \wedge S \subset E \} \\ &\leq \omega(E, H)\end{aligned}$$

y

$$\omega(\mu, H) = \omega(E, H).$$

TEOREMA 2. - *El conjunto M_0 de las extensiones ultracompletas μ con $\mu(E) = 1$ y*

$$\omega(\mu, H) = \omega(E, H)$$

es un conjunto convexo no vacío.

DEMOSTRACIÓN. - Debido a (2.9) se puede encontrar una sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ de extensiones ultracompletas $\mu_n \in M$ de forma que

$$\lim_n \omega(\mu_n, H) = \omega(E, H).$$

Entonces de la existencia de límites generalizados y de la proposición 2 se deduce que $M_0 \neq \emptyset$,

Para demostrar que M_0 es un conjunto convexo se debe comprobar que, cualesquiera que sean las extensiones μ_0 y μ_1 pertenecientes a M_0 , para $0 \leq p \leq 1$

$$\mu_p = (1-p)\mu_0 + p\mu_1$$

es una extensión perteneciente a M_0 . Esto lo omitimos por no ofrecer dificultades.

COROLARIO 2. - *Si G es un grupo de permutaciones de E , (E, G) es extensible cuando y sólo cuando*

$$(2.11) \quad \omega(E, G) = 0.$$

TEOREMA 3. - Si H_i es un conjunto de permutaciones de $E_i (i = 1, 2)$ y si existe una aplicación φ de E_1 en E_2 tal que para todo conjunto $S \subset E_2$ y todo $\alpha_2 \in H_2$ se puede encontrar un elemento $\alpha_1 \in H_1$ de forma que

$$\varphi^{-1}(\alpha_2 S) \subset \alpha_1 \varphi^{-1}(S),$$

resulta

$$(2.12) \quad \omega(E_2, H_2) \leq \omega(E_1, H_1).$$

DEMOSTRACIÓN. - Como por el teorema 2 existe una extensión ultracompleta μ_1 con $\mu_1(E_1) = 1$ y $\omega(\mu_1, H_1) = \omega(E_1, H_1)$ ⁽⁷⁾, bastará comprobar que la función real de conjunto

$$\mu_2: \quad \mu_2(S) = \mu_1[\varphi^{-1}(S)] \quad (S \subset E_2)$$

es una extensión ultracompleta con $\mu_2(E_2) = 1$ y $\omega(\mu_2, H_2) \leq \omega(\mu_1, H_1)$. En efecto:

1. μ_2 es una extensión ultracompleta puesto que $\mu_2 \geq 0$ y para cada par de subconjuntos S' y S'' de E_2 se tiene

$$\varphi^{-1}(S' \cup S'') = \varphi^{-1}(S') \cup \varphi^{-1}(S'')$$

$$\varphi^{-1}(S' \cap S'') = \varphi^{-1}(S') \cap \varphi^{-1}(S'')$$

y, por consiguiente,

$$\mu_2(S' \cup S'') = \mu_2(S') + \mu_2(S'')$$

cuando $S' \cap S'' = \emptyset$.

2. $\mu_2(E_2) = \mu_1(E_1) = 1$ porque $E_1 = \varphi^{-1}(E_2)$.

3. Como para todo conjunto $S \subset E_2$ y todo $\alpha_2 \in H_2$ existe un $\alpha_1 \in H_1$ tal que

$$\varphi^{-1}(\alpha_2 S) \subset \alpha_1 \varphi^{-1}(S)$$

resulta

$$\begin{aligned} \omega(\mu_2, H_2) &= \sup \{ \mu_2(\alpha_2 S) - \mu_2(S) \} \\ &\leq \sup \{ \mu_1[\alpha_1 \varphi^{-1}(S)] - \mu_1[\varphi^{-1}(S)] \} \\ &\leq \omega(\mu_1, H_1). \end{aligned}$$

⁽⁷⁾ Obsérvese que en este teorema como en otros no es necesario utilizar el teorema 2, basta aplicar la definición de $\omega(E, H)$.

PROPOSICIÓN 3. - Si G es un grupo de permutaciones de E y E_0 es un subconjunto de E invariante por G : $GE_0 = E_0$, se tiene

$$(2.13) \quad \omega(E, G) \leq \omega(E_0, G_0)$$

cuando G_0 es el grupo formado por las restricciones α_0 en E_0 de las permutaciones $\alpha \in G$.

DEMOSTRACIÓN. - Por el teorema 3 basta comprobar que para la aplicación canónica φ : $\varphi(x) = x$ de E_0 en E se verifica

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\alpha S) &= (\alpha S) \cap E_0 \\ &= \alpha(S \cap E_0) \quad (\alpha E_0 = E_0) \\ &= \alpha_0 \varphi^{-1}(S) \end{aligned}$$

cualquiera que sea $S \subset E$ y $\alpha \in G$.

TEOREMA 4. - Sea G un grupo de permutaciones de E y $\{x^* \mid x^* \in E^*\}$ una partición de E tal que

$$\alpha x^* \in E^*$$

cualesquiera que sean $\alpha \in G$ y $x^* \in E^*$. Entonces, si G^* es el grupo de las permutaciones

$$\alpha^*: \quad x^* \longrightarrow \alpha x^*$$

de E^* , resulta

$$(2.14) \quad \omega(E^*, G^*) \leq \omega(E, G).$$

DEMOSTRACIÓN. - Sea φ la aplicación de E en E^* definida poniendo

$$\varphi(x) = x^*$$

cuando $x \in x^*$. Como evidentemente

$$\varphi^{-1}(\alpha^* S) = \alpha \varphi^{-1}(S) \quad (\alpha^* x^* \equiv \alpha x^*)$$

para todo $\alpha^* \in G^*$ y $S \subset E^*$, aplicando el teorema 3 se obtiene (2.14).

Si E es un espacio homogéneo G/g (a la izquierda) y si G_a es el grupo asociado formado por las permutaciones

$$\alpha_a: \quad x \longrightarrow \alpha x \quad (\alpha \in G)$$

de E , escribiremos $\omega(E)$ en lugar de $\omega(E, G_a)$. En particular, si $g = \{\varepsilon\}$ pondremos también $\omega(G)$ en vez de $\omega(E)$.

Análogamente, si $E = (G/g)'$ es un espacio homogéneo a la derecha y si G_a es el grupo asociado formado por las permutaciones

$$\alpha_a: \quad x \mapsto xa \quad (\alpha \in G),$$

escribiremos $\omega(E)$ en lugar de $\omega(E, G_a)$.

Entonces, de igual forma que el corolario 2 resulta

PROPOSICIÓN 4. - *Un espacio homogéneo E es extensible si y sólo si*

$$(2.15.1) \quad \omega(E) = 0.$$

Igualmente, un grupo G es extensible si y sólo si

$$(2.15.2) \quad \omega(G) = 0.$$

TEOREMA 5. - *Si E y E' son dos espacios homogéneos G/g y $(G/g)'$, resulta*

$$(2.16) \quad \omega(E) = \omega(E').$$

DEMOSTRACIÓN. - Siendo

$$g \cdot \alpha^{-1} = g \cdot \beta^{-1} \quad (8)$$

cuando y sólo cuando

$$\alpha \cdot g = \beta \cdot g \quad (\{\alpha, \beta\} \subset G),$$

si se pone $\varphi(\alpha \cdot g) = g \cdot \alpha^{-1}$ ($\alpha \in G$) queda definida una aplicación biunívoca φ de E sobre E' . Como esta aplicación satisface evidentemente,

$$\varphi^{-1}(S'\alpha) = \alpha^{-1}\varphi^{-1}(S') \quad (S' \subset E')$$

y

$$\varphi(\alpha S) = \varphi(S)\alpha^{-1} \quad (S \subset E),$$

del teorema 3 se deduce (2.16).

(8) Con objeto de distinguir el subconjunto $g\alpha$ de G con el elemento $g\alpha$ del espacio homogéneo $(G/g)'$, denotaremos a éste por $g \cdot \alpha$. Notación análoga emplearemos para G/g .

COROLARIO 3. - Si G' es el grupo opuesto de G resulta

$$(2.17) \quad \omega(G') = \omega(G).$$

PROPOSICIÓN 5. - Si E es el espacio homogéneo G/g y si H_a es el conjunto de las permutaciones de E

$$\alpha_a: \quad x \mapsto \alpha x,$$

correspondientes a los elementos α de $H(\subset G)$, se verifica

$$(2.18) \quad \omega(E_a) = \omega(E)$$

para el espacio homogéneo $E_a = G_a/g_a$.

DEMOSTRACIÓN. - Como

$$\psi: \quad \alpha \mapsto \alpha_a$$

es un homomorfismo de G sobre G_a que aplica g en g_a ,

$$\varphi: \quad \alpha \cdot g \mapsto \alpha_a \cdot g_a$$

es una aplicación de E sobre E_a . Esta aplicación es biunívoca ya que por contener g al núcleo $g_0 = \varphi^{-1}(\varepsilon_a)$ de ψ es $\psi^{-1}(g_a) = g$ y, por consiguiente,

$$\alpha \cdot g = \beta \cdot g$$

si

$$\alpha_a \cdot g_a = \beta_a \cdot g_a.$$

Finalmente, siendo

$$\varphi^{-1}(\alpha_a S_a) = \alpha \varphi^{-1}(S_a) \quad (S_a \subset E_a)$$

y

$$\varphi(\alpha S) = \alpha_a \varphi(S) \quad (S \subset E),$$

por el teorema 3 resulta (2.18).

TEOREMA 6. - Sea E un espacio homogéneo G/g y g_0 un subgrupo normal de G contenido en g . Entonces, si E_0 es el espacio homogéneo $(G/g_0)/(g/g_0)$, resulta

$$(2.19) \quad \omega(E_0) = \omega(E).$$

DEMOSTRACIÓN. - Si g_0 es el máximo subgrupo normal g_n de G contenido en g , se deduce inmediatamente el teorema de la proposición 5 puesto que

$$G_a \cong G/g_n$$

y

$$g_a \cong g/g_n$$

de forma tal, que el primero de estos isomorfismo induce el segundo.

Ahora se prueba el caso general teniendo presente que el máximo subgrupo normal de G/g_0 contenido en g/g_0 es g_n/g_0 , y que

$$(G/g_0)/(g_n/g_0) \cong G/g_n$$

y

$$(g/g_0)/(g_n/g_0) \cong g/g_n$$

de la misma forma que antes.

COROLARIO 4. - Si g es un subgrupo normal de G , las oscilaciones del espacio homogéneo G/g y del grupo cociente G/g son idénticas. Por consiguiente, uno y otro son simultáneamente extensibles o no extensibles.

TEOREMA 7. - Si $E = G/g$ es un espacio homogéneo y g^* es un subgrupo de G que contiene a g , se verifica

$$(2.20) \quad \omega(E^*) \leq \omega(E)$$

para el espacio homogéneo $E^* = G/g^*$.

DEMOSTRACIÓN. - Se deduce aplicando al teorema 4 a la partición $\{x^* \mid x^* \in E^*\}$ de E definida por la relación de equivalencia:

$$\alpha \cdot g \sim \beta \cdot g \text{ si y sólo si } \alpha^{-1}\beta \in g^*.$$

COROLARIO 5. - Si E es un espacio homogéneo G/g se tiene

$$(2.21) \quad \omega(E) \leq \omega(G).$$

TEOREMA 8. - Sea $E = G/g$ un espacio homogéneo y G_0 un subgrupo de G que contiene a g . Entonces, si $E_0 = G_0/g$ y cada conjunto $G_0x (x \in G)$ contiene algún punto x_0 tal que $\alpha x_0 = x_0$ y $\alpha \in G_0$ implican $\alpha \in g$, resulta

$$(2.22) \quad \omega(E_0) \leq \omega(E).$$

DEMOSTRACIÓN. - Sea H_x el conjunto de los puntos $x_0 \in G_0 x$ con la propiedad de que $\alpha x_0 = x_0$ y $\alpha \in G_0$ implican $\alpha \in g$. Entonces, siendo $\{H_x | x \in E\}$ una clase de conjuntos disjuntos y no vacíos, por el axioma de la elección existe un conjunto $H (\subset E)$ que contiene un elemento y uno sólo de cada conjunto $H_x (x \in E)$. De esto resulta:

1. Si $\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2$, $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset G_0$ y $\{x_1, x_2\} \subset H$, se tiene

$$\alpha_1 g = \alpha_2 g$$

puesto que entonces $x_1 = x_2$ y $\alpha_1^{-1} \alpha_2 \in g$.

2. Cualquiera que sea $x \in E$ se puede encontrar un elemento $\alpha_0 \in G_0$ de forma que $\alpha_0^{-1} x \in H$.

Por tanto, si para cada $x \in E$ se pone

$$\varphi: \quad \varphi(x) = \alpha_0 \cdot g$$

cuando $\alpha_0 \in G_0$ y $\alpha_0^{-1} x \in H$, queda definida una aplicación φ de E en E_0 .

Como según se ve fácilmente,

$$\varphi^{-1}(\alpha S) = \alpha \varphi^{-1}(S)$$

para todo $\alpha \in G_0$ y $S \subset E_0$, del teorema 3 se deduce (2.22).

COROLARIO 6. - Sea g un subgrupo normal de G y G_0 un subgrupo de G que contiene a g . Si E y E_0 son los espacios homogéneos G/g y G_0/g , se tiene

$$(2.22) \quad \omega(E_0) \leq \omega(E).$$

COROLARIO 7. - Si G_0 es un subgrupo de G resulta

$$(2.23) \quad \omega(G_0) \leq \omega(G).$$

COROLARIO 8. - Si G_0 y G_1 son dos subgrupos de un grupo G y $G_0 \subset G_1$, se tiene

$$(2.24) \quad \omega(E) \leq \omega(G)$$

para el espacio homogéneo $E = G_1/G_0$. En particular, E es extensible si G lo es.

LEMA 1. - Sea G un grupo de permutaciones de un conjunto E y E_0 un espacio homogéneo G/g . Entonces, si μ y μ_0 son dos extensiones ultra-

completas con $\mu(E) = 1$ y $\mu_0(E_0) = 1$, existe una extensión ultracompleta μ^* con $\mu^*(E) = 1$ que satisface

$$(2.25) \quad \omega(\mu^*, H) \leq \omega(\mu, g) + \omega(\mu, G)\omega(\mu_0, H) \quad (^9)$$

cualquiera que sea el subconjunto H de G , y

$$(2.26) \quad \omega(\mu^*, G_n) \leq \omega(\mu, G_n)$$

para todo subgrupo normal G_n de G .

DEMOSTRACIÓN. - Como por el axioma de la elección existe una aplicación φ de E_0 en G que verifica $\varphi(\alpha \cdot g) \in \alpha g$ para todo $\alpha \in G$, si se pone

$$f(\alpha \cdot g; S) = \mu(\alpha_0^{-1}S) \quad \text{con} \quad \alpha_0 = \varphi(\alpha \cdot g) \quad (\alpha \in G)$$

y

$$\mu^*(S) = \int_{E_0} f(\alpha \cdot g; S) d\mu_0$$

para todo conjunto $S \subset E$, queda definida una función real de conjunto μ^* que según vamos a probar cumple las condiciones requeridas. En efecto:

1. μ^* es una extensión ultracompleta puesto que $\mu^* \geq 0$ y para todo par de subconjuntos disjuntos S' y S'' de E se tiene

$$\mu[\alpha_0^{-1}(S' \cup S'')] = \mu(\alpha_0^{-1}S') + \mu(\alpha_0^{-1}S'')$$

cualquiera que sea $\alpha_0 \in G$.

$$2. \quad \mu^*(E) = \int_{E_0} \mu(E) d\mu_0 = \mu(E)\mu_0(E_0) = 1.$$

3. μ^* verifica (2.25). Efectivamente, siendo

$$f(\alpha \cdot g; \sigma S) = \mu(\alpha_0^{-1}\sigma S) \quad \text{para} \quad \alpha_0 = \varphi(\alpha \cdot g) \in \alpha g$$

y

$$f(\sigma^{-1}\alpha \cdot g; S) = \mu(\alpha_\sigma^{-1}S) \quad \text{para} \quad \alpha_\sigma = \sigma\varphi(\sigma^{-1}\alpha \cdot g) \in \alpha_\sigma g$$

resulta

$$f(\alpha \cdot g; \sigma S) - f(\sigma^{-1}\alpha \cdot g; S) \leq \omega(\mu, g).$$

(⁹) Aquí como en otras partes escribimos $\omega(\mu_0, H)$ en vez de $\omega(\mu_0, H_a)$ ya que esto no da lugar a confusiones.

De manera análoga, si se tiene en cuenta que

$$\omega(f) = \sup \{f(\alpha \cdot g; S) - f(\beta \cdot g; S)\}$$

y se aplica (2.7) se deduce

$$\begin{aligned} \int_{E_0} [f(\sigma^{-1}\alpha \cdot g; S) - f(\alpha \cdot g; S)] d\mu_0 \\ \leq \omega(\mu, G)\omega(\mu_0, H) \end{aligned}$$

para cada $\sigma \in H$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mu^*(\sigma S) - \mu^*(S) &= \int_{E_0} [f(\alpha \cdot g; \sigma S) - f(\alpha \cdot g; S)] d\mu_0 \\ &\leq \omega(\mu, g) + \omega(\mu, G)\omega(\mu_0, H) \end{aligned}$$

cualesquiera que sean $\sigma \in G$ y $S \subset E$.

4. μ^* verifica (2.26) porque para todo $\sigma \in G_n$ y $S \subset E$ se tiene

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot g; \sigma S) - f(\alpha \cdot g; S) \\ = \mu(\alpha_0^{-1}\sigma S) - \mu(\alpha_0^{-1}S) \leq \omega(\mu, G_n) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mu^*(\sigma S) - \mu^*(S) \\ = \int_{E_0} [f(\alpha \cdot g; \sigma S) - f(\alpha \cdot g; S)] d\mu_0 \\ \leq \omega(\mu, G_n). \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 6. - Si E es un espacio homogéneo G/g y μ es una extensión ultracompleta con $\mu(E) = 1$ y $\omega(\mu, G) = \omega(E)$, se tiene

$$(2.27) \quad \omega(\mu, g) \geq \omega(E)[1 - \omega(E)].$$

DEMOSTRACIÓN. - En efecto, si se aplica el lema 1 tomando $\mu_0 = \mu$ resulta

$$\omega(E) \leq \omega(\mu^*, G) \leq \omega(\mu, g) + \omega(E)^2$$

y, por tanto, (2.27).

TEOREMA 9. - Si G es un grupo resulta $\omega(G) = 0$ o $\omega(G) = 1$ según que G sea extensible o no extensible.

DEMOSTRACIÓN. - Si en la proposición 6 se toma $g = \{\varepsilon\}$ se deduce

$$\omega(G)[1 - \omega(G)] \leq \omega(\mu, g) = 0$$

y, por consiguiente, $\omega(G) = 0$ o $\omega(G) = 1$; de donde se sigue el teorema en virtud de la proposición 4.

TEOREMA 10. - Sea G un grupo de permutaciones de un conjunto E y E_0 un espacio homogéneo G/g . Entonces, si $H \subset G$ resulta

$$(2.28) \quad \omega(E, H) \leq \omega(E, g) + \omega(E_0, H).$$

DEMOSTRACIÓN. - Como por el teorema 2 existen dos extensiones ultra-completas μ y μ_0 con $\mu(E) = 1 = \mu_0(E_0)$, $\omega(\mu, g) = \omega(E, g)$ y $\omega(\mu_0, H) = \omega(E_0, H)$ y, evidentemente, $\omega(\mu, G) \leq 1$, de la desigualdad (2.25) resulta

$$\begin{aligned} \omega(E, H) &\leq \omega(\mu^*, H) \\ &\leq \omega(E, g) + \omega(E_0, H). \end{aligned}$$

COROLARIO 9. - Si E es un espacio homogéneo G/g y para cada $H \subset G$ se designa por H_γ el conjunto de las traslaciones a la izquierda

$$\gamma_\alpha: \quad x \rightarrow \alpha x$$

de G con $\alpha \in H$ ⁽¹⁰⁾, se verifica

$$(2.29) \quad \omega(E, H) \geq \omega(G, H_\gamma) - \omega(G, g_\gamma).$$

DEMOSTRACIÓN. - Basta aplicar el teorema 10 con un evidente cambio de notación.

TEOREMA 11. - Si $E = G/g$ es un espacio homogéneo no extensible resulta

$$(2.30) \quad \omega(E) \geq 1 - \omega(G, g_\gamma),$$

y

$$(2.31) \quad \omega(E) = 1$$

cuando g sea extensible.

⁽¹⁰⁾ Esta notación será empleada en este trabajo sin ninguna otra advertencia.

DEMOSTRACIÓN. - Como según el corolario 5 y proposición 4 se tiene $\omega(G) \geq \omega(E) > 0$, por el teorema 9 y (2.29) se deduce $\omega(G, G_r) = \omega(G) = 1$ y

$$\begin{aligned}\omega(E) = \omega(E, G) &\geq \omega(G, G_r) - \omega(G, g_r) \\ &= 1 - \omega(G, g_r),\end{aligned}$$

o sea (2.30). De (2.30) resulta (2.31) teniendo presente que en virtud de la proposición 3 se verifica

$$\omega(G, g_r) \leq \omega(g, g_r) = \omega(g) = 0$$

si g es extensible.

TEOREMA 12. - Sea G un grupo de permutaciones de un conjunto E y g un subgrupo de G . Entonces, si $E_0 = G/g$ es un espacio homogéneo extensible, se tiene

$$(2.32) \quad \omega(E, G) \leq \omega(E, g).$$

DEMOSTRACIÓN. - Se deduce del teorema 10 tomando $H = G$ ya que aquí $\omega(E_0, G) = \omega(E_0) = 0$.

COROLARIO 10. - Si G es un grupo extensible de permutaciones de un conjunto E , también (E, G) es extensible.

TEOREMA 13. - Si G/G_0 es un espacio homogéneo extensible y g es un subgrupo de G_0 resulta

$$(2.33) \quad \omega(G/g) \leq \omega(G_0/g)$$

DEMOSTRACIÓN. - En efecto, aplicando el teorema 12 a $E = G/g$ se deduce

$$\begin{aligned}\omega(G/g) = \omega(E, G) &\leq \omega(E, G_0) \\ &\leq \omega(G_0/g)\end{aligned}$$

en virtud de la proposición 3.

COROLARIO 11. - Si G/G_0 y G_0/g son dos espacios homogéneos extensibles, G/g es también extensible.

PROPOSICION 7. - Si G_r y G_s son los grupos de las traslaciones a la izquierda y derecha de un grupo extensible G , $G_r G_s$ es también un grupo extensible.

DEMOSTRACIÓN. - Por el corolario 11 basta probar que G_γ y el grupo cociente $G_\delta G_\gamma / G_\gamma$ son extensibles ⁽¹¹⁾. Desde luego G_γ es extensible por ser isomorfo a G . Además, como G_δ es isomorfo al grupo opuesto G' de G y $G_\delta G_\gamma / G_\gamma$ es isomorfo a $G_\delta / G_\gamma \cap G_\delta$, por los corolarios 3, 4 y 5 se deduce que $G_\delta G_\gamma / G_\gamma$ es un grupo extensible.

LEMA 2. - Sea I un conjunto bien ordenado semejante a cada $J_i = \{j \mid j \in I \wedge j \geq i\}$ con $i \in I$. Entonces a toda función real acotada x sobre I se la puede asignar un número real

$$\text{Lim } x \text{ o } \text{Lim}_i x_i \quad (x_i = x(i)),$$

llamado límite generalizado, de modo que se verifiquen las condiciones:

1. $\text{Lim } (ax + by) = a \text{ Lim } x + b \text{ Lim } y$ para todo par de números reales, a y b .

2. Si $x \geq 0$ es $\text{Lim } x \geq 0$.

3. Si σ_{i_0} es la semejanza que transforma I en J_{i_0} , y $\sigma_{i_0}x$ es la función definida por $\sigma_{i_0}x(i) = x[\sigma_{i_0}(i)]$ ($i_0 \in I$) se tiene $\text{Lim } \sigma_{i_0}x = \text{Lim } x$ para todo $i_0 \in I$.

4. Si $x = 1$ es $\text{Lim } x = 1$.

DEMOSTRACIÓN. - Este lema se puede probar de manera análoga que se demuestra la existencia del límite generalizado $\text{Lim}_n x_n$ aplicando el teorema de HAHN-BANACH con

$$p(x) = \inf_{i, \dots, i_n} \overline{\lim}_i \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \sigma_{i_v} x(i) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

y usando el hecho de que $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ es un semigrupo conmutativo ⁽¹²⁾.

LEMA 3. - Si I es un conjunto totalmente ordenado, a toda función real acotada x sobre I se la puede asignar un número real

$$\text{Lim } x \text{ o } \text{Lim}_i x_i \quad (x_i = x(i)),$$

llamado límite generalizado, de modo que se cumplan las condiciones:

1. $\text{Lim } (ax + by) = a \text{ Lim } x + b \text{ Lim } y$.

⁽¹¹⁾ Recuérdese que G_γ y G_δ son subgrupos normales de $G_\gamma G_\delta = G_\delta G_\gamma$.

⁽¹²⁾ Véase, BANACH [2]. Se puede dar otra demostración de este lema mediante el corolario 6 de [9].

2. Si $x \geq 0$ es $\text{Lim } x \geq 0$.
3. Si $x_i = y_i$ para todo $i \geq i_0$ ($i_0 \in I$), es $\text{Lim } x = \text{Lim } y$.
4. Si $x = 1$, es $\text{Lim } x = 1$.

DEMOSTRACIÓN. - Existiendo un subconjunto bien ordenado de I cofinal con I , es obvio que se puede suponer I bien ordenado. Entonces, por el lema 2, será suficiente probar que existe un subconjunto I_0 de I , cofinal con I y semejante a cada conjunto $J_i = \{j \mid j \in I_0 \wedge j \geq i\}$ con $i \in I_0$. En efecto, como el conjunto de los números ordinales transfinitos ($\leq \text{ord } I$) es bien ordenado, existe un subconjunto I_0 de I , cofinal con I , y tal que $\text{ord } I_0 \leq \text{ord } I'$ para todo subconjunto I' de I cofinal con I . De esto se sigue, evidentemente, que I_0 es un conjunto bien ordenado semejante a cada $J_i = \{j \mid j \in I_0 \wedge j \geq i\}$ con $i \in I_0$ puesto que J_i es un subconjunto de I , cofinal con I y $\text{ord } J_i \leq \text{ord } I_0$ ($\leq \text{ord } J_i$).

TEOREMA 14. - Sea $\{G_i \mid i \in I\}$ una cadena no decreciente de subgrupos de un grupo G^* y $G = \bigcup \{G_i \mid i \in I\}$ ⁽¹³⁾. Entonces, si g es un subgrupo de cada G_i y todo espacio homogéneo $E_i = G_i/g$ es extensible, se sigue que $E = G/g$ es un espacio homogéneo extensible.

DEMOSTRACIÓN. - Desde luego, $G = \bigcup \{G_i \mid i \in I\}$ es un grupo porque $G_{i'} \subset G_{i''}$ cuando $i' \leq i''$. Además, siendo cada E_i un espacio homogéneo extensible, existe una extensión ultracompleta μ_i con $\mu_i(E_i) = 1$ e invariante por G_i ($i \in I$). Entonces, si para todo conjunto $S \cdot g \subset E$ ($S \subset G$) se pone

$$\mu: \mu(S \cdot g) = \lim_i \mu_i(S_i \cdot g) \quad \text{con} \quad S_i = S \cap G_i,$$

donde $\lim x_i$ es un límite generalizado con las propiedades del lema 3, resulta que μ es una extensión ultracompleta con $\mu(E) = 1$ e invariante por G . En efecto:

1. μ es una extensión ultracompleta puesto que $\mu \geq 0$ y para todo par subconjuntos disjuntos $S' \cdot g$ y $S'' \cdot g$ de E se tiene

$$\begin{aligned} \mu[(S' \cdot g) \cup (S'' \cdot g)] \\ = \mu(S' \cdot g) + \mu(S'' \cdot g) \end{aligned}$$

⁽¹³⁾ Se dice que $\{A_i \mid i \in I\}$ es una cadena no decreciente de subconjuntos de un conjunto A^* , si I es un conjunto totalmente ordenado y $A_{i'} \subset A_{i''}$ ($\subset A^*$) cuando $i' < i''$ y $\{i', i''\} \subset I$.

por la propiedad 1 del límite generalizado y ser

$$(S' \cdot g) \cup (S'' \cdot g) = (S' \cup S'') \cdot g,$$

$$[(S' \cup S'') \cap G_i] \cdot g = (S'_i \cdot g) \cup (S''_i \cdot g) \quad (S_i^{(\vee)} = S^{(\vee)} \cap G_i)$$

y

$$(S'_i \cdot g) \cap (S''_i \cdot g) \subset (S' \cdot g) \cap (S'' \cdot g) = \emptyset.$$

2. $\mu(E) = \lim_i \mu_i[(G \cap G_i) \cdot g] = \lim_i \mu_i(E_i) = 1$ por la propiedad 4 del límite generalizado.

3. Como para todo $\sigma \in G$ existe un $i_0 \in I$ tal que $\sigma \in G_i$ para $i \geq i_0$, cualquiera que sea el subconjunto $S \cdot g$ de E resulta $(\sigma S) \cap G_i = \sigma(S \cap G_i) = \sigma S_i$ y $\mu_i(\sigma S_i \cdot g) = \mu_i(S_i \cdot g)$ para $i \geq i_0$ y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mu[\sigma(S \cdot g)] &= \mu(\sigma S \cdot g) \\ &= \lim_i \mu_i[(\sigma S \cap G_i) \cdot g] \\ &= \lim_i \mu_i(S_i \cdot g) \\ &= \mu(S \cdot g) \end{aligned}$$

en virtud de la propiedad 3 (lema 3) del límite generalizado.

Como consecuencia de este teorema y del axioma de ZORN resulta:

COROLARIO 12. - Si $E_0 = G_0/g$ es un subespacio homogéneo extensible de $E = G/g$, existe al menos un subespacio homogéneo extensible maximal $E_m = G_m/g$ de E que contiene a E_0 ; en otras palabras, $G_m \supset G_0$ y si $E' = G'/g$ es un subespacio homogéneo extensible de E que contiene a E_m se tiene $E' = E_m$.

PROPOSICIÓN 8. - Si $E_m = G_m/g$ es un subespacio homogéneo extensible maximal de $E = G/g$ resulta:

1. Cualquiera que sea el subgrupo G' de G que contenga a G_m , el espacio homogéneo G'/G_m es no extensible, excepto cuando $G' = G_m$.

2. G_m no es subgrupo normal de ningún subgrupo G' de G , distinto de G_m .

DEMOSTRACIÓN. - Efectivamente, la propiedad 1 se deduce del corolario 11. Por otra parte, si G_m fuese subgrupo normal de un subgrupo $G' \neq G_m$ de G , existiría un elemento $\alpha \in G' - G_m$, pero entonces, si G'' es el mínimo subgrupo de G' que contiene a $G_m \cup \{\alpha\}$, el grupo cociente G''/G_m sería

cíclico y, por consiguiente, extensible, lo cual está, según el corolario 4, en contradicción con la propiedad 1 por ser $G'' \neq G_m$.

COROLARIO 13. - Si G es un grupo tal que todo subgrupo $G_0 \neq G$ de G es subgrupo normal de otro subgrupo $G_1 \neq G_0$ de G , G es un grupo extensible.

COROLARIO 14. - Todo grupo hamiltoniano es extensible ⁽¹⁴⁾.

COROLARIO 15. - Todo grupo abeliano es extensible.

PROPOSICIÓN 9. - Dado un grupo G existe un subgrupo normal extensible máximo G_n de G , es decir, un subgrupo normal extensible G_n de G que contiene a cualquier otro subgrupo normal extensible G' de G . Este grupo G_n es, precisamente, el subgrupo normal máximo de G contenido en uno cualquiera de los subgrupos extensibles maximales G_m de G .

DEMOSTRACIÓN. - Como G' y $G'G_m/G \cong G_m/G' \cap G_m$ son, evidentemente, grupos extensibles, se deduce por los corolarios 4 y 11 que $G'G_m(\supset G_m)$ es extensible y, por consiguiente, que $G'G_m = G_m$, $G' \subset G_m$ y $G' \subset G_n$ si $G_n (= \cap \{ \alpha G_m \alpha^{-1} \mid \alpha \in G \})$ es el máximo subgrupo normal de G contenido en G_m . Demostrado esto resulta la proposición si se tiene en cuenta que según el corolario 7 y proposición 4, $G_n(\subset G_m)$ es un grupo extensible.

DEFINICIÓN. - Una familia $\{E_i \mid i \in I\}$ de subespacios homogéneos $E_i = G_i/g$ de un espacio homogéneo $E = G/g$ diremos que es una *serie transfinita de subespacios homogéneos de E* si I es un conjunto bien ordenado con último elemento y se verifican las condiciones:

1. $G_{i_*} = g$ y $G_{i^*} = G$, siendo i_* y i^* el primero y último elemento, respectivamente, de I .

2. Si i es de primera especie e $i-1$ es el elemento precedente de i , G_{i-1} es un subgrupo de G_i .

3. Si i es de segunda especie, $G_i = \cup \{G_{i'} \mid i' < i\}$.

Los espacios homogéneos $G_{i+1}/G_i (i < i^*)$ se llaman *los espacios homogéneos cocientes* de dicha serie.

En particular, una serie transfinita $\{E_i \mid i \in I\}$ de subespacios homogéneos $E_i = G_i/g$ de $E = G/g$ diremos que es una *serie normal transfinita de E* si cada G_i es un subgrupo normal de G_{i+1} para $i < i^*$.

TEOREMA 15. - Si existe una serie transfinita $\{E_i \mid i \in I\}$ de subespacios

(14) Un grupo G se llama *hamiltoniano* si todo subgrupo G_0 de G es un subgrupo normal de G . A veces se suele exigir que G no sea abeliano.

homogéneos $E_i = G_i/g$ de $E = G/g$ tal que todo espacio homogéneo cociente G_{i+1}/G_i ($i < i^*$) es extensible, se sigue que E es un espacio homogéneo extensible.

DEMOSTRACIÓN. - Será suficiente probar que cada E_i es extensible. Con este objeto procederemos por inducción transfinita en la forma siguiente:

1. $E_{i^*} = g/g$ es un espacio homogéneo extensible. Evidente.
2. Si i es un elemento de primera especie de I y E_{i-1} es extensible, E_i es también extensible. Basta aplicar el corolario 11 teniendo presente que G_i/G_{i-1} es un espacio homogéneo extensible.

3. Si i es un elemento de segunda especie de I y $E_{i'}$ es extensible para $i' < i$, E_i es extensible. Se deduce del teorema 14 por ser $G_i = \bigcup \{G_{i'} \mid i' < i\}$ y $G_{i'} < G_{i''}$ para $i' < i''$.

DEFINICIÓN. - Un grupo G se dice *accesible* si existe una serie normal transfinita de G (o $G/\{\varepsilon\}$) cuyos grupos cocientes son todos perfectos.

COROLARIO 16. - *Todo grupo accesible es extensible.*

§ 3. Prolongaciones ultracompletas.

De acuerdo con las notaciones empleadas en el problema 1 (§ 1), sean:

1. E un conjunto no vacío.
2. G un grupo de permutaciones de E .
3. μ_0 una extensión no nula, definida sobre un anillo de Boole $\mathbb{S}_0$ de subconjuntos de E y k -compatible con G .
4. $\mathbb{S} = \overline{\mathbb{S}_0}$ la clase de las partes de los conjuntos $S_0 \in \mathbb{S}_0$, que según puede comprobarse es también un anillo de Boole de subconjuntos de E .

Entonces se define la *extensión exterior* μ_e e *interior* μ_i poniendo

$$(3.1.1) \quad \mu_e(S) = \inf \{ \mu_0(S_0) \mid S_0 \in \mathbb{S}_0 \wedge S_0 \supset S \}$$

y

$$(3.1.2) \quad \mu_i(S) = \sup \{ \mu_0(S_0) \mid S_0 \in \mathbb{S}_0 \wedge S_0 \subset S \}$$

para cada conjunto $S \in \mathbb{S}$.

Por tanto, cualquiera sea $S \in \mathbb{S}$ se tiene

$$(3.2.1) \quad \mu_e(\alpha S) = k(\alpha) \mu_e(S)$$

y

$$(3.2.2) \quad \mu_i(\alpha S) = k(\alpha) \mu_i(S)$$

para todo $\alpha \in G$, y

$$(3.3) \quad \mu_i(S) \leq \mu(S) \leq \mu_e(S)$$

para toda prolongación ultracompleta μ de μ_0 .

De manera análoga que en § 2 a cada prolongación ultracompleta μ de μ_0 y a cada subconjunto H de G se asigna un número real:

$$(3.4.1) \quad \begin{aligned} \omega_0(\mu, H) &\equiv \omega(\mu_0; \mu, H) \\ &= \sup \left\{ \frac{\mu(\alpha S)}{\mu_e(\alpha S)} - \frac{\mu(S)}{\mu_e(S)} \mid \alpha \in H \wedge S \in \mathfrak{S} \right\} \quad (\mu_e(S) \neq 0) \end{aligned}$$

cuando $H \neq \emptyset$ y

$$(3.4.2) \quad \omega_0(\mu, \emptyset) \equiv \omega(\mu_0; \mu, \emptyset) = 0.$$

Si se tiene en cuenta (3.2.1) y (3.3) de esta definición resulta:

$$(3.5) \quad 0 \leq \omega_0(\mu, H) \leq 1 \quad (H \subset G)$$

y

$$(3.6) \quad \omega_0(\mu, H_1) \leq \omega_0(\mu, H_2)$$

cuando $H_1 \subset H_2 \subset G$.

Como con esto no queda, suficientemente, puesto en evidencia que $\omega_0(\mu, H) \geq 0$ lo probaremos poniendonos en el peor de los casos que sea

$$\frac{\mu(\alpha S)}{\mu_e(\alpha S)} \leq \frac{\mu(S)}{\mu_e(S)} \quad (\mu_e(S) \neq 0)$$

para $\alpha \in H$ y cada $S \in \mathfrak{S}$. Entonces, como existe

$$\lim_n \frac{\mu(\alpha^n S)}{\mu_e(\alpha^n S)} \quad (\mu_e(S) \neq 0),$$

se deduce

$$\lim_n \left[\frac{\mu(\alpha^{n+1} S)}{\mu_e(\alpha^{n+1} S)} - \frac{\mu(\alpha^n S)}{\mu_e(\alpha^n S)} \right] = 0 \quad (\alpha^n S \in \mathfrak{S})$$

y, por tanto, $\omega_0(\mu, H) \geq 0$.

Si M es el conjunto de las prolongaciones ultracompletas de μ_0 , se define

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad \omega_0(H) &\equiv \omega(\mu_0; E, H) \\
 &= \inf \{ \omega_0(\mu, H) \mid \mu \in H \} \\
 &= \inf \{ \omega(\mu_0; \mu, H) \mid \mu \in H \}
 \end{aligned}$$

para todo subconjunto H de G .

OBSERVACIÓN 2. - *El conjunto M de las prolongaciones ultracompletas μ de μ_0 es no vacío.* Efectivamente, esto se deduce del corolario 12 de [9] teniendo presente que $g = \{\varepsilon\}$ es un grupo extensible. Para esta demostración se puede utilizar también el teorema de HAHN-BANACH.

OBSERVACIÓN 3. - *Cuando $\mathcal{S}_0 = \{\emptyset, E\}$ y*

$$\mu_0(\emptyset) = 0 \text{ y } \mu_0(E) = 1,$$

resulta

$$(3.8.1) \quad \mu_i(S) = 0 \text{ y } \mu_e(S) = 1$$

para todo conjunto $S \in \mathcal{S} - \mathcal{S}_0$ ($\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}}_0$),

$$(3.8.2) \quad \omega(\mu_0; \mu, H) = \omega(\mu, H)$$

para toda prolongación ultracompleta μ de μ_0 , y

$$(3.8.3) \quad \omega(\mu_0; E, H) = \omega(E, H).$$

PROPOSICIÓN 10. - *Si $H_1 \subset H_2 \subset G$ se verifica*

$$(3.9) \quad 0 \leq \omega_0(H_1) \leq \omega_0(H_2) \leq 1.$$

DEMOSTRACIÓN. - Se deduce de (3.5), (3.6) y (3.7).

PROPOSICIÓN 11. - *Si $\{\mu_n\}_1^\infty$ es una sucesión de prolongaciones ultracompletas de μ_0 y*

$$\lim_n \omega_0(\mu_n, H) = \omega_0(H),$$

para todo limite generalizado de Banach: $\lim_n a_n$, la función real de conjunto

$$\mu: \quad \mu(S) = \lim_n \mu_n(S) \quad (S \in \mathcal{S})$$

es una prolongación ultracompleta de μ_0 con $\omega_0(\mu, H) = \omega_0(H)$.

DEMOSTRACIÓN. - Basta proceder de igual forma que en la proposición 2 teniendo presente que el límite generalizado $\text{Lim } \mu_n(S)$ está definido por ser $\mu_n(S) \leq \mu_e(S)$ para todo $n \geq 1$ ($S \in \mathbb{S}$).

TEOREMA 16. - *El conjunto M_0 de las prolongaciones ultracompletas μ de μ_0 que verifican*

$$(3.10) \quad \omega_0(\mu, H) = \omega_0(H)$$

es un conjunto convexo no vacío.

DEMOSTRACIÓN. - Se prueba de manera análoga que el teorema 2 con el auxilio de la proposición 11.

COROLARIO 16. - *Existe una prolongación ultracompleta μ de μ_0 compatible con un subgrupo G_0 de G cuando y sólo cuando*

$$(3.11) \quad \omega_0(G_0) = 0.$$

LEMA 4. - *Sea g un subgrupo de G tal que $k(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in g$. Entonces, si μ es una prolongación ultracompleta de μ_0 , existe otra prolongación ultracompleta μ^* de μ_0 que satisface*

$$(3.12) \quad \omega_0(\mu^*, G) \leq \omega_0(\mu, g) + \omega_0(\mu, G)\omega(G/g)$$

y

$$(3.13) \quad \omega_0(\mu^*, G_n) \leq \omega_0(\mu, G_n)$$

para todo subgrupo normal G_n de G .

DEMOSTRACIÓN. - El proceso a seguir es análogo al del lema 1. Efectivamente, como por el axioma de la elección existe una aplicación φ de $E = G/g$ en G que verifica $\varphi(\alpha \cdot g) \in \alpha g$ para todo $\alpha \in G$ y por el teorema 2 se puede encontrar una extensión μ_1 con $\mu_1(E_1) = 1$ de modo que $\omega(\mu_1, G) = \omega(\bar{E}_1)$, si se pone

$$f(\alpha \cdot g; S) = k(\alpha)_\mu(\alpha_0^{-1}S) \quad \text{con } \alpha_0 = \varphi(\alpha \cdot g) \quad (\alpha \in G)$$

y

$$\mu^*(S) = \int_{E_1} f(\alpha \cdot g; S) d\mu_1$$

para todo conjunto $S \in \mathbb{S}$, queda definida una función real de conjunto μ^* que cumple las condiciones citadas según se prueba de forma análoga que

en el lema 1 teniendo en cuenta:

1. $f(\alpha \cdot g; S) = \mu_0(S)$ para todo $S \in \mathfrak{S}_0$.
2. $|k(\sigma)^{-1}f(\alpha \cdot g; \sigma S) - f(\sigma^{-1}\alpha \cdot g; S)| \leq \omega_0(\mu, g)\mu_e(S)$ para $S \in \mathfrak{S}$.
3. $|f(\sigma^{-1}\alpha \cdot g; S) - f(\alpha \cdot g; S)| \leq \omega_0(\mu, G)\mu_e(S)$ para $S \in \mathfrak{S}$.
4. $|k(\sigma)^{-1}f(\alpha \cdot g; \sigma S) - f(\alpha \cdot g; S)| \leq \omega_0(\mu, G_n)\mu_e(S)$ para $S \in \mathfrak{S}$ y $\sigma \in G_n$.

TEOREMA 17. - *Si G es un grupo extensible existe una prolongación ultracompleta μ de μ_0 k -compatible con G .*

DEMOSTRACIÓN. - Basta aplicar el lema 4 a cualquier prolongación ultracompleta de μ_0 , tomando $g = \{\varepsilon\}$ y teniendo presente la observación 2.

COROLARIO 17. - *Si G es un grupo extensible existe una extensión ultracompleta μ con $\mu(G) = 1$ e invariante por $G_\gamma G_\delta = G_\delta G_\gamma$, donde G_γ y G_δ son, respectivamente, los grupos de las traslaciones a la izquierda y derecha de G .*

DEMOSTRACIÓN. - Se deduce de la proposición 7 y del teorema 17.

TEOREMA 18. - *Si g es un subgrupo de G tal que $k(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in g$, se verifica*

$$(3.14) \quad \omega_0(G) \leq \omega_0(g) + \omega(G/g).$$

DEMOSTRACIÓN. - Resulta del lema 4 teniendo en cuenta que según el teorema 16 existe una prolongación ultracompleta μ de μ_0 con $\omega_0(\mu, g) = \omega_0(g)$ y $\omega_0(\mu, G) \leq 1$.

COROLARIO 18. - *Si g es un subgrupo de G tal que $k(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in g$, y el espacio homogéneo G/g es extensible resulta*

$$(3.15) \quad \omega_0(G) = \omega_0(g).$$

COROLARIO 19. - *Si*

$$G_1 = \{ \alpha \mid \alpha \in G \wedge k(\alpha) = 1 \} \quad (= k^{-1}(1))$$

resulta

$$(3.15.1) \quad \omega_0(G) = \omega_0(G_1).$$

⁽¹⁵⁾ Se puede lograr también que μ sea invariante por la permutación σ : $\sigma(x) = x^{-1}$ de G .

DEMOSTRACIÓN. - Basta tener presente que el grupo cociente G/G_1 es conmutativo y, por consiguiente, extensible por ser k un homomorfismo de G en R cuyo núcleo es G_1 .

COROLARIO 20. - *Existe una prolongación ultracompleta μ de μ_0 k -compatible con G si y sólo si existe una prolongación ultracompleta μ_1 de μ_0 invariante por $G_1 = k^{-1}(1)$.*

TEOREMA 19. - *Sean G un grupo de permutaciones de E y $\{E_i \mid i \in I\}$ una familia de partes no vacías de E con las propiedades :*

1. $\cup \{E_i \mid i \in I\} = E$.
2. G opera transitivamente sobre la familia dada $\{E_i \mid i \in I\}$.
3. *Todo conjunto $S \in \mathfrak{S}_0$ tiene intersección no vacía con sólo un número finito (≥ 0) de conjuntos E_i .*
4. *Cualquiera que sea $S \in \mathfrak{S}_0$ es $S \cap E_i \in \mathfrak{S}_0$ para todo $i \in I$ y $\mu_0(S \cap E_i \cap E_{i'}) = 0$ para cada par (i', i'') de elementos distintos de I .*

Entonces, si el grupo

$$G_0 = \{ \alpha \mid \alpha E_{i_0} = E_{i_0} \wedge \alpha \in G \}$$

es extensible para un determinado $i_0 \in I$, existe una prolongación ultracompleta μ de μ_0 k -compatible con G .

DEMOSTRACIÓN. - Evidentemente, por ser G_0 extensible existe, según el teorema 17, una extensión μ_1 definida sobre la clase $\mathfrak{S}_1$ de las partes de los conjuntos $S \cap E_{i_0}$ con $S \in \mathfrak{S}_0$, k -compatible con G_0 y que satisface

$$\mu_1(S) = \mu_0(S)$$

para todo $S \in \mathfrak{S}_0 \cap \mathfrak{S}_1$ ⁽¹⁶⁾. Por tanto,

$$(3.16) \quad k(\alpha')_{\mu_1(S')} = k(\alpha'')_{\mu_1(S'')}$$

cuando

$$\alpha'S' = \alpha''S'', \{S', S''\} \subset \mathfrak{S}_1 \text{ y } \{\alpha', \alpha''\} \subset G \text{ } (\alpha'^{-1}\alpha'' \in G_0 \text{ o } \mu_1(S') = 0 = \mu_1(S'')).$$

Por otra parte, como G opera transitivamente sobre la familia $\{E_i \mid i \in I\}$, para todo $i \in I$ existe un $\alpha_i \in G$ tal que $\alpha_i E_{i_0} = E_i$. Entonces,

⁽¹⁶⁾ $\mathfrak{S}_0 \cap \mathfrak{S}_1$ es invariante por G_0 .

si $\mathfrak{S}$ es la clase de las partes de los conjuntos $S_0 \in \mathfrak{S}_0$ y para cada $S \in \mathfrak{S}$ ponemos

$$\mu(S) = \sum_i k(\alpha_i) \mu_1(\alpha_i^{-1} S_i)$$

con

$$S_i = S \cap E_i \quad (\alpha_i^{-1} S_i \in \mathfrak{S}_1),$$

queda definida una función real μ sobre $\mathfrak{S}$ que satisface:

1. μ es una extensión. En efecto, $0 \leq \mu(S) < +\infty$ para todo $S \in \mathfrak{S}$ por ser $\mu_1(\alpha_i^{-1} S_i) \geq 0$ cualquiera que sea $i \in I$ y solamente $S_i \neq \emptyset$ para un número finito de $i \in I$. Además, si S' y S'' son conjuntos disjuntos pertenecientes a $\mathfrak{S}$ y $S = S' \cup S''$, resulta

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \sum_i k(\alpha_i) \mu_1(\alpha_i^{-1} S_i) & (S_i = S \cap E_i) \\ &= \sum_i k(\alpha_i) \mu_1(\alpha_i^{-1} S'_i) & (S'_i = S' \cap E_i) \\ &\quad + \sum_i k(\alpha_i) \mu_1(\alpha_i^{-1} S''_i) & (S''_i = S'' \cap E_i) \\ &= \mu(S') + \mu(S'') \end{aligned}$$

puesto que

$$(\alpha_i^{-1} S'_i) \cup (\alpha_i^{-1} S''_i) = \alpha_i^{-1} S_i$$

y

$$(\alpha_i^{-1} S'_i) \cap (\alpha_i^{-1} S''_i) = \emptyset.$$

2. $\mu(S) = \mu_0(S)$ para cada $S \in \mathfrak{S}_0$. En efecto, si $S \in \mathfrak{S}_0$ se deduce

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \sum_i k(\alpha_i) \mu_1(\alpha_i^{-1} S_i) & (S_i = S \cap E_i) \\ &= \sum_i k(\alpha_i) \mu_0(\alpha_i^{-1} S_i) \\ &= \sum_i \mu_0(S_i) = \mu_0(S) \end{aligned}$$

en virtud de que: a) $\alpha_i^{-1} S_i \in \mathfrak{S}_0 \cap \mathfrak{S}_1$; b) μ_0 es k -compatible con G ; c) $\{S_i \mid i \in I\}$ es una familia de conjuntos que son no vacíos para sólo un número finito de $i \in I$ tales que $\bigcup_i S_i = S$ y $\mu_0(S_{i'} \cap S_{i''}) = \mu_0(S \cap E_{i'} \cap E_{i''}) = 0$ para todo par (i', i'') de elementos distintos de I .

3. $\mu(\alpha S) = k(\alpha) \mu(S)$ para $S \in \mathfrak{S}$ y $\alpha \in G$. Si ponemos $S^* = \alpha S$, $S_i^* = S^* \cap E_i$

y $E_{i'} = \alpha E_i$ para cada $i \in I$, resulta

$$\begin{aligned}\mu(S) &= \sum_i k(\alpha_i) \mu_1(\alpha_i^{-1} S_i) & (S_i = S \cap E_i) \\ &= \sum_i k(\alpha_i) \mu_1[(\alpha \alpha_i)^{-1} S_i^*].\end{aligned}$$

Por consiguiente, como según (3.16) se verifica

$$\begin{aligned}k(\alpha \alpha_i) \mu_1[(\alpha \alpha_i)^{-1} S_{i'}^*] & \quad ((\alpha \alpha_i)^{-1} S_{i'}^* \in \mathfrak{S}_1) \\ &= k(\alpha_{i'}) \mu_1(\alpha_{i'}^{-1} S_{i'}^*) \quad (\alpha_{i'}^{-1} S_{i'}^* \in \mathfrak{S}_1)\end{aligned}$$

y α efectúa una permutación de los elementos E_i de $\{E_i \mid i \in I\}$, tendremos:

$$\begin{aligned}\mu(S^*) &= \sum_i k(\alpha_{i'}) \mu_1(\alpha_{i'}^{-1} S_{i'}^*) \\ &= k(\alpha) \mu(S).\end{aligned}$$

De estas propiedades se sigue que efectivamente existe una prolongación ultracompleta μ de μ_0 , k -compatible con G .

COROLARIO 21. - Sean: 1) E el semiplano $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$; 2) G el grupo unimodular, es decir, el grupo de permutaciones de E engendrado por las tres transformaciones

$$\begin{aligned}\tau_1: \quad \tau_1(z) &= -\bar{z} \\ \tau_2: \quad \tau_2(z) &= 1 - \bar{z} \\ \tau_3: \quad \tau_3(z) &= 1/\bar{z}\end{aligned}$$

donde $\bar{z}$ es el número complejo conjugado de z ; 3) $\mathfrak{S}_0$ la clase de los subconjuntos medibles S de E cuya clausura $\bar{S}$ en E es un conjunto compacto; 4) μ_0 la extensión definida por

$$\mu_0(S) = \int_S \frac{dx dy}{y^2} \quad (z = x + iy)$$

para todo $S \in \mathfrak{S}_0$. Entonces existe una prolongación ultracompleta μ de μ_0 invariante por G .

DEMOSTRACIÓN. - Sea E_0 el triángulo

$$\{z \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1/2 \wedge \operatorname{Im} z > 0 \wedge |z| \geq 1\}$$

y $E_x = \alpha E_0$ para cada $\alpha \in G$. Entonces este corolario se obtiene del teorema 19 tomando $\{E_i \mid i \in I\} = \{E_\alpha \mid \alpha \in G\}$ y $k=1$ ya que según se ve fácilmente se cumplen las condiciones requeridas para ello.

OBSERVACIÓN 4. - *El grupo unimodular G no es extensible según resulta de la proposición 13 que expondremos después.*

LEMA 5. - *Si E^* es un subconjunto de E y g es un subgrupo normal de G tal que $gE^* = E$ y $\alpha E^* \cap E^* = \emptyset$ para todo $\alpha \in g - \{\varepsilon\}$; cualquiera que sea $x \in E$, el conjunto $gx \cap E^*$ consta de un solo elemento y el conjunto G^* de las permutaciones α^* de E^* definidas por*

$$\{\alpha^*x\} = gx \cap E^*$$

para $\alpha \in G$ y $x \in E^*$ es un grupo isomorfo al grupo cociente G/g^* , siendo g^* el subgrupo normal de G formado por todos los elementos α que satisfacen $\alpha gx = gx$ para todo $x \in E^*$ (o $x \in E$).

DEMOSTRACIÓN. - En primer lugar, si $\{x_1, x_2\} \subset gx \cap E^*$ se puede encontrar un elemento $\gamma \in g$ de forma que $\gamma x_1 = x_2$ y, por tanto, como entonces $x_2 \in \gamma E^* \cap E^*$, resulta $\gamma = \varepsilon$ y $x_1 = x_2$. Por otra parte, siendo $gE^* = E$, se deduce que $gx \cap E^*$ consta, efectivamente, de un solo punto.

Se ve también sin dificultad que la aplicación $\alpha \rightarrow \alpha^*$ de G en G^* , definida poniendo

$$\{\alpha^*x\} = gx \cap E^*$$

para $x \in E^*$, es un homomorfismo, puesto que si $\beta^*x = \gamma_0\beta x \in E^*$ y $\alpha^*(\beta^*x) = \gamma_1\alpha(\beta^*x) \in E^*$ para un par (γ_0, γ_1) de elementos de g , resulta

$$\begin{aligned} \alpha^*(\beta^*x) &= \gamma_1\alpha\gamma_0\beta x \\ &= \gamma_1\gamma_2\alpha\beta x \end{aligned}$$

con $\gamma_2 = \alpha\gamma_0\alpha^{-1} \in g$ y, por consiguiente,

$$\{\alpha^*(\beta^*x)\} = g\alpha\beta x \cap E^*$$

y

$$(\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^*$$

para todo par (α, β) de elementos de G .

Para concluir basta observar que el núcleo g^* de este homomorfismo está formado por todos los elementos α de G que verifican

$$\begin{aligned} \{x\} &= g\alpha x \cap E^* \\ &= \alpha gx \cap E^* \end{aligned}$$

para todo $x \in E^*$, lo cual equivale a que

$$gx = \alpha g x$$

para todo $x \in E^*$ (o $x \in E$).

TEOREMA 20. - Sean: 1) E^* un subconjunto de un espacio homogéneo $E = G/g_0$; 2) g un subgrupo normal de G tal que para cada $\alpha \in g - \{\varepsilon\}$ se tiene $\alpha E^* \cap E^* = \emptyset$ y para todo $\alpha \in G$ se puede encontrar un subconjunto finito $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ de g de modo que $\alpha E^* \subset \bigcup_1^n \gamma_k E^*$; 3) μ_0 es invariante por G y $\mu_0(E^*) > 0$. Entonces para toda prolongación ultracompleta μ de μ_0 invariante por g resulta

$$(3.17) \quad \omega_0(\mu, G) \geq \omega(G/gg_0).$$

DEMOSTRACIÓN. - En primer término demostraremos que

$$\omega_0(\mu, G) \geq \omega(E^*, G^*)$$

si G^* es el grupo, isomorfo a G/g^* , considerado en el lema 5. Para ello bastará probar que la función real de conjunto μ^* definida poniendo

$$\mu^*(S) = \frac{\mu(S)}{\mu(E^*)} \quad (\mu(E^*) = \mu_0(E^*) > 0)$$

para cada $S \subset E^*$ es una extensión ultracompleta con $\mu^*(E^*) = 1$ y

$$\omega_0(\mu, G) \geq \omega(\mu^*, G^*),$$

lo cual se reduce, evidentemente, a demostrar esta desigualdad. Como para todo $\alpha \in G$ se puede encontrar un subconjunto finito $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ de g de forma que

$$\alpha E^* \subset \bigcup_1^n \gamma_k E^*,$$

si se pone $E_k = \gamma_k^{-1} \alpha E^* \cap E^*$ resulta

$$\begin{aligned} \mu(\alpha S) &= \mu(\alpha S \cap \alpha E^*) \\ &= \sum_1^n \mu(\alpha S \cap \gamma_k E_k) \\ &= \sum_1^n \mu(\gamma_k^{-1} \alpha S \cap E_k) \\ &= \sum_1^n \mu(g \alpha S \cap E_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu(g\alpha S \cap E^*) \\
&= \mu^*(\alpha^* S) \mu(E^*)
\end{aligned}$$

para cada subconjunto S de E^* por verificarse

$$a) \quad \alpha E^* = \bigcup_1^n \gamma_k E_k \text{ y } \gamma_h E_h \cap \gamma_k E_k \subset \gamma_h E^* \cap \gamma_k E^* = \emptyset \text{ para } h \neq k;$$

$$b) \quad \gamma_k^{-1} \alpha S \cap E_k = g\alpha S \cap E_k;$$

$$c) \quad \bigcup_1^n E_k = E^* \text{ y } E_h \cap E_k \subset \gamma_k^{-1} \alpha [(\alpha^{-1} \gamma_k \gamma_h^{-1} \alpha E^*) \cap E^*] = \emptyset$$

para $h \neq k$ porque $\alpha^{-1} \gamma_k \gamma_h^{-1} \alpha$ es un elemento de g distinto de ϵ .

Por tanto,

$$\begin{aligned}
&\mu^*(\alpha^* S) - \mu^*(S) \\
&= \frac{\mu(\alpha S) - \mu(S)}{\mu(E^*)} \\
&\leq \frac{\mu(\alpha S)}{\mu_e(\alpha S)} - \frac{\mu(S)}{\mu_e(S)}
\end{aligned}$$

para todo $\alpha^* \in G^*$ y $S \subset E^*$, y

$$\omega_0(\mu, G) \geq \omega(\mu^*, G^*).$$

Para terminar basta tener presente ahora que (E^*, G^*) es un espacio homogéneo G^*/g_0^* y que según el teorema 6 se tiene

$$\begin{aligned}
\omega(E^*, G^*) &= \omega(G^*/g_0^*) \\
&= \omega[(G/g^*)/(gg_0/g^*)] \\
&= \omega(G/gg_0),
\end{aligned}$$

puesto que si se toma $g_0^* = \{\alpha^* \mid \alpha \in g_0\}$ se tiene

$$G^* \times g^* \simeq (G/g^*) \times (gg_0/g^*)$$

con el isomorfismo entre los segundos factores inducido por el de los primeros.

COROLARIO 22. — *Si con las notaciones y condiciones del teorema 20 g_0 es un grupo extensible, resulta*

$$(3.18) \quad \omega_0(\mu, G) \geq \omega(G/g).$$

TEOREMA 21. - Si μ es una prolongación ultracompleta de μ_0 se puede definir una integral

$$\int_S f d\mu$$

para toda función real acotada f sobre E y $S \in \mathfrak{S}(=\overline{\mathfrak{S}}_0)$ con las propiedades:

I₁. Cualquiera que sea el par (f, g) de funciones reales y acotadas sobre E y los números reales a, b se verifica

$$(3.19) \quad \int_S (af + bg) d\mu = a \int_S f d\mu + b \int_S g d\mu$$

para cada $S \in \mathfrak{S}$.

I₂. Si S_1 y S_2 son dos conjuntos disjuntos, pertenecientes a $\mathfrak{S}$, y f es una función real acotada se tiene

$$(3.20) \quad \int_{S_1 \cup S_2} f d\mu = \int_{S_1} f d\mu + \int_{S_2} f d\mu.$$

I₃. Si $S \in \mathfrak{S}$, es

$$(3.21) \quad \int_S d\mu = \mu(S) \quad (f = 1).$$

I₄. Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in S$ y $S \in \mathfrak{S}$, resulta

$$(3.22) \quad \int_S f d\mu \geq 0.$$

I₅. Si f es una función real acotada cuya oscilación es $\omega(f)$ y si H es un subconjunto de G tal que $k(\alpha) = 1$ para cada $\alpha \in H$, resulta

$$(3.23) \quad \int_S (f_\alpha - f) d\mu \leq \omega(f) [\delta(\mu, S, H) + \omega_0(\mu, H) \mu_e(S)]$$

para todo $\alpha \in H$ y $S \in \mathfrak{S}$, siendo

$$f_\alpha: \quad f_\alpha(x) \equiv f(\alpha^{-1}x)$$

y

$$(3.24) \quad \delta(\mu, S, H) = \sup \{ \mu(S - \alpha S) \mid \alpha \in H \}.$$

Esta integral está unívocamente determinada por las cuatro primeras propiedades I_k .

DEMOSTRACIÓN. - Como se puede proceder de manera análoga que en el teorema 1, nos limitaremos a indicar la demostración de (3.23). Entonces, si $a = \inf \{f(x) \mid x \in E\}$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_S (f_\alpha - a) d\mu - \int_{\alpha S} (f_\alpha - a) d\mu &\leq \int_{S-\alpha S} (f_\alpha - a) d\mu \\ &\leq \omega(f)_\mu(S - \alpha S) \leq \omega(f)\delta(\mu, S, H) \end{aligned}$$

y

$$\int_{\alpha S} (f_\alpha - a) d\mu - \int_S (f - a) d\mu \leq \omega(f)\omega_0(\mu, H)_{\mu_e}(S).$$

Esto último según se deduce de forma similar que (2.7). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_S (f_\alpha - f) d\mu \\ \leq \omega(f)[\delta(\mu, S, H) + \omega_0(\mu, H)_{\mu_e}(S)] \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in H$ y $S \in \mathfrak{S}$.

LEMA 6. - Sea μ_0 una extensión invariante por G : $k=1$, y E_0 un subconjunto de E con $\mu_i(E_0) > 0$ ($E_0 \in \mathfrak{S}$). Entonces, si $H \subset G$, para toda prolongación ultracompleta μ de μ_0 resulta

$$(3.25) \quad \omega(E, H) \leq \omega_0(\mu, H) + \frac{\delta(\mu, E_0, H)}{\mu(E_0)},$$

siendo

$$(3.24) \quad \delta(\mu, S, H) = \sup \{ \mu(S - \alpha S) \mid \alpha \in H \} \quad (S \in \mathfrak{S}).$$

DEMOSTRACIÓN. - En efecto, si $f = f_S$ es la función característica de $S \subset E$, se ve fácilmente que

$$\begin{aligned} \mu^*: \quad \mu^*(S) &= \frac{\mu(S \cap E_0)}{\mu(E_0)} \quad (\mu(E_0) \geq \mu_i(E_0) > 0) \\ &= \frac{1}{\mu(E_0)} \int_{E_0} f_S d\mu \end{aligned}$$

es una extensión ultracompleta con $\mu^*(E) = 1$ que satisface

$$\begin{aligned}\mu^*(\alpha S) - \mu^*(S) &= \frac{1}{\mu(E_0)} \int_{E_0} (f_\alpha - f) d\mu \\ &\leq \omega_0(\mu, H) + \frac{\delta(\mu, E_0, H)}{\mu(E_0)}\end{aligned}$$

para todo $\alpha \in H$ y $S \in \mathcal{S}$ en virtud de (3.23) y, por consiguiente, también (3.25).

TEOREMA 22. - Sea μ_0 invariante por G y E_0 un subconjunto de E con $\mu_i(E_0) > 0$ ($E_0 \in \mathcal{S}$). Entonces, si $H \subset G$, resulta

$$(3.26) \quad \omega(E, H) \leq \omega_0(H) + \frac{\delta_e(E_0, H)}{\mu_i(E_0)},$$

siendo

$$(3.27) \quad \delta_e(S, H) = \sup \{ \mu_e(S - \alpha S) \mid \alpha \in H \} \quad (S \in \mathcal{S}).$$

DEMOSTRACIÓN. - Se deduce del lema 6 teniendo presente que por el teorema 16 existe una prolongación ultracompleta μ de μ_0 con $\omega_0(\mu, H) = \omega_0(H)$ y que $\delta(\mu, E_0, H) \leq \delta_e(E_0, H)$ y $\mu(E_0) \geq \mu_i(E_0)$.

COROLARIO 23. - Con las hipótesis del teorema 22, si $\{H_n\}_1^\infty$ es una sucesión de subconjuntos de $H(\subset G)$ tal que

$$(3.28) \quad \lim_n \delta_e(E_0, H_n) = 0,$$

resulta

$$(3.29) \quad \omega_0(H) \geq \overline{\lim}_n \omega(E, H_n).$$

TEOREMA 23. - Sean: 1) E un espacio homogéneo G/g ; 2) μ_0 invariante por G ; 3) E_0 un subconjunto de E con $\mu_i(E_0) > 0$. Entonces resulta

$$(3.30) \quad \begin{aligned}\omega(G, H_\gamma) &\leq \omega(G, g_\gamma) + \omega_0(H) \\ &\quad + \frac{\delta_e(E_0, H)}{\mu_i(E_0)}.\end{aligned}$$

En particular, si g es extensible y $\{H_n\}_1^\infty$ es una sucesión de subconjuntos de H tal que

$$(3.28) \quad \lim_n \delta_e(E_0, H_n) = 0,$$

se verifica

$$(3.31) \quad \omega_0(H) \geq \overline{\lim}_n \omega(G, H_n, \gamma).$$

DEMOSTRACIÓN. - Se sigue del teorema 22 y corolario 23 teniendo en cuenta (2.29).

TEOREMA 24. - Sean: 1) μ_0 invariante por G ; 2) E_0 un subconjunto de E con $\mu_i(E_0) > 0$ ($E_0 \in \mathcal{S}$); 3) G_0 un subgrupo de G y X un subconjunto de E tales que $\mu_e(E_0 - G_0X) = 0$; 4) g_0 un subgrupo de G_0 que contiene a todos los elementos α de G_0 que verifican $\alpha X \cap X \neq \emptyset$. Entonces, cualquiera que sea el conjunto $H \subset G_0$, resulta

$$(3.32) \quad \omega(G_0/g_0, H) \leq \omega_0(H) + \frac{\delta_e(E_0, H)}{\mu_i(E_0)}.$$

DEMOSTRACIÓN. - En efecto, si se observa que la extensión ultracompleta μ^* , considerada en el lema 6, satisface

$$\omega(\mu^*, H) \leq \omega_0(H) + \frac{\delta_e(E_0, H)}{\mu_i(E_0)}$$

y

$$\mu^*(E) = \mu^*(G_0X) = 1$$

cuando $\omega_0(\mu, H) = \omega_0(H)$, y se define la función real de conjunto μ^{**} por

$$\mu^{**}(S \cdot g_0) = \mu^*(SX)$$

para cada subconjunto $S \cdot g_0$ de G_0/g_0 con $S = Sg_0 \subset G_0$, todo se reduce a probar que μ^{**} es una extensión ultracompleta con $\mu^{**}(G_0/g_0) = 1$ que verifica

$$\omega(\mu^*, H) \geq \omega(\mu^{**}, H) \geq \omega(G_0/g_0, H),$$

cosa que no realizamos por no ofrecer dificultades.

COROLARIO 24. - Con las hipótesis del teorema 24, si $\{H_n\}_1^\infty$ es una sucesión de subconjuntos de $H(\subset G_0)$ tal que

$$(3.28) \quad \lim_n \delta_e(E_0, H_n) = 0,$$

resulta

$$(3.33) \quad \omega_0(H) \geq \overline{\lim}_n \omega(G_0/g_0, H_n).$$

En particular, si E_0 es invariante por H se verifica

$$(3.34) \quad \omega_0(H) \geq \omega(G_0/g_0, H).$$

§ 4. Grupos con elementos independientes.

DEFINICIÓN. - Los elementos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de un grupo G se dicen *independientes* si son todos ellos distintos del elemento unidad ε de G y si cada relación

$$(4.1) \quad \lambda_{i_1}^{p_1} \lambda_{i_2}^{p_2} \dots \lambda_{i_r}^{p_r} = \varepsilon$$

con $i_{k+1} \neq i_k$ ($k < r$) implica $\lambda_{i_k}^{p_k} = \varepsilon$ para algún k : $1 \leq k \leq r$ ($r = 1, 2, \dots$)⁽¹⁷⁾.

De esta definición resulta inmediatamente, si G_0 es el subgrupo de G engendrado por $H = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, que todo elemento $\alpha \neq \varepsilon$ de G_0 se puede representar de una sola forma como producto

$$(4.2) \quad \lambda_{i_1}^{p_1} \lambda_{i_2}^{p_2} \dots \lambda_{i_r}^{p_r}$$

con $i_{k+1} \neq i_k$ para $k < r$ y $\lambda_{i_k}^{p_k} \neq \varepsilon$ para $1 \leq k \leq r$ ($r = 1, 2, \dots$), esto es, si

$$\prod_1^r \lambda_{i_k}^{p_k} = \prod_1^s \lambda_{j_k}^{q_k}$$

con $i_{k+1} \neq i_k$, $j_{k+1} \neq j_k$ y $\lambda_{i_k}^{p_k} \neq \varepsilon \neq \lambda_{j_k}^{q_k}$ se tiene $r = s$, $i_k = j_k$ y $\lambda_{i_k}^{p_k} = \lambda_{j_k}^{q_k}$ para cada k .

Para expresar abreviadamente que $\lambda_{i_1}^{p_1}$ es la primera potencia de la representación reducida (4.2) de $\alpha \in G_0$ diremos que α comienza por $\lambda_{i_1}^{p_1}$ ⁽¹⁸⁾.

TEOREMA 25. - Sean: 1) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ elementos independientes de un grupo G ; 2) $n_i (\leq +\infty)$ el orden de λ_i ; 3) H_γ el conjunto de las traslaciones a la izquierda γ_α de G con $\alpha \in H = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Entonces, en estas condiciones, resulta

$$(4.3) \quad \frac{1}{1 - \omega(G, H_\gamma)} \geq \sum_i \left(1 - \frac{1}{n_i}\right).$$

⁽¹⁷⁾ Este concepto no sufre modificación si se exige que $i_1 \neq i_r$.

⁽¹⁸⁾ De forma general se puede definir cuando α comienza por un elemento cualquiera $\beta \neq 1$ de G_0 . Véase, [8].

DEMOSTRACIÓN. - Como de manera análoga que en la proposición 3 se obtiene

$$\omega(G_0, H_{0\gamma}) \leq \omega(G, H_\gamma)$$

si G_0 es el subgrupo de G engendrado por H y $H_{0\gamma}$ es el conjunto de las traslaciones a la izquierda γ_α de G_0 con $\alpha \in H$, será suficiente probar

$$(4.3)_0 \quad \frac{1}{1 - \omega(G_0, H_{0\gamma})} \geq \sum_i \left(1 - \frac{1}{n_i}\right).$$

Sean: a) μ una extensión ultracompleta con $\mu(G_0) = 1$; b) A_{ik} el conjunto de los elementos de G que comienzan por λ_i^{-k} y $A_i = \bigcup_k A_{ik}$;

c) $A_0 = \{\varepsilon\}$. Entonces, siendo $\bigcup_0^n A_i = G_0$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, se tiene

$$\sum_1^n \mu(A_i) \leq \sum_0^n \mu(A_i) = 1.$$

Por tanto, como para $m = \sum_1^n m_i$ y $m_i = 1 - \frac{1}{n_i}$ es

$$\sum_1^n \frac{m_i}{m} = 1,$$

existe un i : $1 \leq i \leq n$, tal que

$$\mu(A_i) \leq \frac{m_i}{m}.$$

Ahora pueden presentarse dos casos:

I. n_i es finito. Entonces, como $\bigcup_1^{n_i-1} A_{ik} = A_i$ y $A_{ik} \cap A_{ih} = \emptyset$ para $k - h \equiv 0 \pmod{n_i}$, resulta

$$\sum_1^{n_i-1} \mu(A_{ik}) = \mu(A_i) \leq \frac{m_i}{m},$$

de donde se sigue la existencia de un entero k : $1 \leq k < n_i$ tal que

$$\mu(A_{ik}) \leq \frac{1}{n_i - 1} \frac{m_i}{m}.$$

De aquí se deduce, teniendo presente que para $B = \bigcup_{h=1}^k A_{ih}$ es

$$\lambda_i B = \left(\bigcup_{h=1}^{k-1} A_{ih} \right) \cup \left(\bigcup_{j \neq i} A_j \right),$$

que

$$\begin{aligned}
 \omega(G_0, H_{0r}) &\geq \mu(\lambda_i B) - \mu(B) \\
 &= \mu\left(\bigcup_{j \neq i} A_j\right) - \mu(A_{ik}) \\
 &= 1 - \mu(A_i) - \mu(A_{ik}) \\
 &\geq 1 - \frac{m_i}{m} - \frac{1}{n_i - 1} \frac{m_i}{m} \\
 &= 1 - \frac{n_i}{n_i - 1} \frac{m_i}{m} = 1 - \frac{1}{m},
 \end{aligned}$$

o sea, $(4.3)_0$.

II. $n_i = \infty$. De igual forma que antes, para $B = \bigcup_{h=1}^k A_{ih}$ y $k \geq 1$ resulta

$$\begin{aligned}
 \omega(G_0, H_{0r}) &\geq \mu(\lambda_i B) - \mu(B) \\
 &= 1 - \mu(A_i) - \mu(A_{ik}) \\
 &\geq 1 - \frac{1}{m} - \mu(A_{ik}) \quad (m_i = 1)
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene $(4.3)_0$ haciendo $k \rightarrow \infty$ puesto que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{ik}) \leq \mu(A_i)$$

y, por consiguiente, $\lim_k \mu(A_{ik}) = 0$.

COROLARIO 25. - Con las condiciones y notaciones del teorema 25 se verifica

$$(4.4) \quad \omega(G, H_r) \geq \frac{n-2}{n} \geq \frac{1}{3}$$

para $n \geq 3$, y

$$(4.5) \quad \omega(G, H_r) \geq \frac{3n-5}{3n+1} \geq \frac{1}{7}$$

para $n \geq 2$ si al menos uno de los elementos λ_i es de orden $n_i > 2$.

COROLARIO 26. - Si G es un grupo que contiene dos elementos independientes, al menos uno de ellos de orden $\neq 2$, G es no extensible y, por consiguiente, $\omega(G) = 1$.

OBSERVACIÓN 5. - Si el grupo G contiene dos elementos independientes α y β , el primero de ellos, por ejemplo, de orden $\neq 2$; entonces cualquiera que sea $n \geq 2$ G contiene n elementos independientes de orden ∞ .

En efecto, como en estas condiciones $\sigma = \alpha\beta\alpha$ y $\tau = \beta$ son dos elementos independientes y σ es de orden infinito, si se pone $\lambda_i = \sigma^i \tau \sigma^i$ se ve fácilmente que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son n elementos independientes de G , todos ellos de orden infinito.

Esta observación permite probar la conclusión $\omega(G) = 1$ del corolario 26 utilizando solamente (4.4), sin necesidad de recurrir al teorema 9.

OBSERVACIÓN 6. - Si G es un grupo con dos generadores independientes α y β , ambos de orden 2, G es un grupo soluble y, por consiguiente, extensible: $\omega(G) = 0$. En efecto, entonces

$$G_0 = \{(\alpha\beta)^n \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

es un subgrupo normal de G y ambos grupos G_0 y G/G_0 son cíclicos, el último de orden 2.

COROLARIO 27. - Si G es un grupo que contiene dos elementos independientes α y β , ambos no simultáneamente de orden 2, y si g es un subgrupo extensible de G , el espacio homogéneo $E = G/g$ es no extensible y $\omega(E) = 1$.

DEMOSTRACIÓN. - Se deduce de los corolarios 11 y 26 y del teorema 11.

COROLARIO 28. - Con las condiciones y notaciones del teorema 23, si H_n consta de n elementos independientes, resulta $\omega_0(G) = 1$.

DEMOSTRACIÓN. - Basta aplicar (3.31) y (4.4).

TEOREMA 26. - Sean: 1) M un espacio métrico completo; 2) G_0 un grupo topológico (T_1); 3) G un grupo de funciones continuas sobre M con valores en G_0 y tal que si $\alpha(t) = \varepsilon_0 (= \varepsilon(t))$ en un abierto de M se verifica $\alpha = \varepsilon$. Entonces, si G contiene n elementos independientes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, el conjunto T de los puntos $t \in M$ para los que $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ son independientes y $\lambda_i(t)$ es del mismo orden n_i que λ_i para todo $i: 1 \leq i \leq n$, es un conjunto residual y, por consiguiente, no vacío.

DEMOSTRACIÓN. - Para cada conjunto finito $N = \{i_1, i_2, \dots, i_r; p_1, p_2, \dots, p_r\}$ tal que $\lambda_{i_k}^{p_k} \neq \varepsilon$ para $1 \leq k \leq r$ ($r = 1, 2, \dots$), sea F_N el subconjunto de M definido por

$$F_N = \{t \mid \prod_{k=1}^r \lambda_{i_k}^{p_k}(t) = \varepsilon_0\}.$$

Evidentemente, por las hipótesis hechas todo F_N es cerrado y no denso. Por tanto, siendo numerable la clase de dichos conjuntos F_N y

$$M - T \subset \cup F_N$$

se deduce que $M - T$ es de Categoría I y, por el teorema de BAIRE, que T es de Categoría II y, por consiguiente, un conjunto residual.

PROPOSICIÓN 12. - Sea $G_0 = GL(2, R)$ el grupo lineal general formado por las matrices regulares reales de orden 2. Entonces, si T es el conjunto de los valores reales de $t \neq 0$ para los que

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1, & t \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \beta(t) = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$$

son independientes, T es un conjunto residual y $\alpha^p(t) \neq \varepsilon_0$ para $pt \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. - Por el teorema 26 bastará probar que dichas funciones continuas α y β son independientes y la primera de orden ∞ . En efecto,

$$\alpha^p(t) = \begin{pmatrix} 1, & pt \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \neq \varepsilon_0 \quad (= \varepsilon(t))$$

para $p \neq 0$ y $t \neq 0$, y

$$\begin{aligned} & \alpha^{p_1} \beta \alpha^{p_2} \beta \dots \alpha^{p_r} \beta(t) \\ &= t^r \begin{pmatrix} p, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} + O(t^{r-1}) \end{aligned}$$

para

$$p = \prod_1^r p_i \neq 0.$$

OBSERVACIÓN 7. - Esta demostración permite probar también que $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son independientes para todo valor transcendente de t . Además, por la proposición 13, resulta inmediatamente que $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son independientes para $t = 1$.

PROPOSICIÓN 13. - El grupo modular es no extensible ⁽¹⁹⁾.

⁽¹⁹⁾ Aunque esta proposición se refiere al clásico grupo modular se ve, inmediatamente, que también es cierta para el grupo modular $SL(n, Z)$, formado por las matrices cuadradas de orden n con determinante igual a 1 y elementos enteros, y en el caso n par para el grupo proyectivo modular $SL(n, Z)/g$ con $g = \{\varepsilon, -\varepsilon\}$.

DEMOSTRACIÓN. - Efectivamente, si E_0 es el triángulo fundamental

$$\{z \mid \operatorname{Im} z > 0 \wedge |\operatorname{Re} z| \leq 1/2 \wedge |z| \geq 1\},$$

y α_0, β_0 son las permutaciones

$$\alpha_0: \quad \alpha_0(z) = z + 1$$

$$\beta_0: \quad \beta_0(z) = -1/z$$

de $E = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, pertenecientes al grupo modular, se verifica

$$\gamma_0 E_0 \neq E_0$$

para todo $\gamma_0 = \alpha_0^{p_1} \beta_0 \dots \alpha_0^{p_r} \beta_0$ con $\prod p_i \neq 0$ y, por tanto, $\gamma_0 \neq \varepsilon_0$.

PROPOSICIÓN 14. - Sea $G_0 = O(n)$ el grupo de las matrices ortogonales (reales) de orden $n \geq 3$. Entonces G_0 contiene dos elementos independientes α_0 y β_0 , el último de orden arbitrario ⁽²⁰⁾,

DEMOSTRACIÓN. - Es obvio que basta considerar el caso $n = 3$. Entonces, por el teorema 26, será suficiente probar que las funciones α y β definidas por

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t, & \operatorname{sen} t, & 0 \\ \operatorname{sen} t, & -\cos t, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos \Theta, & -\operatorname{sen} \Theta \\ 0, & \operatorname{sen} \Theta, & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

son independientes si $e^{i\Theta} \neq 1$. En efecto, si fuese

$$\alpha \beta^{p_1} \alpha \beta^{p_2} \dots \alpha \beta^{p_r}(t) = \varepsilon_0 \quad (\alpha^2 = \varepsilon)$$

para todo t real, por el principio de prolongación analítica valdría lo

⁽²⁰⁾ Este resultado fué obtenido por HAUSDORFF en [5] con la restricción de que el orden de β_0 fuese 3.

mismo para cualquier número complejo t . Entonces, siendo

$$\alpha(i \log s) = \frac{s}{2} \begin{pmatrix} 1, & i, & 0 \\ i, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} + o(s),$$

$$\alpha\beta^p(i \log s) = \frac{s}{2} \begin{pmatrix} 1, & i \cos p\theta, & -i \sin p\theta \\ i, & -\cos p\theta, & \sin p\theta \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} + o(s)$$

y

$$\alpha\beta^p\alpha(i \log s) = \frac{1 - \cos p\theta}{2} s \alpha(i \log s) + o(s^2)$$

para $s \rightarrow \infty$, resultaría

$$\begin{aligned} & \alpha\beta^{p_1}\alpha\beta^{p_2} \dots \alpha\beta^{p_r}(i \log s) \\ &= s^{r-1} \prod_{k=1}^{r-1} \frac{1 - \cos p_k\theta}{2} \alpha\beta^{p_r}(i \log s) + o(s^r) \\ &= \frac{s^r}{2} \prod_{k=1}^{r-1} \frac{1 - \cos p_k\theta}{2} \begin{pmatrix} 1, & i \cos p_r\theta, & -i \sin p_r\theta \\ i, & -\cos p_r\theta, & \sin p_r\theta \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} + o(s^r) \end{aligned}$$

para $s \rightarrow \infty$ y, por consiguiente, $\cos p_k\theta = 1$ y $\beta^{p_k} = \varepsilon$ para algún k : $1 \leq k \leq r$.

La proposición 14 se puede generalizar así:

PROPOSICIÓN 15. - *Dada una matriz simétrica σ , perteneciente a $GL(n, R)$, sea $G_0 = O_\sigma(n)$ el grupo de las matrices $\alpha \in GL(n, R)$ tales que*

$$\alpha'\sigma\alpha = \sigma,$$

donde α' es la matriz transpuesta de α . Entonces, si $n \geq 3$, G_0 contiene dos elementos independientes α_0 y β_0 de modo que este último se puede elegir de un orden arbitrario cuando tres de las raíces características de σ tengan el mismo signo y de orden ∞ en todos los casos.

DEMOSTRACIÓN. - Como siempre se puede encontrar una matriz $\tau \in O(n)$

de forma que $\tau\sigma\tau^{-1}$ sea una matriz diagonal, podemos suponer

$$\sigma = \begin{pmatrix} s_1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & s_2, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & s_n \end{pmatrix} \quad \left(\prod_1^n s_h = \det \sigma \neq 0 \right)$$

así como también $n=3$ y $s_1 s_2 > 0$. Entonces de modo análogo que en la proposición 14 se definen las funciones continuas α y β poniendo

$$\alpha: \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t, & s_{12} \operatorname{sen} t, & 0 \\ s_{21} \operatorname{sen} t, & -\cos t, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$\beta: \quad \beta(t) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos \Theta, & -s_{23} \operatorname{sen} \Theta \\ 0, & s_{32} \operatorname{sen} \Theta, & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

con

$$s_{hk} = \frac{\sqrt{s_k}}{\sqrt{s_h}}$$

y Θ real o imaginario puro según que s_2 y s_3 tengan el mismo o distinto signo para que β sea real. Si se procede ahora de igual manera que antes resulta

$$\begin{aligned} & \alpha \beta^{p_1} \alpha \beta^{p_2} \dots \alpha \beta^{p_r} (i \log s) \\ &= \frac{s'^{r-1}}{2} \prod_{k=1}^{r-1} \frac{1 - \cos p_k \Theta}{2} \begin{pmatrix} 1, & i s_{12} \cos p_r \Theta, & -i s_{13} \operatorname{sen} p_r \Theta \\ i s_{21}, & -\cos p_r \Theta, & s_{23} \operatorname{sen} p_r \Theta \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} + o(s') \end{aligned}$$

para $s \rightarrow \infty$ y, por tanto, que α y β son independientes. De esta igualdad se deduce la proposición teniendo en cuenta que cuando $s_2 s_3 > 0$ se puede elegir Θ de modo que β sea de un orden prefijado y en todos los casos de orden ∞ .

§ 5. Aplicaciones.

I. Sean: 1) E el espacio euclídeo R_n de dimensión $n = 1$ o $n = 2$; 2) G el grupo de las semejanzas de R_n ; 3) $\mathcal{S}_0$ un anillo de BOOLE, invariante por G , de conjuntos medibles (L) de R_n con medida finita; 4) μ_0 la restricción a $\mathcal{S}_0$ de la medida de LEBESGUE. *Entonces, existe una prolongación ultracompleta μ de μ_0 compatible con G .*

Por el teorema 17 basta tener presente que G es un grupo resoluble y, por tanto, accesible, y que μ_0 es una extensión compatible con G .

II. Sean: 1) E el espacio euclídeo R_n de dimensión $n \geq 3$; 2) G el grupo mínimo de permutaciones de E que contiene las traslaciones, las rotaciones que dejan invariante un poliedro regular de R_n y las homotecias de R_n ; 3) $\mathcal{S}_0$ un anillo de BOOLE, invariante por G , de conjuntos medibles (L) de R_n con medida finita; 4) μ_0 la restricción a $\mathcal{S}_0$ de la medida de LEBESGUE. *Entonces, existe una prolongación ultracompleta μ de μ_0 compatible con G .*

En efecto, si G_1 es el grupo de las traslaciones de R_n y G_2 es el subgrupo de G engendrado por G_1 y las rotaciones que dejan fijo el poliedro citado, resulta: a) G_1 es un grupo abeliano; b) G_2/G_1 es un grupo finito; c) G/G_2 es un grupo abeliano. Por tanto, G es un grupo accesible. Entonces, por el teorema 17, se deduce la afirmación de arriba.

III. Si E es la superficie esférica $\{x \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$ y G es el grupo de las rotaciones cuyo eje pasa por el origen $(0, 0, 0)$ se tiene $\omega(E, G) = 1$ y, por consiguiente, *no existe ninguna extensión ultracompleta μ con $\mu(E) = 1$ e invariante por G .*

Efectivamente, si g es el subgrupo de G formado por las rotaciones que dejan fijo un punto x_0 de E , g es un grupo abeliano y, por tanto, extensible y entonces, por la proposición 14 y corolario 27, resulta $\omega(E, G) = \omega(G/g) = 1$.

IV. Si E es el plano no euclídeo elíptico y G es el grupo de las congruencias (o movimientos) de E se tiene $\omega(E, G) = 1$ y, por consiguiente, *no existe ninguna extensión ultracompleta μ con $\mu(E) = 1$ e invariante por G .*

Sea G^* el grupo de las rotaciones de R_3 cuyo eje pasa por el origen $(0, 0, 0)$ y g^* el subgrupo de G^* formado por las rotaciones que dejan fijo el eje $X_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 0 \wedge x_2 = 0\}$. Entonces para probar IV basta aplicar de igual forma que en III la proposición 14 y corolario 27 teniendo presente: a) (E, G) es isomorfo a G^*/g^* ; b) g^* es extensible porque si g es el grupo formado por las rotaciones, pertenecientes a g^* , cuyo eje es X_3 resulta que g y g^*/g son grupos abelianos, este último además cíclico de orden 2.

V. Si E es el plano no euclídeo hiperbólico y G es el grupo de las

congruencias (o movimientos) de E se tiene $\omega(E, G) = 1$ y, por consiguiente, *no existe ninguna extensión ultracompleta μ con $\mu(E) = 1$ e invariante por G .*

Mediante la representación de E en el semiplano de POINCARÉ: $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ se puede proceder de manera semejante que en III y IV, aplicando aquí la proposición 12.

VI. Sean: 1) E el plano no euclideo hiperbólico; 2) G el grupo de las congruencias de E ; 3) S_0 la clase de los polígonos de E ; 4) μ_0 el área hiperbólica definida sobre S_0 . Entonces, $\omega_0(G) = 1$ y, por tanto, *no existe ninguna prolongación ultracompleta μ de μ_0 invariante por G .*

Basaremos esta prueba en la representación de E en el semiplano $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ en donde los elementos de G vienen representados por las transformaciones

$$\alpha: \quad \alpha(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $ad - bc = 1$ y a, b, c, d números reales. Entonces, como G es un grupo isomorfo a $SL(2, R)/g$ cuando g está formado por

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$$

se deduce de la proposición 12 que

$$\alpha(t): \quad \alpha(t)(z) = z + t \quad (\operatorname{Im} z > 0)$$

y

$$\beta(t): \quad \beta(t)(z) = -1/z \quad (\operatorname{Im} z > 0)$$

son independientes y además $\alpha(t)$ es de orden ∞ para un conjunto residual T de valores reales de t . Por tanto, si $\lambda_k = \alpha^k \beta \alpha^k$, existe un $t \in T$ para el que

$$\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$$

son independientes y

$$\delta_e(E_0, H_n) < 1/n,$$

siendo E_0 un círculo prefijado de E ortogonal a la recta $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0 \wedge \mid z \mid = 1\}$ de E . Esto último se deduce teniendo presente que mediante la integral superior $\int$ de RIEMANN se expresa

$$\mu_e(S) = K \int_S \frac{dx dy}{y^2}$$

para todo conjunto $S(\subset E)$ cuya clausura en E sea un conjunto compacto, siendo K una constante positiva.

Aplicando ahora el teorema 23, (3.31) y (4.4) resulta

$$\begin{aligned}\omega_0(G) &\geq \overline{\lim}_n \omega(G, H_{n\gamma}) \\ &\geq \lim_n \frac{n-2}{n} = 1\end{aligned}$$

y, por consiguiente, $\omega_0(G) = 1$.

Se puede dar otra demostración de VI utilizando la representación proyectiva de E en el interior de una cónica y la proposición 15.

VII. Sean: 1) E el espacio euclídeo R_n de dimensión $n \geq 3$; 2) G el grupo de las congruencias (o movimientos) de E ; 3) $\mathcal{S}_0$ la clase de los poliedros de E ; 4) μ_0 el volumen definido sobre $\mathcal{S}_0$. Entonces, $\omega_0(G) = 1$ y, por consiguiente, no existe ninguna prolongación ultracompleta μ de μ_0 invariante por G .

Basta aplicar el teorema o el corolario 24 tomando:

1) E_0 la bola definida por

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1.$$

2) G_0 el grupo de las rotaciones que dejan fijos todos los puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $x_k = 0$ para $1 \leq k \leq 3$.

3) X el conjunto de los puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ con $x_1 > 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$.

4) g_0 el grupo de las rotaciones $\alpha \in G$ que dejan fijos todos los puntos de X .

Efectivamente, como G_0 es isomorfo a $SO(3)$, por la proposición 14 G_0 contiene dos elementos independientes α y β , este último de orden ∞ . Entonces, si ponemos $\lambda_k = \beta^k \alpha \beta^k$ y

$$H_n = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\},$$

por (3.32) resulta

$$\begin{aligned}\omega_0(G) &\geq \omega_0(G_0) \geq \overline{\lim}_n \omega(G_0/g_0, H_n) \\ &\geq \lim_n \frac{n-2}{n} = 1\end{aligned}$$

por ser

$$\delta_e(E_0, H_n) \leq \delta_e(E_0, G_0) = 0$$

y

$$\begin{aligned} \omega(G_0/g_0, H_n) &\geq \omega(G_0, H_{n\gamma}) - \omega(G_0, g_{0\gamma}) \\ &= \omega(G_0, H_{n\gamma}) \geq \frac{n-2}{n} \end{aligned}$$

en virtud de (2.39) y (4.4) puesto que, evidentemente, g_0 es un grupo abeliano y, por tanto, extensible y $\omega(G_0, g_{0\gamma}) = 0$.

De manera análoga que VII y como generalización de IV y VI se puede demostrar:

VIII. Sean: 1) E el espacio no euclídeo, elíptico o hiperbólico, de dimensión $n \geq 3$; 2) G el grupo de las congruencias (o movimientos) de E ; 3) $\mathcal{S}_0$ la clase de los poliedros de E ; 4) μ_0 el volumen no euclídeo definido sobre $\mathcal{S}_0$. Entonces, $\omega_0(G) = 1$ y, por consiguiente, no existe ninguna prolongación ultracompleta de μ_0 invariante por G .

IX. Sean: 1) E el espacio afín de dimensión $n \geq 2$; 2) G el grupo de las afinidades equivalentes de E ; 3) $\mathcal{S}_0$ la clase de los poliedros (o polígonos) de E ; 4) μ_0 el volumen (o área) definido sobre $\mathcal{S}_0$. Entonces, $\omega_0(G) = 1$ y, por tanto, no existe ninguna prolongación ultracompleta de μ_0 invariante por G .

Esta afirmación se sigue de VII para $n \geq 3$. El caso $n = 2$ resulta del corolario 24 tomando

1) E_0 el paralelogramo definido por las desigualdades

$$-1 \leq x_1 \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq x_2 \leq 1.$$

2) G_0 el grupo de las afinidades equivalentes que dejan fijo el punto $(0, 0)$.

3) X el conjunto formado por el punto $(1, 0)$.

4) g_0 el grupo de las afinidades $\alpha \in G_0$ que dejan fijo el punto $(1, 0)$.

En efecto, entonces de igual modo que en VI, por la proposición 12, existe una sucesión $\{H_n\}_1^\infty$ de subconjuntos de G_0 tal que

$$\omega(G_0, H_{n\gamma}) \geq \frac{n-2}{n}$$

y

$$\lim_n \delta_e(E_0, H_n) = 0$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned}\omega_0(G) &\geq \omega_0(G_0) \\ &\geq \lim_n \omega(G_0/g_0, H_n) \\ &= \lim_n \omega(G_0, H_{n\gamma}) = 1\end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned}\omega(G_0/g_0, H_n) &\geq \omega(G_0, H_{n\gamma}) - \omega(G_0, g_{0\gamma}) \\ &= \omega(G_0, H_{n\gamma})\end{aligned}$$

por ser g_0 isomorfo al grupo de las matrices reales

$$\begin{pmatrix} 1, & a \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

que, evidentemente, es extensible.

§ 6. El problema de la medida.

Una *medida* es una función real de conjunto m , finita o infinita, definida sobre una clase $\mathfrak{S}$ de partes de un conjunto E y que satisface:

1. $\mathfrak{S}$ es un σ -anillo de BOOLE de subconjuntos de E ⁽²¹⁾.
2. $m \geq 0$.
3. Si $\{S_n\}_{1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos, pertenecientes a $\mathfrak{S}$, se tiene

$$(6.1) \quad m\left(\bigcup_1^{\infty} S_n\right) = \sum_1^{\infty} m(S_n).$$

Por tanto, la restricción de una medida a la clase $\mathfrak{S}_0$ de los conjuntos $S(\in \mathfrak{S})$ con medida finita es una extensión μ_0 .

De manera análoga que en § 1, si m_0 es una medida definida sobre una clase $\mathfrak{S}_0$ de partes de E , se llama *prolongación ultracompleta* de m_0 y se designa por $\overline{m}_0$ a toda medida m , definida sobre la clase $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S}}_0$ de las partes

⁽²¹⁾ Un anillo de BOOLE $\mathfrak{S}$ se dice σ -anillo si toda reunión numerable de conjuntos pertenecientes a $\mathfrak{S}$ pertenece también a $\mathfrak{S}$.

de los conjuntos $S_0 \in \mathfrak{S}_0$, que sea una prolongación de m_0 . Si $\overline{m_0} = m_0$ se dice que m_0 es una *medida ultracompleta*. Evidentemente, esto equivale a que $\overline{\mathfrak{S}_0} = \mathfrak{S}_0$. Por consiguiente, toda prolongación ultracompleta m de m_0 es una medida ultracompleta.

Si G es un grupo de permutaciones de un conjunto E , se dice que una medida m , definida sobre un σ -anillo de BOOLE $\mathfrak{S}$ de subconjuntos de E , es *compatible* con G cuando:

1. $\mathfrak{S}$ es invariante por G , o sea, $\alpha S \in \mathfrak{S}$ siempre que $\alpha \in G$ y $S \in \mathfrak{S}$.
2. Existe una función real k definida sobre G tal que

$$(6.2) \quad m(\alpha S) = k(\alpha)m(S)$$

para todo $\alpha \in G$ y $S \in \mathfrak{S}$

En el caso que $m \neq 0$ esta función queda unívocamente determinada por m y se verifica

$$(6.3) \quad k > 0$$

y

$$(6.4) \quad k(\alpha\beta) = k(\alpha)k(\beta)$$

para todo par (α, β) de elementos de G .

Cuando se quiera precisar más se dirá, de forma análoga que en § 1, que m es *k-compatible* con G . En particular, si $k = 1$ se dirá que m es *invariante* por G .

Podemos formular ahora de manera general el llamado *problema de la medida*:

PROBLEMA 3. - *Dado un grupo de permutaciones G de un conjunto E y una medida $m_0 (\neq 0)$, definida sobre una clase $\mathfrak{S}_0$ de subconjuntos de E y compatible con G , averiguar si existe una prolongación ultracompleta m de m_0 compatible también con G .*

Es obvio que si m_0 es finita y la contestación al problema 1 para $\mu_0 = m_0$ es negativa se sigue la misma conclusión para el problema 3.

En relación con este problema conviene tener presente:

TEOREMA 27. - *Con las notaciones empleadas en el problema 3, si G es finito y hay una prolongación ultracompleta m_1 de m_0 , existe otra m que es compatible con G .*

DEMOSTRACIÓN. - En efecto, si $G = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, se deduce inmediatamente que

$$m: \quad m(S) = \sum_{k=1}^n \frac{m_1(\alpha_k S)}{k(\alpha_k)} \quad (S \in \mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{S}}_0)$$

es una prolongación ultracompleta de m_0 compatible con G .

TEOREMA 28. - *Si G es un grupo infinito de permutaciones de E , tales que exceptuado el elemento unidad ε carecen de puntos fijos, no existe ninguna medida ultracompleta m con $m(E) = 1$ e invariante por G .*

DEMOSTRACIÓN. - Como todo grupo infinito contiene un subgrupo numerable, podemos suponer que G es numerable: $G = \{\alpha_n \mid n = 1, 2, \dots\}$. Entonces, por el axioma de la elección, existe un conjunto $X \subset E$ que contiene un elemento y uno sólo de cada conjunto Gx con $x \in E$ y, por tanto, $\{E_n\}_{n=1}^\infty \equiv \{\alpha_n X\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de conjuntos disjuntos cuya reunión es E .

De esto resulta, si m es una medida ultracompleta con $m(E) \leq 1$ e invariante por G , que

$$\sum_1^\infty m(E_n) = m(E) \leq 1,$$

$$m(E_n) = m(E_1)$$

y

$$m(E_n) = 0$$

para todo $n \geq 1$ y, por consiguiente, $m(E) = 0$.

OBSERVACIÓN 8. - *Si m es una medida ultracompleta con $m(E) = 1$ y el grupo G de permutaciones de E contiene un elemento α de orden ∞ resulta $\omega(m, G) = 1$. En efecto, si se procede de manera semejante que en el teorema 28 poniendo $E_n = \alpha^n X$ y $A_n = \bigcup_{k \leq n} E_k$ para cada entero n , se deduce*

$$\sum_k m(E_k) = m(E) = 1$$

y

$$m(A_n) = \sum_{k \leq n} m(E_k)$$

y, por tanto,

$$\omega(m, G) \geq m(A_n) - m(\alpha^{-p} A_n)$$

$$> 1 - \rho$$

cualquiera que sea el número $\rho > 0$, si n y p son enteros positivos suficientemente grandes.

COROLARIO 29. - Si E es una circunferencia y G el grupo de rotaciones sobre ella, no existe ninguna medida ultracompleta m con $m(E) = 1$ e invariante por G

COROLARIO 30. - Si G es un grupo infinito, no existe ninguna medida ultracompleta m con $m(G) = 1$ e invariante por el grupo G_γ (o G_δ) de las traslaciones a la izquierda (derecha) de G .

TEOREMA 29. - Sea g un subgrupo finito de un grupo infinito G . Entonces, si E es el espacio homogéneo G/g , no existe ninguna medida ultracompleta m con $m(E) = 1$ e invariante por G . Además si G contiene un elemento α de orden ∞ se tiene $\omega(m, G) = 1$.

DEMOSTRACIÓN. - Sea m_1 una medida ultracompleta con $m_1(G) = 1$ e invariante por el grupo g_γ de las traslaciones a la izquierda γ_α de G con $\alpha \in g$. Si n es el número de elementos de g , para construir m_1 basta tomar $nm_1(S)$ igual al número de elementos de $S \cap g$ para cada conjunto $S \subset G$. Entonces, si m es una medida ultracompleta con $m(E) = 1$ e invariante por G , se ve fácilmente que

$$m^*: \quad m^*(S) = \int_E f(\alpha \cdot g; S) dm \quad (S \subset G),$$

donde $f(\alpha \cdot g; S) = m_1(\alpha^{-1}S)$, es una medida ultracompleta con $m^*(G) = 1$ e invariante por el grupo G_γ de las traslaciones a la izquierda de G , lo cual está en evidente contradicción con el corolario 30.

Igualmente, si G contiene un elemento α de orden ∞ y m es una medida ultracompleta con $m(E) = 1$, por la observación 8 resulta

$$\omega(m, G) \geq \omega(m^*, G_\gamma) = 1$$

y, por consiguiente, $\omega(m, G) = 1$.

TEOREMA 30. - Sean: 1) E_0 un subconjunto de un grupo G ; 2) g un subgrupo normal de G tal que para cada $\alpha \in g - \{\epsilon\}$ se tiene $\alpha E_0 \cap E_0 = \emptyset$ y para todo $\alpha \in G$ se puede encontrar un subconjunto contable $\{\gamma_n | n = 1, 2, \dots\}$ de g de forma que $\alpha E_0 \subset \bigcup_n \gamma_n E_0$. Entonces, si G/g es un grupo infinito y m es una medida ultracompleta invariante, por G con $m(E_0) < +\infty$, resulta $m(E_0) = 0$ y, por tanto, $m(G) = 0$ y $m = 0$ cuando g sea contable.

DEMOSTRACIÓN. - Basta proceder de igual modo que en el teorema 20.

COROLARIO 31. - Si E es el espacio euclídeo R_n de dimensión $n \geq 1$ y G el grupo de las traslaciones de E , no existe ninguna medida ultracompleta m , invariante por G con $0 < m(Q) < +\infty$ cualquiera que sea el cubo Q de E .

BIBLIOGRAFIA

- [1] BANACH S., *Sur le problème de la mesure*. Fund. Math., **4** (1923) 7-33.
 - [2] —, *Théorie des opérations linéaires* (Monografie Matematyczne. TomoI) Warszawa, 1932.
 - [3] BANACH S. et A. TARSKI, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*. Fund. Math., **6** (1924) 244-277.
 - [4] BOREL E., *Leçons sur la Théorie des fonctions*. Paris, Gauthier-Villars, 1914, págs. 255-258.
 - [5] HAUSDORFF F., *Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen*. Math. Ann., **75** (1914) 428-433.
 - [6] HAUSDORFF F., *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig, 1914, págs. 401 y 461.
 - [7] NEUMANN J. v., *Zur allgemeinen Theorie der Massen*. Fund. Math., **13** (1929) 71-116.
 - [8] RODRIGUEZ-SALINAS B., *Una generalización de grupo resoluble*. Se publicará en Rev. Mat. Hisp.-Amer.
 - [9] —, *Generalización sobre módulos del teorema de Hahn-Banach y sus aplicaciones*. Collect. Math., **14** (1962) 105-151.
 - [10] SCHAERF H.M., *On the existence of invariant measures*. Bull. Amer. Math. Soc., **67** (1961) 504-506.
 - [11] SPECHT W., *Zur Theorie der messbaren Gruppen*. Math. Z., **74** (1960) 325-366.
 - [12] VITALI G., *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*. Bologna 1905.
-